Matyáš Lerch
O souvislosti Legendreova znaménka s čísly Moebiusovými

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 7 (1898), č. 6, 1–12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501512

O souvislosti Legendreova znaménka s čísly Moebiusovými.

Sdílí

M. Lerch.

(Předloženo dne 17. ledna 1898.)

Znamenejme

$$\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4, \ldots$$

řadu čísel Moebiusových, v nichž $\varepsilon_n = 0$, má-li n dělitele čtvercové, ale $\varepsilon_n = (-1)^{\tilde\omega}$, je-li n složeno z $\tilde\omega$ vespolek různých kmenných činitelů. Jednu zajímavou větu, ve které se vyskytuje ε_n, vytknul již Gauss.*) Podle něho je součet primitivních kořenů příslušných ku kmennému modulu p shodným s ε_{p-1}.

Tvrzení to se vyjádří vzorcem jak následuje

$$\sum_{\nu=1}^{p-2} \binom{p-1}{\nu}^2 g^\nu \equiv \varepsilon_{p-1} \pmod{p},$$

značí-li g libovolný primitivní kořen modulu p.**)

Okolnost tu lze vyjádřiti větou, že shoda

$$\sum_{\nu=1}^{p-2} \binom{p-1}{\nu}^2 x^\nu \equiv \varepsilon_{p-1}$$

má $\varphi(p-1)$ řešení realných, totiž všech $\varphi(p-1)$ primitivních kořenů.

*) Disquisitiones, art. 81.

**) To jest číslo g, jehož postupné mocnosti od první až ku $(p-1)$ní poskytnou dle modulu p zbytky různé.

Odtud zároveň plyne, že lze stanoviti celistvé funkce s celistvými součiniteli $g(x)$ a $h(x)$, tak aby platila identita

$$(1)\qquad \sum_{\nu=1}^{p-2} \left(\frac{p-1}{\nu}\right)^2 x^{\nu} - \varepsilon_{p-1} = p\,g(x) + h(x) \prod_g (x-g),$$

kde součin $\Pi(x-g)$ se vztahuje ke všem primitivním kořenům g modulu p.

Tak na př. pro $p = 13$ máme hodnoty kořenů

$$g = 2,\ 6,\ 11,\ 7,$$

čili

$$g = \pm 2, \pm 6,$$

a součin

$$\Pi(x-g) = (x^2-4)(x^2-36) \equiv x^4 - x^2 + 1$$

skutečně jest levá strana shody (1)

$$x^{11} + x^7 + x^5 + x$$

výraz tvaru

$$(x^7 + x^5 + x^3 + x)(x^4 - x^2 + 1).$$

Jiného druhu je souvislosť čísel ε se znaménkem Legendreovým, na niž chci nyní poukázati.

1. Buď Δ číslo mající tvar opačné hodnoty hlavního diskriminantu, a znamenejme symbolem $Cl(-\Delta)$ počet tříd kvadratických forem primitivních a kladných, příslušných k diskriminantu $-\Delta$. Chci poukázati na to, že platí identita

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\frac{2m}{\tau}\, Cl(-\Delta) + \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) E^*\left(x + \frac{\alpha m}{\Delta}\right) \\ &= \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}, \end{aligned}$$

ve které x může býti jakákoli realná veličina x, naproti tomu m je libovolné kladné číslo celistvé, a τ má stálý význam, a sice

$$\begin{aligned} \tau &= 6 \text{ pro } \Delta = 3, \\ \tau &= 4 \quad \text{»} \quad \Delta = 4, \\ \tau &= 2 \quad \text{»} \quad \Delta > 4. \end{aligned}$$

Symbolem $E^*(u)$ vyznačena zde pro kladná u tatáž veličina, kterou Legendre označil $E(u)$ a Gauss $[u]$, t. j. celky čísla u, s tou však modifikací, že pro celistvá u dlužno klásti $E^*(u) = u - \frac{1}{2}$, kdežto $E(u) = u$. Pro záporné hodnoty u jest význam symbolu $E^*(x)$ dán rovnicí všeobecně platnou

$$E^*(u) + E^*(-u) = -1.$$

V případě $m = 1$, $x = 0$ rovnice (2) přejde ve známou rovnici Dirichletovu

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu}; \tag{2a}$$

tato však platí též pro diskriminanty obecné, kdežto my jsme výše předpokládali, že $-\Delta$ jest diskriminant hlavní. Pro tento případ chceme rovnici (2) především dokázati.

