Matyáš Lerch

Sur quelques formules relatives au nombre des classes

Bull. Sci. Math., II. Sér. 21 (1897), 290–304

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501504

MÉLANGES.

SUR QUELQUES FORMULES RELATIVES AU NOMBRE DES CLASSES;

PAR M. LERCH.

1. Considérons les formes quadratiques

$$ax^2 + bxy + cy^2,$$

ayant un discriminant négatif $-\Delta = b^2 - 4ac$, et où les coefficients extérieurs a et c sont positifs; je suppose que les formes (a, b, c) sont primitives, c'est-à-dire que les coefficients a, b, c n'ont aucun diviseur commun, et que le discriminant $-\Delta$ soit *fondamental;* cela veut dire que le nombre Δ n'admet aucun diviseur carré impair et que l'on a $\Delta \equiv 3 \pmod 4$ lorsque Δ est impair et $\frac{\Delta}{4} \equiv 1$ ou $\equiv 2 \pmod 4$, lorsque Δ est pair. Les formes de cette espèce se distribuent en nombre fini des classes de formes équivalentes; nous représentons par $\mathrm{Cl}(-\Delta)$ le nombre des classes, et par (a, b, c) un représentant de l'une quelconque parmi ces classes.

En écrivant encore $\tau = 6$ pour $\Delta = 3$, $\tau = 4$ pour $\Delta = 4$ et $\tau = 2$ pour $\Delta > 4$, on a la formule connue ([1])

$$\mathrm{Cl}(-\Delta) = -\frac{\tau}{2\Delta}\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\alpha \tag{1}$$

qui ne subsiste que pour des discriminants fondamentaux.

Cela posé, rappelons cette circonstance que l'expression analytique

$$\mathrm{E}^*(x) = x - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi} \tag{2}$$

([1]) Le symbole $\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)$ a une signification connue de la théorie des résidus quadratiques.

représente la quantité $E(x)$ ou $[x]$, lorsque x est une quantité positive et fractionnaire, et que l'on a

$$E^*(x) = E(x) - \frac{1}{2},$$

si $x = E(x)$ est entier.

La quantité $E^*(x)$ est aussi bien définie pour des valeurs négatives et sa signification arithmétique est donnée par la relation

$$E^*(x) + E^*(-x) = -1.$$

Rappelons-nous encore la formule

$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)e^{\frac{2m\alpha\pi i}{\Delta}} = \left(\frac{-\Delta}{m}\right)i\sqrt{\Delta}$$

qui également a lieu pour des discriminants fondamentaux, et dans laquelle m représente un entier positif arbitraire; on peut l'écrire

$$(3)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\sin\frac{2m\alpha\pi}{\Delta} = \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{\Delta};$$

on a ensuite les relations

$$(4)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = 0, \qquad \left(\frac{\Delta-\alpha}{\Delta-a}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right).$$

Cela étant, remplaçons dans l'équation (2) la lettre x par $x + \frac{\alpha m}{\Delta}$, multiplions par $\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)$ et faisons la somme des résultats pour $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, \Delta - 1$; en nous servant des formules (3) et (4) nous aurons d'abord

$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)E^*\left(x + \frac{\alpha m}{\Delta}\right) = \frac{m}{\Delta}\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\alpha + \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}$$

ou, d'après la formule (1),

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)E^*\left(x + \frac{\alpha m}{\Delta}\right) + \frac{2m}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) \\ &\quad = \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}.\end{aligned}\right.$$

En comparant ce résultat avec le cas de $m = 1$, on en conclut la relation suivante, qui est purement arithmétique :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2}{\tau}\left[m - \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\right]\mathrm{Cl}(-\Delta) \\ &\quad = \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}^*\left(x + \frac{\alpha}{\Delta}\right) - \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}^*\left(x + \frac{\alpha m}{\Delta}\right). \end{aligned}\right.$$

En prenant $x = 0$, les quantités $\mathrm{E}^*\left(x + \frac{\alpha}{\Delta}\right)$ s'annulent et il s'ensuit

$$(7)\qquad \frac{2}{\tau}\left[m - \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\right]\mathrm{Cl}(-\Delta) = -\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}^*\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right).$$

