Matyáš Lerch

O jistém integrálu omezeném

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1886, 588–604

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501533

Typen lässt sich nicht durch Huttons künstliche Migrationstheorie decken, denn keine solche kann z. B. erklären, warum Holargyrus nur in Madeira und hier, Maurolicus nur in Sicilien und hier vorkömmt.

Wichtiger ist Huttons Ansicht, dass Neuseeland ein Stück Trias repräsentire, womit man das Fehlen der Säugethiere, die archaistischen Formen bei Vögeln und Reptilien (Moa, Hatteria), das Liopelma Hochstetteri (Discogloss.), das Vorwalten der Coniferen und Farren, und das Vorhandensein leider wenig bekannter Fossilien aus mehreren Perioden gut in Uebereinstimmung bringen kann.

Engler theilt Neuseeland in zwei Hälften: die tropische und antarktische (altoceanische!).

Die antarktischen Typen scheinen zu einer antarktischen Eiszeit von Südamerika gekommen zu sein. Die tropischen Typen bringt die Drift des stillen Meeres noch stündlich, daher sind die brakischen Typen tropisch (so Eleotris, Upeneoides, Aale, Mugiliden). Noch heute wandern ja Vögel aus Australien nach Neuseeland. Bezüglich der Typen des Mittelmeeres, die allerdings zum grössten Theile auch in Australien und Japan vorkommen, aber Malaisien und Indien (bisher) zu fehlen scheinen, ist wohl nur eine alte Remanenz aus jener Zeit möglich, wo das Mittelmeer mit dem indischen Meere in steter Verbindung war, wie die Ichthys des rothen Meeres, die heute noch vollständig indisch ist, so nahe legt (Tripterygium). Eine ähnliche Erscheinung bietet ja der australische Ceratodus und der fossile Dinornis daselbst. Einzelne Tiefseefische, die man zuerst nur von Madeira kannte, oder bisher nur von hier kennt, dürfte man auch noch anderswo finden, bis man die Tiefsee besser untersuchen wird. Aber die Menge der Endemismen, darunter eine Familie (Acanthoclinus), zeigt auf ein hohes selbstständiges Alter der Ichthys.

39.

O jistém integrálu omezeném.

Přednášel docent na české výs. škole techn. M. J. Lerch, dne 29. října 1886.

1. V theorii elliptických funkcí dokazuje se následující věta:*) Značí-li $\vartheta(u|\tau)$ funkci proměnných u, τ, definovanou řadou

*) Jednoduchý důkaz její viz v autorově pojednání „Příspěvky k theorii funkcí elliptických." Zprávy o zasedání král. čes. spol. nauk z r. 1886.

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(\nu^2\tau+2\nu u)} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2\tau\pi i} \cos 2n\pi u,$$

která konverguje pro všecka u, je-li pomyslná část veličiny τ kladná, platí rovnost

$$\vartheta(u|\tau) = \left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right) e^{-\frac{1}{\tau}u^2\pi i}\, \vartheta\left(\frac{u}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right),$$

kde $\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right)$ značí onu z obou hodnot odmocniny $\sqrt{\frac{i}{\tau}}$ jejíž realná část je kladná.

Volíme-li tu $\tau = ix$, $u = v\sqrt{x}$, a znamenáme-li

$$\text{(1)} \qquad \Phi(x|v) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} \cos 2n\pi v\sqrt{x},$$

bude

$$2\Phi(x|v) + 1 = \vartheta(v\sqrt{x}|ix),$$

a tudíž dle věty právě citované:

$$2\Phi(x|v) + 1 = x^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi v^2}\left[2\Phi\left(\frac{1}{x}\middle|vi\right) + 1\right]$$

a odtud:

$$\text{(2)} \quad \Phi\left(\frac{1}{x}\middle|v\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} e^{-\pi v^2} + x^{\frac{1}{2}} e^{-\pi v^2}\Phi(x|vi)$$

Z této rovnice možno souditi o průběhu funkce $\Phi(x)$ při nekonečně malých hodnotách x. Řada (1) patrně konverguje pro všecky kladné hodnoty x, kdežto pro $x = 0$ diverguje. Budeme uvažovati tedy pouze kladné realné hodnoty x. Pak bude absolutní hodnota obecného členu řady (1), klademe-li $v = \alpha + \beta i$, patrně následující:

$$e^{-n^2\pi x}|\cos 2n\pi v\sqrt{x}| \leqq \frac{1}{2} e^{-n^2\pi x}\left(e^{2n\pi\beta\sqrt{x}} + e^{-2n\pi\beta\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-n\pi\sqrt{x}(n\sqrt{x}+2\beta)} + \frac{1}{2} e^{-n\pi\sqrt{x}(n\sqrt{x}-2\beta)}.$$

