Matyáš Lerch
Bemerkungen über trigonometrische Reihen mit positiven Coefficienten

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř. 1898, č. 23, 1–19

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501508

XXIII.

Bemerkungen über trigonometrische Reihen mit positiven Coefficienten.

Von M. Lerch in Freiburg (Schweiz).

(Vorgelegt den 17. Juni 1898.)

I.

Die merkwürdige Thatsache, dass die trigonometrische Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi}$$

für unendlich kleine positive x den Werth $\frac{1}{2}$ hat, veranlasste mich, für eine beliebige trigonometrische Sinus-Reihe mit positiven Coefficienten

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} c_\nu \sin 2\nu x\pi$$

den Grenzwerth

$$\lim_{x=+0} f(x)$$

zu suchen. Die Antwort, welche ich für diese Frage gefunden habe, ist zwar nicht befriedigend, aber es scheint, dass sie sich wird doch bestätigen lassen, wenn man über bessere Hülfsmittel bei der Beweisführung verfügen wird. Indem ich das betreffende Resultat veröffentliche, beabsichtige ich dadurch die Aufmerksamkeit meiner Fachgenossen auf diese Frage zu lenken, und ausserdem soll es vor Vergessen von meiner Seite gerettet werden.

Ich setze

$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n = \varphi(n),$$

und schreibe allgemein $\varphi(x)$ anstelle von $\varphi([x])$, wenn $[x]$ das grösste Ganze von x bezeichnet. Alsdann lautet das in Rede stehende Resultat wie folgt:

$$\lim_{x=0} f(x) \tag{1}$$

$$= \lim_{n=\infty} \pi \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 [\varphi(2kn + n) - \varphi(2kn + 2xn)] \cos x\pi \,.\, dx$$

Sollte aber $f(x)$ für $x = 0$ nicht endlich sein, und ist die rechte Seite von (1) asymptotisch gleich dem Ausdruck

$$g(n),$$

so wird für unendlich kleine Werthe von x der Ausdruck $f(x)$ asymptotisch gleich $g\left(\frac{1}{4x}\right)$ sein.

1. Als Beispiel betrachte ich nun die Reihe

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu};$$

hier wird der asymptotische Werth von $\varphi(n)$ bekanntlich $\log n + C$ lauten, wobei C die Euler'sche Constante bedeutet; und die rechte Seite von (1) wird

$$A = \pi \sum (-1)^k \int_0^1 \left[\log (2k + 1)n - \log (k + x)2n\right] \cos \pi x dx =$$

$$= \pi \sum_{0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 \left[\log \left(k + \frac{1}{2}\right) - \log (k + x)\right] \cos \pi x dx;$$

dies soll gleich $\lim f(x)$ sein.

Offenbar ist

$$A = -\pi \sum_{0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 \log (k + x) \cos \pi x dx$$

oder nach partieller Integration

$$A=\sum_0^\infty(-1)^k\int_0^1\frac{\sin\pi x}{k+x}\,dx;$$

schreibt man jetzt $k+x=s$, so geht dieser Ausdruck über in

$$\sum_0^\infty\int_k^{k+1}\frac{\sin\pi s}{s}\,ds=\int_0^\infty\frac{\sin\pi s}{s}\,ds=\frac{\pi}{2},$$

und es ist in der That

$$\lim_{x=0}\sum_1^\infty\frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu}=\frac{\pi}{2}.$$

2. Das zweite Beispiel sei

$$f(x)=\sum_1^\infty\frac{\log\nu}{\nu}\sin 2\nu\pi x.$$

Der Ausdruck

$$\varphi(n)=\sum_1^n\frac{\log\nu}{\nu}$$

wird bis auf eine Constante asymptotisch gleich der Grösse

$$\frac{1}{2}\log^2 n,$$

und da

$$\frac{1}{2}\log^2(ab)=\frac{1}{2}\log^2 a+\frac{1}{2}\log^2 b+\log a\log b,$$

so wird

$$\varphi(2kn+n)-\varphi(2kn+2xn)$$

$$=\frac{1}{2}\log^2(2k+1)-\frac{1}{2}\log^2(2k+2x)+$$

$$+\{\log(2k+1)-\log(2k+2x)\}\log n.$$

Die rechte Seite von (1) wird in unserem Falle demgemäss wie folgt lauten

$$A = -\pi \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{ \int_0^1 \frac{1}{2} \log^2(2k+2x) \cos x\pi dx \right.$$