Si le nombre m est divisible par Δ, cette formule ne nous donne rien de nouveau; il faut donc admettre que m ne soit pas divisible par Δ. Dans ce cas, la fraction $\frac{\alpha m}{\Delta}$ ne devient entière que pour certains diviseurs α de Δ et, par conséquent, les termes correspondants sont multipliés par les facteurs nuls $\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)$; on peut donc écrire, au lieu de (7),

$$(7^*)\qquad \frac{2}{\tau}\left[m - \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\right]\mathrm{Cl}(-\Delta) = -\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right).$$

En posant $m = 2$ on est conduit à considérer la quantité

$$-\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}\left(\frac{2\alpha}{\Delta}\right);$$

les termes correspondants aux valeurs de $\alpha = 1, 2, \ldots, \left[\frac{\Delta}{2}\right]$ sont nuls et il reste

$$-\sum_{\alpha=\left[\frac{\Delta}{2}\right]+1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right),$$

ce qui, à cause de la relation (4), se réduit à

$$\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\Delta}{2}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right).$$

On a donc la formule

$$(8)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = \frac{2}{\tau}\left[2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right]\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Je suppose maintenant $\Delta > 4$ et par conséquent $\tau = 2$; en posant $m = 4$, l'équation (7^*) donne

$$\left[4-\left(\frac{4}{\Delta}\right)\right]\mathrm{Cl}(-\Delta) = -\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}\left(\frac{4\alpha}{\Delta}\right).$$

En convenant d'écrire

$$\sum_{a}^{b}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = \mathbf{S}(a, \ldots, b),$$

le deuxième membre n'est autre chose que l'expression

$$-\mathbf{S}\left(\frac{\Delta}{4}, \ldots, \frac{\Delta}{2}\right) - 2\,\mathbf{S}\left(\frac{\Delta}{2}, \ldots, \frac{3\Delta}{4}\right) - 3\,\mathbf{S}\left(\frac{3\Delta}{4}, \ldots, \Delta\right);$$

la seconde des équations (4) nous fournit les relations

$$\mathbf{S}\left(\frac{3\Delta}{4}, \ldots, \Delta\right) = -\mathbf{S}\left(0, \ldots, \frac{\Delta}{4}\right),$$
$$\mathbf{S}\left(\frac{\Delta}{2}, \ldots, \frac{3\Delta}{4}\right) = -\mathbf{S}\left(\frac{\Delta}{4}, \ldots, \frac{\Delta}{2}\right),$$

et notre expression peut s'écrire par conséquent

$$3\,\mathbf{S}\left(0, \ldots, \frac{\Delta}{4}\right) + \mathbf{S}\left(\frac{\Delta}{4}, \ldots, \frac{\Delta}{2}\right) = \left[4-\left(\frac{4}{\Delta}\right)\right]\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Or, le premier membre de l'équation (8) n'est autre chose que la quantité $\mathrm{S}\left(0, \ldots, \frac{\Delta}{4}\right) + \mathrm{S}\left(\frac{\Delta}{4}, \ldots, \frac{\Delta}{2}\right)$ et par conséquent

$$\mathbf{S}\left(0, \ldots, \frac{\Delta}{4}\right) + \mathbf{S}\left(\frac{\Delta}{4}, \ldots, \frac{\Delta}{2}\right) = \left[2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right]\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Les deux dernières équations nous fournissent les résultats suivants :

$$(9)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\Delta}{4}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)=\frac{2+\left(\frac{2}{\Delta}\right)-\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

$$(10)\qquad \sum_{\alpha=\left[\frac{\Delta}{4}\right]+1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)=\frac{2-3\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Ces deux formules sont plus commodes pour le calcul effectif que les formules (1) ou (8), mais on peut trouver des formules où il figure un nombre de termes encore moindre.

