Matyáš Lerch

O součtu celých v lomené arithmetické posloupnosti druhého stupně a o jeho souvislosti s počtem tříd záporného diskriminantu

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 7 (1898), č. 7, 1–8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501510

O součtu celých v lomené arithmetické posloupnosti druhého stupně a o jeho souvislosti s počtem tříd záporného diskriminantu

Sdílí

M. Lerch.

(Předloženo dne 17. ledna 1898.)

V theorii Gaussových součtů se dokazuje vzorec

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{\frac{2\alpha^2 m\pi i}{n}} = \left(\frac{m}{n}\right) i^{\frac{1}{4}(n-1)^2} \sqrt{n},$$

ve kterém n značí kladné liché číslo celistvé, $\sqrt{n}$ kladnou hodnotu odmocniny a m libovolné číslo celistvé nesoudělné s n.

Budeme potřebovati hodnotu tohoto součtu v případě obecnějším a sice

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{\frac{2\alpha^2 m\mu\pi i}{n}},$$

kde sice m a n hoví předešlým podmínkám, ale v exponentu má čitatel nového činitele μ.

Toto celistvé číslo μ buď libovolné, a znamenejme d_μ jeho největšího dělitele společného s číslem n. Znamenáme-li ještě

$$\mu' = \frac{\mu}{d_\mu}, \quad d'_\mu = \frac{n}{d_\mu},$$

bude platit vzorec

(1) $$\sum_{a=0}^{n-1} e^{\frac{2a^2 m\mu\pi i}{n}} = \left(\frac{m\mu'}{d'_\mu}\right) i^{\frac{1}{4}(d'_\mu-1)^2} d_\mu \sqrt{d'_\mu},$$

který má sloužit za základ následujících úvah.

Běží nám o nové vyjádření součtu

$$S = \sum_{a=0}^{n-1} E^*\left(x + \frac{a^2 m}{n}\right),$$

v němž arithmetická funkce $E^*(x)$ má týž význam jako v našich článcích předešlých. Funkce ta pro všecka x nahražena může býti řadou

(2) $$E^*(x) = x - \tfrac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu x \pi}{\nu\pi},$$

pomocí níž se obdrží náš součet ve tvaru nekonečné řady

$$S = \sum_{a=0}^{n-1}\left(x - \tfrac{1}{2} + \frac{a^2 m}{n}\right) + \sum_{a=0}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu\pi\left(x + \frac{a^2 m}{n}\right)}{\nu\pi},$$

čili

$$S = \sum_{a=0}^{n-1}\left(x - \tfrac{1}{2} + \frac{a^2 m}{n}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\pi} \sum_{a=0}^{n-1} \sin 2\nu\pi\left(x + \frac{a^2 m}{n}\right).$$

Zde se součet

(a) $$\sum_{a=0}^{n-1} \sin 2\nu\pi\left(x + \frac{a^2 m}{n}\right)$$

jakožto imaginarná část výrazu

$$\sum_{a=0}^{n-1} e^{2\nu\pi i\left(x + \frac{a^2 m}{n}\right)}$$

vyčíslí pomocí vzorce (1), a sice jest výraz (a) roven pomyslné části veličiny

(a′) $$\left(\frac{m\nu'}{d'_\nu}\right) i^{\frac{1}{4}(d'_\nu-1)^2} d_\nu \sqrt{d'_\nu}\, e^{2 d_\nu \nu' x\pi i};$$

zde značí d_ν největšího společného dělitele čísel n a ν, dále

$$d'_\nu = \frac{n}{d_\nu}, \quad \nu' = \frac{\nu}{d_\nu}.$$

Podle toho obdržíme tedy výsledek

$$S-\sum_{\alpha=0}^{n-1}\left(x+\frac{\alpha^2 m}{n}\right)=-\frac{n}{2}+S_1,$$

kde

$$S_1=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\pi}\left(\frac{m\nu'}{d'_\nu}\right)d_\nu\sqrt{d'_\nu}\,\mathfrak{Jm}.\left(i^{\frac{1}{4}(d'_\nu-1)^2}e^{2d_\nu\nu' x\pi i}\right).$$