$$\left. + \log n \int_0^1 \log(k+x) \cos x\pi dx \right\}$$

und da nach vorhergehendem Beispiele

$$-\pi \sum_0^{\infty} (-1)^k \int_0^1 \log(k+x) \cos x\pi dx = \frac{\pi}{2},$$

so wird hier

$$A = \frac{\pi}{2} \log n - \frac{\pi}{2} \sum_0^{\infty} (-1)^k \int_0^1 \log^2(2k+2x) \cos x\pi dx.$$

Da nun, wie sich mit Hilfe der partiellen Integration leicht ergiebt,

$$\pi \int_0^1 \log^2(2k+2x) \cos x\pi dx$$

$$= -2 \int_0^1 \frac{\log(2k+2x)}{k+x} \sin x\pi dx,$$

so folgt

$$A = \frac{\pi}{2} \log n + \sum_0^{\infty} (-1)^k \int_0^1 \frac{\log(k+x)}{k+x} \sin x\pi dx$$

$$+ \log 2 \sum_0^{\infty} (-1)^k \int_0^1 \frac{\sin x\pi dx}{k+x};$$

die letzte Summe hat den Werth $\frac{\pi}{2}$, wie wir oben gesehen haben, und daher wird

$$A = \frac{\pi}{2} \log 2n + \sum_0^{\infty} (-1)^k \int_0^1 \frac{\log(k+x)}{k+x} \sin x\pi dx.$$

Die unendliche Reihe auf der rechten Seite verwandelt sich wieder in ein bestimmtes Integral, wenn man $k + x = s$ setzt, und es folgt

$$A = \frac{\pi}{2} \log 2n + \int_0^\infty \frac{\log x}{x} \sin x\pi \, dx.$$

Die Werthbestimmung dieses Integrals bietet keine Schwierigkeiten dar, denn est ist ein Specialfall des allgemeineren

$$\int_0^\infty \sin x\pi \; x^{s-1} \log x \, dx,$$

welches ja die Ableitung von

$$\int_0^\infty \sin x\pi \,.\, x^{s-1} dx = \frac{\Gamma(s)}{\pi^s} \sin \frac{s\pi}{2}$$

ist; daher folgt

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x} \sin x\pi dx = \frac{\pi}{2} [\Gamma'(1) - \log \pi] = -\frac{\pi}{2} (C + \log \pi),$$

und somit

$$A = \frac{\pi}{2} \log 2n - \frac{\pi}{2} (C + \log \pi);$$

hieraus soll nach obigen Angaben geschlossen werden können, dass die Function

$$\sum_1^\infty \frac{\log \nu}{\nu} \sin 2\nu x\pi$$

sich für unendlich kleine positive x auf die Grösse

$$-\frac{\pi}{2} \left\{ \log 2x\pi + C \right\}$$

reduciert, eine Thatsache, die sich mit Hilfe der Kummerschen Formel

$$\sum_1^\infty \frac{\log n}{n\pi} \sin 2n x\pi = \log \Gamma(x) + \frac{1}{2} \log \frac{\sin x\pi}{\pi}$$

$$+ \left(x - \frac{1}{2}\right)(C + \log 2\pi)$$

sofort verificiert.

3. Ich setze jetzt $c_\nu = 0$, wenn ν eine zusammengesetzte Zahl ist, und $c_\nu = \frac{1}{\nu}$, wenn $\nu = p$ eine Primzahl ist; alsdann lautet unsere trigonometrische Reihe offenbar

$$f(x) = \sum_p \frac{\sin 2px\pi}{p}, \quad (p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots),$$

wobei über alle Primzahlen p zu summieren ist. Der asymptotische Werth des Ausdrucks $\varphi(n)$ ist durch die merkwürdige Formel des Herrn Mertens*)

$$\varphi(n) = \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \quad \log \log n + \mathrm{Const}$$

bestimmt, und man hat daher für die rechte Seite von (1) den Ausdruck

$$\pi \sum_0^\infty (-1)^k \int_0^1 \log \frac{\log n + \log(2k \quad 1)}{\log n + \log(2k + 2x)} \cos x\pi dx,$$

der für $n = \infty$ verschwindet; hiernach scheint der Ausdruck

$$\sum_p \frac{\sin 2px\pi}{p}$$

für unendlich kleine x selbst unendlich klein zu sein.

