Matyáš Lerch

Résumé de trois notes d'Arithmétique intitulées: Démonstration arithmétique de l'équation fondamentale de Dirichlet. Sur une liasion entre le ligne de Legendre et les nombres de Moebius. Sur la somme des plus grands entiers dans les termes d'une progression arithmétique fractionnaire du même ordre et sur son rapport au nombre des classes

Bulletin int. de l'Ac. Prague 5 (1898), 33–38

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/501513`

Paar Arme unregelmässig entwickelt. Die Hauptaxe ist regelmässig, der eine Arm biegt sich jedoch in der Nähe des Kreuzungsknoten ab, verläuft dann aber gerade. Fundort: Klabava bei Rokycan, Bande $d_{1\alpha}$.

Tafelerklärungen.

Fig. 1. ? *Astylomanon cratera* Roemer sp. in natürlicher Grösse; Dvorce e_2.
» 2—10. *Pyritonema bohemicum* Katzer sp. 40m. vergrössert; Dvorce f_1.
» 11—23. *Pyritonema Feistmanteli* Počta, Fig. 12 vergrössert 40m.; die übrigen 15m. vergr.; St. Benigna, Klabava, Točník $d_{1\alpha}$.
» 24. *Pyritonema ultimum* Počta, vergrössert 15m.; Srbsko h_1.
» 25—50. *Pyritonema Barrandei* Počta, Fig. 25 vergr. 40m.; die übrigen 15m.; Klabava $d_{1\alpha}$.
» 51—55. *Protospongia Nováki* Počta, vergr. 15m.; Klabava $d_{1\alpha}$.

Résumé de trois notes d'Arithmétique, intitulées:

Démonstration arithmétique de l'équation fondamentale de Dirichlet.

Sur une liaison entre le signe de Legendre et les nombres de Moebius.

Sur la somme des plus grands entiers dans les termes d'une progression arithmétique fractionnaire du second ordre et sur son rapport au nombre des classes.

Par

M. Lerch,

professeur à l'Université de Fribourg (Suisse).

La première note développe une démonstration purement arithmétique de la formule

$$(1)\qquad \left(\frac{Q^2}{l}\right) \sum_{(a,\,b,\,c)} \overline{N}(l;\, a,\, b,\, c) = \tau \sum_{\lambda\lambda' = l} \left(\frac{-\varDelta}{\lambda}\right)\left(\frac{Q^2}{\lambda'}\right).$$

Elle se rattache aux formes a, b, c qui représentent les différentes classes primitives et positives, d'un discriminant négatif $-\varDelta = b^2 - 4ac$. Le discriminant étant supposé général, on a $\varDelta = \varDelta_0 Q^2$, où $-\varDelta_0$ est le discriminant fondamental correspondant, et $\tau = 6$ pour $\varDelta = 3$, $\tau = 4$ pour $\varDelta = 4$, $\tau = 2$ pour $\varDelta > 4$. On a désigné par $\overline{N}$ $(l;\ a,\ b,\ c)$ le nombre des solutions de l'équation

$$a\,m^2 + b\,m\,n + c\,n^2 = l,$$

par des entiers quelconques m, n, correspondant à un entier positif donné l. La sommation dans le premier membre s'étend à toutes les classes, et dans le second membre à tous les entiers positifs λ, λ' ayant leur produit égal à l.

La formule (1) n'exprime pas d'autre chose que l'équation de Dirichlet

$$\sum_{a,\,b,\,c} \sum_{m,\,n}{}' \left(\frac{Q^2}{a m^2 + b m n + c n^2}\right) F(a m^2 + b m n + c n^2)$$
$$= \tau \sum_{h,\,k} \left(\frac{Q^2}{k}\right)\left(\frac{-\Delta}{h}\right) F(h k), \quad \left(\begin{array}{l} h,\, k = 1, 2, 3, \ldots \\ m,\, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \text{excepté } m = n = 0 \end{array}\right).$$

Ici se présente une voie plus commode pour parvenir aux formules connues de Dirichlet, qu'on peut obtenir sans faire usage des moyens compliqués de l'Analyse. J'ai pris $F(z)$ telle que l'on ait

$$F(z) = 1 \text{ pour } z \leqq X,$$
$$F(z) = 0 \quad \text{»} \quad z > X.$$

Après avoir divisé les deux membres de l'équation de Dirichlet par X on passe aisément à la limite pour X infini.

La même chose s'effectue pour les formes aux discriminants positifs.

