Matyáš Lerch

O některých konstantách z theorie harmonických řad

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 8 (1899), č. 35, 1–9

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501521

O některých konstantách z theorie harmonických řad.

Sdílí

M. Lerch,
professor na universitě ve Fribourgu švýcarském.

(Předloženo dne 20. května 1899.)

1. Riemannova funkce definovaná řadou

$$\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^s}$$

jest jednoznačná v celé rovině komplexní proměnné s, i má tam pouze jediné místo zvláštní, a sice pól stupně prvního $s = 1$, takže rozdíl $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ je celistvá funkce transcendentní. O této funkci dokázal Riemann zajímavou reciprocitu

$$(1) \qquad \zeta(1-s) = \zeta(s) \frac{1}{2(2\pi)^{s-1} \sin\frac{s\pi}{2}\, \Gamma(1-s)},$$

vlastnost to, jaká se před tím již vyskytla při útvarech podobného druhu studovaných Malmsténem, Schlömilchem a Lipschitzem.*)

Logarithmickým derivováním plyne z rovnice (1)

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = \log 2\pi + \frac{\pi}{2} \cot \frac{s\pi}{2} - \psi(1-s),$$

značí-li nám $\psi(u)$ výraz $\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}$.

*) Viz o tom naši rozpravu Základové theorie Malmsténovských řad.

Veličina $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$ nullou není, jak lze výpočtem zjistiti, a proto obdržíme z poslední rovnice pro $s = \frac{1}{2}$

$$2\frac{\zeta'\left(\frac{1}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2}\right)} = \log 2\pi + \frac{\pi}{2} - \psi\left(\frac{1}{2}\right).$$

Dosadíme-li sem nyní hodnotu

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -C - 2\log 2,$$

při čemž C značí známou konstantu Eulerovu též Mascheroniovou zvanou, obdržíme

$$2\frac{\zeta'\left(\frac{1}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2}\right)} = C + \frac{\pi}{2} + \log 8\pi. \tag{2}$$

Rovnici té lze uděliti jiný tvar, jímž nabude zajímavosti formalné po jiné stránce, užíje-li se okolnosti, že platí identicky

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^s} - 2\sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{\nu=1}^\infty \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^s}$$

čili, což totéž jest

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^s};$$

rovnice tato podá derivováním

$$(1 - 2^{1-s})\,\zeta(s)\left[\frac{2^{1-s}\log 2}{1 - 2^{1-s}} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right] = \sum_1^\infty \frac{(1-)^{\nu}}{\nu^s}\log\nu$$

a odtud pro $s = \frac{1}{2}$:

$$(1 - \sqrt{2})\,\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{\sqrt{2}\log 2}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\zeta'\left(\frac{1}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2}\right)}\right] = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{\nu}\log\nu}{\sqrt{\nu}}.$$

Dosadíme-li sem tedy hodnotu z (2) za výraz

$$\frac{\zeta'\left(\frac{1}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2}\right)},$$

obdržíme

$$(3)\quad \sum_{1}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{\log\nu}{\sqrt{\nu}} = -\frac{\sqrt{2}-1}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\left[C+\frac{\pi}{2}+\log\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\log 2\right]$$

kterýžto výsledek lze též psáti

$$(3^{a})\quad 2\,\frac{\dfrac{\log 2}{\sqrt{2}}-\dfrac{\log 3}{\sqrt{3}}+\dfrac{\log 4}{\sqrt{4}}-\dfrac{\log 5}{\sqrt{5}}\pm\ldots}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\mp\ldots} = C+\frac{\pi}{2}+\log\frac{\pi}{2}-2\sqrt{2}\log 2.$$

