Matyáš Lerch

Doplněk k nauce o řadách Fourierových

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 9 (1900), č. 7, 1–15

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501535

Doplněk k nauce o řadách Fourierových.

Sdílí

M. Lerch.

Předloženo dne 20. prosince 1899.

Jedním z nejznamenitějších výzkumů theorie funkcí realné proměnné jest bez odporu věta Fourierem pronesená a Lejeune-Dirichletem dokázaná, že každou funkci $f(x)$ realné proměnné x, která v intervallu $(0 \ldots 1)$ má jen konečný počet obratů (maxima a minima) a jest v něm konečnou a nanejvýš s výjimkou konečného počtu míst spojitou, lze vyjádřiti řadou trigonometrickou

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos 2 x \pi + b_1 \sin 2 x \pi) + (a_2 \cos 4 x \pi + b_2 \sin 4 x \pi) + (a_3 \cos 6 x \pi + b_3 \sin 6 x \pi) + \ldots,$$

níž součinitelé jsou dáni rovnicemi

$$a_\nu = 2 \int_0^1 f(x) \cos 2 \nu x \pi \, dx, \quad b_\nu = 2 \int_0^1 f(x) \sin 2 \nu x \pi \, dx;$$

řada ta za podmínek uvedených konverguje v celém intervallu i na mezích jeho, a součet její se v bodech x, ve kterých funkce $f(x)$ je spojitou, rovná $f(x)$, a v bodech, kde $f(x)$ je přetržitou, jest součet řady roven výrazu

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

konečně na obou koncích $x = 0$ a $x = 1$ jest hodnota řady stejná a zní

$$\frac{f(0) + f(1)}{2}.$$

Dirichletovy podmínky byly postupem času pozměněny na prospěch větší obecnosti věty;*) zejména vytčeno budiž, že ze známých studií Poissonových**) vyplývá, že při jakékoli funkci, schopné integrace, $f(x)$, řada Fourierova bude se rovnati $f(x)$, je-li funkce tato na příslušném místě x spojitou a je-li řada konvergentní na tomto místě. Výsledky Poissonovy, uveřejněné šest roků před Dirichletovými, mohou tyto úplně nahraditi, pokud jde o rozvoje jednotlivých funkcí specialných, i jest dokonce applikace věty Poissonovy pohodlnější vzhledem k nepatrnému počtu podmínek, jež se v ní vyskytují.

Řadu Fourierovu považovati lze za součet dvou řad

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos 2 x \pi + a_2 \cos 4 x \pi + a_3 \cos 6 x \pi + \ldots,$$
$$\psi(x) = b_1 \sin 2 x \pi + b_2 \sin 4 x \pi + b_3 \sin 6 x \pi + \ldots,$$

ovšem pouze formalně; správné to bude teprvé po dokázané konvergenci jejich. Aby tyto řady konvergovaly, je nutno i dostačitelno, aby konvergovaly řady Fourierovy pro x a pro $1 - x$; pak se obdrží jako hodnota veličiny

$$\frac{f(x) + f(1-x)}{2}$$

řada kosinusová $\varphi(x)$, a jako hodnota veličiny

$$\frac{f(x) - f(1-x)}{2}$$

řada sinusová $\psi(x)$.

Zavedou-li se ještě záporné přípony u součinitelů a_ν a b_ν, a sice

$$a_{-\nu} = a_\nu, \quad b_{-\nu} = -b_\nu, \quad b_0 = 0,$$

bude lze řadu Fourierovu psáti ve tvaru

$$f(x) = \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} (a_\nu \cos 2 \nu x \pi + b_\nu \sin 2 \nu x \pi),$$

a dosadíme-li sem

$$\cos 2 \nu x \pi = \frac{e^{2 \nu x \pi i} + e^{-2 \nu x \pi i}}{2}, \quad \sin 2 \nu x \pi = \frac{e^{2 \nu x \pi i} - e^{-2 \nu x \pi i}}{2 i},$$

obdržíme

*) Literatura předmětu a zároveň jakési resumé dosavadních výsledků obsažena jest v cenné práci T. Brodénově »Ueber das Dirichlet'sche Integral« (Math. Ann. sv. 52).