Nechť je β kladné nebo záporné, budou exponenty v obou sčítancích od jistého místa x počínaje záporné a porostou zároveň s x přes všechny meze. Je-li pak a kterákoli veličina stálá, bude

$$\lim_{x=\infty} e^{-n\pi\sqrt{x}(n\sqrt{x}\pm 2\beta)} x_a = 0,$$

z čehož lze souditi

$$\lim \Phi(x)\, x^a = 0. \tag{3}$$

Z toho plyne, že v rovnici (2) je třetí člen v pravo pro $x = \infty$ nekonečně malý; značíme-li jej ε, bude pro

$$\frac{1}{x} = \xi$$

$$\Phi(\xi \mid v) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi v^2} + \varepsilon, \tag{2^a}$$

kde ε je zároveň s ξ nekonečně malé.

Z rovnic (3) a (2^a) pak plyne, že k existenci integrálu

$$J = \int_0^\infty \Phi(x) x^{\frac{1}{2}s-1}\, dx \tag{4}$$

je nutná i dostačující podmínka, aby realná část veličiny $s - 1$ byla kladná. Je-li tato splněna, bude

$$J = \int_0^1 \Phi(x \mid v) x^{\frac{1}{2}s-1}\, dx + \int_1^\infty \Phi(x \mid v) x^{\frac{1}{2}s-1}\, dx.$$

Zavedeme-li do prvého z obou těchto integrálů v pravo veličinu $\frac{1}{x}$ za neodvisle proměnnou, obdržíme:

$$\int_0^1 \Phi(x \mid v) x^{\frac{1}{2}s-1}\, dx = \int_1^\infty \Phi\left(\frac{1}{x}\middle| v\right) x^{-\frac{1}{2}s-1}\, dx;$$

dosadíme-li sem za $\Phi\left(\frac{1}{x}\middle| v\right)$ hodnotu z (2), máme poslední integrál ve tvaru

$$-\frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}s-1}dx+\frac{1}{2}e^{-\pi v^2}\int_1^\infty x^{-\frac{s+1}{2}}e^{-\pi v^2}dx+$$

$$+e^{-\pi v^2}\int_1^\infty \Phi(x\,|\,vi)\,x^{-\frac{s+1}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{s}-\frac{1}{1-s}e^{-\pi v^2}+e^{-\pi v^2}\int_1^\infty \Phi(x\,|\,vi)\,x^{-\frac{s+1}{2}}dx,$$

takže nacházíme rovnici:

$$\int_0^\infty \Phi(x)x^{\frac{1}{2}s-1}dx=-\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi v^2}}{1-s} \tag{5}$$

$$+\int_1^\infty\{\Phi(x\,|\,v)\,x^{\frac{1}{2}s-1}+\Phi(x\,|\,vi)x^{-\frac{s+1}{2}}e^{-\pi v^2}\}\,dx.$$

Integrál na pravé straně této rovnice má pro všecka konečná s hodnotu konečnou a určitou, a definuje tedy určitou celistvou funkci transcendentní komplexní proměnné s, o jejíž vyjádření ve tvaru řady chceme nadále jednati.

Integrovaná funkce ve vzorci (4) dána je řadou

$$\Phi(x)x^{\frac{1}{2}s-1}=\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}\cos 2n\pi v\sqrt{x}\,.\,x^{\frac{1}{2}s-1},$$

jejíž členové jsou funkce uvnitř a na mezích každého oboru $(\delta\ldots h)$ (kde $h>\delta>0$) jednoznačné konečné a spojité, a kterážto řada konverguje v každém takovémto oboru stejnoměrně, a následkem toho připouští integraci po členech, takže bude

$$\int_\delta^h \Phi(x)x^{\frac{1}{2}s-1}dx=\sum_{n=1}^\infty\int_\delta^h e^{-n^2\pi x}\cos 2n\pi v\sqrt{x}\,.\,x^{\frac{1}{2}s-1}dx$$

Dokážeme nyní, že tato rovnice platí i tehdy, je-li $\delta=0$, $h=\infty$. Za tím účelem pišme ji ve tvaru

$$(a)\qquad \int_{\delta}^{h} \Phi(x) x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\delta, h),$$

kladouce

$$J_n(\delta, h) = \int_{\delta}^{h} e^{-n^2\pi x} x^{\frac{1}{2}s-1} \cos 2n\pi v\sqrt{x}\,dx$$