Tuto řadu S_1 rozštěpme v několik jiných, a sice má každá z nových řad obsahovati členy, v nichž d_ν jest jeden a týž z dělitelů d čísla n; tím se obdrží

$$S_1=\mathfrak{Jm}.\sum_{n:d}\sqrt{d'}\,i^{\frac{1}{4}(d'-1)^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{m\mu}{d'}\right)\frac{1}{\mu\pi}e^{2d\mu x\pi i};$$

zde se vnější součet vztahuje ke všem dělitelům d čísla n, při čemž $dd'=n$

Aby se imaginárná část přehledně dala vyjádřiti, znamenejme

(3[a]) $$\Phi(z,d')=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\nu}{d'}\right)\frac{\sin 2\nu z\pi}{\nu\pi},\ \text{je-li } d'\equiv 1\ (\text{mod. } 4),$$

a dále

(3[b]) $$\Phi(z,d')=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\nu}{d'}\right)\frac{\cos 2\nu z\pi}{\nu\pi},\ \text{je-li } d'\equiv -1\ (\text{mod. } 4).$$

Pak bude

$$S_1=\sum_{n:d}\left(\frac{m}{d'}\right)\sqrt{d'}\,\Phi(dx,d'),$$

aneb vyměníme-li roli liter d a d':

$$S_1=\sum_{n:d}\left(\frac{m}{d}\right)\sqrt{d}\,\Phi(d'x,d),$$

to jest

(4) $$\sum_{\alpha=0}^{n-1}\left\{E^*\left(x+\frac{\alpha^2 m}{n}\right)-\left(x+\frac{\alpha^2 m}{n}\right)\right\}=-\frac{n}{2}+\sum_{n:d}\left(\frac{m}{d}\right)\sqrt{d}\,\Phi(d'x,d).$$

Zde by se součet

$$\sum\left(x+\frac{\alpha^2 m}{n}\right)$$

dal sice velmi jednoduše vyjádřiti ve tvaru hotovém, mně jest však tato forma výsledku milejší.

Z tohoto vzorce základního hodlám nyní vyvinouti některé výsledky ryze arithmetické.

Nejprve volím $x = 0$; zde bude pak dle rovnic (3^a) a (3^b)

$$\Phi(0, d) = 0 \text{ pro } d \equiv 1 \pmod{4},$$

ale v případě $d \equiv -1 \pmod{4}$ bude

$$\Phi(0, d) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{d}\right) \frac{1}{\nu\pi} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-d}{\nu}\right) \frac{1}{\nu\pi},$$

takže výraz

$$\sqrt{d}\, \Phi(0, d)$$

lze vyjádřiti číslem

$$\frac{2}{\tau_d} Cl(-d),$$

kde symbol $Cl(-d)$ má v předešlých článcích vyložený význam počtu tříd kvadratických forem kladných a primitivních, náležejících k danému diskriminantu $-d$.

Dle toho bude, ježto pro $\alpha = 0$

$$E_*\left(\frac{\alpha m}{n}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} \left\{ E^*\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right) - \frac{\alpha^2 m}{n} \right\} = -\frac{n-1}{2} + \sum_{n:d} \left(\frac{m}{d}\right) \frac{2}{\tau_d} Cl(-d), \tag{5}$$

[m, n čísla nesoudělná, n liché a kladné, $d \equiv 3 \pmod{4}$].

Volme nyní za m kladné číslo a znamenejme q^2 největšího čtvercového dělitele čísla n. Veličiny

$$\frac{\alpha^2 m}{n}$$

stanou se celistvými, je-li $\frac{\alpha^2}{n}$ číslo celistvé, poněvadž m a n jsou nesoudělná. K tomu ale dostačí i jest zároveň nevyhnutelno, aby α obsahovalo činitele $n_0 q$, kde $n_0 = \frac{n}{q^2}$ Hodnoty α, pro něž

$$\frac{\alpha^2 m}{n}$$

je celistvé, jsou tedy $\alpha = n_0 q, 2 n_0 q, 3 n_0 q, \ldots (q-1) n_0 q$; pouze pro tyto hodnoty se výraz

$$E^*\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right)$$

liší od Legendreových celků

$$E\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right)$$

a sice jest o $\frac{1}{2}$ menší; i bude lze rovnici (5) psáti

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{E\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right)-\frac{\alpha^2 m}{n}\right\}=-\frac{n-1}{2}+\frac{q-1}{2}+\sum_{n:d}\left(\frac{m}{d}\right)\frac{2}{\tau_d}\,Cl(-d),$$

aneb což totéž jest

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{\frac{\alpha^2 m}{n}-E\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right)\right\}=\frac{n-q}{2}-\sum_{n:d}\left(\frac{m}{d}\right)\frac{2}{\tau_d}\,Cl(-d), \tag{5*}$$

[m, n kladná nesoudělná, q^2 největší čtercový dělitel lichého čísla n d dělitelé čísla n, a sice $d \equiv 3$ (mod. 4)].