**) Journal de l'Ecole Polytechnique, t. 12, cahier 19, p. 404; 1823.

$$a_\nu \cos 2\nu x\pi + b_\nu \sin 2\nu x\pi = \frac{1}{2}(a_\nu - b_\nu i)\, e^{2\nu x\pi i}$$
$$+ \frac{1}{2}(a_{-\nu} - b_{-\nu} i)\, e^{-2\nu x\pi i}$$

a tedy

(1) $$f(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{2\nu x\pi i},$$

při čemž znamenáno

$$c_\nu = \frac{a_\nu - b_\nu i}{2}.$$

Veličina tato má však hodnotu

$$c_\nu = \int_0^1 f(x)(\cos 2\nu x\pi - i \sin 2\nu x\pi)\, dx$$

čili

(2) $$c_\nu = \int_0^1 f(z)\, e^{-2\nu z\pi i}\, dz.$$

Rovnice (1) a (2) vespolek tvoří pomyslný tvar řady Fourierovy. Mnoho výrazů v analysi se vyskytujících má podobu rovnice (1), t. j.

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} A_\nu,$$

i lze je někdy psáti ve tvaru nekonečné řady

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu;$$

okolnost ta však nenastane vždycky, jak nás o tom poučuje limita

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} \frac{1}{x+\nu},$$

jejíž hodnota jest $\pi \cot x\pi$, a pro kterou příslušná řada

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+\nu}$$

jest divergentní.

Naším úkolem jest vyšetřiti, za jakých podmínek bude lze rovnici (1) psáti ve tvaru

$$(3) \qquad f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{2\nu x\pi i}, \quad (0 < x < 1),$$

při čemž součinitelé c_ν jsou dáni vzorcem (2). Jinými slovy, bude nám vyšetřiti podmínku, za které obě řady

$$A = \sum_{0}^{\infty} c_\nu e^{2\nu x\pi i}, \quad B = \sum_{-\infty}^{-1} c_\nu e^{2\nu x\pi i}$$

konvergují. Poněvadž veličiny c_ν a $c_{-\nu}$ jsou sdruženy, sestávají řady $A - c_0$ a B ze členů komplexně sdružených, a konvergují neb divergují současně, takže stačí studovati pouze řadu A.

Tato sestává z části realné

$$\frac{1}{2} \sum_{0}^{\infty} (a_\nu \cos 2\nu x\pi + b_\nu \sin 2\nu x\pi),$$

která až na stálou $\frac{1}{4} a_0$ jest polovicí řady Fourierovy, dále z části pomyslné

$$(4) \qquad \frac{i}{2} \sum_{1}^{\infty} (a_\nu \sin 2\nu x\pi - b_\nu \cos 2\nu x\pi)$$

(která se s pomyslnou částí řady B ruší, a) která ukazuje, že řada (3) jest útvar v podstatě nový, neboť řada (4) jest útvar problému Fourierovu cizí, a o její konvergenci studie dosavadní nedávají žádné odpovědi. Jak z úvah následujících vyplyne, dlužno a priori připustiti možnosť případu, v němž řada Fourierova konverguje, a řada (4) nikoli; tím není vyloučeno, jak při nynějším stupni znalosti funkcí přirozeno, že ve všech nám známých Fourierových řadách výraz (4) jest vždy též konvergentním; právě naopak bylo by velikým pokrokem v této partii theorie funkcí, kdyby se skutečně podařilo sestrojiti funkci, pro niž by řada (1) konvergovala a řada (4) byla divergentní.