K tomu účelu vzpomeňme elementárného vzorce

$$\frac{1}{2} - x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu x \pi}{\nu \pi},$$

platného za podmínek $0 < x < 1$. Veličina

$$x - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin 2\nu x \pi}{\nu \pi}$$

má však smysl i pro ostatní realné x, a sice rovná se nulle pro $0 < x < 1$, jedné pro $1 < x < 2$, dvěma pro $2 < x < 3$,.. obecně rovná se k, je-li $k < x < k + 1$, k celistvé číslo kladné. Je-li však x celistvé, zmizí řada trigonometrická a zbude $x - \frac{1}{2}$. Pro kladná x tedy tento výraz splývá s naší funkcí $E^*(x)$, takže bude*)

$$E^*(x) = x - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu x \pi}{\nu \pi}, \tag{3}$$

kterýžto výraz platí také pro záporná x, an hoví rovnici

$$E^*(x) + E^*(-x) = -1.$$

Do řady (3) vložme nyní hodnotu $x + \frac{\alpha m}{\Delta}$ za x, výsledek násobme $\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)$ a sečtěme pro $\alpha = 1, 2, \ldots \Delta - 1$. Tak se obdrží

$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) E^*\left(x + \frac{\alpha m}{\Delta}\right) + \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\alpha m}{\Delta}\right)$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) \frac{\sin 2\nu\pi\left(x + \frac{\alpha m}{\Delta}\right)}{\nu \pi};$$

*) **O arithmetických applikacích podobných řad předložím Akademii v nejbližším čase rozpravu, obsahující různé vzorce, které jsem před více než šesti lety odvodil.**

pravou stranu zjednošíme nyní ve dvou punktech, jednak v prvém součtu užijeme vztahu

$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)=0,$$

čímž z rovnice vypadne rozdíl $x-\frac{1}{2}$, a jinak vyměníme v druhém součtu pořádek summační. Tím způsobem pravá strana obdrží tvar

$$\frac{m}{\Delta}\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\alpha+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\pi}\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\sin 2\nu\pi\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}\right).$$

Zde první člen se vyčíslí na základě vzorce

$$(4)\qquad -\frac{\tau}{2\Delta}\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\alpha=Cl(-\Delta)$$

platného pro základní (hlavní) diskriminanty záporné, a součet

$$(a)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\sin 2\nu\pi\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}\right)$$

bude lze vyčísliti za pomoci vzorce

$$(5)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\alpha}\right)e^{\frac{2\alpha m\pi i}{\Delta}}=\left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D},$$

platného pro záporné i kladné diskriminanty D, při čemž Δ znamená prostou hodnotu čísla D, a m značí kladné číslo celistvé. Při tom se odmocnina $\sqrt{D}$ béře kladně, je-li realnou, a kladně pomyslně, je-li imaginarní.

Uvažovaný součet (a) rovná se pomyslné části veličiny

$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)e^{2\nu\pi i\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}\right)}=e^{2\nu x\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)e^{\frac{2\alpha\nu m\pi i}{\Delta}},$$

která dle (a) má hodnotu

$$e^{2\nu x\pi i}\left(\frac{-\Delta}{m\nu}\right)i\sqrt{\Delta},$$

a její pomyslná část zní

$$\left(\frac{-\Delta}{m\nu}\right)\cos 2\nu x\pi\,.\,\sqrt{\Delta}\,.$$

VI.