Substituce $n\sqrt{x} = z$ do posledního integrálu poskytne nám patrně vzorec

$$J_n(g, h) = \frac{2}{n^s} \int_{n\sqrt{g}}^{n\sqrt{h}} e^{-\pi z^2} z^{s-1} \cos 2\pi vz\,dz$$

platný pro všecka kladná g, h, n. Integrál na pravé straně nalezá se pod stálou mezí M závislou pouze na v, s pro všecka g, h, n; značí-li tedy σ realnou část veličiny s, bude

$$(\beta)\qquad |J_n(g, h)| < \frac{2M}{n^\sigma}$$

Odtud snadno dokážeme, že řady

$$(a)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} J_n(o, \delta)$$

$$(b)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} J_n(h, \infty)$$

konvergují a jsou nekonečně malé, je-li v (a) veličina δ nekonečně malou a v (b) h nekonečně velikou.

Především jest z (β) patrno, že při podmínce $\sigma > 1$ zde předpokládané řady ty jsou konvergentní a co do součtu menší než

$$2M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma},$$

a že zbytky

$$(c) \qquad \sum_{n=r+1}^{\infty} J_n(o,\, \delta)\,, \quad \sum_{n=r+1}^{\infty} J_n(h,\, \infty)$$

jsou menší než zbytek

$$(c') \qquad 2M \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}.$$

Tu pak lze voliti r tak velké, že veličina (c') je menší než libovolně předepsaná veličina ε, tak že pak budou též obě veličiny (c) menší než ε. Dále bude lze voliti h tak velké a δ tak malé, aby součty

$$\sum_{n=1}^{r} J_n(o,\, \delta)\,, \quad \sum_{n=1}^{r} J_n(h,\, \infty)$$

byly absolutně menší než ε, tak že pak budou obě veličiny (a), (b) menší než 2ε, které jsme mohli voliti sebe menší.

Zároveň však bylo možno voliti δ tak malé a h tak veliké, aby integrály

$$\int_0^{\delta} \Phi(x) x^{\frac{1}{2}s-1}\, dx, \quad \int_h^{\infty} \Phi(x) x^{\frac{1}{2}s-1}\, dx$$

byly absolutně menší než ε; přičtome-li tyto integrály k levé, veličiny (a), (b) k pravé straně rovnice (α), obdržíme dvé veličiny

$$\int_0^{\infty} \Phi(x) x^{\frac{1}{2}s-1}\, dx, \quad \sum J_n(o,\, \infty),$$

kteréž se liší o veličinu absolutně menší než $6\,\varepsilon$, která byla z předu volena.

Avšak tyto veličiny nikterak nezávisejí na ε, a následkem toho jsou si rovny. *)

Jelikož tu

*) Sic kdyby jich rozdíl Δ byl od nully různý, mohli bychom volbou $\varepsilon < \frac{1}{6}|\Delta|$ docíliti toho, že rozdíl ten jest větší než 6ε, což odporuje poslednímu výsledku.

$$J_n(o,\ \infty) = \frac{2}{n^s}\int\limits_0^\infty e^{-\pi z^2} z^{s-1} \cos 2\pi vz\, dz\,,$$

nacházíme:

$$(6)\qquad \int\limits_0^\infty \Phi(x) x^{\frac{1}{2}s-1} dx = \zeta(s)\,.\,2\int\limits_0^\infty e^{-\pi z^2} z^{s-1} \cos 2\pi vz dz,$$

kde jsme s *Riemannem* *) znamenali $\zeta(s)$ součet konvergentní řady

$$(7)\qquad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Zde dlužno podotčíti, že za n^s vzíti třeba hodnotu $e^{s\, lgn}$, při čemž lgn jest realné, což z pochodu našeho vyšetřování bez obtíží vysvitá.

Zde nebude tuším od místa uvažovati zvláštní případ $v = o$. Tím přejde funkce $\Phi(x)$ na tvar

$$(8)\qquad \Phi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x},$$

a rovnice (6) nám poskytne vzorec

$$(6^a)\qquad \int\limits_0^\infty \Phi_0(x) x^{\frac{1}{2}s-1} dx = \zeta(s) 2\int\limits_0^\infty e^{-\pi z^2} z^{s-1} dz$$

