Matyáš Lerch

Sur quelques propriétés d'une transcendante uniforme

Compte rendu du quatrième Congrès scientifique international des catholiques tenu à Fribourg (Suisse), Fribourg 1898, 58–69

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/501514`

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS

D'UNE TRANSCENDANTE UNIFORME

par M. Lerch,

professeur à l'Université de Fribourg (Suisse).

Nous allons établir, par la voie du calcul, quelques propositions que nous avons trouvées autrefois dans nos recherches sur les séries Malmsténiennes. Il s'agit de la fonction transcendante définie par la série

$$\text{(1)} \qquad R(w,s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^s}$$

convergente lorsque la partie réelle de la variable s surpasse l'unité. Nous allons prouver d'abord que la fonction

$$\text{(2)} \qquad R(w,s) - \frac{1}{s-1} = G(w,s)$$

est une transcendante entière et que sa valeur correspondant au point $s = 1$ est la fonction

$$\text{(3)} \qquad G(w,1) = -\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}.$$

Ensuite, la fonction $R(w, s)$ étant reconnue régulière au point $s = 0$, il s'agit de trouver son développement suivant les puissances de s; les deux premiers coefficients s'expriment sous forme finie, à savoir :

$$\text{(4)} \qquad R(w,s) = \left\| \frac{1}{2} - w \right\| + \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}} . \, s + A_2 s^2 + A_3 s^3 + \cdots$$

Ces deux formules (3) et (4) fournissent une foule des résultats connus de la théorie des fonctions Eulériennes et font voir que la théorie des séries Malmsténiennes a ouvert la voie la plus directe, et la plus simple en même temps, à la théorie de la fonction gamma.

Soit n une quantité positive quelconque supérieure à 1, et s une quantité complexe dont la partie réelle soit positive; la formule du binôme nous donne alors

$$\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} = s.\ \frac{1}{n^{1+s}} - \frac{s\,(s+1)}{1.\ 2}.\ \frac{1}{n^{2+s}}$$
$$+\ \frac{s\,(s+1)\,(s+2)}{1.\ 2.\ 3}\ \frac{1}{n^{3+s}} - \frac{s\,(s+1)\,(s+2)\,(s+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.\ \frac{1}{n^{4+s}} + \cdots\cdots;$$

cela étant, posons $n = w + \nu$, w étant supérieur à l'unité, et faisons la somme des résultats pour $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$; il s'ensuit, en employant l'écriture expliquée par la formule (1),

$$\frac{1}{w^s} = s\ \mathrm{R}\ (w, 1+s) - \frac{s\,(s+1)}{1.\ 2}\ \mathrm{R}\,(w, 2+s)$$
$$+ \frac{s\,(s+1)\,(s+2)}{1.\ 2.\ 3}\,\mathrm{R}\,(w, 3+s) - \frac{s\,(s+1)\,(s+2)(s+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\,\mathrm{R}\,(w, 4+s)\cdots$$

Dans cette équation, changeons s en $s - 1$ et écrivons le résultat comme il suit :

$$\text{(I)}\qquad \mathrm{R}\,(w, s) = \frac{1}{(s-1)\,w^{s-1}} + \frac{s}{1.\ 2}\ \mathrm{R}\,(w,\ s+1)$$
$$- \frac{s\,(s+1)}{1.\ 2.\ 3.}\,\mathrm{R}\,(w, s+2) + \frac{s\,(s+1)\,(s+2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\ \mathrm{R}\,(w,\ s+3) - \cdots\cdots$$

Dans cette formule la quantité s a dû être supposée avoir une partie réelle supérieure à l'unité ; mais on peut considérer le deuxième membre comme définition de la fonction R (w, s), étendue aux valeurs de s dont la partie réelle est positive, car il est évident que cette série donne immédiatement la continuation analytique de notre transcendante R (w, s). En remplaçant, dans cette série, la quantité

$$s\ \mathrm{R}\,(w, s+1)$$

par sa valeur

$$\frac{1}{w^s} + \frac{s\,(s+1)}{1.\ 2}\ \mathrm{R}\,(w, s+2) - \frac{s\,(s+1)\,(s+2)}{1.\ 2.\ 3}\ \mathrm{R}\,(w, s+3) + \cdots$$

on aura le développement

$$\text{(II)}\qquad \mathrm{R}\,(w, s) = \frac{1}{(s-1)\,w^{s-1}} + \frac{1}{2w^s} + \frac{s\,(s+1)}{1.\ 2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\mathrm{R}\,(w, s+2)$$
$$- \frac{s\,(s+1)\,(s+2)}{1.\ 2.\ 3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\mathrm{R}\,(w, s+3)$$
$$+ \frac{s\,(s+1)\,(s+2)\,(s+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)\mathrm{R}\,(w,\ s+4)$$
$$- \cdots + (-1)^n \frac{s\,(s+1)\cdots(s+n-1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)\mathrm{R}(w, s+n) + \cdots$$