Pomocí tohoto výsledku máme tedy výraz (a) ve tvaru velmi jednoduchém

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{\Delta}\,.\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\cos 2\nu x\pi,$$

a náš výsledek nabude tvaru (2), kterýžto vzorec tedy dokázán.

Abychom docílili vyčíslení řady

$$S=\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}$$

v případě obecném, kdy diskriminant $-\Delta$ není více hlavním, nýbrž číslem tvaru $-\Delta=-\Delta_0 Q^2$, kde $-\Delta_0$ je diskriminant hlavní, užijme identity

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{\nu}\right)f(\nu)=\sum_{Q:d}\varepsilon_d\sum_{\nu=1}^{\infty}f(\nu d),$$

ve které $f(z)$ značí libovolnou funkci, a na pravé straně součet se vztahuje ke všem dělitelům d čísla Q. Podle tohoto vzorce výraz

$$\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}S=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_0 Q^2}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{\nu}\right)\left(\frac{-\Delta_0}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}$$

bude nahražen veličinou

$$\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}S=\sum_{Q:d}\varepsilon_d\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{d\nu}\right)\frac{\cos 2d\nu x\pi}{\nu d}$$

čili

$$\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}S=\sum_{Q:d}\left(\frac{-\Delta_0}{d}\right)\frac{\varepsilon_d}{d}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{\nu}\right)\frac{\cos 2d\nu x\pi}{\nu}.$$

V rovnici takto dokázané

$$\left(\frac{-\Delta_0}{m}\right)S=Q\sum_{Q:d}\left(\frac{-\Delta_0}{d}\right)\frac{\varepsilon_d}{d}.\left(\frac{-\Delta_0}{m}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{\nu}\right)\frac{\cos 2d\nu x\pi}{\nu}$$

bude lze nekonečné řady na pravé straně stojící vyčísliti podle vzorce (2) poněvadž $-\Delta_0$ je diskriminant hlavní. Podle toho nastoupí tedy na místo řady

$$\left(\frac{-\Delta_0}{m}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{\nu}\right)\frac{\cos 2d\nu x\pi}{\nu}$$

veličina

$$\frac{2m}{\tau_0}Cl(-\Delta_0)+\sum_{\alpha=1}^{\Delta_0-1}\left(\frac{-\Delta_0}{\alpha}\right)E^*\left(dx+\frac{\alpha m}{\Delta_0}\right),$$

VI.

kde τ_0 značí hodnotu τ příslušnou ku Δ_0; tím způsobem výsledek poslední nabude tvaru

$$\left(\frac{-\Delta_0}{m}\right) S = \frac{2m}{\tau_0} Cl(-\Delta_0)\, Q \sum_{Q:d} \left(\frac{-\Delta_0}{d}\right) \frac{\varepsilon_d}{d}$$
$$+ Q \sum_{Q:d} \left(\frac{-\Delta_0}{d}\right) \frac{\varepsilon_d}{d} \sum_{\alpha=1}^{l_0-1} \left(\frac{-\Delta_0}{\alpha}\right) E^*\left(dx + \frac{\alpha m}{\Delta_0}\right).$$

Pro konečné upravení pravé strany třeba zjednodušiti výraz

$$Q \sum_{Q:d} \left(\frac{-\Delta_0}{d}\right) \frac{\varepsilon_d}{d};$$

z významu čísel ε_d je bezprostředně patrno, že výraz ten rovná se součinu

$$Q \prod_q \left(1 - \left(\frac{-\Delta_0}{q}\right) \frac{1}{q}\right),$$

v němž přípona q probíhá veškery různé kmenné činitele čísla Q. Podle vzorce Dirichletova

$$(6) \qquad Cl(-\Delta_0 Q^2) = \frac{2}{\tau_0} Q \prod_q \left(1 - \left(\frac{-\Delta_0}{q}\right) \frac{1}{q}\right) . \, Cl(-\Delta_0)$$