Je-li zvláště n součin kmenných čísel tvaru $4k+1$, nebude míti dělitelů tvaru $d \equiv 3$ (mod. 4), takže zbude

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{\frac{\alpha^2 m}{n}-E\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right)\right\}=\frac{n-q}{2}.$$

Pro $m=1$ obdržíme z (5*) výsledek arithmeticky zajímavější.

Rozdíl

$$\frac{\alpha^2}{n}-E\left(\frac{\alpha^2}{n}\right)$$

násobený číslem n podá t. zv. kvadratický zbytek dle modulu n.

Klademe-li

$$\alpha^2-n\,E\left(\frac{\alpha^2}{n}\right)=k,$$

je totiž k číslo $< n$, pro něž existuje řešení shody

$$x^2 \equiv k \pmod{n}.$$

Značí-li $\psi(k,n)$ počet řešení této shody, bude číslo k vytvořeno $\psi(k,n)$ různými hodnotami α z řady $1, 2, \ldots n-1$, a tedy obdržíme na místě (5*) rovnici

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\,\psi(k,n)=\frac{n(n-q)}{2}-\sum_{n:d}\frac{2n}{\tau_d}\,Cl(-d), \tag{6}$$

(n liché a kladné, q^2 největší čtvercový dělitel z n a dělitelé d tvaru $4\alpha+3$).

VII.

Tak pro $n = 75$ jest $q = 5$, dále má 75 tři dělitele tvaru $4\alpha + 3$, totiž $d = 3, 15, 75$. Tu jest pak $Cl(-3) = 1$, $Cl(-15) = 2$, $Cl(-75) = 2$,

$$\tau_3 = 6,\ \tau_{15} = \tau_{75} = 2.$$

Pravá strana tedy bude míti hodnotu

$$75.35 - 25 - 75.2 - 75.2 = 2300.$$

Čtverce čísel od jedné do 74 dávají při dělení číslem 75 zbytky

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 6, 25, 46, 69, 19, 46, | 31, 64, 24, 61, 25, 66, 34, 4, 51, 25, 1, 54, 34, 16, | 61, 49, 39, 31, 25, 21, 19

a další se opakují v opačném pořádku; jich součet tedy obnáší

$$2 . 1150 = 2300.$$

Volme nyní ve vzorci (4) $x = \frac{1}{2}$; zde bude opět pro $d \equiv 1 \pmod{4}$ $\Phi\left(\frac{d'}{2}, d\right) = 0$, a zbývají pouze členy od dělitelů $d \equiv 3$ pocházející, pro něž

$$\Phi\left(\frac{d'}{2}, d\right) = \sum\left(\frac{\nu}{d}\right)\frac{(-1)^\nu}{\nu\pi} = \sum\left(\frac{-d}{\nu}\right)\frac{(-1)^\nu}{\nu\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{d}\right)\sum_1^\infty\left(\frac{-d}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi} - \sum\left(\frac{-4d}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi}$$

a tedy

$$\sqrt{d}\,\Phi\left(\frac{d'}{2}, d\right) = \left(\frac{2}{d}\right)\sum\left(\frac{-d}{\nu}\right)\frac{\sqrt{d}}{2\nu\pi} - \sum\left(\frac{-4d}{\nu}\right)\frac{\sqrt{4d}}{2\nu\pi}$$

což má hodnotu

$$\frac{1}{\tau_d}\left(\frac{2}{d}\right)Cl(-d) - \frac{1}{2}\,Cl(-4d).$$

Avšak

$$Cl(-4d) = \frac{2}{\tau_d}\left(2 - \left(\frac{2}{d}\right)\right)Cl(-d),$$

tedy

$$\sqrt{d}\,\Phi\left(\frac{d'}{1}, d\right) = -\frac{2}{\tau_d}\left(1 - \left(\frac{2}{d}\right)\right)Cl(-d).$$

VII.

Tudíž bude

$$
(7)\qquad \begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{\tfrac{1}{2}+\frac{\alpha^2 m}{n}-E\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\alpha^2 m}{n}\right)\right\}\\ &=\frac{n-1}{2}+\sum_{n:d}\left(\frac{m}{d}\right)\frac{2}{\tau_d}\left(1-\left(\frac{2}{d}\right)\right)Cl(-d).\end{aligned}
$$

kde dělitelé d jsou opět tvaru $4\alpha+3$. Avšak výraz $1-\left(\frac{2}{d}\right)$ mizí, je-li d tvaru $8k\pm1$., může tedy býti od nully různý pouze pro $d=8k+3$, poněvadž hodnoty d tvaru $8k-3$ neexistují.