---

*) Journal f. d. reine u. angew. Mathem., Bd. 78, oder auch Bachmann's Zahlentheorie II. Bd., p. 370.

II.

In ähnlicher Weise lässt sich die Reihe

$$(2) \qquad \sum_{1}^{\infty} c_\nu \cos 2\nu x\pi$$

behandeln, immer vorausgesetzt, das die c_ν positiv sind.

Setzt man $n = \frac{1}{4x}$, so ergiebt sich, dass sich diese Function für unendlich kleine x genau so verhält wie der Ausdruck

$$(2^a) \begin{cases} \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(2nx) \sin x\pi dx \\ + \pi \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 \varphi(2kn + n + 2nx) \cos x\pi dx. \end{cases}$$

4. Um es an einzelnen Beispielen zu prüfen, betrachte ich zunächst die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}.$$

Hier wird man $\varphi(m) = \log m + C$ zu setzen haben, und der Ausdruck (2^a) geht in den folgenden über

$$A = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (\log 2n + C + \log x) \sin x\pi dx +$$

$$+ \pi \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 \log\left(k + x + \frac{1}{2}\right) \cos x\pi dx.$$

Mittelst partieller Integration verwandelt man den zweiten Ausdruck rechts in das Integral

$$-\int_0^\infty \frac{\sin x\pi dx}{\frac{1}{2}+x} = \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{\cos s\pi}{s} ds;$$

da auserdem wie man leicht sieht

$$\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \log x \,.\, \sin x\pi dx = \lim_{\varepsilon=0}\left(\log\frac{\varepsilon}{\pi} + \int_{\frac{\varepsilon}{\pi}}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos s\pi}{s} ds\right),$$

so ergiebt sich

$$A = \pi(\log 2\pi + C) \int_0^{\frac{1}{2}} \sin x\pi dx - \log \pi +$$

$$+ \lim_{\varepsilon=0}\left(\log\varepsilon + \int_\varepsilon^\infty \frac{\cos x}{x} dx\right),$$

oder

$$A = \log\frac{2\pi}{\pi} + C + \lim_{\varepsilon=0}\left(\log\varepsilon + \int_\varepsilon^\infty \frac{\cos x}{x} dx\right).$$

Um das Integral

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos s}{s} ds$$

zu berechnen, setze ich $s = 2x\pi$, $\frac{\varepsilon}{2\pi} = \varepsilon_1$, und erhalte

$$\int_{\varepsilon_1}^\infty \frac{\cos 2x\pi}{x} dx;$$

dieses Integral geht nun in die unendliche Reihe über

$$\sum_{n=0}^\infty \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_1+1} \frac{\cos 2x\pi}{x+n} dx$$

und diese ist offenbar

$$-\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_1+1} \psi(x) \cos 2x\pi dx, \text{ wenn } \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Nun ist

$$\lim_{\varepsilon_1=0} \int_1^{1+\varepsilon_1} \psi(x) \cos 2x\pi dx = 0,$$

und daher wird

$$A = \log\frac{2n}{\pi} + C + \log 2\pi + \lim_{\varepsilon_1=0}\left(\log \varepsilon_1 - \int_{\varepsilon_1}^{1} \psi(x) \cos 2x\pi dx\right).$$

Weil aber

$$\int_{\varepsilon_1}^{1} \psi(x) \cos 2x\pi dx$$

$$= \log\Gamma(\varepsilon_1) \,.\, \cos 2\varepsilon_1\pi + 2\pi\int_{\varepsilon_1}^{1} \log\Gamma(x) \sin 2x\pi dx,$$

so wird man schliesslich haben

$$A = \log\frac{2n}{\pi} + C + \log 2\pi - 2\pi\int_0^1 \log\Gamma(x) \sin 2x\pi dx$$

$$= \log\frac{2n}{\pi};$$

demnach wird sich die Function

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}$$

für unendlich kleine positive x auf $\log\frac{1}{2x\pi}$ reduciren, was wohl bekannt ist.