kterým se stanovení počtu tříd obecného diskriminantu převádí na stanovení počtu tříd pro příslušný diskriminant hlavní, bude tedy první výraz na pravé straně naší rovnice stojící míti hodnotu

$$m\, Cl(-\Delta_0 Q^2),$$

a tímto způsobem obdrží náš výsledek tvar následující:

$$(7) \quad \begin{cases} m\, Cl(-\Delta) + Q \sum_{Q:d} \left(\frac{-\Delta_0}{d}\right) \frac{\varepsilon_d}{d} \sum_{\alpha=1}^{l_0-1} \left(\frac{-\Delta_0}{\alpha}\right) E^*\left(dx + \frac{\alpha m}{\Delta_0}\right) \\ = \left(\frac{-\Delta_0}{m}\right) \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}, \quad (\Delta = \Delta_0 Q^2). \end{cases}$$

Tento vzorec chci uvažovati v případě $m = 1$, totiž

$$(7^a) \qquad Cl(-\Delta) + Q \sum_{Q:d} \left(\frac{-\Delta_0}{d}\right) \frac{\varepsilon_d}{d} \sum_{\alpha=1}^{l_0-1} \left(\frac{-\Delta_0}{\alpha}\right) E^*\left(dx + \frac{\alpha}{\Delta_0}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}.$$

Na levé straně vcházejí do součtu pouze dělitelé d čísla Q', které jest součinem různých kmenných činitelů čísla Q vzatých jednoduše, neboť pro ostatní d by číslo ε_d bylo nullou.

VI.

Je-li tedy na př. x kladné, ale v mezích

$$0 \leqq x < \frac{1}{\Delta_0 Q'},$$

budou všecka čísla dx kladná a menší než $\frac{1}{\Delta_0}$, takže

$$dx + \frac{\alpha}{\Delta_0}, (\alpha = 1, 2, \ldots \Delta_0 - 1)$$

budou ryzí zlomky a pro takové

$$E^*\left(dx + \frac{\alpha}{\Delta_0}\right) = 0.$$

Pro uvažované hodnoty x tedy zjednoduší se vzorec (7ª) jak následuje

$$\text{(8)} \qquad Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x \pi}{\nu},$$

$$\left(0 \leqq x < \frac{1}{\Delta_0 Q'};\quad Q' = \Pi q\right).$$

Pro $x = \frac{1}{\Delta_0 Q'}$, jest již jedna z veličin

$$E^*\left(dx + \frac{\alpha}{\Delta_0}\right)$$

od nully různa, totiž $d = Q'$ $\alpha = \Delta_0 - 1$, a má hodnotu $\frac{1}{2}$. Tudíž bude

$$\text{(9)} \qquad Cl(-\Delta) + \left(\frac{-\Delta_0}{Q'}\right) \varepsilon_{Q'} \frac{Q}{2Q'} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos \frac{2\nu\pi}{\Delta_0 Q'}}{\nu}$$

Ve zvláštním případě, kdy Δ_0 obsahuje číslo Q', bude pokaždé

$$\left(\frac{-\Delta_0}{d}\right) = 0 \text{ pro } d > 1,$$

načež rovnice

$$Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x \pi}{\nu}, (\Delta_0 \equiv 0 \text{ mod. } Q', Q' > 1$$

platí v intervallu

$$0 \leqq x < \frac{1}{\Delta_0},$$

kdežto pro ostatní realná x řada rovná se veličině

$$Cl(-\Delta) + Q \sum_{\alpha=1}^{\Delta_0-1} \left(\frac{-\Delta_0}{\alpha}\right) E^*\left(x + \frac{\alpha}{\Delta_0}\right).$$