Znamenajíce jako výše

$$(2) \qquad c_\nu = \int_0^1 f(z)\, e^{-2\nu z\pi i}\, dz,$$

utvořme součet

$$(5) \qquad S_n = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu e^{2\nu x\pi i},$$

v němž značí x veličinu realnou obsaženou mezi nulou a jednotkou. Nahradíme-li v něm c_ν integrálem (2), obdržíme nejprvé

$$S_n = \int_0^1 f(z)\, dz \sum_{\nu=0}^{n} e^{2\nu(x-z)\pi i}$$

a odtud konečně

$$(5^a) \qquad S_n = \frac{1}{2}\int_0^1 f(z)\, \frac{\sin(2n+1)(z-x)\pi + \sin(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\, dz$$

$$+ \frac{i}{2}\int_0^1 f(z)\, \frac{\cos(2n+1)(z-x)\pi - \cos(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\, dz.$$

Tento výraz při označení

$$(6) \qquad \begin{aligned} T &= \int_0^1 f(z)\, \frac{\sin w(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\, dz, \\ U &= \int_0^1 f(z)\, \frac{\cos w(z-x)\pi - \cos(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\, dz \end{aligned}$$

obdrží tvar

$$(5^b) \qquad S_n = \frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{2} T + \frac{i}{2} U, \ (w = 2n+1),$$

a tedy stačí uvažovati veličiny T a U při nekonečně rostoucím w.

Substitucí $x+z$ za z lze integrály (6) uvésti na tvar

$$(6^a) \quad T = \int_{-x}^{1-x} f(x+z)\frac{\sin wz\pi}{\sin z\pi}\, dz, \quad U = \int_{-x}^{1-x} f(x+z)\, \frac{\cos wz\pi - \cos z\pi}{\sin z\pi}\, dz.$$

Znamenejme nyní

$$(7) \qquad f(x+z) - f(x) = \varphi(z),$$

a nahraďme v rovnicích (6ª) funkci $f(x+z)$ výrazem $f(x) + \varphi(z)$; znamenáme-li pak

$$(8) \quad T_1 = \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{\sin wz\pi}{\sin z\pi}\, dz, \quad U_1 = \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\, \frac{\cos wz\pi - \cos z\pi}{\sin z\pi}\, dz,$$

budou výsledky zníti

$$T = T_1 + f(x)\int_{-x}^{1-x} \frac{\sin wz\pi}{\sin z\pi}\, dz,$$

$$U = U_1 + f(x) \int_{-x}^{1-x} \frac{\cos wz\pi - \cos z\pi}{\sin z\pi} \, dz.$$

Abychom integrály na pravých stranách přicházející vyčíslili, applikujme úvahy předcházející na zvláštní případ $f(z) = 1$.

V tom případě máme

$$c_0 = 1, \; c_\nu = 0 \; (\nu \gtrless 0),$$

a součet S_n bude míti hodnotu jedna, takže z rovnice (5^b) obdržíme

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} T + \frac{i}{2} U, \text{ t. j. } T = 1, \; U = 0,$$

a užijeme-li rovnic (6^a), vyjde konečně

$$\int_{-x}^{1-x} \frac{\sin wz\pi}{\sin z\pi} \, dz = 1, \quad \int_{-x}^{1-x} \frac{\cos wz\pi - \cos z\pi}{\sin z\pi} \, dz = 0,$$

pokud ovšem w má tvar $2n+1$. Následkem těchto vzorců poslední naše výsledky obdrží tvar

(9) $$T = T_1 + f(x), \; U = U_1.$$

Bude tedy naším úkolem vyšetřiti, zda existují limity

$$\lim_{w=\infty} T_1, \qquad \lim_{w=\infty} U_1;$$

omezíme se na případ, kdy funkce $f(z)$ je spojitá na uvažovaném místě x; v tomto bude též funkce

$$\varphi(z) = f(x+z) - f(x)$$

spojitou na místě $z = 0$ a bude $\varphi(0) = 0$.

