Matyáš Lerch

Remarques sur quelques points de la théorie élémentaire des fonctions

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1885, 400–414

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501500

v Australii s N. Seelandskem, 153 na Mysu, 114 v sev. Americe mírné, 81 v Evropě, 413 (Himalaja) v sev. Asii a 26 arktických. — endem. 757, 474, 127, 32, 74, 22, 37, 114, 12 a Polypodiacií (10 rodin u něho) má 1750, z nichž 19 v studeném pásmě, 66 v sev. Asii a Evropě, 350 v Asii sev. (Himalaji), 87 v sev. Americe, 127 v mírné antarkt. Africe, 142 v Australii, 82 v mírné antarkt. Americe, 285 v trop. Africe, 699 v trop. Asii v Polynesii a 721 neotropických.

Amfigeiské (t. staro- i novosvětské) tropické druhy má Baker 64, severní mírné 31, antarktické 11 a 91 druhů vyskytuje se severně a jižně od tropů.

V Evropě rozeznává 22 druhů středu, 12 hor. středních a 18 jihozápadních. 12 druhů je na ostrovech atlantických, které nejsou v Evropě 4 *e*) Z Japanu zná 118 druhů, z nichž 13 *e*) 66 v Himalaji, 21 *e*. Z Acuňhy zná 23 dr., 26 z Heleny 7 z Ascensionu, z Australských (160) je 67 společných s Novo-Seelandskem, 25 *e* (34 *e* v N. Seel.).

Všechna ta čísla změnila se poněkud výskumy novějšími.

Tak má ku př. Argentinie skoro samé evropejské rody.

34.

Remarques sur quelques points de la théorie élémentaire des fonctions.

Lu par **Matias Lerch**, dans la séance du 30. octobre 1885.

I. Considérons une fonction analytique quelconque $f(z)$ de la variable imaginaire z n'ayant que des points singuliers isolés de sorte qu'il ne se trouve dans une aire finie quelconque qu'un nombre limité de ces points.

Si $z = x$ est un point ordinaire de la fonction, elle est développable par une série de Taylor telle que

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} (z-x)^{\nu}, \tag{1}$$

dont le rayon de convergence est la distance du point x au point singulier a le plus voisin.

Dans l'analyse on rencontre un grand nombre des fonctions pour lesquelles le quotient de deux termes consécutifs de ce développement, c'est à dire

$$\frac{(z-x)\, f^{(\nu+1)}(x)}{(\nu+1)\, f^{(\nu)}(x)}$$

converge vers une limite déterminée quand ν croit indéfiniment.

Dans ce cas le module de la quantité

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{(\nu+1)\, f^{(\nu)}(x)}{f^{(\nu+1)}(x)} \tag{2}$$

représente le rayon de convergence du développement (1), et par conséquent ce module sera égal à $|x-a|$, si a désigne le point singulier leplus approché de x.

Si l'on suppose que la quantité (2) a, pour les valeurs de x dans une certaine région, une valeur déterminée, son module est une fonction continuo de deux coordonnées da point x. Mais rien ne prouve que l' expression (2) varie continuellement avec x et de plus que ce soit une fonction analytique de x.

Mais dans le cas où cela a lieu, je prouve que cette fonction est donnée par l'expression simple $\varepsilon\,(x-a)$, ε représentant une constante dont le module est l'unité.

En effet, si l'oxpression (2) représente une fonction analytique $u+iv$ de la variable $x=\xi+i\eta$ dans une certaine région, et si, dans cette région, son module est égal à $|x-a|$, nous avons les équations suivantes, en écrivant $a=\alpha+i\beta$:

$$u^2+v^2=(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2 \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial v}{\partial \eta}=U, \frac{\partial u}{\partial \xi}=-\frac{\partial v}{\partial \eta}=-V, \tag{3'}$$

U et V désignant les dérivées partielles de u et de v par rapport à ξ; nous pourrons en conclure, en différentiant l'équation (3) par rapport à x et y les équations suirvantes

$$u\,.\,U+v\,V=\xi-\alpha,\quad v\,U-u\,V=\eta-\beta$$

d'où l'on a:

$$U+iV=\frac{(\xi-\alpha)-i\,(\eta-\beta)}{u-iv}$$

et, au moyen de l'équation (3).