2. V rovnici (2)

$$\frac{2m}{\tau} Cl(-\Delta) + \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) E^*\left(x + \frac{\alpha m}{\Delta}\right)$$
$$= \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}$$

zaměňme x za $x + \frac{mn}{\Delta}$, a sečtěme výsledky pro $m = 0, 1, 2, \ldots \Delta - 1$. I obdržíme

$$(a)\quad \begin{aligned} &\frac{\Delta(\Delta-1)}{\tau} Cl(-\Delta) + \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) \sum_{m=0}^{\Delta-1} E^*\left(x + \frac{(\alpha+n)m}{\Delta}\right) \\ &= -\left(\frac{-\Delta}{n}\right) \Delta \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right) \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi}. \end{aligned}$$

Na levé straně druhý součet se zjednoduší, užije-li se ve vztahu

$$(10)\quad \sum_{\beta=0}^{\Delta-1} E^*\left(x + \frac{\beta k}{\Delta}\right) = \frac{1}{2}(k-1)(\Delta-1) + \frac{1}{2}(d-1) + d\,E^*\left(\frac{\Delta x}{d}\right),$$

v němž d značí největšího společného dělitele čísel k a Δ.

Podle toho bude levá strana rovnice (a) zníti

$$\frac{\Delta(\Delta-1)}{\tau} Cl(-\Delta) +$$
$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) \left\{\frac{\alpha+n-1}{2}(\Delta-1) + \frac{d_\alpha - 1}{2} + d_\alpha E^*\left(\frac{\Delta x}{d_\alpha}\right)\right\}$$

znamenáme-li d_α největšího společného dělitele čísel Δ a $\alpha + n$. Výraz poslední se pomocí vztahu

$$\sum \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = 0$$

redukuje na následující

$$\frac{\Delta(\Delta-1)}{\tau} Cl(-\Delta) + \frac{\Delta-1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) \alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) d_\alpha$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) d_\alpha\, E^*\left(\frac{\Delta x}{d_\alpha}\right);$$

první dva výrazy se ruší, jak ukazuje vztah (4), i zbývá tedy rovnice

$$(a') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right) d_a + \sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right) d_a\, E^*\left(\frac{\Delta x}{d_a}\right) \\ &= -\left(\frac{-\Delta}{n}\right) \Delta \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi}. \end{aligned} \right.$$

V té přetvořme pravou stranu pomocí identity

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right) f(\nu) = \sum_{\Delta:d} \varepsilon_d \sum_{\nu=1}^{\infty} f(d\nu),$$

Tím se obdrží nejprve

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi} = \sum_{\Delta:d}\frac{\varepsilon_d}{d}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2d\nu x\pi}{\nu\pi};$$

užije-li se tu vzorce (3), obdrží se hodnota pravé strany ve tvaru

$$\begin{aligned} &\sum_{\Delta:d}\frac{\varepsilon_d}{d}\left\{E^*(dx) - dx + \frac{1}{2}\right\} \\ &= \sum_d \frac{\varepsilon_d}{d} E^*(dx) + \frac{1}{2}\sum_d \frac{\varepsilon_d}{d} - x\sum_d \varepsilon_d. \end{aligned}$$

Odtud vypadne poslední člen, ježto vždy

$$\sum_{\Delta:d} \varepsilon_d = 0,$$

a dále jest

$$\sum \frac{\varepsilon_d}{d} = \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}.$$

Pravá strana rovnice (a') tedy bude zníti

$$-\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\left\{\frac{1}{2}\varphi(\Delta) + \Delta\sum_{\Delta:d}\frac{\varepsilon_d}{d}E^*(dx)\right\},$$

takže nalezen jest vztah

$$(11) \quad \begin{aligned} &\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right) d_a + 2\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right) d_a\, E^*\left(\frac{\Delta x}{d_a}\right) \\ &= -\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\left\{\varphi(\Delta) + 2\Delta\sum_{\Delta:d}\frac{\varepsilon_d}{d}E^*(dx)\right\}; \end{aligned}$$

v rovnici té na levé straně d_a značí největšího společného dělitele čísel Δ a $n+a$, na pravé straně pak probíhá d veškery dělitele čísla Δ.

VI.