Že lze těchto vzorců užiti k vypočtení čísla C, leží na bíledni, ježto lze obě řady v rovnici (3ª) přicházející přeměniti na řady s rychlejší konvergencí, a co se tkne vzorce (2), tu lze k výpočtu hodnot $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$ a $\zeta'\left(\frac{1}{2}\right)$ užiti vzorce

$$(4)\quad \zeta(s)=1+\frac{1}{2^{s}}+\frac{1}{3^{s}}+\quad+\frac{1}{(n-1)^{s}}+R(n,s),$$

kde $R(n, s)$ jest hodnota jednoznačné transcendenty definované řadou

$$(5)\quad R(w,s)=\sum_{\nu\,0}^{\infty}\frac{1}{(w+\nu)^{s}}.$$

Differencujeme-li rovnici (4), máme

$$(4^{a})\quad \zeta'(s)=-\frac{\log 2}{2^{s}}-\frac{\log 3}{3^{s}}-\quad-\frac{\log(n-1)}{(n-1)^{s}}+R'(n,s),$$

načež se veličiny $R\left(n, \frac{1}{2}\right)$ a $R'\left(n, \frac{1}{2}\right)$ stanoví pomocí známého rozvoje semikonvergentního.*)

2. Funkce $R(w,s)$ definovaná rovnicí (5) připouští v případě $s<1$ jednoduché rozvinutí trigonometrické vůči proměnné w vzaté i intervallu

*) III. ročník Rozprav Č. Akademie, číslo 28.

$0 < w < 1$, které jest zvláštním případem známého vztahu Lipschitzova a bylo po té zvláště vytčeno Kinkelinem a později znovu objasněno na to Hurwitzem*), i zní jak následuje:

$$(6) \qquad R(w, s) = 2\frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \sum_{m}^{\infty}{}_{1} \frac{\sin\left(\frac{s\pi}{2} + 2mw\pi\right)}{m^{1-s}}.$$

Znamenejme nyní literou D číslo kladné neb záporné, které jest hlavním diskriminantem, a literou Δ označme jeho prostou hodnotu. Užívajíce Legendreova znaménka

$$\left(\frac{D}{k}\right)$$

tak, jak je byl v souhlasu s Jacobiem definitivně upravil Kronecker, položme v rovnici (6) $w = \frac{h}{\Delta}$, násobme $\left(\frac{D}{h}\right)$ a sečtěme výsledky pro

$$h = 1, 2, 3, \qquad \Delta - 1.$$

Poněvadž řada (5) a rozvoj (6) nikdy současně nekonvergují, dlužno stanoviti součet

$$(7) \qquad \sum_{h}^{\Delta-1}{}_{1} \left(\frac{D}{h}\right) R\left(\frac{h}{\Delta}, s\right) = S$$

jiným způsobem, než při současné transformaci výrazu (6).

Uvažujme nejprvé součet (7) pro hodnoty $s > 1$, při nichž řada (5) jest jak známo konvergentní. Zde bude

$$S = \sum_{h}^{\Delta-1}{}_{1} \left(\frac{D}{h}\right) \sum_{\nu}^{\infty}{}_{1} \frac{1}{\left(\frac{h}{\Delta} + \nu\right)^{s}},$$

a klademe-li

$$h + \nu\Delta = n, \text{ bude } \left(\frac{D}{h}\right) = \left(\frac{D}{n}\right),$$

a součet obdrží tvar

$$S = \Delta^{s} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{s}},$$

čili při označení**)

*) Literarní udání nalezne čtenář v úvodu do Zákl. theorie Malmst. řad. Práce Kinkelinova vyšla v programě průmyslové školy Basilejské z r. 1861—2.

**) O těchto výrazech jednáno v našich rozpravách arithmetických z ročníku VII.

$$(8) \qquad P(D, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$$

$$S = \Delta^s P(D, s).$$

Výraz tento zůstane roven součtu (7) pro všechna s bez rozdílu a tedy též pro hodnoty s, které náležejí intervallu (0 . 1). Pro tyto pak obdržíme z rovnice (6)

$$S = \Delta^s P(D, s) = 2 \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{1-s}} \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{h}\right) \sin\left(\frac{s\pi}{2} + \frac{2mh\pi}{\Delta}\right)$$