Le second membre de cette équation reste convergent tant que la partie réelle de la quantité s reste supérieure à moins un, et l'on en peut déduire un autre dont le domaine de convergence est encore plus étendu, en remplaçant la quantité

$$(s+1)\ \mathrm{R}\,(w,\ s+2)$$

par la série qui la représente suivant la formule (I). En procédant de la sorte on s'assure que la fonction $R(w, s)$ se comporte régulièrement dans tout le plan, sauf au point $s = 1$ qui est un pôle du premier degré, de manière que la différence

$$G(w, s) = R(w, s) - \frac{1}{s-1}$$

est une transcendante entière par rapport à la variable complexe s. Nous nous arrêtons seulement aux développements (I) et (II) qui permettent d'étudier la fonction aux environs du point $s = 1$ et du point $s = 0$.

Le deuxième membre de l'équation (I) peut être développé suivant les puissances de la quantité $s - 1$, à savoir

$$R(w, s) = \frac{1}{s-1} + a_0 + a_1 (s-1) + a_2 (s-1)^2 + \dots$$

et nous allons déterminer la quantité a_0. On a évidemment

$$a_0 = -\log w + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} R(w, \nu);$$

en faisant usage de la série de définition

$$R(w, \nu) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(w+\mu)^\nu},$$

on aura la série à double entrée absolument convergente

$$a_0 = -\log w + \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} \frac{1}{(w+\mu)^\nu};$$

effectuant la sommation par rapport à ν, il vient

$$a_0 = -\log w - \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[\log\left(1 + \frac{1}{w+\mu}\right) - \frac{1}{w+\mu}\right]$$

ou bien

$$a_0 = -\log w - \lim_{n=\infty} \sum_{\mu=0}^{n-1} \left[\log \frac{w+\mu+1}{w+\mu} - \frac{1}{w+\mu}\right],$$

ce qu'on peut écrire

$$a_0 = \lim_{n=\infty} \left[-\log(w+n) + \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{1}{w+\mu}\right].$$

D'après une formule élémentaire cette limite n'est autre chose que la quantité

$$a_0 = -\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)},$$

et il s'ensuit que la fonction $R(w,s)$ a, autour du point $s=1$, le développement de la forme

$$(3^*) \qquad R(w,s)=\frac{1}{s-1}-\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}+a_1(s-1)+a_2(s-1)^2+\ldots,$$

où les quantités a_1, a_2,... sont des fonctions de w. Cette formule vérifie l'équation (3) qu'on peut encore écrire comme il suit

$$(3^a) \qquad \lim_{s=1}\left\{\frac{1}{s-1}-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(w+\nu)^s}\right\}=\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}.$$

Revenons maintenant sur l'équation (II); le deuxième membre peut être développé par la série de Maclaurin

$$R(w,s)=A_0+A_1 s+A_2 s^2+\ldots,$$

et l'on a évidemment, comme cela prouve l'équation

$$\frac{1}{(s-1)w^{s-1}}+\frac{1}{2w^s}=\left(\frac{1}{2}-w\right)+\left[\left(w-\frac{1}{2}\right)\log w-w\right]s+\ldots,$$

les valeurs suivantes pour les premiers coefficients :

$$A_0=\frac{1}{2}-w,$$

$$A_1=\left(w-\frac{1}{2}\right)\log w-w+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)R(w,2)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)R(w,3)$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)R(w,4)-\ldots..$$

et il s'agit d'obtenir la valeur de la série

$$A_1-\left(w-\frac{1}{2}\right)\log w+w=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{2n(n+1)}R(w,n)$$

que j'appelle S. M. Hermite a eu la bonté de me faire observer que sa valeur s'obtient immédiatement, en introduisant la fonction $\varphi(w)$ par l'équation

$$\varphi'''(w)=R(w,2);$$

de cette manière on aura évidemment

$$2S=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\frac{\varphi^{(n+1)}(w)}{(n+1)!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varphi^{(n+1)}(w)}{n!}-2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(w)}{n!}$$