En particularisant le discriminant, on établit quelques formules purement arithmétiques très simples comme celles-ci par exemple

$$\sum_{a=0}^{\sqrt{X}} [\sqrt{X - a^2}] = \sum_{\lambda} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \left[\frac{X}{\lambda}\right], (\lambda = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$$

$$[\sqrt{X}] + \sum_{\nu=1}^{2\sqrt{X}} [\sqrt{X + 2\nu^2}] - \sum_{\nu=1}^{2\sqrt{X}} \left[\frac{3\nu}{2}\right] = \sum_{\lambda} (-1)^{\frac{\lambda^2-1}{8}} \left[\frac{X}{\lambda}\right].$$

Après avoir établi les formules de Dirichlet où intervient la série célèbre

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h} = P(D),$$

nous avons exprimé cette quantité par la dérivée logarithmique de la fonction gamma, à savoir

$$P(D) = -\frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{k}\right) \frac{\Gamma'\left(\frac{k}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{\Delta}\right)},$$

où D est un discriminant quelconque, positif ou négatif, et $\Delta = |D|$. Pour obtenir cette quantité dans sa forme élémentaire connue, nous avons fait usage de la formule de Gauss

$$\frac{\Gamma'\left(\frac{k}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{\Delta}\right)} - \Gamma'(1) = -\log 2\Delta - \frac{\pi}{2}\cot\frac{k\pi}{\Delta} + \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\cos\frac{2\alpha k\pi}{\Delta}\log\sin\frac{\alpha\pi}{\Delta}.$$

Cette voie fournit une expression du nombre des classes pour un discriminant positif, qui est générale, mais elle ne se simplifie que lorsque le discriminant est fondamental.

En discutant le cas où $D = p\,q^2$, p et q étant des nombre premiers, nous sommes parvenus à quelques formules concernant les sommes de Gauss, par exemple

$$\sum_{\varrho=1}^{pq-1}\left(\frac{p\,q^2}{\varrho}\right)\cos\frac{2\,m\,\varrho\,\pi}{p\,q} = -\left(\frac{p}{m\,q}\right)\sqrt{p},$$

en supposant m premier avec q. Ces résultats se trouvent généralisés à la fin de la note.

J'ai fait quelques observations relatives à la formule

$$Cl\,(D_0\,Q^2) = \frac{1}{\mu}\,Q\prod_q\left[1-\left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right].\,Cl(D_0),$$

dans laquelle q parcourt tous les facteurs premiers du nombre Q, et où μ est le nombre entier

$$\mu = \frac{\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2}}{\log\frac{T_0+U_0\sqrt{D}}{2}}$$

qu'on obtient par cette formule en prenant pour T, U la solution fondamentale de l'équation de Pell

$$T^2 - D\,U^2 = 4,$$

et la chose analogue pour l'indice 0.

Voici le résultat que m'a fournit ladite formule.

Etant donné un discriminant fondamental D_0 avec la solution correspondante T_0, U_0 de l'équation de Pell, on détermine aisément l'entier le plus petit $\tilde{\omega}$ correspondant à un entier positif m de manière que dans l'équation

$$\left(\frac{T_0+U_0\sqrt{D_0}}{2}\right)^{\tilde{\omega}} = \frac{t+u\sqrt{D_0}}{2}$$

l'entier u soit divisible par m; cet exposant $\tilde{\omega}$ sera désigné par $\tilde{\omega}\,(m)$.

Cela posé, j'appelle le n o m b r e d e P e l l l'entier u' défini par l'équation

$$\left(\frac{T_0 + U_0\sqrt{D_0}}{2}\right)^{Cl(D_0)} = \frac{t' + u'\sqrt{D_0}}{2},$$

$Cl\ (D_0)$ étant le nombre des classes.

En posant ensuite

$$(Q, D_0) = Q\prod_q \left\{1 - \left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right\} \left(\begin{matrix} q \text{ désignant des facteurs} \\ \text{premiers différents de } Q\end{matrix}\right),$$

je trouve cette congruence qui peut avoir quelque analogie avec le théorème de Fermat

$$\frac{\left(T_0 + U_0\sqrt{D_0}\right)^{(Q, D_0)} - \left(T_0 - U_0\sqrt{D_0}\right)^{(Q, D_0)}}{2^{(Q, D_0)}\sqrt{D_0}} \equiv 0 \ (\text{mod. } Q),$$

pourvu que Q soit premier avec le nombre de Pell.

Ensuite, si $\tilde{\omega}\ (m)$ est premier avec $Cl\ (D_0)$, il divise $(m,\ D_0)$, et m sera premier avec u'.

Dans la deuxième note nous avons considéré les nombres de Moebius $\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3, \ldots$, où ε_n est égal à $(-1)^{\tilde{\omega}}$, si n se compose de $\tilde{\omega}$ nombres premiers différents, en convenant de prendre $\varepsilon_n = 0$ lorsque n admet un diviseur carré. J'ai rappelé le théorème de Gauss qui exprime que la somme de toutes les racines primitives d'un module premier p est congrue à la quantité ε_{p-1} (mod. p). Ce qui donne la congruence

$$\sum_{\nu=1}^{p-2} \left(\frac{p-1}{\nu}\right)^2 g^\nu \equiv \varepsilon_{p-1}\ (\text{mod. } p),$$

où g représente une racine primitive.