$$U+iV=\frac{d}{dx}(u+iv)=\frac{u+iv}{(\xi-\alpha)+i\,(\eta-\beta)}$$

c'est à dire

$$\frac{d}{dx} log\,(u+iv)=\frac{1}{x-a},$$

et en m intégrant

$$u+iv=C\,(x-a),$$

C devant être une constante dont le module est l'unité, d'après l'équation (3), *c.q.f.d.*

Soient

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\quad a_\nu,\ \ldots$$

les points singuliers de la fonction $f(x)$; si l'on désigne par (a_ν) une région entourant le point a_ν, telle que chacun de ses points soit plus près de a_ν que de tout autre point singulier, (a_ν) sera une aire polygonale finie ou infinie, simplement connexe, limitée par des segments de droite. De cette manière tout le plan des x se subdivisera en régions (a_ν) qui couvrent tout le plan et n'empiètent pas l'une sur l'autre.

Nous étudierons quelques exemples très-simple dans lesquelles l'expression (2) représente une fonction analitique dans tout l'étendue de chacune des régions (a_1), (a_2), ... (a_ν) ...

Prenons en premier lieu pour $f(z)$ la dérivée logarithmique d'une fonction algèbrique entière $G(z)$, c'est à dire

$$f(z)=\frac{G'(z)}{G(z)}=\frac{m_1}{z-a_1}+\frac{m_2}{z-a_2}+\ldots+\frac{m_n}{z-a_n}$$

m_1, m_2, ... m_n étant des nombres entiers.

L'expression (2) sera ici:

$$(2') \qquad -\lim_{\nu=\infty}\frac{\sum\limits_k m_k\,(x-a_k)^{-\nu-1}}{\sum m_k\,(x-a_k)^{-\nu-2}},$$

et il est évident qu'elle aura pour valeur celle des quantitées a_k-x dont le module est le plus petit.

On voit facilement qu'il en est de même pour les fonctions rationnelles $f(z)$ quelconque, et de même pour les dérivées logarithmiques des fonctions transcendentes entières d'un genre finie quelconque.

Nous avons ainsi une expression dépendante de x, que nous désignerons par

$$(4) \qquad V(x)=\lim_{\nu=\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\,(x-a_k)^{-\nu}}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\,(x-a_k)^{-\nu-1}},$$

et qui, dans les diverses parties du plan des x, représente des fonctions distinctes. A l'interieur de la région (a_k), elle représente la fonction $x-a_k$, et, sur les limites de cette région, elle est divergente.

On voit que cette expression possède la même propriété, si $m_1, m_2 \ldots m_n$ désignent des quantités quelconques.

Nous apercevons dans ce calcul la méthode de Daniel Bernoulli pour la résolution des équations algébriques, méthode qui a été l'objet d'une belle publication de *M. Runge* dans le 3. cahier du 6. tome des Acta mathematica.

II. Soit maintenant $g(x) = a + bx + cx^2$ une fonction entiére du second dégré quelconque dont les racines α_1 et α_2 sont distinctes.

Formons au moyen de la fonction

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a + bx + cx^2}$$

l'expression (2) du paragraphe précédant, c'est à dire calculons la limite de l'expression:

$$(2) \qquad \frac{(\nu + 1)\; f^{(\nu)}(x)}{f^{(\nu+1)}(x)} = V_\nu(x)$$

En prenant la dérivée d'ordre $(\nu + 1)$ des deux membres de l'équation

$$f(x) \, . \, g(x) = 1$$

nous obtenons

$$f^{(\nu+1)}(x) \, . \, g(x) + (\nu + 1) f^{(\nu)}(x)\, g'(x) + \nu(\nu + 1)\, c \, . \, f^{(\nu-1)}(x) = 0$$

d'où il résulte immédiatement

$$V_\nu = -\frac{g(x)}{g'(x) + c\, V_{\nu-1}}$$

et par conséquent

$$V_\nu = -\frac{g(x)}{g'(x) + c\, V_{\nu-1}} = -\cfrac{g(x)}{g'(x) - \cfrac{cg(x)}{g'(x) - c V_{\nu-2}}} = \ldots$$

$$= -\cfrac{g(x)}{g'(x) - \cfrac{cg(x)}{g'(x) - \cfrac{cg(x)}{g'(x) - \ldots \cfrac{cg(x)}{g'(x) + c\, V_0}}}}$$