Výsledek (7) lze tedy psáti takto:

$$
(7^*)\qquad \sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{\frac{\alpha^2 m}{n}-E\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\alpha^2 m}{n}\right)\right\}=2\sum_{n:d}\frac{2}{\tau_d}\left(\frac{m}{d}\right)Cl(-d),\ (d\equiv 3 \text{ mod. } 8).
$$

Pro $m=1$ plyne odtud, že součet absolutně nejmenších zbytků modulo n ze čtverců $1^2, 2^2, 3^2, \ldots (n-1)^2$ není záporný, a rovná se veličině

$$
2n\sum_{n:d}\frac{2}{\tau_d}\,Cl(-d),\ (d\equiv 3 \text{ mod. } 8).
$$

Součet ten je tedy nullou, nemá-li n dělitelů tvaru $8k+3$.

Konečně položme v rovnici (4) $x=\frac{1}{4}$. Zde obdržíme pro $d\equiv 1$ (mod. 4).

$$
\Phi\left(\frac{d'}{4},d\right)=\sum_\nu\left(\frac{\nu}{d}\right)\frac{(-1)^{\frac{d'\nu-1}{2}}}{\nu\pi},\ (\nu=1,3,5,7,9,\ldots),
$$

tedy

$$
\Phi\left(\tfrac{1}{4}d',d\right)=\sum_1^\infty\left(\frac{d}{\nu}\right)\left(\frac{-4}{\nu d'}\right)\frac{1}{\nu\pi}=\sum_1^\infty\left(\frac{-4d}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi}\cdot\left(\frac{-4}{d'}\right)
$$

takže

$$
\left(\frac{-4}{d'}\right)\sqrt{d}\,\Phi\left(\frac{d'}{4},d\right)=\frac{2}{\tau_{4d}}\,Cl(-4d),
$$

při čemž

$$
\left(\frac{-4}{d'}\right)=\left(\frac{-1}{d'}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.
$$

Pro $d\equiv 3$ (mod. 4) pak

$$
\Phi\left(\frac{d'}{4},d\right)=\sum\left(\frac{\nu}{d}\right)\frac{(-1)^{\frac{\nu d'}{2}}}{\nu\pi}=\left(\frac{2}{d}\right)\sum\left(\frac{\nu}{d}\right)\frac{(-1)^\nu}{2\nu\pi},
$$

což oddělením členů se sudým a lichým ν obdrží tvar konečný

$$\Phi(\tfrac{1}{4}d', d) = \tfrac{1}{4}\sum\left(\frac{-d}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi} - \left(\frac{2}{d}\right)\tfrac{1}{2}\sum\left(\frac{-4d}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi}$$

tudíž

$$\sqrt{d}\,\Phi(\tfrac{1}{4}d', d) = \frac{1}{2\tau_d}\,Cl(-d) - \left(\frac{2}{d}\right)\tfrac{1}{4}\,Cl(-4d),$$

což po dosazení hodnoty

$$Cl(-4d) = \frac{2}{\tau_d}\left(2 - \left(\frac{d}{2}\right)\right)Cl(-d)$$

obdrží tvar

$$\sqrt{d}\;\Phi(\tfrac{1}{4}d', d) = \frac{1}{\tau_d}\left(1 - \left(\frac{2}{d}\right)\right)Cl(-d).$$

Dle toho bude výsledek (4) v tomto případě zníti

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{\tfrac{1}{4} + \frac{\alpha^2 m}{n} - E\left(\tfrac{1}{4} + \frac{\alpha^2 m}{n}\right)\right\}\\ &= \frac{2n-1}{4} - (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sum_{d_1}\left(\frac{m}{d_1}\right)\frac{2}{\tau_{4d_1}}\,Cl(-4d_1)\\ &\qquad - \sum_{d_3}\left(\frac{m}{d_3}\right)\frac{1-\left(\frac{2}{d_3}\right)}{\tau_{d_3}}\,Cl(-d_3),\end{aligned}\right.$$

kde d_1 i d_3 probíhá veškery dělitele čísla n a sice $d_1 \equiv 1$, $d_3 \equiv 3 \pmod 4$