Substitucí $\pi z^2 = x$ obdržíme

$$2\int\limits_0^\infty e^{-\pi z^2} z^{s-1} dz = \pi^{-\frac{1}{2}s} \int\limits_0^\infty e^{-x} x^{\frac{1}{2}s-1} dx\,;$$

integrál

$$\int\limits_0^\infty e^{-x} x^{\frac{1}{2}s-1} dx$$

nazývá se *Eulerovým* (druhého způsobu), existuje pro s, jichž realná část

---

*) Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. Monatsb. d. Berliner Ak. 1859. Sebrané spisy str. 186. Podobné dvě funkce studoval p. *Schlömilch*, a celou kategorii jiných p. *Hurwitz* (v. Schlömilchův časopis roč. 27.)

je kladná, a definuje analytickou funkci $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ proměnné s, která dle p. *Pryma**) se vyjádří součtem dvou funkcí ($s = 2z$):

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)}, \quad Q(z) = \int_1^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx,$$

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z),$$

kde $Q(z)$ je celistvá funkce transcendentní.

Vzorec (6^a) poskytne tedy:

$$\int_0^{\infty} \Phi_0(x) x^{\frac{1}{2}s-1} dx = \pi^{-\frac{1}{2}s} \zeta(s) \Gamma(\tfrac{1}{2}s)$$

a z rovnice (5) máme *Riemannův* vzorec

$$(9) \quad \zeta(s)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s) = -\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}\right) + \int_1^{\infty} \Phi_0(x) \left(x^{\frac{1}{2}s-1} + x^{-\frac{s+1}{2}}\right) dx$$

Znamenáme-li levou stranu této důležité rovnice $f(s)$, plyne bezprostředně vzorec

$$f(s) = f(1-s),$$

jenž nevyjadřuje nic jiného, nežli že $f(\frac{1}{2} + t)$ je sudá funkce proměnné t.

Integrál na pravé straně rovnice (9) existuje pro všecka konečná s a definuje celistvou transcendentní funkci proměnné s. Je tudíž rovnicí tou definována analytická funkce $\zeta(s)$ pro všecky konečné hodnoty s.

Funkce $\Gamma(\frac{1}{2}s)$ stane se polárně nekonečnou pro $s = o, -2, -4, \ldots -2n, \ldots$

Násobíme-li obě strany rovnice (9) veličinou s, obdržíme pro $s = o$ vůči vzorci

$$\lim_{s=o} \tfrac{1}{2}s\Gamma(\tfrac{1}{2}s) = 1$$

---

*) Borchardtův (Crelleův) žurnál sv. 82. Neméně zajímavý je elegantní způsob odvození, jejž v 90. sv. téhož žurnálu (str. 332) podal p. *Hermite* (v dopise k p. *Schwarzovi*, prof. v Gotinkách).

patrně rovnici

$$\zeta(o) = -\tfrac{1}{2}.$$

Pro s v okolí místa $s = 1$ je funkce $\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)$ tvaru

$$c_0 + c_1(s-1) + c_2(s-1)^2 + \ldots\ldots,$$

pravá strana rovnice (9) pak tvaru

$$\frac{1}{s-1} + c'_0 + c'_1(s-1) + c'_2(s-1)^2 + \ldots,$$

z čehož plyne, že $\zeta(s)$ je tvaru

$$\zeta(s) = \frac{a_0}{s-1} + a_1 + a_2(s-1) + \ldots.$$

Abychom vyšetřili a_0, (kteréž tu má hodnotu $\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$, jak z (9) patrno), užijme původní definice funkce $\zeta(s)$ rovnicí (7), předpokládajíce s realné a větší než 1. Pak platí nerovnosti

$$\frac{1}{n^s} > \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} > \frac{1}{(n+1)^s}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots.)$$

z nichž plyne

$$\zeta(s) > \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} > \zeta(s) - 1$$

čili

$$\zeta(s) > \frac{1}{s+1} > \zeta(s) - 1,$$

takže

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \vartheta_s,$$

kde ϑ_s je pravý kladný zlomek (obecně irracionalný). Z toho nacházíme

$$\lim_{s=1}(s-1)\,\zeta(s) = 1,$$

takže bude $a_0 = 1$ (a tedy $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$).

V okolí všech ostatních míst chová se funkce $\zeta(s)$ pravidelně, jelikož funkce $\Gamma(\frac{1}{2}s)\,\pi^{-\frac{1}{2}s}$ nikdy nezmizí, a pravá strana rovnice (9) je pro všecka s mimo 0,1 konečnou a pravidelnou.

Vyšetřme nyní hodnotu funkce $\zeta(s)$ na místech $s=-2,\ -4\ \ldots -2n, \ldots$ Na těchto místech je $\Gamma(\frac{1}{2}s)$ polárně nekonečna, a bude v nich tedy $\zeta(s)=0$, ač není-li pravá strana rovnice (9) nullou pro tatáž s; v tomto případě by $\zeta(s)$ bylo v řečených místech nullou a sice v druhém stupni (t. j. bylo by též $\zeta'(s)=0$).