Je prends, à cet effet, $m=3$ dans l'équation (7^*) qui donne

$$\left[3-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)\right]\mathrm{Cl}(-\Delta)=-\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}\left(\frac{3\alpha}{\Delta}\right).$$

Le deuxième membre n'est autre chose que la quantité

$$-\sum_{\alpha=\left[\frac{\Delta}{3}\right]+1}^{\left[\frac{2\Delta}{3}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)-2\sum_{\alpha=\left[\frac{2\Delta}{3}\right]+1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right),$$

et il est aisé de voir que la première somme est nulle, de sorte que notre expression se réduit à la somme

$$-2\sum_{\alpha=\left[\frac{2\Delta}{3}\right]+1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)=2\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\Delta}{3}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right),$$

et l'on a l'équation

$$(11)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\Delta}{3}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)=\frac{3-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Cela étant, retranchons membre à membre les équations (9) et (11); il s'ensuit la formule cherchée

$$(12)\qquad \sum_{\alpha=\left[\frac{\Delta}{4}\right]+1}^{\left[\frac{\Delta}{3}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)=\frac{1-\left(\frac{\Delta}{2}\right)+\left(\frac{\Delta}{3}\right)+\left(\frac{\Delta}{4}\right)}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

dans laquelle le nombre des termes à calculer est environ douze fois moindre que dans la formule (1).

La formule (6) se réduit à (1) pour m infini. On peut la vérifier d'ailleurs directement, si le nombre m est premier avec Δ. Car, dans ce cas, le second membre peut s'écrire

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\left[\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}^*\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right)-\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha m}\right)\mathrm{E}^*\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}\right)\right].$$

En observant que les parties fractionnaires des quantités

$$\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right) \qquad (\alpha=1,\,2,\,\ldots,\,\Delta-1)$$

sont égales, à l'ordre près, aux parties fractionnaires des quantités

$$\left(\frac{-\Delta}{\alpha m}\right)\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}\right),$$

il s'ensuit que notre quantité est égale à la différence

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\left[\sum\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\frac{\alpha}{\Delta}-\sum\left(\frac{-\Delta}{\alpha m}\right)\frac{\alpha m}{\Delta}\right],$$

ce qui, d'après la formule (1), n'est autre chose que le premier membre de l'équation (6).

Dans le cas où les nombres m et Δ ont un diviseur commun plus grand que un, la formule (6) devient

$$(6^a) \qquad \frac{2m}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)=-\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}^*\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}\right).$$

En supposant que le plus grand commun diviseur des nombres m et Δ soit un nombre impair Δ'', je pose

$$m=m'\Delta'', \qquad \Delta=\Delta'\Delta'';$$

ensuite, soit $\mathrm{D}''=\pm\Delta''$ un discriminant, alors le nombre

$$\mathrm{D}'=\frac{-\Delta}{\mathrm{D}''}=\mp\Delta'$$

sera également un discriminant, et les nombres Δ' et Δ'' n'auront aucun diviseur commun, sans quoi le discriminant $-\Delta$ ne pourra être fondamental.

Le deuxième membre de l'équation (6^a)

$$S = -\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) E^* \left(x + \frac{\alpha m'}{\Delta'}\right)$$

se transforme en posant

$$\alpha = \rho + \beta\Delta' \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, \Delta', \beta = 0, 1, \ldots, \Delta'' - 1),$$

et puisque

$$\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = \left(\frac{D'D''}{\rho + \beta\Delta'}\right) = \left(\frac{D'}{\rho}\right)\left(\frac{D''}{\rho + \beta\Delta'}\right),$$

puis

$$E^*\left(x + \frac{\alpha m'}{\Delta'}\right) = \left[E^*\left(x + \frac{\rho m'}{\Delta'}\right) - \frac{\rho m'}{\Delta'}\right] + \frac{m'}{\Delta'}(\rho + \beta\Delta'),$$

on aura évidemment

$$S = -\sum_{\rho=1}^{\Delta'} \left(\frac{D'}{\rho}\right)\left[E^*\left(x + \frac{\rho m'}{\Delta'}\right) - \frac{\rho m'}{\Delta'}\right] \sum_{\beta=0}^{\Delta''-1} \left(\frac{D''}{\rho + \beta\Delta'}\right)$$
$$- \frac{m'}{\Delta'} \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \alpha \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right).$$

Or les Δ'' quantités $\rho + \beta\Delta'$ ($\beta = 0, 1, 2, \ldots, \Delta'' - 1$) étant congrues, suivant le module Δ'', aux nombres $1, 2, 3, \ldots, \Delta''$, on aura

$$\sum_{\beta=1}^{\Delta''-1} \left(\frac{D''}{\rho + \beta\Delta'}\right) = \sum_{\nu=1}^{\Delta''} \left(\frac{D''}{\nu}\right) = 0,$$

et, par conséquent,

$$S = -\frac{m'}{\Delta'} \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \alpha \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = -\frac{m}{\Delta} \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \alpha \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right),$$

ce qui est bien la quantité $\frac{2m}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)$.