5. Um das Beispiel

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\log \nu}{\nu} \cos 2\nu x\pi$$

behandeln zu können, müssen wir den genaueren asymptotischen Werth von

$$\psi(n) = \sum_{1}^{n} \frac{\log \nu}{\nu}$$

ermitteln; derselbe lautet $\frac{1}{2} \log^2 n + K$, wobei K eine Constante bedeutet und der Fehler ist mit $\frac{\log n}{n}$ proportional. Wir haben alsdann für den Ausdruck (2ᵃ) den Werth

$$A = K + \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \log^2 (2nx) \sin x\pi dx$$

$$+ \frac{\pi}{2} \sum_0^{\infty} (-1)^k \int_0^1 \left[\log\left(k + x + \frac{1}{2}\right) + \log 2n\right]^2 \cos x\pi dx\,,$$

und dieser wird offenbar

$$A = K + \frac{1}{2} \log^2 2n + \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\log 2n \,.\, \log x + \frac{1}{2} \log^2 x\right] \sin x\pi dx$$

$$+ \pi \sum_0^{\infty} (-1)^k \int_0^1 \left[\log 2n \,.\, \log\left(k + x + \frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \log^2\left(k + x + \frac{1}{2}\right)\right] \cos x\pi dx.$$

Man findet nun

$$\pi \sum_0^{\infty} (-1)^k \int_0^1 \log\left(k + x + \frac{1}{2}\right) . \cos x\pi dx$$

$$= -\int_0^\infty \frac{\sin x\pi}{x+\frac{1}{2}}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{\cos x\pi}{x}\,dx;$$

$$\frac{\pi}{2}\sum_0^\infty (-1)^k \int_0^1 \log^2\left(k+x+\frac{1}{2}\right).\cos x\pi dx =$$

$$-\int_0^\infty \frac{\log\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x+\frac{1}{2}} \sin x\pi dx = \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{\log x}{x} \cos x\pi dx$$

und infolge dessen reduciert sich der Ausdruck A auf

$$A = K + \frac{1}{2}\log^2 2\pi + \log 2\pi \,.\, \lim_{\varepsilon=0}\left(\log\frac{\varepsilon}{\pi} + \int_\varepsilon^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx\right)$$

$$+ \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{1}{2}\log^2\varepsilon + \int_\varepsilon^\infty \frac{\log x}{x}\cos x\pi \,.\, dx\right).$$

Da aber — wie wir oben gesehen —

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\log\varepsilon + \int_\varepsilon^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx\right) = -C$$

ist, so folgt

$$A = \frac{1}{2}\log^2 2\pi - (C + \log\pi)\log 2\pi + L,$$

wobei

$$(3) \qquad L = K + \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{1}{2}\log^2\varepsilon + \int_\varepsilon^\infty \frac{\log x}{x}\cos x\pi \,.\, dx\right)$$

gesetzt wird.

Demnach würde man schliessen, dass die Function

$$\sum_1^\infty \frac{\log\nu}{\nu}\cos 2\nu x\pi$$

für unendlich kleine positive x sich auf den Ausdruck

$$3^a)\qquad \frac{1}{2}\log^2 2x + (C + \log \pi)\log 2x + L$$

reduciert.

Um dieses Resultat zu controllieren, benütze ich die Identität

$$\sum_1^\infty \frac{e^{2nx\pi i}}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}dt}{e^{t-2x\pi i}-1},$$

aus welcher sich durch Differentiation nach s für $s = 1$ die nachstehende Gleichung ergiebt:

$$\sum_1^\infty \frac{\log n}{n} e^{2nx\pi i} = C\log(1 - e^{2x\pi i}) - \int_0^\infty \frac{\log t\,dt}{e^{t-2x\pi i}-1}$$

Das erste Glied rechts hat den Werth

$$C\left\{\log 2\sin x\pi + \pi i\left(x - \frac{1}{2}\right)\right\},$$

und es bleibt nur das Integral

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\log t\,dt}{e^{t-2x\pi i}-1}$$

zu untersuchen übrig.