Abychom se tu dověděli bližšího o tvaru funkce, užijme vlastnosti $f(s)=f(1-s)$, t. j. rovnice

$$\zeta(s)\,\pi^{-\frac{1}{2}s}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}s)=\zeta(1-s)\,\pi^{\frac{1}{2}(s-1)}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \tag{9a}$$

Tu jest pak $\Gamma\left(\frac{1+2n}{2}\right)$ pro všecka $n=1, 2, \ldots$ konečno (a od nully různo), dále je z řady (7) zřejmo, že $\zeta(1+2n)>0$, a tak bude tedy:

$$\lim_{s=-2n}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\,\zeta(s)=\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\zeta(2n+1)}{\pi^{2n}\sqrt{\pi}}$$

Dle citované vlastnosti funkce Γ bude pak

$$\lim_{s=-2n}\tfrac{1}{2}(s+2n)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}s)=\frac{(-1)^n}{n!}$$

a tudíž nacházíme:

$$\lim_{s=-2n}\frac{\zeta(s)}{s+2n}=\frac{(-1)^n}{2}\;\frac{n!\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\pi^{2n}\sqrt{\pi}}\;\zeta(2n+1)$$

$$=\frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{n!\,1.3.5\ldots.(2n-1)}{(2\pi^2)^n}\;\zeta(2n+1)$$

$$=\frac{(-1)^n}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{n!\,(1.3.5\ldots.(2n-1)}{(2\pi^2)^n\,\nu^{2n+1}}$$

řada tato má hodnotu kladnou, a roste zároveň s n přes všechny meze, a to rychleji než každá racionalná funkce n (než členové každé geometrické řady. Z toho lze souditi na chování se funkce $\zeta(s)$ v místech záporné poloviny osy realné.

Mezi každýma dvěma místy $s = -2n$, $-2n-2$ nachází se jedna vlna funkce $\zeta(s)$, která sestává z hodnot stejného znamení, a tyto vlny jsou tím širší, čím jsou vzdálenější od počátku $s = 0$.

Z rovnice (7) pak plyne, že pro všecka s, jichž realná část je kladná a větší než 1, je funkce $\zeta(s)$ ve své realné části kladná a větší než 1, takže nezmizí pro žádné z těchto s. Proto může $\zeta(s)$ zmizeti pouze pro ona s, jichž realné části náležejí intervallu $(-\infty \ldots . 1)$. Co se tkne hodnot s o záporné části realné, tu plyne z rovnice (9^a), že mohou býti nullovými místy pro $\zeta(s)$ pouze tehdy, jeli v nich $\Gamma(\frac{1}{2}s) = \infty$, ano $\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$ nezmizí pro žádné s, a $\zeta(1-s)$ má realnou část kladnou, ano tu $1-s$ má realnou část kladnou a větší než 1. Jsou tedy $s = -2, -4, \ldots -2n, \ldots$ jediná místa nullová funkce $\zeta(s)$, v nichž je realná část zápornou.

Má-li pak s realnou část uvnitř mezery $(o \ldots 1)$, bude ji míti v ní též $1-s$, ale funkce $\Gamma(\frac{1}{2}s)$, $\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$ budou tam konečny a od nully různy. Z toho plyne, že je-li pro takové s $\zeta(s) = 0$, musí též $\zeta(1-s) = 0$, takže pak jsou místa nullová funkce $\zeta(s)$ souměrně rozložena vzhledem k bodu $s = \frac{1}{2}$. Tím ovšem není řečeno, že by takovéto kořeny rovnice $\zeta(s) = 0$ skutečně existovaly.

2. Integrál na pravé straně rovnice (6)

$$\Psi(s \mid v) = 2\int_0^\infty e^{-\pi z^2} z^{s-1} \cos 2\pi v z\, dz \tag{1}$$

existuje pro všecka s, jichž realná část je kladná, a pro všecka v; i definuje analytickou funkci, kterou jsme znamenali $\Psi(s \mid v)$.

Nahradíme-li zde $\cos 2\pi v z$ řadou

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} z^{2n},$$

obdržíme

$$\tfrac{1}{2}\Psi(s, v) = \int_0^\infty e^{-\pi z^2} z^{s-1} dz + \int_0^\infty e^{-\pi z^2} dz \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} z^{2n+s-1}.$$

Funkce pod posledním znamením integračním je dána nekonečnou řadou

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} e^{-\pi z^2} z^{2n+s-1},$$

jejíž členové jsou funkce konečné a spojité uvnitř i na mezích každého intervallu $(0 \ldots h)$, kde h je veličina kladná. Zároveň je patrno, že v každém tomto oboru konvergujo uvažovaná řada *stejnoměrně*. Následkem toho bude dovoleno integrovati tuto řadu v mezích $(0 \ldots h)$ po členech, čímž vznikne

$$(\alpha) \qquad \int_0^h e^{-\pi z^2} z^{s-1} dz \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} \int_0^h e^{-\pi z^2} z^{2n+s-1} dz$$

Abychom se přesvědčili, zda-li je tu možno klásti $h = \infty$, sestrojme řadu

$$(\beta) \qquad V = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-\pi z^2} z^{2n+s-1} dz$$

Tu jest pak

$$(\gamma) \qquad \int_0^{\infty} e^{-\pi z^2} z^{2n+s-1} dz = \tfrac{1}{2}\pi^{-(n+\frac{1}{2}s)} \Gamma(n+\tfrac{1}{2}s)$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi^{-(n+\frac{1}{2}s)} (n+\tfrac{1}{2}s-1)(n+\tfrac{1}{2}s-2) \ldots \tfrac{1}{2}s\Gamma(\tfrac{1}{2}s)$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s) \,.\, \pi^{-n} n! \binom{n+\frac{1}{2}s-1}{n}$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s) \,.\, (-1)^n \frac{1}{(\pi)^n} \binom{-\frac{1}{2}s}{n} n!$$

a tedy

$$(\delta) \qquad V = \tfrac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4\pi v^2)^n}{\binom{2n}{n} n!} \binom{-\frac{1}{2}s}{n}$$

Tato řada sestává z členů, které jsou (od jistého místa) absolutně menší než členové řady konvergentní pro všecka s:

$$(1+q)^{-\frac{1}{2}s} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \binom{-\frac{1}{2}s}{n}, \quad q < 1.$$

Neboť je známo, že lze k libovolnému v a k libovolnému $q < 1$ určiti n_0 tak, aby platila nerovnosť

$$\frac{|4\pi v^2|^n}{\binom{2n}{n} n!} < q^n \text{ pro } n \geqq n_0.$$

Odtud plyne, že řada (δ) konverguje pro všecka konečná v, s, a tudíž bude řada (β) pro libovolné v a pro všecka s, jichž realná část je kladná, konvergovati. Budiž nyní σ realná část veličiny s, w realná část veličiny v; pak bude též kovergovati řada

$$(\beta^*) \qquad V^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi w)^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-\pi z^2} z^{2n+\sigma-1} dz$$

Utvořme nyní řadu

$$(\varepsilon) \qquad U_h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi w)2^n}{(2n)!} \int_h^{\infty} e^{-\pi z^2} z^{2n+\sigma-1} dz,$$

kde h je kladné. Členové této řady (ε) jsou menší než soulehlí členové řady (β^*), a proto je řada (ε) též konvergentní. Znamenejme S_r součet prvých r členů ($n = 1, 2, \ldots r$), a Z_r součet ostatních členů ($n = r+1$, $r+2, \ldots$) t. j. zbytek řady. Tu lze pák pro libovolně předepsanou kladnou veličinu δ určiti r tak velké, aby pro všecka kladná h bylo $Z_r < \frac{1}{2}\delta$; po té lze voliti h tak veliké, aby každý z r členů součtu S_r byl menší než $\frac{\delta}{2r}$, a tedy $S_r < \frac{1}{2}\delta$; pak bude

$$U_h = S_r + Z_r < \delta.$$

Tu je však jasno, že platí

$$(\eta) \qquad \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} \int_h^{\infty} e^{-\pi z^2} z^{2n+s-1} dz \right| < U_h < \delta.$$

Zároveň jsme mohli h voliti tak velké, že platí

$$\left| \int_h^{\infty} e^{-\pi z^2} z^{s-1} dz \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v^{2n})}{(2n)!} z^{2n} \right| < \delta;$$

přičteme-li tento integrál k levé, řadu (η) k pravé straně rovnice (α), obdržíme dvě veličiny:

$$\int_0^\infty e^{-\pi z^2} z^{s-1} dz \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} z^{2n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty e^{-\pi z^2} z^{2n+s-1} dz,$$

které se liší o veličinu menší než δ. Avšak tyto veličiny nezávisejí na δ, a z té příčiny jsou si rovny.