Jest pak dle známých vět algebraicko-arithmetických jeden ze součtů

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{h}\right) \cos \frac{2hm\pi}{\Delta}, \quad \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{h}\right) \sin \frac{2hm\pi}{\Delta}$$

nullou a součet zbývající rovná se

$$\left(\frac{D}{m}\right) \sqrt{\Delta};$$

a sice mizí první součet, je-li $D < 0$, a druhý v případě $D > 0$. Klademe-li tudíž

$$(9) \qquad A(D, s) = \begin{cases} \sin \dfrac{s\pi}{2} & \text{v případě } D > 0, \\ \cos \dfrac{s\pi}{2} & D < 0, \end{cases}$$

obdržíme

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{h}\right) \sin\left(\frac{s\pi}{2} + \frac{2mh\pi}{\Delta}\right) = \left(\frac{D}{m}\right) \sqrt{\Delta}\, A(D, s),$$

a tudíž zní náš výsledek, dříve již Kinkelinem a Hurwitzem odvozený

$$\Delta^s P(D, s) = 2 \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \sqrt{\Delta}\, A(D, s) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m^{1-s}}$$

čili

$$(10) \qquad \left(\frac{\Delta}{2\pi}\right)^s P(D, s) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \Gamma(1-s)\, A(D, s)\, P(D, 1-s).$$

Z rovnice této plyne logarithmickým derivováním

$$(11) \quad \frac{P'(D,s)}{P(D,s)}+\frac{P'(D,1-s)}{P(D,1-s)}=\frac{A'(D,s)}{A(D,s)}+\log\frac{2\pi}{\Delta}-\psi(1-s).$$

Kdyby nyní $P\left(D,\frac{1}{2}\right)$ bylo nullou, musilo by též $P'\left(D,\frac{1}{2}\right)=0.$

Kdyby pak $P^{(m)}\left(D,\frac{1}{2}\right)$ byla nejnižší od nully různá derivace, obdrželi bychom z rovnice (10) m-násobným derivováním a substitucí $s=\frac{1}{2}$ patrně

$$\sqrt{\frac{\Delta}{2\pi}}\,P^{(m)}\left(D,\frac{1}{2}\right)=(-1)^m\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)A\left(D,\frac{1}{2}\right)P^{(m)}\left(D,\frac{1}{2}\right),$$

a odtud, ježto

$$A\left(D,\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

rovnici

$$(-1)^m=1,$$

takže by m bylo sudé. Derivuje-li se $(m+1)$kráte, obdrží se pak

$$\sqrt{\frac{\Delta}{2\pi}}\,P^{(m+1)}\left(D,\frac{1}{2}\right)+(m+1)\sqrt{\frac{\Delta}{2\pi}}\,P^{(m)}\left(D,\frac{1}{2}\right)\log\frac{\Delta}{2\pi}$$

$$=-\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)A\left(D,\frac{1}{2}\right)P^{(m+1)}\left(D,\frac{1}{2}\right)$$

$$+(m+1)\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)A\left(D,\frac{1}{2}\right)\left[\frac{A'\left(D,\frac{1}{2}\right)}{A\left(D,\frac{1}{2}\right)}-\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]P^{(m)}\left(D,\frac{1}{2}\right)$$

a odtud

$$(11^a) \quad 2\,\frac{P^{(m+1)}\left(D,\frac{1}{2}\right)}{P^{(m)}\left(D,\frac{1}{2}\right)}=(m+1)\left[\frac{A'\left(D,\frac{1}{2}\right)}{A\left(D,\frac{1}{2}\right)}+\log\frac{2\pi}{\Delta}-\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right].$$

Předpokládejme však, že již $P\left(D,\frac{1}{2}\right)\gtrless 0$, takže $m=0$, i máme pak z (11) pro $s=\frac{1}{2}$

$$2\,\frac{P'\left(D,\frac{1}{2}\right)}{P\left(D,\frac{1}{2}\right)}=\frac{A'\left(D,\frac{1}{2}\right)}{A\left(D,\frac{1}{2}\right)}+\log\frac{2\pi}{\Delta}-\psi\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ježto pak $\frac{A'(D,s)}{A(D,s)}$ jest buď $\frac{\pi}{2}\cot\frac{s\pi}{2}$ neb $-\frac{\pi}{2}\tan\frac{s\pi}{2}$, jak jest $D>0$ neb $D<0$, máme patrně

$$\frac{A'\left(D,\frac{1}{2}\right)}{A\left(D,\frac{1}{2}\right)}=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn.}\ D,$$

a tedy vyjde

$$(12)\qquad 2\,\frac{P'\left(D,\frac{1}{2}\right)}{P\left(D,\frac{1}{2}\right)}=C+\log\frac{8\pi}{\varDelta}+\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn.}\ D.$$