et la formule de Taylor fait voir que l'on a

$$2S=[\varphi'(w+1)-\varphi'(w)-\varphi''(w)]-2\left[\varphi(w+1)-\varphi(w)-\varphi'(w)-\frac{1}{2}\varphi''(w)\right]$$

ou bien

$$2S=\varphi'(w+1)+\varphi'(w)+2\varphi(w)-2\varphi(w+1).$$

Cela étant, observons que l'équation élémentaire

$$D^2\log\Gamma(w)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(w+\nu)^2}$$

permet d'écrire

$$\varphi''' (w) = \mathrm{R} (w, 2) = \mathrm{D}^2 \log \Gamma (w)$$

d'où il suit

$$\varphi'(w) = \log \Gamma (w), \quad \varphi(w) = \int_0^w \log \Gamma (x)\, dx$$

et par conséquent

$$\varphi (w + 1) - \varphi (w) = \int_w^{w+1} \log \Gamma (x)\, dx.$$

La valeur de S qu'on vient de trouver est donc la quantité

$$\mathrm{S} = \log \Gamma (w) + \frac{1}{2} \log w - \int_w^{w+1} \log \Gamma (x)\, dx.$$

Cela étant la formule bien connue de Raabe

$$(5) \qquad \int_w^{w+1} \log \Gamma (x)\, dx = w \log w - w + \log \sqrt{2\pi}$$

nous donne

$$\mathrm{S} = \log \Gamma (w) - \left(w - \frac{1}{2}\right) \log w + w - \log \sqrt{2\pi}$$

et la formule

$$\mathrm{S} = \mathrm{A}_1 - \left(w - \frac{1}{2}\right) \log w + w$$

donne la quantité A_1 sous la forme

$$\mathrm{A}_1 = \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}};$$

le résultat que nous venons de vérifier est donc le théorème, qu'*aux environs du point* $s = 0$ *la fonction* $R(w, s)$ *se développe par la série* (4).

On a reçu en même temps le développement analogue à la série de Stirling

$$(6) \qquad \log \Gamma (w) = \left(w - \frac{1}{2}\right) \log w - w + \log \sqrt{2\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{2n(n+1)} \mathrm{R}(w, n),$$

lequel est convergent pour w supérieur à un.

Les théorèmes (3) et (4) ont été démontrés dans le cas de $w > 1$, mais il est facile de se convaincre, à l'aide de l'équation

$$\mathrm{R} (w, s) = \frac{1}{w^s} + \mathrm{R} (w + 1, s),$$

qu'ils ont lieu aussi pour w inférieur à un.

Il est aussi clair que les résultats que nous venons d'établir ont lieu aussi pour les valeurs imaginaires de w, puisque nous sommes dans le domaine des fonctions analytiques. En particulier, le développement (6) est convergent tant que la quantité complexe w a ou sa partie réelle ou la valeur absolue de sa partie imaginaire plus grande que un. Cette propriété de la série S d'être convergente aussi pour des valeurs de w dont la partie réelle est négative, la met du côté de la formule obtenue par Stieltjes[1]

$$S = \int_0^\infty \frac{P(x)\,dx}{x+w}, \quad P(x) = \frac{1}{2} - x + E(x),$$

la lettre $E(x)$ représentant le plus grand nombre entier contenu dans x. En généralisant la question, considérons l'intégrale

$$S_1 = \int_0^\infty \frac{s\,P(x)\,dx}{(x+w)^{s+1}};$$

en partageant l'intervalle de l'intégration en parties $(0\ldots 1)$, $(1\ldots 2)$, $(2\ldots 3)$, ... on trouve aisément

$$S_1 = \sum_{n=0} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x\right) \frac{s\,dx}{(w+x+n)^{s+1}} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x\right) s\,R(w+x, s+1)\,dx.$$

Cette intégrale étant mise sous la forme

$$S_1 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) d\,R(w+x, s)$$

l'intégration par parties la ramène à l'expression

$$S_1 = \frac{1}{2} R(w+1, s) + \frac{1}{2} R(w, s) + \frac{1}{s-1} \left\{ R(w+1, s-1) - R(w, s-1) \right\}$$

d'où il suit

$$R(w, s) = \frac{1}{(s-1)\,w^{s-1}} + \frac{1}{2w^s} + \int_0^\infty \frac{s\,P(x)\,dx}{(x+w)^{s+1}}. \tag{7}$$

Cette formule qui généralise le résultat de Stieltjes peut servir à obtenir le développement semiconvergent

$$R(w, s) = \frac{1}{(s-1)\,w^{s-1}} + \frac{1}{2w^s} + \frac{1}{2} B_1 \binom{s}{1} \frac{1}{w^{s+1}} - \frac{1}{4} B_2 \binom{s+2}{3} \frac{1}{w^{s+3}} + \frac{1}{6} B_3 \binom{s+4}{5} \frac{1}{w^{s+5}} - \cdots$$

où $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}, \ldots$ sont les nombres de Bernouilli.