Man hat

$$F(x) = \int_0^\omega \frac{\log t\,dt}{e^{t-2x\pi i}-1} + \int_\omega^\infty \frac{\log t\,dt}{e^{t-2x\pi i}-1},$$

und das zweite Integral nähert sich der Grenze

$$\int_\omega^\infty \frac{\log t\,dt}{e^t - 1},$$

wenn x unendlich klein wird; das erste wird mit Hilfe der entwickelung

$$\frac{1}{e^{t-2x\pi i}-1}=\frac{1}{t-2x\pi i}+\cdots$$

auf den Ausdruck

$$\Phi(2x\pi)=\int_0^\omega \frac{\log t}{t-2x\pi i}\,dt$$

zurückgeführt, von welchem es sich um eine endliche Function von x unterscheidet, die selbst zu gleicher Zeit mit ω sehr klein wird.

Der Bequemlichkeit wegen setze ich $2x\pi=u$ und bringe den Ausdruck Φ in die Form

$$\Phi(u)=\int_0^\omega \frac{t\log t\,dt}{t^2+u^2}+ui\int_0^\omega \frac{\log t\,dt}{t^2+u^2},$$

wobei uns blos der reelle Theil interessiert, den wir jetzt mit $\Phi_1(u)$ bezeichnen; man hat, wie sich durch die Substitution $t=uz$ ergiebt,

$$\Phi_1(u)=\log u\int_0^{\frac{\omega}{u}} \frac{z\,dz}{z^2+1}+\int_0^{\frac{\omega}{u}} \frac{z\log z\,dz}{z^2+1};$$

das erste Glied hat den Werth

$$\frac{1}{2}\log u\,.\log\left(\frac{\omega^2}{u^2}+1\right)=-\log^2 u+\frac{1}{2}\log u\log(\omega^2+u^2),$$

und das zweite Integral kann als Summe

$$\int_0^1 \frac{z\log z\,dz}{z^2+1}+\int_1^{\frac{\omega}{u}}\left(\frac{z}{z^2+1}-\frac{1}{z}\right)\log z\,dz+\int_1^{\frac{\omega}{u}}\log z\,\frac{dz}{z}$$

dargestellt werden; offenbar hat dieser Ausdruck für unendlich kleine u den Werth

$$\int_0^1 \frac{z\log z\,dz}{z^2+1}-\int_1^\infty \frac{\log z\,dz}{z(z^2+1)}+\frac{1}{2}\log^2\frac{\omega}{u},$$

oder da die beiden Integrale entgegengesetzte Werthe haben,

$$2\int_0^1 \frac{z\log z\,dz}{z^2+1} + \frac{1}{2}\log^2\frac{\omega}{u};$$

daher wird für unendlich kleine u

$$\Phi_1(u) = -\log^2 u + \frac{1}{2}\left(\log u - \log\omega\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\log u\,.\log(\omega^2+u^2) + 2\int_0^1 \frac{z\log z\,dz}{z^2+1},$$

oder was dasselbe ist

$$\Phi_1(u) = -\frac{1}{2}\log^2 u + \frac{1}{2}\log^2\omega + 2\int_0^1 \frac{z\log z\,dz}{z^2+1}.$$

Damit findet sich die Behauptung erwiesen, dass für unendlich kleine positive x der reelle Theil von $F(x)$ sich auf den Ausdruck

$$-\frac{1}{2}\log^2 u + \left(\frac{1}{2}\log^2\omega + \int_\omega^\infty \frac{\log t\,dt}{e^t-1}\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log z\,dz}{1+z}$$

reducirt, wenn nur eine zu gleicher Zeit mit ω verschwindende Constante vernachlässigt wird. Daher haben wir für unendlich kleine x

$$\sum_1^\infty \frac{\log n}{n}\cos 2nx\pi = C\log(2\sin x\pi) + \frac{1}{2}\log^2(2x\pi)$$

