Lerch, Matyáš: Scholarly works

Matyáš Lerch

Note sur les expressions qui, dans diverses parties du pian, représentent des fonctions distinctes

Bull. Sci. Math., II. Sér. 10 (1886), 45–49

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501522

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

MÉLANGES.

NOTE SUR LES EXPRESSIONS QUI, DANS DIVERSES PARTIES DU PLAN, REPRÉSENTENT DES FONCTIONS DISTINCTES;

Par M. J. LERCH.

Dans les premières Leçons de son Cours, professé à l'Université de Berlin pendant le semestre d'hiver 1884-1885, M. Kronecker a exposé le problème de la résolution des équations, et a montré qu'il revient à la recherche d'une expression qui représente indifféremment une des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme fonction des quantités $f_1, f_2, \ldots, f_n$ définies par l'équation identique

$$x^n - f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} - \ldots \pm f_n = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

M. Kronecker a insisté sur cette manière de concevoir le problème, et il a ajouté qu'on la rencontre déjà dans les travaux fondamentaux de Vandermonde. Puis, passant à la résolution *algébrique,* il a remarqué que l'on cherche ordinairement à former les fonctions de $f_1, f_2, \ldots, f_n$ qui doivent représenter une quelconque des variables x au moyen des équations *binômes.* Comme une des propriétés les plus importantes de ces équations est de ne contenir qu'un seul paramètre, on est conduit à généraliser la question de la résolution algébrique en employant quelques autres équations auxiliaires possédant la même propriété.

Pour bien éclaircir ces considérations préliminaires, M. Kronecker, traitant le cas des équations du second ordre, a exposé la méthode ordinaire qui conduit à l'expression

$$\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(x_1 - x_2)^2},$$

représentant indifféremment x_1 et x_2 à l'aide du signe $\sqrt{}$, c'est-à-dire d'une fonction $\sqrt{t}$, définie par l'équation binôme

$$y^2 = t;$$

puis, il a donné l'expression

$$\frac{x_1 + x_2}{1 + \mathrm{W}\left(\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}\right)},$$

représentant aussi indifféremment x_1 et x_2, si l'on définit la fonction d'un seul paramètre $W(t)$ par l'équation

$$W(t)^2 - t\,W(t) + 1 = 0$$

ou par la fraction continue

$$W(t) = \cfrac{1}{t - \cfrac{1}{t - \cfrac{1}{t - \ldots}}}$$

Cette remarque m'a rappelé une expression dont je me suis occupé il y a quinze mois, et qui n'est qu'un cas particulier de celle que nous allons développer.

De l'équation du second ordre

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0,$$

ayant pour racines les deux quantités x_1 et x_2, on déduit immédiatement

$$x = x_1 + x_2 - \frac{x_1 x_2}{x},$$

en prenant pour x une quelconque de ces deux racines x_1 et x_2.

On est ainsi naturellement amené à rechercher si la fraction continue périodique

$$\alpha = x_1 + x_2 - \cfrac{x_1 x_2}{x_1 + x_2 - \cfrac{x_1 x_2}{x_1 + x_2 - \ldots}} \tag{1}$$

est convergente et si elle représente l'une de ces deux racines x_1, x_2.

Rien n'est plus facile que l'étude de cette expression (1). Désignons, en effet, par α_n sa réduite d'ordre n; nous avons évidemment

$$\alpha_{n+1} = x_1 + x_2 - \frac{x_1 x_2}{\alpha_n};$$

d'où résulte la relation

$$\alpha_{n+1}\alpha_n - (x_1 + x_2)\alpha_n + x_1 x_2 = 0,$$

qui exprime que les valeurs α_n et α_{n+1} sont liées par une relation homographique.

D'après un théorème, très souvent appliqué dans la Géométrie projective, cette relation est équivalente à la suivante :

$$\frac{\alpha_{n+1}-\alpha'}{\alpha_{n+1}-\alpha''}=c\,\frac{\alpha_n-\alpha'}{\alpha_n-\alpha''},$$

α' et α'' désignant les coordonnées des deux points doubles de cette homographie et c étant une constante facile à calculer.

Mais les points doubles sont donnés par les racines x_1 et x_2, et l'on obtient aisément

$$\frac{\alpha_{n+1}-x_1}{\alpha_{n+1}-x_2}=\frac{x_2}{x_1}\,\frac{\alpha_n-x_1}{\alpha_n-x_2};$$

d'où il résulte

$$\frac{\alpha_{n+1}-x_1}{\alpha_{n+1}-x_2}=\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n\frac{\alpha_1-x_1}{\alpha_1-x_2}=\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{n+1}\frac{\alpha_0-x_1}{\alpha_0-x_2},$$

ou, parce que $\alpha_0=x_1+x_2$,

$$\frac{\alpha_{n+1}-x_1}{\alpha_{n+1}-x_2}=\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{n+2}.$$

Si maintenant le module de x_1 est plus grand que celui de x_2, cette quantité deviendra infiniment petite pour les valeurs infiniment croissantes de n, et la quantité α_{n+1} se rapprochera indéfiniment de la limite x_1, de telle sorte que, dans ce cas, l'expression (1) est convergente et représente la valeur x_1.