Zvolíme-li zde x kladné a menší než $\frac{1}{\varDelta}$, budou všecka $E^*\left(\frac{\varDelta x}{d_\alpha}\right)$ i $E^*(dx)$ rovna nulle, a tedy zbývá vztah

$$\sum_{\alpha=1}^{\varDelta-1}\left(\frac{-\varDelta}{\alpha}\right)d_\alpha = -\left(\frac{-\varDelta}{n}\right)\varphi(\varDelta). \tag{12}$$

Píšeme-li pak ve zbývající části rovnice (11)

$$\frac{\varDelta}{d} \text{ za } d,$$

obdržíme vztah

$$\sum_{\alpha=1}^{\varDelta-1}\left(\frac{-\varDelta}{\alpha}\right)d_\alpha\, E^*\left(\frac{\varDelta x}{d_\alpha}\right) = -\left(\frac{-\varDelta}{n}\right)\sum_{\varDelta:d}\varepsilon_{\frac{\varDelta}{d}}\, d\, E^*\left(\frac{\varDelta x}{d}\right),$$

který vzhledem k libovolnosti veličiny x musí býti prostou identitou; jeho obsah bude ten, že veličina $E^*\left(\frac{\varDelta x}{d}\right)$ objeví se na levé straně několikráte, a sice tolikráte kolik existuje hodnot α v řadě $1, 2, 3, \ldots \varDelta - 1$, pro něž $d_\alpha = d$. Součet příslušných znamének $\left(\frac{-\varDelta}{\alpha}\right)$ musí býti roven $-\left(\frac{-\varDelta}{n}\right)\varepsilon_{\frac{\varDelta}{d}}$. To jest

$$\sum_\alpha\left(\frac{-\varDelta}{\alpha}\right)+\left(\frac{-\varDelta}{n}\right)\varepsilon_{\frac{\varDelta}{d}} = 0, \; (d_\alpha = d, 0 < \alpha < \varDelta). \tag{13}$$

Hodnoty α, k nimž se vztahuje sčítání ve vzorci (13), udílejí výrazu $n+\alpha$ téhož největšího společného dělitele s číslem $\varDelta$, totiž d.

Položme nyní $n+\alpha = kd$, $\varDelta = dd'$, tedy plyne z podmínky

$$n < kd < n + \varDelta$$

omezení

$$\frac{n}{d} < k < \frac{n}{d} + d',$$

a rovnice obdrží tvar

$$\sum_k\left(\frac{-\varDelta}{kd-n}\right)\left(\frac{k^2}{d'}\right)+\left(\frac{-\varDelta}{n}\right)\varepsilon_{d'} = 0, \left(\frac{n}{d} < k < \frac{n}{d} + d', \varDelta = dd'\right) \tag{13*}$$

kde faktor $\left(\frac{k^2}{d'}\right)$ připojen za tím účelem, aby zmizely členy, v nichž k není nesoudělno s d'. Při tom musí býti $-\varDelta$ hlavním diskriminantem.

Volme zvláště $d = 1$, tedy $d' = \varDelta$, pak bude

$$(14) \qquad \sum_{k=n+1}^{n+\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{k-n}\right)\left(\frac{\Delta^2}{k}\right) + \left(\frac{-\Delta}{n}\right)\varepsilon_\Delta = 0,$$

a pro $n = 1$

$$(14^a) \qquad \sum_{m=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\left(\frac{\Delta^2}{m+1}\right) + \varepsilon_\Delta = 0.$$

Volme nyní za d' libovolný lichý faktor čísla Δ, položme

$$\sigma = (-1)^{\frac{d'-1}{2}} = \left(\frac{-1}{d'}\right),$$

takže $d'\sigma$ bude míti tvar diskriminantní, a následkem toho též číslo $d\sigma$ bude diskriminantem.