Následkem toho nacházíme rovnici

$$(2) \quad \Psi(s \mid v) = \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma(\tfrac{1}{2}s) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4\pi v^2)^n}{\binom{2n}{n} n!} \binom{n+\frac{1}{2}s-1}{n}$$

$$= \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma(\tfrac{1}{2}s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4\pi v^2)^n}{\binom{2n}{n} n!} \binom{-\frac{1}{2}s}{n}$$

Řady v pravo konvergují pro všecka v, s a definují tedy celistvou transcendentní funkci $C(s \mid v)$ proměnných s, v, takže bude

$$(2^a) \qquad \Psi(s \mid v) = \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma(\tfrac{1}{2}s) C(s \mid v).$$

Rovnice (6) § 1. zní pak:

$$\int_0^\infty \Phi(x) x^{\frac{1}{2}s-1} dx = \zeta(s) \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma(\tfrac{1}{2}s) C(s \mid v),$$

a dle (5) § 1. máme:

$$(3) \quad \zeta(s) \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma(\tfrac{1}{2}s) C(s \mid v)$$

$$= -\frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi v^2}}{1-s} + \int_1^\infty \left\{ \Phi(x \mid v) x^{\frac{1}{2}s-1} + \Phi(x \mid vi) x^{-\frac{s+1}{2}} e^{-\pi v^2} \right\} dx$$

Integrál na pravé straně rovná se určité celistvé funkci $C^*(s \mid v)$ proměnných s, v, a funkce $\zeta(s) \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma(\frac{1}{2}s)$ je dle (9) § 1. v okolí $s = 0$ tvaru $-\frac{1}{s} + \mathfrak{P}(s)$, v okolí $s = 1$ tvaru $-\frac{1}{s-1} + \mathfrak{P}(s-1)$. Násobíme-li obě strany rovnice (3) veličinou $(s-1)$, máme pro $s = 1$:

$$C(1 \mid v) = e^{-\pi v^2},$$

což je z definice funkce C přímo patrno.

Funkce $\zeta(s)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)$ zmizeti může pouze pro s, jichž realná část je uvnitř intervallu $(0\ldots 1)$, t. j. kde $\zeta(s)=\zeta(1-s)=0$.

Srovnáním s rovnicí (9) § 1. nacházíme tedy:

„Pro hodnoty s, pro něž (ač-li takové existují):

$$(\alpha)\qquad \int_1^\infty \Phi_0(x)\left(x^{\frac{1}{2}s-1}+x^{-\frac{s+1}{2}}\right)dx=\frac{1}{s}+\frac{1}{1-s},$$

bude:

$$(\beta)\quad C^*(s\,|\,v)=\int_1^\infty\left\{\Phi(x\,|\,v)x^{\frac{1}{2}s-1}+\Phi(x\,|\,vi)x^{-\frac{s+1}{2}}e^{-\pi v^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{s}+\frac{e^{-\pi v^2}}{1-s}.$$

Rovnice (β) nemá jiných kořenů s nezávislých na v, než které jsou zároveň kořeny rovnice (α); neboť tato vznikne z (β) pro $v=0$. Kořeny nezávislé na v jsou jim i co do stupně společny, ana funkce $C(s\,|\,v)$ obdrží hodnotu 1 pro $v=0$.

Z definice

$$(4)\qquad C(s\,|\,v)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4\pi v^2)^n}{\binom{2n}{n}n!}\binom{n+\frac{1}{2}s-1}{n}$$

plyne

$$(4^a)\qquad C(s\,|\,vi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4\pi v^2)^n}{\binom{2n}{n}n!}\binom{n+\frac{1}{2}s-1}{n}$$

Volíme-li za $\frac{1}{2}s$ pravý kladný zlomek, bude

$$\binom{n+\frac{1}{2}s-1}{n}$$

záporné; volíme-li v realné a dosti veliké, bude pak řada (4^a) míti hodnotu zápornou, kdežto pro $v=0$ je kladná. Z toho plyne, že je-li s uvnitř intervallu $(0\ldots 2)$, bude rovnice $C(s\,|\,vi)=0$ míti realné kořeny v, a sice kladné i záporné, t. j. $C(s\,|\,v)=0$ má tam kořeny v ryze pomyslné.