Si les modules des deux quantités x_1 et x_2 sont égaux, l'expression $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{n+2}$ n'a pas de limite, et par conséquent la fraction continue (1) sera divergente.

Nous sommes ainsi conduits à ce résultat que l'expression (1) converge vers la plus grande en valeur absolue des deux quantités x_1 et x_2, dont les modules sont supposés différents, et nous avons une expression uniforme composée de fonctions symétriques des deux quantités x_1 et x_2, représentant une seule de ces deux quantités.

Nous en pourrions déduire un grand nombre de conséquences, mais je ne veux en signaler que les suivantes :

(a) Si l'on regarde $x_1=z$ comme variable complexe, et $x_2=a$

comme constante, on a l'expression

$$(2) \qquad \alpha = a + z - \cfrac{az}{a + z - \cfrac{az}{a + z - \ldots}},$$

qui est convergente si le point représentant dans le plan la quantité z ne se trouve pas sur la circonférence ayant le point zéro pour centre et passant par le point a; si le point z se trouve à l'intérieur de ce cercle, l'expression (2) est constante et égale à a, et s'il se trouve à l'extérieur de ce cercle, elle est égale à z.

(b) L'expression (2) n'est qu'un cas particulier de celle que l'on obtient en prenant pour x_1 et x_2 deux fonctions rationnelles de z quelconques $\varphi(z)$ et $\psi(z)$, de telle sorte que l'on a

$$(3) \qquad \alpha = \varphi(z) + \psi(z) - \cfrac{\varphi(z)\psi(x)}{\varphi(z) + \psi(z) - \cfrac{\varphi(z)\psi(z)}{\varphi(z) + \psi(z) - \ldots}},$$

et le plan des z se subdivisera en diverses régions de telle façon que, dans les unes, l'expression (3) est égale à $\varphi(x)$, dans les autres à $\psi(x)$, suivant que le module de $\varphi(z)$ ou celui de $\psi(z)$ est le plus grand dans la région considérée.

(c) Prenons, par exemple,

$$x_1 = z + 1, \qquad x_2 = z - 1,$$

l'expression α nous donnera ou $z+1$ ou $z-1$, suivant que z se trouve ou à droite ou à gauche de l'axe imaginaire, de telle sorte que l'expression $\alpha - z$ nous donnera le signe de la partie réelle de z, celle-ci étant supposée différente de zéro, et si, en particulier, z est réelle et égale à x, elle nous donnera le signe de la quantité x elle-même, ce que nous exprimons par la formule

$$\sin x = x - \cfrac{x^2 - 1}{2x - \cfrac{x^2 - 1}{2x - \ldots}}.$$

On voit que l'on en peut déduire une infinité d'expressions présentant des coupures de représentation, et cela d'une manière plus simple que toutes les autres connues jusqu'à présent.

Le lecteur a déjà aperçu que l'existence d'expressions représentant des fonctions distinctes se déduit immédiatement des considérations que nous avons rappelées au commencement.

Supposons, en effet, que l'on ait trouvé une expression uniforme

$$x = \mathrm{V}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

représentant une racine quelconque de l'équation

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \ldots \pm a_n = 0,$$

expression convergente pour tous les systèmes de valeurs a_1, $a_2, \ldots, a_n$, à l'exception de certains systèmes singuliers constituant une variété d'ordre $(n-1)$. D'après le principe de Vandermonde, on peut remplacer dans cette expression les coefficients a par les n fonctions symétriques $f_1, f_2, \ldots, f_n$, des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et l'expression uniforme

$$x = \mathrm{V}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

sera convergente en général et aura pour valeur une racine x_k déterminée.

Si l'on y substitue des fonctions rationnelles $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \ldots$, $\varphi_n(z)$ au lieu de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on obtient une expression uniforme en z, qui, dans diverses parties du plan des z, représente les diverses fonctions $\varphi_k(z)$.

Il me semble que c'est la voie la plus naturelle pouvant nous amener à des expressions affectées de coupures, expressions dont on a donné de nombreux exemples dans les derniers temps.

Berlin, juillet 1885.

LE RÉSUMÉ HISTORIQUE DE PROCLUS;

PAR M. PAUL TANNERY.

J'aborde maintenant le long fragment historique inséré par Proclus dans la seconde partie de son Prologue (p. 64-70); je vais donner la traduction intégrale de ce texte capital pour l'histoire de la Géométrie; j'examinerai ensuite à quelles sources Proclus a dû puiser en réalité et ce qu'il peut avoir tiré de son propre fonds.