Pak bude

$$\left(\frac{-\Delta}{kd-n}\right) = \left(\frac{-d\sigma}{kd-n}\right)\cdot\left(\frac{d'\sigma}{kd-n}\right) = -\sigma\left(\frac{-d\sigma}{n}\right)\left(\frac{d'\sigma}{kd-n}\right)$$
$$= -\sigma\left(\frac{n}{d}\right)\left(\frac{kd-n}{d'}\right)$$

a rovnici (13*) bude lze psáti

$$\left(\frac{n}{d}\right)\sum_k \left(\frac{kd-n}{d'}\right)\left(\frac{k^2}{d'}\right) = (-1)^{\frac{d'-1}{2}}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\varepsilon_{d'}$$
$$= (-1)^{\frac{d'-1}{2}}\left(\frac{n}{d}\right)\left(\frac{n}{d'}\right)\varepsilon_{d'}.$$

Rovnice je samozřejma pro $\left(\frac{n}{d}\right) = 0$, t. j. mají-li n a d společného dělitele. Předpokládejme tedy, že n a d jsou nesoudělna; tu bude tedy

$$\sum_k \left(\frac{kd-n}{d'}\right)\left(\frac{k^2}{d'}\right) = (-1)^{\frac{d'-1}{2}}\left(\frac{n}{d'}\right)\varepsilon_{d'}.$$
$$(n < kd < n + dd').$$

Volme zde $n = d + d'$, což je dovoleno, poněvadž d a d' jsou nesoudělná a tedy též d a $d + d'$. Tím způsobem se obdrží

$$\left(\frac{d}{d'}\right)\sum_k \left(\frac{k-1}{d'}\right)\left(\frac{k^2}{d'}\right) = (-1)^{\frac{d'-1}{2}}\left(\frac{d}{d'}\right)\varepsilon_{d'}.$$

Poněvadž d a d' jsou nesoudělna, bude $\left(\frac{d}{d'}\right) = \pm 1$, tudíž

$$\sum_k \left(\frac{k-1}{d'}\right)\left(\frac{k^2}{d'}\right) = (-1)^{\frac{d'-1}{2}}\varepsilon_{d'}, \quad \left(\frac{d+d'}{d} < k < \frac{d+d'}{d}d'\right).$$

VI.

Číslo d vchází již jen do podmínky summační; podmínky pro d znějí, aby buď

$$d \equiv -d' \pmod{4} \text{ aneb } d \equiv 4d' \pmod{16}$$

a při tom d a d' byla čísla nesoudělná.

Píšeme-li $d' = m$, $d = a$, $k = r + 1$, bude lze rovnici poslední psáti takto

$$\sum_{r=\left[\frac{m}{a}\right]+1}^{m+\left[\frac{m}{a}\right]} \left(\frac{r}{m}\right)\left(\frac{r+1}{m^2}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \varepsilon_m,$$

při čemž m je liché kladné číslo, a číslo s m nesoudělné hovící zmíněným shodám. Poněvadž intervall

$$\left[\frac{m}{a}\right]+1, \ldots \left[\frac{m}{a}\right]+m$$

obsahuje čísla, jež modulo m jsou shodna s čísly 1, 2, ... m, lze rovnici poslední psáti

$$\sum_{r=1}^{m-1} \left(\frac{r}{m}\right)\left(\frac{r+1}{m^2}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \varepsilon_m. \tag{14*}$$

Zde m značí libovolné liché kladné číslo prosté čtvercových dělitelů. Rovnice tato obsahuje vztah (14^a) jako zvláštní případ.

Na objasněnou stůj zde příklad $m = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$; zde součet (14*) obsahuje následující od nully různé členy:

$$r = 1,\ 16,\ 22,\ 31,\ 37,\ 43,\ 46,\ 52,\ 58,\ 61,\ 67,\ 73,\ 82,\ 88,\ 103;$$

příslušné hodnoty znaménka $\left(\frac{r}{105}\right)$ jsou

$$1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1$$

a jich součet $= -1$, ve shodě s okolnostmi

$$(-1)^{\frac{105-1}{2}} = 1, \quad \varepsilon_{105} = -1$$