Mais on a évidemment

$$V_0 = \frac{f(x)}{f'(x)} = -\frac{g(x)}{g'(x)};$$

il s'en suit que V_ν est la réduite d'ordre ν de la fraction continue périodique

$$V(x) = -\cfrac{g(x)}{g'(x) - \cfrac{cg(x)}{g'(x) - \cfrac{cg(x)}{g(x) - \dots}}} \tag{3}$$

Nous savons d'un autre côté, d'après ce que nous avons dit plus haut, que l'expression $V_\nu(x)$ tend vers une limite déterminée quand ν croit indéfiniment, si le point x ne se trouve pas sur la droite indéfinie séparant les deux régions (α_1) et (α_2) qui correspondent aux deux points singuliers α_1 et α_2 de $f(x)$. Cette droite, donnée par l'équation $|x - \alpha_1| = |x - \alpha_2|$ est l'axe de symétrie de deux points α_1 et α_2.

Il en résulte que la fraction continue (3) est convergente pour toutes les valeurs de x qui se trouvent à l'intérieur d'une des régions (α_1) ou (α_2), et qu'elle représente dans la première la fonction $(\alpha_1 - x)$, et dans la seconde $(\alpha_2 - x)$.

Voici quelques applications immédiates:

1. La droite séparant les deux régions (α_1) et (α_2) a pour équation

$$x - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = ti\,(\alpha_1 - \alpha_2)$$

t étant une variable réelle, ou bien

$$x + \frac{1}{2}\frac{b}{c} = \frac{ti}{c}\sqrt{b^2 - 4ac},$$

c'est à dire

$$\frac{2cx + b}{\sqrt{4ac - b^2}} = 2t.$$

Ainsi, pour résoudre l'équation du second degré

$$g(x) = a + bx + cx^2 = 0,$$

on n'a qu'à prendre à volonté une quantité x telle que la quantité

$$\frac{2cx + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$$

ne soit pas réelle, et l'expression

$$\alpha = x - \cfrac{g(x)}{g'(x) - \cfrac{cg(x)}{g'(x) - \cfrac{cg(x)}{g'(x) - \cdots}}} \tag{4}$$

nous donnera celle des deux racines qui est la plus approchée de x.

Cette expression (4) a par conséquent pour valeur ou α_1 ou α_2 suivant que x est plus approché de α_1 ou de α_2.

Si l'on prend ainsi par exemple l'équation

$$g(x) = x^2 - 1 = 0,$$

on obtient un résultat élégant: l'expression

$$x - \cfrac{x^2-1}{2x - \cfrac{x^2-1}{2x - \cfrac{x^2-1}{2x - \ddots}}} \tag{5}$$

représente le *signe* de la partie réelle de x, si x n'est pas purement imaginaire. Pour des valeurs réelles de x différentes de zéro on a, par conséquent,

$$sgn\, x = x - \cfrac{x^2-1}{2x - \cfrac{x^2-1}{2x - \cfrac{x^2-1}{2x - \cdots}}} \tag{5'}$$

en représentant par $sgn\ x$ le signe de x.

2. Considérons maintenant l'équation

$$w^2 + \varphi(z) . w + \psi(z) = 0, \tag{6'}$$

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ désignant deux fonctions rationnelles d'une variable z.

Si nous donnons à z une valeur telle que l'expression

$$\frac{\varphi(z)}{\sqrt{4\psi(z) - \varphi(z)^2}}$$

ne soit pas réelle, nous pourrons exprimer la racine w au moyen de la formule (4) en prenant $x = 0$, c'est à dire au moyen de la fraction continue périodique

$$w = -\cfrac{\psi(z)}{\varphi(z) - \cfrac{\psi(z)}{\varphi(z) - \cfrac{\psi(z)}{\varphi(z) - \cdots}}} \tag{6}$$

Elle sera convergente pour toutes les valeurs de z qui rendent différents les modules des deux racines de l'équation (6′) et représentera la plus petite de ces deux racines.

Cherchons maintenant à determiner les valeurs de z qui rendent l'expression (6) divergente. Celles-ci sont données par la condition que la quantité

$$\frac{\varphi(z)}{\sqrt{4\psi(z)-\varphi(z)^2}}$$

soit réelle ou, ce qui revient au même, que l'expression

$$\frac{\varphi(z)^2}{4\psi(z)-\varphi(z)^2}=r$$

prenne une valeur réelle et positive.