Dále užijeme okolnosti, že funkce

$$\frac{1}{\sin z\pi} - \frac{1}{z\pi} = \mathfrak{P}(z)$$

jest veličina uvnitř oboru $(-1 \ldots . 1)$ konečná a spojitá, i udělíme našim integrálům T_1 a U_1 tvar:

$$(10^a)\qquad T_1=\int_{-x}^{1-x}\varphi(z)\,\frac{\sin wz\pi}{z\pi}\,dz+\int_{-x}^{1-x}\varphi(z)\,\mathfrak{P}(z)\sin wz\pi\,dz,$$

dále

$$(10^b)\qquad \begin{aligned} U_1=&\int_{-x}^{1-x}\varphi(z)\,\frac{\cos wz\pi-1}{z\pi}+\int_{-x}^{1-x}\varphi(z)\,\mathfrak{P}(z)\cos wz\pi\,dz\\ &+\int_{-x}^{1-x}\varphi(z)\left(\frac{1}{z\pi}-\cot z\pi\right)dz; \end{aligned}$$

při tomto tvaru vzorců všecka obtíž problému spočívá na prvých členech pravých stran. Poněvadž patrně

$$(11^a)\qquad \begin{aligned} &\int_{-x}^{1-x}\varphi(z)\,\frac{\sin wz\pi}{z\pi}\,dz\\ =&\int_0^{1-x}\varphi(z)\,\frac{\sin wz\pi}{z\pi}\,dz+\int_0^{x}\varphi(-z)\,\frac{\sin wz\pi}{z\pi}\,dz, \end{aligned}$$

a podobně

$$(11^b)\qquad \begin{aligned} &\int_{-x}^{1-x}\varphi(z)\,\frac{\cos wz\pi-1}{z\pi}\,dz\\ =&\int_0^{1-x}\varphi(z)\,\frac{\cos wz\pi-1}{z\pi}\,dz-\int_0^{x}\varphi(-z)\,\frac{\cos wz\pi-1}{z\pi}\,dz, \end{aligned}$$

převeden problém na stanovení krajních hodnot výrazů

$$12)\qquad X=\int_0^{a}\varphi(z)\,\frac{\sin wz\pi}{z}\,dz,\quad Y=\int_0^{a}\varphi(z)\,\frac{\cos wz\pi-1}{z}\,dz,$$

příslušných k nekonečně rostoucím hodnotám w, při čemž a má jednu z hodnot x a $1-x$, a tedy jest $0<a<1$. Při tom netřeba, aby w bylo lichým číslem celistvým, jak ihned se ukáže, a budeme proto voliti w zcela obecné.

Zaveďme v integrálech (12) $\frac{z}{w}$ na místě z, i obdržíme

$$(12^*)\qquad X=\int_0^{aw}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\sin z\pi}{z}\,dz,\quad Y=\int_0^{aw}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\cos z\pi-1}{z}\,dz.$$

O funkci $\varphi(z)$ chceme předpokládati, že jest v celém oboru $(0 \ldots . a)$ konečnou; že je též schopna integrace, bylo předpokládáno mlčky, neb jinak by integrály naše neexistovaly.

Buď nyní n celistvé číslo závislé na w tím způsobem, že rozdíl $aw - n - \frac{1}{2}$ zůstává kladným a konečným pro nekonečně rostoucí w; pak budou patrně integrály

$$\int_{n}^{aw} \varphi\left(\frac{z}{w}\right) \frac{\sin z\pi}{z} dz, \quad \int_{n+\frac{1}{2}}^{aw} \varphi\left(\frac{z}{w}\right) \frac{\cos z\pi - 1}{z} dz$$

absolutně menší než jistý stálý násobek horní meze veličiny $\varphi(z)$ dělené na w, a tedy bude

$$\text{(a)} \qquad \lim_{w=\infty} \int_{n}^{aw} \varphi\left(\frac{z}{w}\right) \frac{\sin z\pi}{z} dz = 0, \quad \lim_{w=\infty} \int_{n+\frac{1}{2}}^{aw} \varphi\left(\frac{z}{w}\right) \frac{\cos z\pi - 1}{z} dz = 0.$$