Je suis passé ensuite au nombre des classes d'un discriminant négatif fondamental $-\varDelta$ en établissant la relation

$$(2)\left\{\begin{aligned} &\frac{2m}{\tau}\,Cl(-\varDelta) + \sum_{\alpha=1}^{\varDelta-1}\left(\frac{-\varDelta}{\alpha}\right)E^*\left(x + \frac{\alpha m}{\varDelta}\right) \\ &= \left(\frac{-\varDelta}{m}\right)\frac{\sqrt{\varDelta}}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\varDelta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}.\end{aligned}\right.$$

Dans l'hypothèse de $0 \leqq x < \frac{1}{\varDelta}$ et $m = 1$ cete équation

$$(2^a)\qquad \frac{2}{\tau}\,Cl(-\varDelta) = \frac{\sqrt{\varDelta}}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\varDelta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}$$

généralise un peu la formule de Dirchlet

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu}.$$

Nous étant rapproché de cette questions nous avons prouvé que la formule ($2^{\prime}$) subsiste même dans le cas général $\Delta = \Delta_0 Q^2$, et que les conditions précises de son existence — en restant dans le domaine des quantités positives — sont les suivantes

$$0 \leqq x < \frac{1}{\Delta_0 Q'},$$

en représentant par Q' le produirt des facteurs premiers du nombre Q. C'est seulement dans le cas où $\Delta_0 \equiv 0$ (mod. Q') que la formule subsiste dans tout l'intervale plus étendu $0 \leqq x < \frac{1}{\Delta_0}$.

Après cette excursion nous avons employé la formule (2) pour en conclure l'équation

$$\sum_{r=1}^{m-1} \left(\frac{r}{m}\right) \left(\frac{r+1}{m^2}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \varepsilon_m,$$

où m est un entier positif impair n'admettant aucun diviseur carré.

La troisième note développe les sommes telles que

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} \left\{ \frac{\alpha^2 m}{n} - E\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right) \right\}$$

où m et n sont des entiers positif, premies entre eux, le sesond étant ensuite impair. En représentant par q^2 le plus grand diviseur carré de n et par d tous les diviseurs de n qui ont la forme $4k+3$ on a la valeur suivante de la somme en question

$$\frac{n-q}{2} - \sum_{d} \left(\frac{m}{d}\right) \frac{2}{\tau_d} Cl(-d).$$

En prenant $m = 1$ on en conclut que les carrés

$$1^2, 2^2, 3^2, \ldots (n-1)^2,$$

réduits à leurs plus petits restes positifs suivant le module n, donnent une somme égale à

$$\frac{n(n-q)}{2} - \sum_{d} \frac{2n}{\tau_d} Cl(-d), \ [d \equiv 3 \text{ (mod. 4)}].$$

Nous avons prouvé également que les mêmes carrés, réduits à leurs plus petits restes absolus, donnent une somme qui n'est jamais négative, et a pour valeur

$$2\,n \sum_d \frac{2}{\tau_d}\, Cl\,(-d),$$

où d parcourt tous les diviseurs de n qui ont la forme $8\,k + 3$.

Rundschau über die das Erdinnere betreffenden Ansichten.*)

Von

J. N. Woldřich.

(Ausführliches Resumé.)

(Mit einer Tafel).

(Vorgelegt am 18. Februar 1898.)

Wie bekannt, nimmt die Temperatur der Erde mit der Tiefe zu, und zwar nach der üblichen Annahme um 1^0 C für je 33 *m* Tiefe. Somit würde die Mächtigkeit der festen Erdrinde nach E. d. Beaumont 40—50 *km*, also etwa den 125. Theil des Erdhalbmessers betragen; in einer Tiefe von etwa 66 *km* müssten alle Gesteine geschmolzen sein; in einer Tiefe von 84 *km* herrscht bereits, nach Heinrich's Formeln, die ungeheuere Temperatur von 2500^0 C. Diese Mächtigkeit der festen Erdrinde ist verhältnissmässig unbedeutend, denn selbst eine Tiefe von 66 *km* beträgt nur etwa den 97. Theil des Erdhalbmessers und entspricht auf einem Globus von 2 *m* Durchmesser nur einem Centimeter. Unsere Erfahrungen reichen jedoch nicht einmal in diese Tiefe, denn die grösste durch Bohrungen erreichte Tiefe beträgt 2003 *m*, und das ist nur der 33. Theil der vorausgesetzten Mächtigkeit der festen Erdkruste (66 *km*) oder nur der 3183. Theil des Erdhalbmessers.

Die Tiefe der Erdrinde, bis zu welcher unsere positiven Erfahrungen einigermassen reichen, ist somit so unbedeutend, dass sie einem Ritze gleicht, der auf einer faustgrossen Kugel mittelst einer feinen Nadelspitze gemacht würde, durch den wir über die innere Beschaffenheit dieser Kugel nichts erfahren. Auch unsere Erfahrungen betreffs der Zusammensetzung und inneren Beschaffenheit der Gebirgsriesen der Erde bieten uns diesbezüglich nicht viel, denn diese Hochberge sind gegenüber der Erdgrösse so unbedeutend, dass der höchste Gebirgskoloss auf einem Globus von 1 *m* Durchmesser nur die Höhe von 0·7 *mm* erreicht. Wenn

*) Das Original lautet: Rozhledy po názorech týkajících se vnitra zemského.