$$-\lim_{\omega=0}\left(\frac{1}{2}\log^2\omega + \int_\omega^\infty \frac{\log t\,dt}{e^t-1}\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log z\,dz}{1+z},$$

und die rechte Seite wird mit (9ª) übereinstimmen, wenn die Gleichung

$$L = \frac{1}{2}\log^2 \pi + C\,.\log\pi - \int_0^1 \frac{1}{2}\,\frac{\log z\,dz}{1+z}$$

$$-\lim_{\omega=0}\left(\frac{1}{2}\log^2\omega+\int_\omega^\infty\frac{\log t\,dt}{e^t-1}\right)$$

besteht. Ersetzt man hier ω durch ε und vergleicht mit (3), so folgt

$$K=\frac{1}{2}\log^2\varkappa+C\log\varkappa-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\log s\,ds}{1+s}$$

$$-\lim_{\varepsilon=0}\left\{\log^2\varepsilon+\int_\varepsilon^\infty\frac{\log x\,dx}{e^x-1}+\int_\varepsilon^\infty\frac{\log x}{x}\cos\varkappa x\,dx\right\}$$

Da nun

$$\int_\varepsilon^\infty\frac{\log x\,dx}{e^x-1}=-\log\varepsilon\,.\log(1-e^{-\varepsilon})-\int_\varepsilon^\infty\log(1-e^{-x})\frac{dx}{x},$$

so wird offenbar

$$K=\frac{1}{2}\log^2\varkappa+C\log\varkappa-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\log s\,ds}{1+s}+$$

$$+\int_0^\infty\frac{\log(1-e^{-x})-\log x\,.\cos\varkappa x}{x}\,dx.$$

Da aber

$$\int_0^1\frac{\log s\,ds}{1+s}=-\frac{\pi^2}{12},$$

so haben wir

$$\text{(4)}\quad\lim_{n=\infty}\left(\sum_{\nu=1}^n\frac{\log\nu}{\nu}-\frac{1}{2}\log^2 n\right)=\frac{1}{2}\log^2\varkappa+\frac{\pi^2}{24}+C\log\varkappa$$

$$+\int_0^\infty\frac{\log(1-e^{-x})-\log x\,.\cos\varkappa x}{x}\,dx,$$

eine Identität, die wohl erst strenge zu beweisen wäre, was wir jedoch unterlassen.

6. Zum Schluss soll noch die Function

$$\sum_p \frac{\cos 2px\pi}{p}$$

für unendlich kleine x ermittelt werden. Hier ist nach Mertens

$$\varphi(m) = \log\log m + G,$$

wobei G eine von ihm näher bestimmte Constante ist, und wobei eine für unendlich wachsendes m verschwindende Grösse vernachlässigt wird. Die Grösse (2*) wird also hier lauten

$$\pi\int_0^{\frac{1}{2}} \log\log(2nx)\sin x\pi\,dx + G$$

$$+\pi\sum_0^{\infty}(-1)^k\int_0^1 \log\log(2kn + n + 2nx)\,.\cos x\pi\,dx,$$

und das zweite Glied wird für unendlich grosse n, wie man leicht sieht, unendlich klein; es bleibt daher blos das erste Glied zu berechnen, und dasselbe wird bis auf unendlich kleine Grössen $\log\log 2n + G$, sodass man also die Gleichung hat

$$\text{(5)}\qquad \lim_{x=0}\left(\sum_p \frac{\cos 2px\pi}{p} - \log\log\frac{1}{2x}\right) = G,$$

falls unsere allgemeine Methode richtig bleibt. Die auf Primzahlen zu erstreckenden Summen

$$\sum_{p=2}^{\infty}\frac{\cos p\pi z}{p}, \quad \sum_{p<\frac{1}{u}}\frac{1}{p}$$

wären also für sehr kleine u sehr wenig von einander verschieden.

Zu meinem grössten Bedauern finde ich mich verpflichtet, bei dieser Gelegenheit den Lesern unserer Sitzungsberichte bekannt zu machen, dass sich der Inhalt meiner Note „Ueber eine Eigenschaft der Factorielle" (Sitzungsber. II. vom Jahre 1898) in seinem vollen Umfange in einer Arbeit Jacobi's *) findet, die mir leider zu spät zur Kenntnis kam.