Znamenejme dále literou m celistvé kladné číslo konečné, na w nezávislé; pak budou integrály

$$\int_{0}^{m} \varphi\left(\frac{z}{w}\right) \frac{\sin z\pi}{z} dz, \quad \int_{0}^{m+\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{z}{w}\right) \frac{\cos z\pi - 1}{z} dz$$

absolutně menší než jistá veličina stálá, násobená horní mezí veličiny $\varphi\left(\frac{z}{w}\right)$. Poněvadž ale $\frac{z}{w}$ v intervallu $\left(0 \ldots m + \frac{1}{2}\right)$ jest menší než $\frac{m + \frac{1}{2}}{w}$, bude tato veličina $\varphi \frac{z}{w}$ a zároveň její mez tak malá, jak libo, je-li w dosti veliké, a následovně opět

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} &\lim_{w=\infty} \int_{0}^{m} \varphi\left(\frac{z}{w}\right) \frac{\sin z\pi}{z} dz = 0, \\ &\lim_{w=\infty} \int_{0}^{m+\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{z}{w}\right) \frac{\cos z\pi - 1}{z} dz = 0. \end{aligned}$$

Z rovnic (a) a (b) vychází, že integrály (12) pro $w = \infty$ stejné meze mají jako integrály

$$(13) \qquad X_1 = \int_m^n \varphi\left(\frac{z}{w}\right) \frac{\sin z\pi}{z}\, dz, \quad Y_1 = \int_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{z}{w}\right) \frac{\cos z\pi - 1}{z}\, dz,$$

a poněvadž u druhého z těchto integrálů dolní mez integrační není nulla, možno jej rozštěpiti ve dva

$$(13^a) \qquad Y_1 = Z - \mathfrak{J},$$

kde

$$(13^b) \qquad Z = \int_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{z}{w}\right) \frac{\cos z\pi}{z}\, dz,$$

a dále

$$(13^c) \qquad \mathfrak{J} = \int_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{z}{w}\right) \frac{dz}{z}.$$

Znamená-li nám r jakoukoli kladnou konstantu, bude se integrál $\mathfrak{J}$ lišiti od následujícího

$$(14) \qquad \int_r^{aw} \varphi\left(\frac{z}{w}\right) \frac{dz}{z} = \int_{\frac{r}{w}}^{a} \varphi(z) \frac{dz}{z} = \mathfrak{J}_1$$

o veličinu zároveň s $\frac{1}{w}$ nekonečně malou; následkem toho bude dle (13^a)

$$(15) \qquad \lim Y_1 = \lim (Z - \mathfrak{J}_1).$$

Integrál X_1 rozdělme nyní dle schematu

$$\int_m^n = \sum_{\nu=m}^{n-1} \int_\nu^{\nu+1}$$

a v obecném členu položme $z + \nu$ za z; tak obdržíme

$$X_1 = \int_0^1 \sin z\pi\, dz \sum_{\nu\ m}^{n-1} (-1)^\nu \frac{\varphi\left(\frac{z+\nu}{w}\right)}{z+\nu},$$

kterýžto výsledek lze psáti

(16^a)

$$X_1 = \int_0^1 \sin z\pi\, dz \left\{ \frac{1}{w} \sum_{\frac{m}{2} \leq \mu < \frac{n}{2}} \frac{\varphi\left(\frac{z+2\mu}{w}\right)}{\frac{z+2\mu}{w}} - \frac{1}{w} \sum_{\frac{m}{2} < \mu \leq \frac{n}{2}} \frac{\varphi\left(\frac{z+2\mu-1}{w}\right)}{\frac{z+2\mu-1}{w}} \right\}.$$

Udělíme-li nyní integrálu Z tvar

$$Z = -\int_m^n \varphi\left(\frac{z+\frac{1}{2}}{w}\right) \frac{\sin z\pi}{z+\frac{1}{2}}\, dz,$$

možno s ním podobně naložiti jako s integrálem X_1, čímž obdržíme

(16^b)

$$Z = -\int_0^1 \sin z\pi\, dz \left\{ \frac{1}{w} \sum_{\frac{m}{2} \leq \mu < \frac{n}{2}} \frac{\varphi\left(\frac{z+2\mu+\frac{1}{2}}{w}\right)}{\frac{z+2\mu+\frac{1}{2}}{w}} - \frac{1}{w} \sum_{\frac{m}{2} < \mu \leq \frac{n}{2}} \frac{\varphi\left(\frac{z+2\mu-\frac{1}{2}}{w}\right)}{\frac{z+2\mu-\frac{1}{2}}{w}} \right\}.$$

Předpokládá-li se, že funkce $\frac{\varphi(t)}{t}$ jest schopna integrace vycházející z místa $t = 0$, t. j. existuje-li integrál

$$\int_0^b \frac{\varphi(t)}{t} \cdot dt,$$

bude každý ze čtyř výrazů, jež přicházejí v závorkách $\{\}$ na pravé straně rovnic (16^a) a (16^b), na př.

$$\frac{1}{w} \sum_{\frac{m}{2} < \mu < \frac{n}{2}} \frac{\varphi\left(\frac{z+2\mu}{w}\right)}{\frac{z+2\mu}{w}}$$

míti za krajní hodnotu integrál

$$\frac{1}{2} \int_0^a \frac{\varphi(t)}{t}\, dt,$$

a pravé strany rovnic (16^a) a (16^b) budou pro veliká w velmi malé veličiny. Následovně bude

$$\lim_{w=\infty} X_1 = 0, \quad \lim_{w=\infty} Z = 0,$$

a z rovnice (15) vychází dle toho

$$\lim_{w=\infty} Y_1 = -\lim_{w=\infty} \int_{\frac{r}{w}}^{a} \varphi(z) \frac{dz}{z} = \int_0^a \varphi(z) \frac{dz}{z},$$

t. j. vrátíme-li se k integrálům (12)

$$\lim_{w=\infty} X = 0, \quad \lim_{w=\infty} Y = -\int_0^a \varphi(z) \frac{dz}{z}. \tag{17}$$

Rovnice první může býti splněna též pro funkce, pro které integrál

$$\int_0 \varphi(t) \frac{dt}{t}$$

neexistuje, kdežto rovnice druhá, funkce Y se týkající, existenci tohoto integrálu vyžaduje, a tedy konvergenci jeho daleko silnější podmínky ukládá než konvergence integrálu prvního. Z rovnice (17) snadno nyní stanovíme krajní hodnoty veličin (11^a) a (11^b), a sice vyjde

$$\lim_{w=\infty} \int_{-x}^{1-x} \varphi(z) \frac{\sin wz\pi}{z\pi} dz = 0, \text{ dále}$$

$$\lim_{w=\infty} \int_{-x}^{1-x} \varphi(z) \frac{\cos wz\pi - 1}{z\pi} dz \tag{18a}$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{1-x} \varphi(z) \frac{dz}{z} + \frac{1}{\pi} \int_0^{x} \varphi(-z) \frac{dz}{z}$$

čili

$$\lim_{w=\infty} \int_{-x}^{1-x} \varphi(z) \frac{\cos wz\pi - 1}{z\pi} = -\int_{-x}^{1-x} \varphi(z) \frac{dz}{z\pi}. \tag{18b}$$

Poněvadž funkce $\varphi(z)\,\mathfrak{P}(z)$ je schopná integrace, plyne z resultátů našich, že

$$\lim_{w=\infty} \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\,\mathfrak{P}(z) \sin wz\pi\, dz = 0,$$

$$\lim_{w=\infty} \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\,\mathfrak{P}(z) \cos wz\pi\, dz = 0,$$

následkem čehož rovnice (10^a) a (10^b) poskytnou

VII.

$$\lim_{w=\infty} T_1 = 0,$$

$$\lim_{w=\infty} U_1 = -\int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{dz}{z\pi} + \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\left(\frac{1}{z\pi} - \cot z\pi\right) z\pi,$$

čili po redukci

$$\lim_{w=\infty} U_1 = -\int_{x}^{1-x} \varphi(z) \cot z\pi \, dz;$$

z rovnic (9) plyne dále, užije-li se posledních výsledků,

$$\lim_{w=\infty} T = f(x), \tag{19}$$

$$\lim_{w=\infty} U = -\int_0^1 [f(z) - f(x)] \cot(z-x)\pi \, dz. \tag{20}$$

Z rovnice (5^b) máme nyní důsledek, že krajní hodnota

$$\lim_{n=\infty} S_n$$

existuje a má hodnotu

$$\frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{2} f(x) - \frac{i}{2}\int_0^1 [f(z) - f(x)] \cot(z-x)\pi \, dz,$$

je-li funkce $f(z)$ na místě $z = x$ spojitou, na ostatních místech aspoň konečnou a integrace schopnou, a existuje-li mimo to integrál

$$\int_0^1 \frac{f(z) - f(x)}{z-x} \, dz.$$

Můžeme tudíž pronésti následující větu:

Je-li funkce $f(z)$ na oboru $(0 \ldots 1)$ konečná a schopná integrace, a existují-li uvnitř tohoto oboru hodnoty $z = x$, na nichž je funkce spojitou tím způsobem, že integrál

$$\int_0^1 \frac{f(z) - f(x)}{z-x} \, dz$$

existuje, bude řada

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{2\nu x\pi i}$$

pomocí součinitelů

$$c_\nu = \int_0^1 f(z)\, e^{-2\nu z\pi i}\, dz$$

utvořená pro řečené hodnoty x konvergentní a bude míti za součet veličinu $f(x)$. Její částka

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{2\nu x\pi i}$$

má pak hodnotu

$$\frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{2} f(x) - \frac{i}{2} \int_0^1 [f(z) - f(x)] \cot (z - x)\pi\, dz.$$

Věta bude platit též pro $x = 0$ neb pro $x = 1$, je-li $f(0) = f(1)$, a existují-li integrály

$$\int_0 \frac{f(z) - f(0)}{z}\, dz, \quad \int_0 \frac{f(1-z) - f(0)}{z}\, dz.$$

Vraťme se nyní k rovnicím (6[a]), předpokládajíce, že funkce $f(z)$ není spojitou na místě x, nýbrž že známé symboly Dirichletovy

$$f(x+0) \text{ a } f(x-0)$$

sice definují veličiny určité, ale vespolek různé, i zabývejme se toliko veličinou U. Pro tuto obdržíme rozkladem

$$U = \int_0^{1-x} f(x+z)\, \frac{\cos wz\pi - \cos z\pi}{\sin z\pi}\, dz$$
$$- \int_0^x f(x-z)\, \frac{\cos wz\pi - \cos z\pi}{\sin z\pi}\, dz,$$

i bude nám třeba užiti dvou funkcí

$$\varphi_1(z) = f(x+z) - f(x+0),$$
$$\varphi_2(z) = f(x-z) - f(x-0),$$

jež obě jsou na místě $z = 0$ spojité a mají v něm hodnotu nullu. Obdržíme tak

$$U = \int_0^{1-x} \varphi_1(z) \frac{\cos w z \pi - \cos z \pi}{\sin z \pi} dz$$

$$- \int_0^{x} \varphi_2(z) \frac{\cos w z \pi - \cos z \pi}{\sin z \pi} dz$$

$$+ f(x+0) \int_0^{1-x} \frac{\cos w z \pi - \cos z \pi}{\sin z \pi} dz$$

$$- f(x-0) \int_0^{x} \frac{\cos w z \pi - \cos z \pi}{\sin z \pi} dz.$$

Blíží-li se první dva integrály s nekonečně rostoucím w hodnotám konečným, neplatí to o dvou integrálech zbývajících; neboť z identity ($w = 2n + 1$)