Elles s'obtiennent au moyen de l'équation algébrique

$$(r+1)\,\varphi(z)^2-4r\psi(z)=0$$

ou bien

$$\varphi(z)^2-4\rho\varphi(z)=0,$$

ρ étant l'affixe d'un point quelconque de l'intervalle $(0\ldots1)$.

On voit que quand ρ décrit la ligne $(0\ldots1)$ la racine z décrit un ou plusieurs arcs de courbe algébrique que nous appellerons d'après *M. Hermite*, des *coupures.*

Cette espèce de coupures est d'une nature absolument différente de celle des coupures que Riemann avait employées pour rendre monodromes les fonctions multiformes.

Les coupures de Riemann sont arbitraires, et ne sont pas liées à la fonction ou à l'expression considérées, tandis que les coupures de M. Hermite — que j'appelle aussi coupures de représentation — sont bien déterminées, étant définies par l'expression dont il s'agit, et non pas par la fonction, celle-ci pouvant être régulière sur la coupure de représentation.

Chaque fois qu'une expression uniforme, convergente dans tout le plan à l'exception des points d'un système fini ou infini de coupures de M. Hermite, représente une fonction multiforme, une partie de ce système de coupures de répresentation jouera le rôle d'un système particulier de coupures de Riemann.

Mais il y a encore une troisième espèce de coupures que j'appelle les coupures essentielles ou les lignes singulières de la fonction; ce sont celles-là sur lesquelles la fonction n'existe pas, chacun de leurs points étant un point singulier essentiel de la fonction; nous en avons un exemple dans la fonction modulaire.

a) Prenons maintenant pour exemple l'équation

$$w^2 + tw - 1 = 0 \tag{7}$$

La formule (6) nous donnera la plus petite des deux racines sous la forme

$$w = \cfrac{1}{t + \cfrac{1}{t + \cfrac{1}{t + \dots}}} \tag{7'}$$

et la coupure étant définie par l'équation

$$t^2 + 4\varrho = 0, \quad t = 2i\sqrt{\varrho}$$

coincidera avec le segment de droite $(-2i \dots\dots + 2i)$ dont les extrémités sont des points de ramification de la fonction w de la variable t définie par l'équation (7).

b) Considérons en second lieu l'équation

$$w^2 - (\chi_1 + \chi_2)\, w + \chi_1\chi_2 = 0 \tag{8}$$

ayant pour racines deux fonctions rationnelles χ_1 et χ_2 de la variable imaginaire x.

La formule (6) nous donnera l'expression

$$w = \cfrac{\chi_1(x)\,\chi_2(x)}{\chi_1(x) + \chi_2(x) - \cfrac{\chi_1(x)\,\chi_2)\,(x)}{\chi_1(x) + \chi_2(x) - \dots}}$$

qui aura pour valeur la plus petite des deux valeurs $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$ au point considéré x. La coupure de cette expression est formée de tous les x pour lesquels les valeurs absolues des $\chi_1(x)$ et $\chi_2(x)$ sont égales entre elles.

Si l'on prend par exemple

$$\chi_1(x) = x + i, \quad \chi_2(x) = x - i,$$

on aura l'expression

$$\cfrac{x^2 + 1}{2x - \cfrac{x^2 + 1}{2x - \cfrac{x^2 + 1}{2x - \dots}}}$$

ayant l'axe réel du plan des x pour coupure, dont la valeur est ou $x + i$ ou $x - i$ suivant que x se trouve au dessous ou au dessus de l'axe réel.

III. J'ai développé il y a déjà neuf mois quelques uns des résultats précédants dans une conférence du séminaire de l'Université de Berlin par une méthode directe et encore plus élémentaire que je veux reproduire ici.

1. Prenons pour point de départ la fraction continue

$$\alpha = \cfrac{t}{t + \cfrac{1}{t + \cfrac{1}{t + \dots}}} \tag{1}$$

considérée déjà comme exemple dans le paragraphe précédant. En désignant par α_n sa réduite d'ordre n et par α', α'' les deux racines de l'équation

$$\alpha^2 + t\alpha - 1 = 0 \tag{2}$$

on obtient évidemment

$$\alpha_n = \frac{1}{t + \alpha_{n-1}}$$

ou l'équation équivalente

$$\frac{\alpha' - \alpha_n}{\alpha'' - \alpha_n} = \frac{\alpha'}{\alpha''} \cdot \frac{\alpha' - \alpha_{n-1}}{\alpha'' - \alpha_{n-1}},$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\frac{\alpha' - \alpha_n}{\alpha'' - \alpha_n} = \left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^{n-1} \frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'' - \alpha_1} = \left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^{n+1},$$

parceque $\alpha_1 = \frac{1}{t}$, $t = -(\alpha' + \alpha'')$.