La formule (12), dans le cas où Δ est ou premier ou le produit d'un nombre premier par 4 ou par 8, donne lieu à l'introduction des fonctions de Bernoulli, d'après une remarque fort ingénieuse de Lebesgue (1), qui a été développée par M. Hurwitz (2).

---

(1) *Journal de Liouville*, t. VII, p. 157. Lebesgue fait cette remarque que « la solution précédente n'est bonne qu'en théorie ». Ce point de vue l'a probablement empêché de poursuivre cette excellente voie.

(2) *Acta mathematica*, t. XIX.

2. En posant $m=1$ dans la formule (5) et en y supposant

$$0 \leqq x < \frac{1}{\Delta},$$

ladite formule deviendra

$$\text{(13)} \qquad \frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu} \qquad \left(0 \leqq x < \frac{1}{\Delta}\right).$$

C'est une généralisation de la formule de Dirichlet

$$\text{(14)} \qquad \frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{\nu=1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu};$$

mais celle-ci subsiste quel que soit Δ, tandis que la formule (13) n'a été établie que dans le cas d'un discriminant fondamental. Pour avoir une véritable extension de la formule (14) j'emploie l'expression sous forme finie qui s'obtient immédiatement

$$\text{(15)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} = \frac{\pi}{2\Delta}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\frac{h\pi}{\Delta},$$

qui permet d'écrire l'équation (14) comme il suit

$$\text{(16)} \qquad \mathrm{Cl}(-\Delta) = \frac{\tau}{4\sqrt{\Delta}}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\frac{h\pi}{\Delta}.$$

Cela étant, je me rappelle la formule élémentaire

$$\pi\cot u\pi = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x\pi(u+k)}{u+k} \qquad (0 < x < 1);$$

en y posant $u = \frac{h}{\Delta}$ et en faisant la somme, après avoir multiplié par $\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$, on aura

$$\pi\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\frac{h\pi}{\Delta} = \Delta\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{\cos\frac{2x\pi}{\Delta}(h+k\Delta)}{h+k\Delta}.$$

En faisant usage des équations

$$\left(\frac{-\Delta}{h+k\Delta}\right) = \left(\frac{-\Delta}{h}\right), \qquad \left(\frac{-\Delta}{h-k\Delta}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{h}\right), \qquad h > 0,$$

et qu'on peut écrire

$$\left(\frac{-\Delta}{h+k\Delta}\right) = \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{sgn}(h+k\Delta) \qquad \left(k \gtreqless 0\right),$$

où $\operatorname{sgn} z$ représente le signe de la quantité z, il vient

$$\pi\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\frac{h\pi}{\Delta} = \Delta\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos\frac{2\nu x\pi}{\Delta}}{\nu}\operatorname{sgn}(\nu),$$

où il faut rejeter le terme insignifiant $\nu = 0$; les termes de la dernière série sont égaux deux à deux, et il vient, par conséquent,

$$\text{(17)} \qquad \mathrm{Cl}(-\Delta) = \frac{\tau\sqrt{\Delta}}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos\frac{2\nu x\pi}{\Delta}}{\nu} \qquad (0 \leqq x < 1).$$

Nous avons admis encore la valeur de $x = 0$, puisque dans ce cas la formule devient celle de Dirichlet (14).

Cette équation qu'on peut écrire

$$\text{(17}^a\text{)} \qquad \mathrm{Cl}(-\Delta) = \frac{\tau\sqrt{\Delta}}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu} \qquad \left(0 \leqq x < \frac{1}{\Delta}\right)$$

a lieu pour tous les discriminants. On peut l'établir aussi par un autre procédé où intervient la représentation trigonométrique de la fonction $x) E^*$ mais, je me réserve, à une prochaine occasion, de développer cette démonstration et des relations entre les nombres des classes qu'on rencontre sur cette voie. J'annonce seulement qu'on est conduit de cette manière à pénétrer plus profondément dans la nature de la série (17) en pouvant démontrer qu'elle subsiste dans un intervalle plus étendu, à savoir

$$0 \leqq x < \frac{Q^2}{Q'};$$

ici le nombre Q^2 signifie le plus grand diviseur carré de Δ, de sorte que $\frac{\Delta}{Q^2} = \Delta'$ donne le discriminant fondamental $-\Delta'$, tandis que Q' représente le produit des facteurs premiers différents du nombre Q.