II

Lorsque la partie réelle de la variable s surpasse l'unité, la fonction $R(w, s)$ est identique avec la somme de la série

[1] Sur le développement de log $\Gamma(a)$, *Journal de Mathématiques*, 4e série, tome V, 1889.

$$R(w, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^s};$$

on a évidemment

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} R\left(\frac{w+\alpha}{m}, s\right) = \sum_{\alpha, n} \frac{m^s}{(w+\alpha+mn)^s},$$

et puisque chaque entier non négatif peut se mettre d'une seule manière sous la forme

$$\alpha + mn, \; (\alpha = 0, 1, \ldots m-1; n = 0, 1, 2, \ldots \infty),$$

il s'ensuit que l'on a la relation

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} R\left(\frac{w+\alpha}{m}, s\right) = m^s R(w, s). \tag{8}$$

Il est clair que cette relation aura lieu aussi pour d'autres valeurs de s, pour lesquelles la série qui nous l'a subie ne converge plus.

Essayons maintenant de trouver le développement trigonométrique s'il existe, valable pour $0 < w < 1$

$$R(w, s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos 2nw\pi + \sum_{n=1}^{\infty} B \sin 2nw\pi,$$

les coefficients A_n et B_n étant indépendants de w, On a d'abord

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} R\left(\frac{w+\alpha}{m}, s\right) = mA_0 + \sum_{n=1}^{\infty} mA_{n\,n} \cos 2nw\pi$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} mB_{mn} \sin 2nw\pi$$

et, d'après l'équation (8), ce développement doit coïncider avec celui de la fonction

$$m^s R(w, s) = m^s A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m^s A_n \cos 2nw\pi + \sum_{n=1}^{\infty} m^s B_n \sin 2nw\pi;$$

il s'ensuit par conséquent que l'on doit avoir

$$A_0 = m^{s-1} A_0, \; A_{mn} = m^{s-1} A_n, \; B_{mn} = m^{s-1} B_n;$$

la quantité s étant supposée différente de la valeur singulière 1, on en conclut les valeurs

$$A_0 = 0, \; A_m = m^{s-1} A_1, \; B_m = m^{s-1} B_1,$$

et le développement cherché deviendra

$$R(w, s) = A \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2mw\pi}{m^{1-s}} + B_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2mw\pi}{m^{1-s}}. \tag{9}$$

Les coefficients A_1 et B_1 ne peuvent pas être obtenus à l'aide de la propriété caractéristique (8) qui les laisse entièrement indéterminés, et, pour y parvenir, il faut employer d'autres moyens.

A cet effet observons que l'équation (9) donne

$$R(w, s) + R(1 - w, s) = 2 A_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2 m w \pi}{m^{1-s}},$$

$$R(w, s) - R(1 - w, s) = 2 B_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2 m w \pi}{m^{1-s}},$$

et il suffit de connaître les limites

$$(10) \qquad \lim_{w=0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2 m w \pi}{(m w)^{1-s}} w, \quad \lim_{w=0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2 m w \pi}{(m w)^{1-s}} w,$$

dont les valeurs sont respectivement $\frac{1}{2 A_1}$ et $\frac{1}{2 B_1}$, pour en conclure les constantes cherchées. La première idée qui se présente dans cette question est de prendre $m w = x$, $w = dx$, ce qui change les limites considérées en intégrales définies suivantes

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2 x \pi}{x^{1-s}} dx = \frac{1}{2 A_1}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin 2 x \pi}{x^{1-s}} dx = \frac{1}{2 B_1},$$

dont on conclut les résultats voulus

$$2 A_1 = \frac{(2 \pi)^s}{\Gamma(s) \cos \frac{s \pi}{2}}, \quad 2 B_1 = \frac{(2 \pi)^s}{\Gamma(s) \sin \frac{s \pi}{2}}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (9) on a la formule de M. Hurwitz

$$(9') \qquad R(w, s) = 2 \frac{\Gamma(1 - s)}{(2 \pi)^{1-s}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{s \pi}{2} + 2 m w \pi\right)}{m^{1-s}}$$

qui, comme on sait, n'est qu'un corollaire d'une formule très intéressante obtenue par M. Lipschitz.

Mais le raisonnement précédent qui nous a fourni les limites (10) laisse beaucoup à désirer au point de vue de la rigueur ; donc, pour rendre applicable la méthode que nous venons d'exposer, nous allons démontrer la proposition suivante :

Soit $f(x)$ une fonction positive et décroissante, dans l'intervalle $(0 \ldots\ldots \infty)$, qui alors ne peut devenir infinie que pour $x = 0$, et soit

$$\lim_{x=\infty} f(x) = 0,$$

ce qui a pour conséquence la convergence des deux séries

$$G(v) = v \sum_{n-1}^{\infty} f(nv) \cos nv,$$

$$H(v) = v \sum_{n=1} f(nv) \sin nv;$$

alors je dis que l'on a

$$\lim_{v=0} G(v) = v \lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x) \cos x \, dx,$$

$$\lim_{v=0} H(v) = \lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x) \sin x \, dx,$$

pourvu que dans chaque équation les deux membres existent.

Démonstration. — Je me borne à établir la première formule seulement, la démonstration de la deuxième étant tout à fait analogue.

Soit N un entier positif impair, et m un entier positif variable; considérons la valeur particulière de $v = \frac{N\pi}{2m}$ qui s'approche de zéro pour m infini, et décomposons la série $G(v)$ en deux parties

$$G_0(v) = v \sum_{n=1}^{m} f(nv) \cos nv,$$

$$G_1(v) = v \sum_{n=m+1}^{\infty} f(nv) \cos nv,$$

de la sorte que

$$G(v) = G_0(v) + G_1(v).$$

Cela étant, j'observe que la somme

$$G_2(v) = v \sum_{n=m+1}^{m+\left[\frac{\pi}{v}\right]} f(nv) \cos nv$$

se compose des termes de signe égal et surpasse en valeur absolue la série $G_1(v)$, ce qui donne

$$G_1(v) = \theta\, G_2(v), \qquad (0 < \theta < 1),$$

et je me rappelle que cette somme qui à cause de la valeur $v = \frac{N\pi}{2m}$ s'écrit comme ilsuit

$$G_2(v) = \frac{N\pi}{2m} \sum_{n=m+1}^{\left[\frac{2m}{N}\right]+m} f\left(\frac{nN\pi}{2m}\right) \cos \frac{nN\pi}{2m}$$

ou bien

$$G_2(v) = \frac{N\pi}{2m} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{2m}{N}\right]} f\left(\frac{N\pi}{2} + \nu \frac{N\pi}{2m}\right) \cos\left(\frac{N\pi}{2} + \nu \frac{N\pi}{2m},\right)$$

se réduit pour m infini à l'intégrale

$$\int_{\frac{N\pi}{2}}^{\frac{N\pi}{2}+\pi} f(x) \cos x \, dx.$$

On a donc

$$G_2(v) = \lambda \int_{\frac{N\pi}{2}}^{\frac{N\pi}{2}+\pi} f(x) \cos x \, dx, \quad \lim_{m=\infty} \lambda = 1,$$

et par conséquent

$$\text{(a)} \qquad G(v) = G_0(v) + \theta\lambda \int_{\frac{N\pi}{2}}^{\frac{N\pi}{2}+\pi} f(x) \cos x \, dx.$$

Cela étant, si l'intégrale

$$\text{(b)} \qquad \int_0^{\frac{N\pi}{2}} f(x) \cos x \, dx = J$$

existe, on a

$$J = \lim_{m=\infty} v \sum_{n=1}^{m} f(nv) \cos nv, \quad v = \frac{N\pi}{2m},$$

c'est-à-dire

$$\text{(c)} \qquad J = \lim_{v=0} G_0(v);$$

il s'ensuit

$$G_0(v) = \lambda' J, \quad \lim_{v=0} \lambda' = 1,$$

ce qui transforme la formule (a) comme il suit

$$\text{(a')} \qquad G(v) = \lambda' \int_0^{\frac{N\pi}{2}} f(x) \cos x \, dx + \theta\lambda \int_{\frac{N\pi}{2}}^{\frac{N\pi}{2}+\pi} f(x) \cos x \, dx.$$

Si la limite

$$\lim_{v=0} G(v)$$

existe indépendamment de la forme de la quantité v, elle aura pour valeur l'expression

$$\int_0^{\frac{N\pi}{2}} f(x) \cos x \, dx + \theta \int_{\frac{N\pi}{2}}^{\frac{N\pi}{2}+\pi} f(x) \cos x \, dx;$$

mais, cette limite devant être indépendante du nombre auxiliaire N, il s'ensuit

$$\lim_{v=0} \mathrm{G}(v) = \int_0^\infty f(x) \cos x \, dx.$$

Dans ce cas où l'intégrale (b) existe, le théorème est donc démontré. Cette condition est par exemple toujours remplie, si la quantité $f(0)$ est finie, ou si le produit $x^s f(x)$ reste fini pour $x = 0$, s étant une fraction positive propre.

Supposons en second lieu que l'intégrale J n'existe pas ; alors je pose $\mathrm{N} = 1$, $m = 2m_1$ et j'observe que l'on a

$$\mathrm{G}_0(v) = \mathrm{G}'_0(v) + \mathrm{G}''_0(v), \quad v = \frac{\pi}{4m_1},$$

où je pose pour abréger

$$\mathrm{G}'_0(v) = v \sum_{n=1}^{m_1} f(nv) \cos nv, \quad \mathrm{G}''_0(v) = v \sum_{n=m}^{2m_1} f(nv) \cos nv.$$

Or évidemment la quantité $\mathrm{G}''_0(v)$ se réduit pour m_1 infini à l'intégrale

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x \, dx,$$

et de l'autre côté la quantité $\mathrm{G}_0'(v)$ reste au-dessus de la quantité

$$\frac{v}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{m_1} f(nv).$$

Je dis que cette quantité devient infinie avec m_1. Car en effet l'inégalité

$$vf(nv) > \theta \int_{nv}^{nv+v} f(x) \, dx$$

donne

$$v \sum_{n=1}^{m_1} f(nv) > \int_v^{\frac{\pi}{4}+v} f(x) \, dx$$

et le second membre est infini pour $v = 0$, d'après l'hypothèse.

Il s'ensuit que lorsque l'intégrale

$$\int_0 f(x) \cos x \, dx$$

est divergente, la quantité $\mathrm{G}(v)$ reçoit des valeurs infiniment grandes au moins pour une espèce des valeurs infiniment petites de v.

L'équation (9*) étant démontrée par ce qui précède, nous en allons déduire une formule classique de Kummer concernant le développement trigonométrique de $\log \Gamma(w)$. Il suffit en effet d'employer les développements

$$\frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} = \frac{1}{2\pi} + \frac{\log 2\pi - \Gamma'(1)}{2\pi} s + \ldots,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{s\pi}{2} + 2mw\pi\right)}{m^{1-s}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2mw\pi}{m} + \Phi(w)s + \ldots,$$

où

$$R(w, s) = \left(\frac{1}{2} - w\right) + \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}} s + \ldots,$$

$$\Phi(w) = \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2mw\pi}{m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log m}{m} \sin 2mw\pi,$$

pour en déduire

$$\left(\frac{1}{2} - w\right) + \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}} \cdot s + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2mw\pi}{m\pi}$$

$$+ \left\{ [\log 2\pi - \Gamma'(1)] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2mw\pi}{m\pi} + \frac{1}{\pi} \Phi(w) \right\} s + \cdots$$

En comparant ces développements, nous avons d'abord la formule connue

$$\frac{1}{2} - w = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2mw\pi}{m\pi},$$

et puis

$$\log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}} = \left(\frac{1}{2} - w\right) [\log 2\pi - \Gamma'(1)] + \frac{1}{\pi} \Phi(w);$$

en changeant w en $1 - w$ et ajoutant, j'aurai ensuite

$$\log \frac{\Gamma(w)\Gamma(1-w)}{2\pi} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2mw\pi}{m};$$

le premier membre ayant pour valeur $-\log 2 \sin w\pi$, la formule finale deviendra

$$\log \Gamma(w) + \frac{1}{2} \log \frac{\sin w\pi}{\pi} + [\log 2\pi - \Gamma'(1)] \left(w - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log m}{m\pi} \sin 2mw\pi,$$

ce qui est la formule de Kummer.

Nous avons obtenu plusieurs résultats de cette catégorie en suivant la méthode qui vient d'être exposée, dans divers articles concernant la théorie des séries Malmsténiennes qui ont été publiés en langue tchèque dans les Mémoires de l'Académie François-Joseph.