On voit alors que α_n converge vers une limite déterminée α pour toutes les valeurs de t qui rendent différents les modules des deux racines de l'équation (2), et quelle représente la plus petite de ces deux racines.

La coupure étant ainsi déterminée par la condition

$$|\alpha'| = |\alpha''|$$

qui exige

$$|\alpha'| = 1,$$

nous l'obtiendrons en posant

$$\alpha' = e^{i\varphi}, \ \alpha'' = -e^{-i\varphi},$$

φ étant une quantité réelle quelconque.

On en déduit la valeur de t correspondante

$$t = -e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = -2i\sin\varphi,$$

et cette équation exprime que la coupure de la fraction continnue (1) est donnée par le segment de droite $(-2i \ldots\ldots +2i)$.

On peut démontrer d'une manière très-simple que la réduite α_n est égale à l'expression $\frac{P_{n-1}(t)}{P_n(t)}$, P_n désignant la fonction entière

$$P_n(t) = t^n + \binom{n-1}{1} t^{n-2} + \binom{n-2}{2} t^{n-4} + \ldots + \binom{n-\nu}{\nu} t^{n-2\nu} + \ldots$$

où les parenthèses désignent les coefficients binomiaux, et l'on en déduit le développement:

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{P_n(t)\, P_{n+1}(t)} \tag{3}$$

convergent dans tout le plan à l'exception des points de la conpure $(-2i \ldots\ldots +2i)$; les termes de ce développement ne deviennent infinis que snr cette coupure, c'est à dire que toutes les racines des équations $P_n(t) = 0$ se trouvent sur le segment de droite $(-2i \ldots +2i)$

Voici la démonstration très-simple que *M. Runge* m'en a donnée: De la formule donnée plns haut pour la valeur de $\frac{\alpha' - \alpha_n}{\alpha'' - \alpha_n}$ on déduit facilement

$$\alpha_n = \frac{\alpha'' \alpha'^{n+1} - \alpha' \alpha''^{n+1}}{\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1}}$$

Cette expression ne devient infinie que quand le dénominateur s'annule, ce qui arrive pour

$$\alpha' = \varepsilon^{\nu} . \alpha'', \ (\nu = 0,\ 1, \ldots n)$$

ε désignant la racine de l'unité $e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$.

On en déduit

$$\alpha'^2 = -\varepsilon^{\nu} \text{ ou } \alpha' = \pm i\varepsilon^{\frac{\nu}{2}},$$

et la valour correspondante de t est

$$\mp i \left(\varepsilon^{\frac{\nu}{2}} + \varepsilon^{-\frac{\nu}{2}} \right) = \mp 2\, i \cos \frac{\nu\pi}{n+1}$$

On voit que ces valeurs sont représentées par des points situés sur la coupure, et que leur ensemble pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ est condensé dans tout l'intervalle.

2. La fraction continue (1) peut nous servir à construire des expressions représentant dans diverses parties du plan des fonctions distinctes. On obtient une telle expression en prenant une fonction rationnelle quelconque $f(x)$ pour la racine α de l'équation (2); la seconde racine étant $-\frac{1}{f(x)}$ on aura pour la valeur de t la fonction

$$t = \frac{1}{f(x)} - f(x) = \frac{1 - f(x)^2}{f(x)}$$

et par conséquent l'expression

$$(4)\quad \cfrac{1}{\cfrac{1-f(x)^2}{f(x)} + \cfrac{1}{\cfrac{1-f(x)^2}{f(x)} + \cdots}} = \cfrac{f(x)}{1-f(x)^2 + \cfrac{f(x)^2}{1-f(x)^2 + \cfrac{f(x)^2}{1-f(x)^2 + \cdots}}}$$

aura pour valeur la plus petite des deux quantités $f(x)$ et $-\frac{1}{f(x)}$, et son système de coupures est donné par la condition

$$|f(x)| = 1$$

Nous en pourrons conclure, en prenant

$$\varphi(x) = f(x)^2,$$

que l'expression

$$(5)\quad \cfrac{\varphi(x)}{1-\varphi(x) + \cfrac{\varphi(x)}{1-\varphi(x) + \cfrac{\varphi(x)}{1-\varphi(x) + \cdots}}},$$

est convergente quand $|\varphi(x)|$ est différent de l'unité et a pour valeur la plus petite des deux quantité $\varphi(x)$ et -1, et cela quelque soit $\varphi(x)$, le raisonnement précédant s'appliquant sur chaque fonction $f(x)$ rationnelle ou non.

Mon illustre maître *M. Kronecker* avait expliqué dans son cours une méthode pour la résolution des équations du second ordre analogue à la suivante:

Étant donnée l'équation à resoudre

$$x^2 + ax + b = 0$$

dont nous désignerons les racines par x_1 et x_2, nous formerons l'équation dont les deux racines sont

$$y_1 = i\frac{x_1}{x_2},\ y_1 = i\frac{x_2}{x_1},$$

c'est à dire l'équation

$$y^2 - \frac{i(a^2-2b)}{b}\,y - 1 = 0$$

dont la plus petite racine y_1 on obtient au moyen de la formule (1) en prenant

$$t = -\frac{i(a^2-2b)}{b}$$

Les racines x_1 et x_2 s'obtiennent par les relations

$$y_1 = -i\frac{x_1}{b+x_1} = -i\,.\,\frac{b+x_2}{x_2}$$

d'où l'on a

$$x_1 = -\frac{by_1}{i+y_1},\ x_2 = -\frac{bi}{i+y_1};$$

on peut par cette méthode résoudre l'équation

$$x^2 - (\chi_1(z) + \chi_2(z))\,x + \chi_1(z)\,\chi_2(z) = 0$$

dont les racines sont deux fonctions rationnelles de la variable z données arbitrairement, et l'on trouve une expression représentant dans diverses parties du plan des z ou $\chi_1(z)$ ou $\chi_2(z)$.

Mais la methode la plus simple et la plus directe pour obtenir des expressions analogues aux précédentes est la suivante:

Considérons l'équation du second ordre

$$x^2 - \mathfrak{f}_1\,.\,x + \mathfrak{f}_2 = 0 \tag{6}$$

dont les deux racines sont x_1 et x_2. On en déduit

$$x = \mathfrak{f}_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{x}$$

et l'on est amené à rechercher, si la fraction continue périodique

$$\mathfrak{f}_1 - \cfrac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{f}_1 - \cfrac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{f}_1 - \cdots}} \tag{6'}$$

représente ou non l'une des deux valeurs x_1 ou x_2.

Au moyen de la méthode employée déjà pour la fraction continue (1), on reconnaît immédiatement que cette expression converge pour tous les systèmes des valeurs de $\mathfrak{f}_1$ et $\mathfrak{f}_2$ qui rendent différents les modules des deux racines x_1 et x_2 et qu'elle représente la plus grande de ces deux racines.

Par conséquent l'expression (6'), c'est à dire la fraction continue

$$(6'') \qquad x_1 + x_2 - \cfrac{x_1 x_2}{x_1 + x_2 - \cfrac{x_1 x_2}{x_1 + x_2 - \dots}}$$

bien qu'elle soit symétrique par rapport à x_1 et x_2, elle a pour valeur la plus grande des deux quantités x_1 et x_2.

Si nous donnons par exemple à x_2 une valeur constante a, et si nous écrivons x au lieu de x_1, nous avons l'expression

$$(6''') \qquad a + x - \cfrac{ax}{a + x - \cfrac{ax}{a + x - \dots}}$$

dont la valeur est x quand x se trouve à l'extérieur du cercle passant par le point a, et ayant le point $x = 0$ pour centre, tandis que, si le point x est à l'intérieur de ce cercle, la valeur de l'expression (6''') est constante et égale à a.

Mais l'exemple (6''') n'est qu'un cas particulier du suivant que l'on obtient en pernant pour x_1 et x_2 deux fonctions rationnelles de z quelconques

$$x_1 = \varphi(z), \quad x_2 = \psi(z),$$

et l'expression que l'on obtient aura pour coupure la courbe algébrique déterminée par l'équation:

$$|\varphi(z)| = |\psi(z)|.$$

Nous voulons encore remarquer que le développement par la série du binome du radical

$$\sqrt{1 - \frac{4x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2}}$$

que l'on rencontre dans la résolution des équations du second ordre nous donnera l'expression

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{x_1^k x_2^k}{(x_1 + x_2)^k}$$

qui représente celle des deux quantités

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \text{ et } \frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_2},$$

dont la partie réelle est positive, la condition nécéssaire de la convergence

$$\left|\frac{4x_1\,x_2}{(x_1+x_2)^2}\right|<1$$

étant supposée remplie.