Ve zvláštním případě $D=-4$ plyne odtud na př.

$$(13)\quad 2\,\frac{\frac{\log 3}{\sqrt{3}}-\frac{\log 5}{\sqrt{5}}+\frac{\log 7}{\sqrt{7}}-\frac{\log 9}{\sqrt{9}}\pm}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}\mp}=C+\log 2\pi-\frac{\pi}{2}.$$

3. O funkci $P(D,s)$ je známo, že ji lze psáti jako součin

$$P(D,s)=\prod_p\frac{1}{1-\left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{p^s}}$$

vztahující se ke všem číslům kmenným $p=2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,$

Součin ten konverguje absolutně pro $s>1$, a logarithmickým derivováním obdržíme

$$\frac{P'(D,s)}{P(D,s)}=-\sum_p\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p^s-\left(\frac{D}{p}\right)}.$$

Smíme-li zde připustiti též hodnoty $s<1$, a zejména $s=\frac{1}{2}$, obdržíme tedy v posledním případě podle vzorce (12)

$$(14)\qquad 2\sum_p\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}-\left(\frac{D}{p}\right)}=\log\frac{\varDelta}{8\pi}-C-\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn.}\ D.$$

Předpokládáme-li tuto rovnici za správnou, což jest pravděpodobné, můžeme z ní odvoditi důsledky velmi zajímavé.

Klademe-li

$$2\gamma = -C - \log 8\pi - \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn.}\,D\,,$$

a uvažujeme-li pouze kmenná čísla p, jež nepřevyšují danou kladnou veličinu x, plyne z rovnice (14)

$$(14^a)\qquad \sum_{p\leq x}\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}-\left(\frac{D}{p}\right)} \sim \log\sqrt{\varDelta}+\gamma\,,$$

při čemž znaménko $\sim$ naznačuje, že se levá strana pro nekonečně rostoucí x blíží tétéž veličině jako strana pravá (v našem případě stálá). Jest však

$$\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}-\left(\frac{D}{p}\right)} = \left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}} + \left(\frac{D}{p}\right)^2\frac{\log p}{p} + \left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p\left[\sqrt{p}-\left(\frac{D}{p}\right)\right]}$$

a ježto řada

$$\sum_{p}\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p\left[\sqrt{p}-\left(\frac{D}{p}\right)\right]} = A$$

konverguje absolutně, máme

$$\sum_{p\leq x}\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{p} + \sum_{p\leq x}\left(\frac{D}{p}\right)^2\frac{\log p}{p} \sim \log\sqrt{\varDelta}+\gamma - A\,,$$

při čemž A zůstává v konečných mezích nezávislých na D.

Znamenáme-li pak literou d veškery kmenné činitele z D, jichž jest počet konečný, a znamenáme-li

$$\sum_{d}\frac{\log d}{d} = f(D)\,,$$

bude pro $x > \varDelta$

$$\sum_{p\leq x}\left(\frac{D}{p}\right)^2\frac{\log p}{p} = \sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p} - f(D)\,.$$

Jest však dle známé věty Mertensovy

$$\sum_{p<x}\frac{\log p}{p} = \log x - \delta\,,$$

kde neznámá veličina δ jest obsažena mezi -2 a 2, a tedy bude

$$(15)\qquad \sum_{p\leq x}\left(\frac{D}{p}\right)\frac{\log p}{\sqrt{p}} \sim -\log x + \log\sqrt{\varDelta} + f(D) + \gamma - A + \delta$$

Tato rovnice stanoví součet (15) až na chybu menší než ± 2, a vyjadřuje okolnost, že kmenná čísla p, pro něž

$$\left(\frac{D}{p}\right) = -1$$

mají převahu nad čísly kmennými, pro něž

$$\left(\frac{D}{p}\right) = +1$$

S výsledky těmito zdají se býti v souhlasu úvahy rovněž ne pevně založené, které uveřejnil p. Ern. Cesàro ve svém článku *Sulla distribuzione dei numeri primi* obsaženém ve zprávách akademie Neapolské z r. 1896, a které vztahujíce se ku případu zvláštnímu $D = -4$ obírají se výrazy poněkud jinými, jimž vzorec (15) může sloužiti za pramen odvození.