Z rovnice (3) plyne pak vztah:

$$\zeta(s)\pi^{-\frac{1}{2}s}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\,C(s\,|\,v)=e^{-\pi v^2}\,\zeta(1-s)\,\pi^{\frac{1}{2}(s-1)}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)C(1-s\,|\,vi)$$

aneb vzhledem k (9^a) (která je tu obsažena pro $v = 0$):

$$(5) \qquad C(s \mid v) = C(1 - s \mid vi)\, e^{-\pi v^2}$$

Nalezá-li se s uvnitř $(0 \dots 2)$, nalezá se $1 - s$ uvnitř $(-1 \dots 1)$; tedy má funkce $C(s \mid v) = 0$ pro realná s uvnitř $(-1 \dots +1)$ kořeny v realné.

Vůbec lze ke každému intervallu realných hodnot s, v nichž má $C(s \mid v) = 0$ kořeny realné, sestrojiti intervall hodnot s, pro něž má táž rovnice kořeny ryze pomyslné, jak z rovnice (5) přímo patrno. Je-li $s = (\alpha \dots \beta)$ oborem pro realné kořeny v, bude $s = (1 - \alpha \dots 1 - \beta)$ oborem pro ryze pomyslné kořeny v.

V intervallu $s = (0 \dots 1)$ má $C(s \mid v) = 0$ kořeny v realné i ryze pomyslné.

Dosazením hodnot za $C(s \mid v)$, $C(1 - s \mid vi)$ do rovnice (5) a srovnáním součinitelů při stejných mocnostech v obdržíme zajímavé vztahy mezi funkcemi tvaru $\binom{-\frac{1}{2}s}{n}$, $\binom{\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}}{n}$.

Píšeme-li $u = \pi v^2$, a pak

$$C(s \mid v) = G(s \mid u),$$

bude

$$C(s \mid vi) = G(s \mid -u)$$

a pak

$$G(s \mid u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n u^n}{\binom{2n}{n} n!} \binom{-\frac{1}{2}s}{n}$$

a (5) obdrží tvar

$$G(s \mid u) = G(1 - s \mid -u) e^{-u}$$

V pravo je koefficient při u^n dán výrazem:

$$(-1)^n \sum_{k+\lambda=n} \frac{4^k}{\binom{2k}{k} k!\, \lambda!} \binom{\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}}{k},$$

$$\begin{pmatrix} k = 0, 1, \dots \\ \lambda = 0, 1, \dots \end{pmatrix}$$

jenž má býti roven

$$\frac{4^n}{\binom{2n}{n} n!} \binom{-\frac{1}{2}s}{n}$$

Tím vyjádřen velmi obecný vztah mezi součiniteli binomickými:

$$\frac{(-4)^n}{\binom{2n}{n}}\binom{-\frac{1}{2}s}{n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k\binom{n}{k}}{\binom{2k}{k}}\binom{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}{k}.$$

40.

O morfologickém významu kupuly (číšky) u pravých Kupulifer.

Přednesl Dr. Lad. Čelakovský dne 12. listopadu 1886.

(S 1 tabulkou.)

Starší morfologové (Hofmeister, Schacht, Döll a j.) poznávali v číšce čili kupule pravých kupulifer (rodů Quercus, Castanea, Fagus) dutou osu neb diskus kolem květů samičích vyzdvižený a na vnější své straně listy (šupiny neb ostny) nesoucí.

Nověji Eichler ve svých „Blüthendiagramme" opustil tento náhled, a sice na základě srovnávací methody, došed srovnáváním samičí číšky kaštanové s číškou androgynickou a s klubíčkem samčích květů, mezi kterýmiž věcmi všemi zpozoroval přechody, k tomu úsudku, že čtyři laloky číšky bukové (obr. 6) a čtyři chlopně, ve které se číška kaštanu posléze poltí, jsou přeměněné listence dvou druhořadých samičích květů, které tedy zdřevnatějíce více méně dohromady srůstají. Číška by dle toho nebyla povahy osní, nýbrž listové, a šupiny neb ostny na vnější její straně nemohly by býti samy listy, nýbrž byly by pouhé výrostky (exkrescence) ze hřbetu těch 4 listenců do číšky srostlých.

Dle tohoto Eichlerova výkladu byl by rozdíl mezi kupuliferami pravými (dubovitými) a nepravými (habrovitými) mnohem skrovnější, než se před tím dle starší theorie osní za to mělo, neboť by číška dubovitých z těchže listenů byla srostlá, ze kterých obaly lupenovité kolem plodů habrovitých rostlin (habru, lísky, Ostrye) srostlé jsou, jenže poněkud jinou kombinací. (U habrovitých sroste vždy listen podpůrný s oběma listenci květu v obal plodní, kdežto by u dubovitých dle Eichlera listeny podpůrné nesrůstaly, nýbrž toliko listence a sice