En multipliant les deux membres de l'équation (17) par un facteur convenable et en intégrant de zéro à 1, on parvient à des formules intéressantes que je me réserve de publier prochainement.

Ici je veux rappeler seulement les deux équations suivantes qu'on trouve immédiatement

$$\text{(18)} \qquad \mathrm{Cl}(-\Delta) = \frac{\tau\Delta\sqrt{\Delta}}{4\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\sin\frac{2\nu\pi}{\Delta}}{\nu^2},$$

$$\text{(19)} \qquad \mathrm{Cl}(-\Delta) = \frac{\tau\Delta^2\sqrt{\Delta}}{2\pi^3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\sin^2\frac{\nu\pi}{\Delta}}{\nu^3}.$$

3. Dans plusieurs Notes publiées dans les *Mémoires de l'Académie impériale de Prague,* j'ai cherché à établir quelques propriétés des séries de Kronecker, à savoir

$$K(a, b, c; \sigma, \tau; s) = \sum_{m,n}{}' \frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{(am^2+bmn+cn^2)^s}$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \qquad \text{excepté} \qquad m = n = 0),$$

et de leurs généralisations. Le point de vue sous lequel j'envisage cette quantité et qui est celui de Riemann à propos de la série

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots$$

permet de simplifier des calculs qui ont été publiés par l'illustre géomètre de l'Académie de Berlin, où il a établi des résultats très importants.

Cependant, je me suis contenté du côté analytique de ces questions, en cherchant des liaisons avec les transcendantes elliptiques et avec la fonction gamma. J'ai trouvé, par exemple, que le développement, par la série de Maclaurin, de la fonction

$$K(a, b, c; \sigma, \tau; s)$$

commence par les termes suivants :

$$-1 + K_1(a, b, c; \sigma, \tau; 0)\,s + \ldots,$$

où l'on a posé

$$K_1 = -2\log 2\pi + 2\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\tau)}{\Gamma(\tau)} - \frac{\Gamma'(1-\tau)}{\Gamma(1-\tau)}$$
$$+ \log c + \Phi(\sigma, \tau, \omega_1) + \Phi(\sigma, \tau, \omega_2);$$

$$\omega_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2c}, \qquad \omega_2 = \frac{b + i\sqrt{\Delta}}{2c}, \qquad \Delta = 4ac - b^2 > 0,$$
$$a > 0, \qquad c > 0;$$

$$\Phi(\sigma, \tau, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau + n}\left[\frac{1}{e^{-2\omega\pi i(n+\tau) - 2\sigma\pi i} - 1} + \frac{1 - \operatorname{sgn}(n + \frac{1}{2})}{2}\right].$$

Ce résultat m'a fourni la relation suivante, dans laquelle j'ai posé

$$\Psi(\sigma) = \frac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)}:$$

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Psi(\sigma) + \Psi(1-\sigma) - \Psi(\tau) - \Psi(1-\tau) \\ &\quad = \log(-\omega^2) + \Phi\left(\tau, \sigma, \frac{-1}{\omega}\right) + \Phi\left(-\tau, \sigma, \frac{-1}{\omega}\right) \\ &\qquad\qquad - \Phi(\sigma, \tau, \omega) - \Phi(-\sigma, \tau, \omega); \end{aligned}\right.$$

dans cette formule figure une variable arbitraire ω dont la partie imaginaire est supposée positive.

En y prenant $\tau = \frac{1}{2}$, $\omega = i$, on reçoit un développement de la fonction $\Psi(\sigma)$ à convergence rapide :

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)} + \frac{\pi}{2}\cot\sigma\pi + 2\log 2 - \Gamma'(1) \\ &\quad = -4\sum_m \frac{1}{m}\,\frac{\cos 2\sigma\pi - e^{-m\pi}}{e^{m\pi} + e^{-m\pi} - 2\cos 2\sigma\pi} \\ &\qquad - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\sigma}\cdot\frac{1}{e^{2\pi(n+\sigma)} + 1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\sigma}\,\frac{1}{e^{2\pi(n-\sigma)} + 1}, \end{aligned}\right.$$

où $m = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$.