$$\frac{\cos w z \pi - \cos z \pi}{\sin z \pi} = -2 \sum_{\nu = 1}^{n} \sin 2 \nu z \pi$$

plyne

$$\int_0^{a} \frac{\cos w z \pi - \cos z \pi}{\sin z \pi} dz = \sum_{\nu = 1}^{n} \frac{\cos 2 \nu a \pi}{\nu \pi} - \sum_{\nu = 1}^{n} \frac{1}{\nu \pi},$$

a tedy bude

$$f(x+0) \int_0^{1-x} \frac{\cos w z \pi - \cos z \pi}{\sin z \pi} dz$$

$$- f(x-0) \int_0^{x} \frac{\cos w z \pi - \cos z \pi}{\sin z \pi} dz$$

$$= - [f(x+0) - f(x-0)] \sum_{\nu = 1}^{n} \frac{1}{\nu \pi},$$

$$+ [f(x+0) - f(x-0)] \sum_{\nu = 1}^{n} \frac{\cos 2 \nu x \pi}{\nu \pi},$$

kterážto veličina s rostoucím n vzdaluje se do nekonečna s určitým znamením.

Proto zde o existenci limity veličiny V nemůže býti řeči, a řada

(3)
$$\sum_{\nu = -\infty}^{\infty} c_\nu e^{2 \nu x \pi i}$$

bude divergentní na všech místech, na nichž $f(x)$ je přetržita, kdežto na místech takových řada Fourierova konverguje majíc za součet hodnotu

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Zdá se mi tudíž nutným rozeznávati mezi řadou Fourierovou a řadou (3). i nazývati tuto poslední řadou Laurentovou, s níž jest formálně totožna, ačkoli tato přicházejíc toliko u funkcí analytických a to v komplexním oboru, spočívá na jiných základech; výraz (3) bude **řada Laurentova pro funkce realné proměnné.**

Existuje-li řada Laurentova, existuje tím spíše řada Fourierova a jest jí rovna.

Výsledek výše pronesený může býti užitečný také v analysi formalné, poskytuje prostředky k sečítání řad pomocí integrálů.

Úvahy předcházející dávají podnět k následující poznámce.

Je-li dána funkce $f(x)$ nekonečnou řadou

$$f(x)=\sum_{1}^{\infty}(a_\nu \cos 2\nu x\pi + b_\nu \sin 2\nu x\pi), \tag{21^a}$$

bude řada

$$g(x)=\sum_{1}^{\infty}(a_\nu \sin 2\nu x\pi - b_\nu \cos 2\nu x\pi) \tag{21^b}$$

udávati dvojnásobnou pomyslnou část řady

$$\sum_{1}^{\infty} c_\nu e^{2\nu x\pi i}$$

a tedy bude míti hodnotu

$$g(x)=-\int_0^1 [f(z)-f(x)]\cot(z-x)\pi\, dz. \tag{22^a}$$

Klademe-li naopak

$$a_\nu = b_\nu', \quad b_\nu = -a_\nu',$$

obdržíme

$$g(x)=\sum_{1}^{\infty}(a_\nu' \cos 2\nu x\pi + b_\nu' \sin 2\nu x\pi),$$

$$-f(x)=\sum_{1}^{\infty}(a_\nu' \sin 2\nu x\pi - b_\nu' \cos 2\nu x\pi),$$

takže musí dle věty (22^a) býti:

$$f(x)=+\int_0^1 [g(z)-g(x)]\cot(z-x)\pi\, dz. \tag{22^b}$$

Rovnice (22^a) a (22^b) platí současně i vyjadřují zajímavou reciprocitu, již lze považovati za integrální vlastnost funkcí ve značné míře libovolných.

VII.