Mais les expressions obtenues de cette manière sont toujours divergentes dans une partie du plan; car si nous posons $x_1=\varphi(z)$, $x_2=\psi(z)$, φ et ψ étant des fonctions rationnelles, la fonction

$$\frac{4\,.\,\varphi(z)\,.\,\psi(z)}{(\varphi(z)+\psi(z))^2}$$

sera nécessairement plus grande que l'unité dans certaines parties du plan.

3. Il y a une infinité de méthodes plus ou moins pratiques pour le développement d'une racine d'une équation algébrique suivant les fonctions rationnelles des coefficients, et parmi ces méthodes je citerai celle de Daniel Bernoulli exposée dans le mémoire de *M. Runge* déjà cité. La considération du rapport de deux fonctions symétriques des racines, de dimensions n et $n+1$, pourra nous en donner d'autres, et je ferai connaître encore la suivante:

La limite de l'expression $\frac{x_k}{1+x_k^{\nu}}$ pour $\nu=\infty$ étant x_k ou 0 suivant que x_k est plus petit ou plus grand que l'unité, et n'existant pas pour $|x_k|=1$, nous en concluons que la fonction symétrique des racines $x_1 x_2 \ldots x_n$ de l'équation algébrique

$$x^n-\mathfrak{f}_1 x^{n-1}+\mathfrak{f}_2 x^{n-2}\ldots\pm\mathfrak{f}_n=0,$$

donnée par

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{1+x_k^{\nu}}=S_\nu(\mathfrak{f}_1\ \mathfrak{f}_2,\ldots\mathfrak{f}_n),$$

exprimable en fonction rationnelle des coefficients, tend vers une limite déterminée quand ν croit indéfiniment, si aucune des racines ne se trouve sur la circonférence $|x|=1$, et qu'elle est égale à la somme des racines placées à l'intérieur de ce cercle, de telle sorte que dans le cas, où il ne s'y trouve qu'une seule racine, l'expression en donne la valeur.

L'identité

$$\lim_{\nu=\infty} S_\nu(\mathfrak{f}_1,\mathfrak{f}_2,\ldots\mathfrak{f}_n)=S_0+(S_1-S_0)+(S_2-S_1)+\ldots$$

nous donnera le développement de cette racine ou, s'il y se trouvent plusieures, de leur somme en une série de fonctions rationnelles.

Ce procédé nous donnera l'expression de la somme des racines d'une équation donnée placées à l'intérieur d'un cercle donné quelconque, abstraction faite du cas où une ou plusieures de ces racines se trouvent sur la circonférence.

La considération de l'expression

$$\frac{1}{1+x_k^{\nu}}$$

nous amènerait à exprimer par une série infinie le nombre des racines x_k placées à l'intérieur du cercle $|x| = 1$, et l'on peut appliquer cette formule pour un cercle donné quelconque ne passant par aucune des racines de l'équation.

Supposons que la racine x_k de l'équation algébrique écrite plus haut soit donnée par une expression uniforme

$$x_k = W(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots \mathfrak{f}_n);$$

si nous y remplaçons les $\mathfrak{f}$ par leurs expressions en fonction de x_1 $x_2 \dots x_n$, et si nous substituons à ces variables $x_1 x_2 \dots x_n$ les fonctions rationnelles de z données

$$\varphi_1(z),\ \varphi_2(z), \dots \varphi_n(z),$$

nous obtiendrons

$$\varphi_k(z) = \overline{W}(\varphi_1(z),\ \varphi_2(z), \dots \varphi_n(z)),$$

expression dépendant de z qui, dans diverses parties du plan des z, représente les diverses fonctions $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \dots \varphi_n(z)$.

On voit par là combien sont nombreuses les expressions analogues à celles que nous avons étudiées et combien il est naturel de distinguer avec mon illustre maître *M. Weierstrass* les deux notions de „l'expression" et de „fonction".

35.

Expression analytique du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers.

Lu par **Matias Lerch** dans la séance du 13. Novembre 1885.

1. Si le nombre positif entier k supérieur à 3 est premier, l' expression