Les relations de cette catégorie conduisent à des séries rapidement convergentes pour représenter le nombre des classes d'un discriminant fondamental positif D. En représentant par T, U la solution principale de l'équation de Pell

$$T^2 - DU^2 = 4,$$

on aura la formule

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(\mathrm{D}).\log\frac{\mathrm{T}+\mathrm{U}\sqrt{\mathrm{D}}}{2}\\ &\quad=\frac{\pi}{2}\sqrt{\mathrm{D}}\sum_{h=1}^{\mathrm{D}-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right)\frac{h^2}{\mathrm{D}^2}-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\log\left(1-e^{-\frac{2m\pi}{\mathrm{D}}}\right)\\ &\qquad-\sqrt{\mathrm{D}}\sum_{m=1}^{\infty}{}'\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{\sqrt{\mathrm{D}}}}-1}, \end{aligned}\right.$$

dans laquelle la première somme peut être simplifiée encore.

Dans les *Sitzungsberichte* de Berlin de 1889, Kronecker [1] a donné la formule

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{P}'(-\Delta)}{\mathrm{P}(-\Delta)}+\mathrm{C}+\log 4\pi^2+\log\sqrt{\Delta}\\ &\quad=\frac{1}{\mathrm{Cl}(-\Delta)}\sum_{a,\,b,\,c}\log\Lambda'\left(0,\,0,\,\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c},\,\frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right), \end{aligned}\right.$$

dans laquelle la sommation s'étend aux formes primitives non équivalentes et positives (a, b, c) du discriminant négatif $-\Delta = b^2 - 4ac$. La signification des symboles qui figurent dans cette formule est expliquée par les équations suivantes :

$$\mathrm{P}(-\Delta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{n},\qquad \mathrm{P}'(-\Delta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{\log n}{n},$$

$$\mathrm{C}=-\Gamma'(1),$$

$$\Lambda'(0,0,\omega_1,\omega_2,)=\frac{4\pi^2\sqrt{\Delta}}{c}\left[\frac{\vartheta_1'(0\,|\,\omega_1)}{2\pi}\,\frac{\vartheta_1'(0\,|\,\omega_2)}{2\pi}\right]^{\frac{2}{3}}.$$

En employant l'écriture

$$\mathrm{H}(\omega)=e^{\frac{\omega\pi i}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2n\omega\pi i})$$

je préfère mettre Λ' sous la forme

$$\Lambda'(0,0,\omega_1,\omega_2)=4\pi^2\sqrt{\Delta}\left[\frac{\mathrm{H}(\omega_1)\,\mathrm{H}(\omega_2)}{\sqrt{c}}\right]^2,$$

---

[1] *Zur Theorie der elliptischen Functionen*, art. XVI.

de sorte que la formule de Kronecker s'écrira

$$(23^*)\qquad \frac{P'(-\Delta)}{P(-\Delta)} + C - \log\Delta = \frac{2}{Cl(-\Delta)} \sum_{a,b,c} \log \frac{H(\omega_1)\,H(\omega_2)}{\sqrt{c}},$$

où

$$\omega_1 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}, \qquad \omega_2 = \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{c}.$$

Je vais prouver que la somme $P'(-\Delta)$ peut s'exprimer sous forme finie à l'aide de la transcendante gamma. Pour ce but j'emploie la formule de Kummer

$$(a)\quad \left\{ \begin{array}{l} \log\Gamma(x) + \frac{1}{2}\log\frac{\sin x\pi}{\pi} + \left(x - \frac{1}{2}\right)(C + \log 2\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n\pi} \sin 2nx\pi \\ \qquad\qquad (0 < x < 1), \end{array} \right.$$

et la formule également connue

$$(b)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \sin\frac{2hm\pi}{\Delta} = \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{\Delta}$$

qui a lieu pour les discriminants fondamentaux et pour un entier positif m quelconque. En posant dans la formule (a) $x = \frac{h}{\Delta}$, multipliant par $\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$ et faisant la somme pour $h = 1, 2, \ldots, \Delta - 1$, on a d'abord