Nachtrag.

Die zwei allgemeinen Sätze, welche den Hauptgegenstand meiner Mittheilung vom 17. Juni ausmachen, habe ich auf elementarem Wege der algebraischen Analysis gewonnen, in einer Weise jedoch, welche hinsichtlich der Strenge viel zu wünschen übrig liess, aus welchem Grunde auch die Resultate ohne Beweis mitgetheilt worden sind. Neulich bemerkte ich, dass man dieselben nicht nur mit allereinfachsten Hülfsmitteln begründen, sondern dass man ihnen auch eine weit allgemeinere und schärfere Fassung ertheilen kann. Die beiden allgemeinen Sätze sind nun so zu formulieren:

I. „Es bedeute x eine positive Grösse und es seien

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3,$$

irgend welche Grössen, so dass die Reihe

$$f_1(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \sin \nu x$$

convergiert; bezeichnet man mit $[u]$ das grösste Ganze der reellen positiven Grösse u, und setzt der Kürze wegen

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{[u]} = \varphi(u),$$

so besteht folgende Identität:

$$(1) \qquad f_1(x) = -\lim_{m=\infty} x \int_0^{\infty} \varphi\left(\frac{z}{x}\right) \cos zx\,dz,$$

*) Observatio arithmetica de numero classium etc. (Crelle's Journal, B. 9. oder Werke, B. 6, p. 240).

unter der Annahme, dass der Grenzübergang durch ganzzahlige Werthe m vermittelt wird."

Um diesen Satz zu beweisen, genügt es, das Integral

$$\mathrm{J}_m = x \int_0^m \varphi\left(\frac{s}{x}\right) \cos s\varkappa ds$$

zu ermitteln. Mit Hülfe der Substitution $s = xt$ erhält dasselbe die Form

$$\mathrm{J}_m = x\varkappa \int_0^{\frac{m}{x}} \varphi(t) \cos xt\varkappa dt$$

und die für alle Functionen χ stattfindende Identität

$$\int_0^{\frac{m}{x}} \varphi(t)\chi dt = c_1 \int_1^{\frac{m}{x}} \chi dt + c_2 \int_2^{\frac{m}{x}} \chi dt + c_3 \int_3^{\frac{m}{x}} \chi dt + \dots$$

$$+ c_{\left[\frac{m}{x}\right]} \int_{\left[\frac{m}{x}\right]}^{\frac{m}{x}} \chi dt$$

lehrt, dass man

$$\mathrm{J}_m = -c_1 \sin x\varkappa - c_2 \sin 2x\varkappa - c_3 \sin 3x\varkappa - \dots - c_{\left[\frac{m}{x}\right]} \sin \left[\frac{m}{x}\right] x\varkappa$$

hat, woraus sich das Behauptete sofort erschliesst.

II. „Ist für ein positives x die Reihe

$$f_2(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \cos \nu x\varkappa$$

convergent, so findet unter Beibehaltung obiger Bezeichnung folgende Identität statt:

$$(2) \qquad f_2(x) = + \lim_{m=\infty} x \int_0^{m+\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{s}{x}\right) \sin s\varkappa ds,$$

wobei wiederum der Grenzübergang durch ganzzahlige m geschieht."

Der Beweis ist dem vorigen ganz analog, so dass er unterdrückt werden darf.

Ob jedoch diese Formeln zur Bestimmung asymptotischer Werthe der Functionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ für unendlich kleine x sich eignen, scheint nicht leicht zu entscheiden, da — ausser anderen Umständen — bei den Integrationen auch Werthe s vorkommen, für welche $\frac{s}{x}$ nicht gross genug ist, damit $\varphi\left(\frac{s}{x}\right)$ durch asymptotische Darstellung ersetzt werden könne. Die in unserer Note vom 17. Juni mitgetheilten Betrachtungen haben auch eine durchaus nur heuristische Natur.

Verlag der kön. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr in Prag. 1909.