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \log\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right) + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \log\frac{\sin\frac{h\pi}{\Delta}}{\pi}$$
$$+ (C + \log 2\pi) \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{h}{\Delta} - \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n\pi} \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \sin\frac{2nh\pi}{\Delta}.$$

En faisant usage des équations identiques

$$\sum_h \left(\frac{-\Delta}{h}\right) = 0, \qquad \sum_h \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \log\sin\frac{h\pi}{\Delta} = 0,$$

le premier membre devient

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \log\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right) + (C + \log 2\pi) \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{h}{\Delta},$$

et le second se transforme, à l'aide de la formule (b), en série

$$\sqrt{\Delta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{\log n}{n\pi} \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\mathrm{P}'(-\Delta).$$

En faisant usage de la formule (1) on a, par conséquent,

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\mathrm{P}'(-\Delta)=\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right)-(\mathrm{C}+\log 2\pi)\frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)$$

ou bien

$$(24)\qquad \mathrm{P}'(-\Delta)=\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right)-\frac{2\pi}{\tau\sqrt{\Delta}}(\mathrm{C}+\log 2\pi)\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

L'équation (14)

$$\mathrm{P}(-\Delta)=\frac{2\pi}{\tau\sqrt{\Delta}}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)$$

permet donc d'écrire

$$(25)\qquad \frac{\mathrm{P}'(-\Delta)}{\mathrm{P}(-\Delta)}+\mathrm{C}+\log 2\pi=\frac{\tau}{2\,\mathrm{Cl}(-\Delta)}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right).$$

Grâce à cette relation, la formule (23*) de Kronecker prend une forme plus simple

$$(26)\qquad \frac{\tau}{2}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right)=2\sum_{a,b,c}\log\left[\sqrt{\frac{2\Delta\pi}{c}}\,\mathrm{H}(\omega_1)\,\mathrm{H}(\omega_2)\right]$$

$$\left(\omega_1=\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c},\qquad \omega_2=\frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right),$$

que nos méthodes permettent d'ailleurs d'obtenir plus directement.

NOTE.

La formule (6) nous fournit une nouvelle propriété du signe de Legendre. Pour l'obtenir, je multiplie les deux membres par $e^{-ux}\,dx$ et j'intègre de zéro à l'infini; il vient

$$\frac{2m}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)=-u\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\int_0^{\infty}e^{-ux}\,\mathrm{E}^{*}\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}\right)dx.$$

Or on a

$$u\int_0^{\infty} e^{-ux}\,\mathrm{E}^*\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}\right)dx = \mathrm{E}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right) + \frac{e^{u\mathrm{R}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right)}}{e^u-1},$$

en représentant par $\mathrm{R}(z) = z - \mathrm{E}(z)$ le plus petit reste positif de la quantité z; il s'ensuit

$$\frac{2m}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) = -\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right) - \frac{1}{e^u-1}\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)e^{u\mathrm{R}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right)};$$

or, d'après l'équation (6), on a, pour $x = 0$,

$$\frac{2m}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) = -\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right),$$

et la même équation découle de la relation précédente en prenant u infini: on a, par conséquent,

$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)e^{u\mathrm{R}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right)} = 0,$$

lorsque le plus grand commun diviseur Δ'' des nombres Δ et m surpasse l'unité; en posant $m = m'\Delta''$, $\Delta = \Delta'\Delta''$, on aura

$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)e^{u\mathrm{R}\left(\frac{\alpha m'}{\Delta'}\right)} = 0.$$

La variable u étant arbitraire, on en conclut que les quantités $\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)$, pour lesquelles le reste $\mathrm{R}\left(\frac{\alpha m'}{\Delta'}\right)$ a une valeur donnée, ont leur somme égale à zéro, de sorte que

$$\sum_{\alpha=0}^{\Delta''-1}\left(\frac{-\Delta}{\rho+\alpha\Delta'}\right) = 0 \qquad (\Delta'\Delta'' = \Delta).$$

Ici $-\Delta$ est un discriminant fondamental et Δ' un quelconque parmi ses diviseurs proprement dits.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXI.