Matyáš Lerch
Ze základů théorie funkcí elliptických. [II.]

Věstník Čes. Akademie cis. Fr. Jos. pro vědy, slovesnost a umění v Praze 5 (1896), 495–513

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501497

prosa a rýže na př. spočívá patrně v tom, že u rýže, když prodlužuje se mezičlánek, prodlouží se část středního cylindru **pod** vyniknutím svazku štítkového a svazek tento zároveň s ním, kdežto u prosa prodlouží se část téhož cylindru **nad** východiskem svazku štítkového a s ním ve spojení také svazky pochvové, které až hořeji z cylindru pak vycházejí. Anatomický tento rozdíl nemůže však zvrátiti totožnost štítku a pochvy v rodech jedněch (rýže atd.) a druhých (prosa a j.).

Ježto nyní již proveden důkaz, že pošva (koleoptile) patří k štítku jakožto čepeli téhož listu, nemůže prodloužená část osy mezi oběma nazývána býti **článkem osním**, jakýž jen pod samostatným listem, jímž pochva není, tvořiti se může; a jelikož tu část osy, ze které vyniká list, nazýváme uzlem (nodus), jest tudíž onen článek prvním uzlem embrya, **uzlem děložným** (noeud cotylédonaire u Van Tieghema), neobyčejně prodlouženým a pochvu od čepele oddalujícím. Schlickum poukazuje též k tomu, že tento uzel děložný má ještě anatomickou povahu **hypokotylu**, jelikož centrální cylindr jeho, podobně jako sám kořen, neskládá se z oddělených kollaterálních svazků cevních, nýbrž z roztroušených ale určitým způsobem uspořádaných skupin cev a částí sítkových, jak to též obrazce Van Tieghemovy představují, a tím se liší od pravého epikotylu, t. j. článku nadděložního. Jest to pouhý článek **meziděložný**, jenž by se mohl označiti jménem **mesokotylu**. (Dokončení.)

Ze základů theorie funkcí elliptických.

Referuje *M. Lerch*, professor na universitě ve Fryburku švýcarském.

(Pokračování.)

5. Obraťme nyní pozornost k funkci $\zeta(x)$, která s funkcí $\wp(x)$ souvisí rovnicí

$$-\wp(x) = D_x \zeta(x).$$

Pro pohodlí znamenejme základní periody funkce $\wp(x)$ literami $2\omega_1$, $2\omega_3$, místo $2\Omega_1$ a $2\Omega_3$, a zaveďme veličinu ω_2 rovnicí

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0. \tag{20}$$

Buď ω polovicí periody, nikoli však periodou, takže $\wp'(\omega) = 0$. Z rovnice

$$\wp(x + 2\omega) - \wp(x) = 0$$

pak plyne

$$D_x\left[\zeta(x + 2\omega) - \zeta(x)\right] = 0$$

a tedy

$$\zeta(x + 2\omega) - \zeta(x) = c,$$

kde zbývá určiti stálou c. Pro $x = -\omega$ vychází

$$c = \zeta(\omega) - \zeta(-\omega).$$

Ze základních vlastností funkce $\wp(x)$ bylo výše mlčky použito vztahu samozřejmého

$$\wp(-x) = \wp(x),$$

a jemu odpovídá rovněž samozřejmý vztah

$$\zeta(-x) = -\zeta(x),$$

dle něhož obdržíme

$$c = 2\zeta(\omega).$$

Platí tedy vztah

(21) $$\zeta(x + 2\omega) = \zeta(x) + 2\zeta(\omega),$$

je-li ω poloviční periodou. Zavedeme-li symboly

(22) $$\zeta(\omega_1) = \eta_1 \ , \ \zeta(\omega)_2 = \eta_2 \ , \ \zeta(\omega_3) = \eta_3 \ ,$$

obdržíme vzorec

(21ᵃ) $$\zeta(x + 2\omega_\alpha) = \zeta(x) + 2\eta_\alpha \ , \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Tu jest pak

$$\zeta(x + 2\omega_1 + 2\omega_3) = \zeta(x) + 2\zeta(\omega_1 + \omega_3) = \zeta(x) - 2\eta_2 \ ,$$

ale též

$$\zeta(x + 2\omega_1 + 2\omega_3) = \zeta(x + 2\omega_1) + 2\eta_3 = \zeta(x) + 2\eta_1 + 2\eta_3$$

a tedy musí

$$-2\eta_2 = 2\eta_1 + 2\eta_3,$$

t. j. platí vztah

(23) $$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0.$$

Z (21) nyní snadně odvodíme vztah platný pro celistvá m

$$\zeta(x + 2m\omega_1) = \zeta(x) + 2m\eta_1 \ ;$$

abychom to ukázali, sečtěme identity

$$\zeta(x + 2\mu\omega_1) - \zeta\Big(x + 2(\mu - 1)\omega_1\Big) = 2\eta_1$$

pro $\mu = 1, 2, \ldots m$, i obdržíme

$$\zeta(x + 2m\omega_1) - \zeta(x) = 2m\eta_1 \ ;$$

je-li m záporné, máme

$$\zeta(x' - 2m\omega_1) - \zeta(x') = -2m\eta_1,$$

a pro $x' = x + 2m\omega_1$ vychází

$$\zeta(x) - \zeta(x + 2m\omega_1) = -2m\eta_1,$$

tedy v obou případech platí věta

$$\zeta(x + 2m\omega_1) = \zeta(x) + 2m\eta_1.$$

Podobně

$$\zeta(x + 2n\omega_3) = \zeta(x) + 2n\eta_3.$$

Podle toho bude

$$\zeta(x + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = \zeta(x + 2m\omega_1) + 2n\eta_3 = \zeta(x) + 2m\eta_1 + 2n\eta_3,$$

takže máme další vztah

(24) $$\zeta(x + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = \zeta(x) + 2m\eta_1 + 2n\eta_3,$$

platný pro všecka celistvá m a n.

Funkce $\zeta(x)$ v okolí bodu $x = 0$ měla rozvoj tvaru

(a) $$\zeta(x) = \frac{1}{x} + c'_1 x^3 + c'_2 x^5 + c'_3 x^7 + \ldots$$

Definujme integrál

(b) $$\int \zeta(x)\, dx = \log x + \frac{c'_1}{4} x^4 + \frac{c'_2}{6} x^6 + \frac{c'_3}{8} x^8 + \ldots$$

a znamenejme jej $\log \sigma(x)$, t. j. položme

(25) $$\sigma(x) = e^{\int \zeta(x)\, dx}.$$

Vložíme-li za integrál řadu (b) platnou v okolí bodu $x = 0$, obdržíme

$$\sigma(x) = x e^{\frac{c'_1}{4} x^4 + \frac{c'_2}{6} x^6 + \ldots},$$

a provedeme-li rozvoj výrazu exponencialního,

$$\sigma(x) = x\left(1 + \frac{c'_1}{4} x^4 + d_2 x^6 + d_3 x^8 + \ldots\right),$$

t. j.

(c) $$\sigma(x) = x + d_1 x^5 + d_2 x^7 + d_3 x^9 + \ldots$$

Tato řada definuje určitou funkci, kterou lze propagovati, poněvadž

$$D_x \log \sigma(x) = \zeta(x)$$

existuje v celé rovině. Funkce $\log \sigma(x) = \int \zeta(x)\, dx$ chová se pravidelně na všech místech mimo místa

$$2\omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

která jsou poly funkce $\zeta(x)$. Avšak v okolí tohoto polu platí rozvoj

$$\zeta(x) = \frac{1}{x - 2\omega} + (2m\eta_1 + 2n\eta_3) + c'_1(x - 2\omega)^3 + c'_2(x - 2\omega)^5 + \ldots,$$

t. j. bude

$$\log \sigma(x) = \int \zeta(x)\,dx = \log C + \log(x - 2\omega) + (2m\eta_1 + 2n\eta_3)(x - 2\omega)$$
$$+ \frac{c'_1}{4}(x - 2\omega)^4 + \ldots,$$

kde C značí neznámou konstantu. Odtud plyne

$$\sigma(x) = C(x - 2\omega)\, e^{(2m\eta_1 + 2n\eta_3)(x - 2\omega) + \frac{c'_1}{4}(x - 2\omega)^4 + \ldots},$$

t. j. funkce $\sigma(x)$ se také na místech 2ω chová pravidelně.

Funkce $\sigma(x)$ nemá tedy míst zvláštních a *je celistvou funkcí transcendentní.*

Z rovnice (24) plyne integrací

$$\log \sigma(x + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = \log \sigma(x) + (2m\eta_1 + 2n\eta_3)\,x + \log C_{m,n},$$

kde $C_{m,n}$ je neznámá konstanta integrační. Odtud vychází

$$\sigma(x + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = C_{m,n}\,\sigma(x)\, e^{(2m\eta_1 + 2n\eta_3)x};$$

zvláště tedy bude

$$\sigma(x + 2\omega_\alpha) = C^{(\alpha)}\,\sigma(x) e^{2\eta_\alpha x}, \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3).$$

Zvolíme-li $x = -\omega_\alpha$, vychází

$$\sigma(\omega_\alpha) = C^{(\alpha)}\sigma(-\omega_\alpha) e^{-2\eta_\alpha\omega_\alpha};$$

avšak $\sigma(\omega_\alpha)$ není nullou, poněvadž z rovnice

$$\zeta(x) = D_x \log \sigma(x)$$

plyne, že nullová místa funkce $\sigma(x)$ jsou poly funkce $\zeta(x)$ a naopak. Mimo to jest dle (c) funkce $\sigma(x)$ lichou, a tedy $\sigma(-\omega_\alpha) = -\sigma(\omega_\alpha)$, takže po zkrácení činitelem $\sigma(\omega_\alpha)$ vychází

$$1 = -C^{(\alpha)} e^{-2\eta_\alpha\omega_\alpha},$$

a tudíž máme základní vzorec

(26) $$\sigma(x + 2\omega_\alpha) = -\sigma(x)\, e^{2\eta_\alpha(x + \omega_\alpha)}, \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3).$$

Odtud obdržíme

$$\sigma(x + 2\mu\omega_\alpha) = -\sigma(x + \overline{2\mu - 2}\,\omega_\alpha) e^{2\eta_\alpha\, x + \overline{2\mu - 1}\,\omega_\alpha};$$

násobíme-li výsledky tyto pro $\mu = 1,\ 2,\ 3, \ldots m$, obdržíme

$$\sigma(x+2m\omega_a)=(-1)^m\sigma(x)e^{2\eta_a(mx+m^2\omega_a)},$$

t. j.

$$\sigma(x+2m\omega_a)=(-1)^m\sigma(x)e^{2m\eta_a(x+m\omega_a)},$$

odtud snadně se dokáže, že vzorec platí též pro záporná celistvá m.
Podle toho bude

$$\sigma(x+2m\omega_1+2n\omega_3)=(-1)^n\sigma(x+2m\omega_1)e^{2n\eta_3(x+2m\omega_1+n\omega_3)}$$
$$=(-1)^{m+n}\sigma(x)e^{2m\eta_1(x+m\omega_1)+2n\eta_3(x+2m\omega_1+n\omega_3)}.$$

Veličinu v exponentu lze psáti

$$(2m\eta_1+2n\eta_3)(x+m\omega_1+n\omega_3)+2mn(\eta_3\omega_1-\eta_1\omega_3),$$

takže bude

$$(\alpha)\qquad \sigma(x+2m\omega_1+2n\omega_3)=(-1)^{m+n}\sigma(x)e^{(2m\eta_1+2n\eta_3)(x+m\omega_1+n\omega_3)}\cdot e^{2mn(\eta_3\omega_1-\eta_1\omega_3)}.$$

Kdybychom byli levou stranu počítali pořadem opačným

$$\sigma(x+2n\omega_3+2m\omega_1)=(-1)^m\sigma(x+2n\omega_3)e^{2m\eta_1(x+2n\omega_3+m\omega_1)},$$

obdrželi bychom

$$(\beta)\qquad \sigma(x+2m\omega_1+2n\omega_3)=(-1)^{m+n}\sigma(x)e^{(2m\eta_1+2n\eta_3)(x+m\omega_1+n\omega_3)}\cdot e^{2mn(\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1)}.$$

Porovnáním výsledků (α) a (β) obdržíme

$$e^{2mn(\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1)}=e^{2mn(\eta_3\omega_1-\eta_1\omega_3)},$$

tedy

$$e^{4mn(\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1)}=1,$$

z čehož plyne, že

$$4mn(\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1)=2k'\pi i,$$

kde k' je celistvé, tedy zvláště pro $m=n=1$ obdržíme vztah:

$$(27)\qquad \eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=\frac{k\pi i}{2};$$

pak obdrží rovnice (α) a (β) tvar

$$(28)\quad \sigma(x+2m\omega_1+2n\omega_3)=(-1)^{m+n+kmn}\sigma(x)e^{(2m\eta_1+2n\eta_3)(x+m\omega_1+n\omega_3)}.$$

Ve vzorcích těch se ještě vyskytuje neznámé celistvé číslo k. Podaří se je určiti při následující úvaze.
Zaveďme funkci

$$(A)\qquad f(u)=e^{-2\eta_1\omega_1u^2}\sigma(2\omega_1u);$$

ta má pak vlastnosti

$$f(u+1)=-f(u),\ f\left(u+\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)=-f(u)\,e^{-2(\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1)\left(2u+\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)}.$$

Znamenejme $\frac{\omega_3}{\omega_1}=\tau$, a užijme vzorce (27); pak bude $f(u)$ celistvá funkce transcendentní, mající vlastnosti

$$(\mathrm{A}') \qquad f(u+1)=-f(u),\ f(u+\tau)=-f(u)\,e^{-k\pi i(2u+\tau)}.$$

Z vlastností těchto vychází vztah

$$f(u+m+n\tau)=(-1)^{m+n}f(u)\,e^{-nk\pi i(2u+n\tau)};$$

pro celistvá m a n.

Každý bod v rovině lze uvésti na tvar $m+n\tau+u$, kde u leží v rovnoběžníku period; $f(u)$ je tedy menší než jistá konstanta, a výraz exponencialní byl by pro veliká n malý, kdyby $k\tau$ nebylo v pomyslné části kladným; t. j. funkce $f(u+m+n\tau)$ by byla pod stálou mezí, což u celistvých funkcí vyloučeno, t. j. je možno jen v případě $f(z)=$ konst. Je tedy $k\tau$ kladné ve své části pomyslné.

Můžeme předpokládati, že $\tau=\frac{\omega_3}{\omega_1}$ má kladnou část pomyslnou, poněvadž v opačném případě bychom na místě ω_3 zavedli $-\omega'_3$; pak bude $k>0$.

Kdyby $k=1$, pak bychom pomocí trigonometrického rozvoje funkce $f(u)$ shledali, že tato funkce rovná se výrazu $A\vartheta_1(u\,|\,\tau)$, kde A je konstanta, a $\vartheta_1(u\,|\,\tau)$ značí řadu

$$(29) \qquad \vartheta_1(u\,|\,\tau)=\sum_\nu e^{\frac{1}{4}(\nu^2\tau+4\nu u-2\nu)\pi i},\ (\nu=\pm1,\pm3,\pm5,\dots).$$

My raději od této řady vyjdeme a vyšetříme její vlastnosti. Poněvadž τ má kladnou část pomyslnou, je řada konvergentní pro všecka u a definuje celistvou funkci transcendentní této proměnné u. Zároveň je patrno

$$\vartheta_1(u+1)=-\vartheta_1(u).$$

Píšeme-li v řadě $\nu=\nu'+2$, probíhá ν' tytéž hodnoty, a bude

$$\vartheta_1(u)=\sum_{\nu'} e^{\frac{1}{4}[\nu'^2\tau+4\nu'(u+\tau)+4\tau+8u-2\nu'-4]\pi i}$$
$$=-e^{\pi i(2u+\tau)}\,\vartheta_1(u+\tau),$$

t. j. platí též

$$\vartheta_1(u+\tau)=-\vartheta_1(u)\,e^{-\pi i(2u+\tau)}.$$

Funkce $\vartheta_1(u)$ vymizí pro $u=o$, poněvadž v řadě

$$\sum_\nu e^{\frac{1}{4}(\nu^2\tau-2\nu)\pi i}=\sum(-i)^\nu e^{\frac{1}{4}\nu^2\tau\pi i}$$

se členové po dvou ($+\nu$ a $-\nu$) ruší; což ostatně také plyne z řady

$$(29^a)\qquad \vartheta_1(u) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin u\pi - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3u\pi + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5u\pi - \ldots,$$

v níž $q = e^{\tau\pi i}$, a která se z (29) bezprostředně obdrží.

Funkce $\vartheta_1(u)$ dále mizí také na všech místech $m + n\tau$, na nichž mizí $f(u)$, neboť z dokázaných vlastností plyne

$$\vartheta_1(u + m + n\tau) = (-1)^{m+n}\vartheta_1(u)\, e^{-n\pi i(2u+n\tau)},$$

a odtud pro $u = 0$

$$\vartheta_1(m + n\tau) = 0.$$

Poněvadž $f(u)$ nemá jiných míst nullových, bude podíl

$$g(u) = \frac{\vartheta_1(u)}{f(u)}$$

funkcí celistvou transcendentní, a mimo to bude podle (A')

$$g(u+1) = g(u),\quad g(u+\tau) = g(u)\, e^{(k-1)\pi i(2u+\tau)}.$$

Hořejší důkaz provedený a funkce $f(u)$ vede k výsledku, že musí buďto $k - 1 < 0$, aneb aspoň $k - 1 = 0$. První případ je nemožný, druhý vyžaduje, aby $g(u)$ byla konstanta. Tím dokázány výsledky dva:

1. Ve vzorci (27) číslo k má hodnotu 1, jeli pomyslná část podílu $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ kladnou, takže

$$(27^*)\qquad \eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2};$$

2. pro funkci $f(u)$ platí vztah

$$f(u) = A\vartheta_1(u|\tau),$$

t. j. bude

$$\sigma(x) = A e^{\frac{\eta_1 x^2}{2\omega_1}}\vartheta_1\left(\frac{x}{2\omega_1}\,\middle|\,\frac{\omega_3}{\omega_1}\right).$$

Abychom určili A, uvažme, že pravá strana začíná svůj rozvoj Maclaurinský členem

$$\frac{A\vartheta'_1\left(0\,\middle|\,\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)}{2\omega_1}\cdot x + \ldots$$

a že tedy musí

$$\frac{A\vartheta'_1\left(0\,\middle|\,\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)}{2\omega_1} = 1,$$

takže výsledek konečný jest

$$(30)\qquad \sigma(x) = \frac{2\omega_1 e^{\frac{\eta_1 x^2}{2\omega_1}}\vartheta_1\left(\frac{x}{2\omega_1}\,\middle|\,\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)}{\vartheta'_1\left(0\,\middle|\,\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)}.$$

Tím jsme dospěli až k analytickému stanovení funkce $\sigma(x)$, které závisí ještě na neznámých konstantách ω_1, ω_3, η_1, η_3. Poslední dvě lze ještě určiti. Pišme pro jednoduchost opětně $x = 2\omega_1 u$, takže

$$\sigma(2\omega_1 u) = 2\omega_1 \frac{e^{2\eta_1\omega_1 u^2}\vartheta_1(u)}{\vartheta'_1(0)},$$

a vyjadřme okolnost, že v Maclaurinském rozvoji levé strany schází člen u^3. Pravá strana zní ve svém rozvinutí

$$2\omega_1(1 + 2\eta_1\omega_1 u^2 + \ldots)\left(u + \frac{1}{6}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}u^3 + \ldots\right)$$

$$= 2\omega_1\left[u + \left(2\eta_1\omega_1 + \frac{1}{6}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}\right)u^3 + \ldots\right]:$$

tedy se obdrží

$$\eta_1\omega_1 = -\frac{1}{12}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} = \frac{\pi^2}{12}\frac{q^{\frac{1}{4}} - 3^3 q^{\frac{9}{4}} + 5^3 q^{\frac{25}{4}} - \ldots}{q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} - \ldots},$$

a rovnice (27*) poskytne η_3.

Zbývá tedy při daných g_2, g_3 určiti pouze dvě neznámé konstanty ω_1, ω_3. O tomto problému do detailu pojednati ponecháváme si ve spise soustavném.

6. Z rovnice (16)

$$\zeta(a+y) + \zeta(a-y) - 2\zeta(a) = D_a \log\left[\wp(a) - \wp(y)\right]$$

vychází integrací dle a:

$$\log\frac{\sigma(a+y)\sigma(a-y)}{\sigma(a)^2} = \log C\left[\wp(a) - \wp(y)\right],$$

kde C *je integrační stálá; odtud plyne*

$$\frac{\sigma(a+y)\sigma(a-y)}{\sigma(a)^2} = C\left[\wp(a) - \wp(y)\right].$$

V okolí bodu $a = 0$ jest rozvoj levé strany

$$-\frac{\sigma(y)^2}{a^2} + \ldots,$$

takže musí $C = -\sigma(y)^2$, a tedy bude

$$\frac{\sigma(a+y)\sigma(a-y)}{\sigma(a)^2\sigma(y)^2} = \wp(y) - \wp(a), \tag{32}$$

čímž docíleno analytického vyjádření funkce $\wp(y)$; stačí jen zvoliti za a na př. hodnotu ω_3.

Zvolme za y, a skupiny (ω_1, ω_2), (ω_1, ω_3), (ω_2, ω_3); tak se obdrží

$$e_1 - e_2 = -\frac{\sigma(\omega_1+\omega_2)\,\sigma(\omega_1-\omega_2)}{\sigma(\omega_1)^2\,\sigma(\omega_2)^2} = \frac{\sigma(\omega_3)\,\sigma(\omega_3+2\,\omega_1)}{\sigma(\omega_1)^2\,\sigma(\omega_2)^2},$$

$$e_1 - e_3 = -\frac{\sigma(\omega_1+\omega_3)\,\sigma(\omega_1-\omega_3)}{\sigma(\omega_1)^2\,\sigma(\omega_3)^2} = \frac{\sigma(\omega_2)\,\sigma(\omega_2+2\,\omega_1)}{\sigma(\omega_1)^2\,\sigma(\omega_3)^2},$$

$$e_2 - e_3 = -\frac{\sigma(\omega_2+\omega_3)\,\sigma(\omega_2-\omega_3)}{\sigma(\omega_2)^2\,\sigma(\omega_3)^2} = \frac{\sigma(\omega_1)\,\sigma(\omega_1+2\,\omega_2)}{\sigma(\omega_2)^2\,\sigma(\omega_3)^2},$$

tedy podle (26)

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} e_1 - e_2 &= -\frac{\sigma(\omega_3)^2\,e^{-2\eta_1\omega_2}}{\sigma(\omega_1)^2\,\sigma(\omega_2)^2}, \\ e_1 - e_3 &= -\frac{\sigma(\omega_2)^2\,e^{-2\eta_1\omega_3}}{\sigma(\omega_1)^2\,\sigma(\omega_3)^2}, \\ e_2 - e_3 &= -\frac{\sigma(\omega_1)^2\,e^{-2\eta_2\omega_3}}{\sigma(\omega_2)^2\,\sigma(\omega_3)^2}, \end{aligned}\right.$$

kteréžto vzorce lze shrnouti v jediný

$$(33^a)\qquad e_\alpha - e_\beta = -\frac{\sigma(\omega_\gamma)^2\,e^{-2\eta_\alpha\omega_\beta}}{\sigma(\omega_\alpha)^2\,\sigma(\omega_\beta)^2}$$

Podle vzorce (30) jest tento výraz

$$-\frac{1}{(2\,\omega_1)^2}\;\frac{\vartheta_1'(0)^2\,\vartheta_1^2\left(\dfrac{\omega_\gamma}{2\,\omega_1}\right)}{\vartheta_1^2\left(\dfrac{\omega_\alpha}{2\,\omega_1}\right)\vartheta_1^2\left(\dfrac{\omega_\beta}{2\,\omega_1}\right)}\;e^{\frac{2\,\omega_\beta}{\omega_1}(\eta_1\,\omega_\alpha-\eta_\alpha\,\omega_1)}.$$

Zavedeme-li označení

$$\vartheta_1(u) = 2\,q^{\frac{1}{4}}\sin u\pi - 2\,q^{\frac{9}{4}}\sin 3\,u\pi + 2\,q^{\frac{25}{4}}\sin 5\,u\pi - 2\,q^{\frac{49}{4}}\sin 7\,u\pi + \dots$$

$$\vartheta_2(u) = 2\,q^{\frac{1}{4}}\cos u\pi + 2\,q^{\frac{9}{4}}\cos 3\,u\pi + 2\,q^{\frac{25}{4}}\cos 5\,u\pi + 2\,q^{\frac{49}{4}}\cos 7\,u\pi + \dots$$

$$\vartheta_3(u) = 1 + 2\,q\cos 2\,u\pi + 2\,q^4\cos 4\,u\pi + 2\,q^9\cos 6\,u\pi + 2\,q^{16}\cos 8\,u\pi + \dots$$

$$\vartheta_0(u) = 1 - 2\,q\cos 2\,u\pi - 2\,q^4\cos 6\,u\pi + \dots$$

a píšeme-li ϑ_α na místě $\vartheta_\alpha(0)$, ϑ'_1 na místě $\vartheta'_1(0)$, obdržíme po krátké redukci

$$4\,\omega_1^2(e_1-e_2) = \frac{\vartheta_1'^2\,\vartheta_0^2}{\vartheta_2^2\,\vartheta_3^2},\quad 4\,\omega_1^2(e_1-e_3) = \frac{\vartheta_1'^2\,\vartheta_3^2}{\vartheta_0^2\,\vartheta_2^2},\quad 4\,\omega_1^2(e_2-e_3) = \frac{\vartheta_1'^2\,\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2\,\vartheta_3^2}.$$

Vzorce ty se ještě zjednoduší, užije-li se vztahu, který ihned dokážeme

$$(34)\qquad \vartheta'_1 = \pi\,\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3;$$

pak totiž se objeví

$$(33^*)\quad e_1 - e_2 = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\vartheta_0^4,\quad e_1 - e_3 = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\vartheta_3^4,\quad e_2 - e_3 = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\vartheta_2^4;$$

již ze vzorců těchto, jich jednoduchosti a bezprostřední způsobilosti k applikacím vysvitá, že dlužno útvarům ϑ dáti přednost před funkcí σ, která má sloužiti jen jako prostředek k odvození jistých vzorců.

Vzorec (34) objeví se jako důsledek vztahu, který chceme nyní odvoditi. Dělíme-li ve vzorci (32) na obou stranách činitelem $a - y$, a přejdeme-li k mezím pro $a = y$, obdržíme

$$(35)\qquad \sigma(2y) = -\sigma(y)^4\,\wp'(y).$$

Ze vztahu

$$\wp'(y)^2 = 4(\wp y - e_1)(\wp y - e_2)(\wp y - e_3)$$

obdržíme nové vyjádření funkce $\wp'(y)$, vyjádříme-li rozdíly $\wp y - e_\alpha$. Obdržíme totiž ze vzorce (32) pro $a = \omega_\alpha$

$$\wp(y) - e_\alpha = \frac{\sigma(y + \omega_\alpha)\,\sigma(-y + \omega_\alpha)}{\sigma(\omega_\alpha)^2\,\sigma(y)^2},$$

aneb ježto

$$\sigma(-y + \omega_\alpha) = -\sigma(-y - \omega_\alpha)\,e^{-2\eta_\alpha y},$$

$$\wp(y) - e_\alpha = \frac{\sigma(y + \omega_\alpha)^2\,e^{-2\eta_\alpha y}}{\sigma(\omega_\alpha)^2\,\sigma(y)^2}.$$

Zavedeme-li funkce

$$(36)\qquad \sigma_\alpha(x) = \frac{\sigma(x + \omega_\alpha)\,e^{-\eta_\alpha x}}{\sigma(\omega_\alpha)},\quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

obdržíme

$$(37)\qquad \wp(x) - e_\alpha = \frac{\sigma_\alpha(x)^2}{\sigma(x)^2}.$$

Pomocí tohoto výsledku pak nalezneme

$$\wp'(y) = -2\,\frac{\sigma_1(x)\,\sigma_2(x)\,\sigma_3(x)}{\sigma(x)^3}$$

a tedy po substituci do (35).:

$$(38)\qquad \sigma(2x) = 2\,\sigma(x)\,\sigma_1(x)\,\sigma_2(x)\,\sigma_3(x).$$

Pomocí vzorce (30) snadně vypočteme pro $x = 2\omega_1 u$:

$$(39)\qquad \begin{cases} \sigma_1(x) = e^{2\eta_1\omega_1 u^2}\,\dfrac{\vartheta_2(u)}{\vartheta_2}, \\[2ex] \sigma_2(x) = e^{2\eta_1\omega_1 u^2}\,\dfrac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_3}, \\[2ex] \sigma_3(x) = e^{2\eta_1\omega_1 u^2}\,\dfrac{\vartheta_0(u)}{\vartheta_0}. \end{cases}$$

Následkem těchto vzorců obdržíme z (38)

$$(38^a)\qquad \vartheta_1(2u) = 2\,\frac{\vartheta_1(u)\,\vartheta_2(u)\,\vartheta_3(u)\,\vartheta_0(u)}{\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_0}.$$

Differencujme dvakrát logarithmus, a v rovnici tak vzniklé

$$\frac{4\,\vartheta''_1(2u)}{\vartheta_1(2u)} - \frac{\vartheta''_1(u)}{\vartheta_1(u)} + \left[\frac{\vartheta'_1(u)^2}{\vartheta_1(u)^2} - \frac{4\,\vartheta'_1(2u)^2}{\vartheta_1(2u)^2}\right]$$

$$= \sum_\alpha \frac{\vartheta_\alpha''(u)}{\vartheta_\alpha(u)} - \sum_\alpha \frac{\vartheta'_\alpha(u)^2}{\vartheta_\alpha(u)^2}, \qquad (\alpha = 0,\ 2,\ 3),$$

přejděme k limitě pro $u = 0$; i vyjde

$$(\alpha)\qquad \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} + \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}.$$

O řadách ϑ snadně se verifikuje vlastnost

$$\vartheta''(u) = \frac{\partial\,\vartheta(u)}{\partial\,\tau}\,.\,4\pi i;$$

odtud máme

$$\vartheta_1'''(u) = \frac{\partial\,\vartheta'_1(u)}{\partial\,\tau}\,.\,4\pi i$$

a pro $u = 0$

$$\vartheta_1'''(0) = \frac{\partial\,\vartheta_1'(0)}{\partial\,\tau}\,.\,4\pi i,\qquad \frac{\vartheta_\alpha''}{\vartheta_\alpha} = \frac{\partial\,\vartheta_\alpha}{\partial\,\tau}\,.\,4\pi i,$$

a rovnici (α) bude lze psáti

$$\frac{d\log\vartheta'_1}{d\tau} = \frac{d\log\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3}{d\tau},$$

z čehož integrací vychází

$$\vartheta_1' = A\,\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3,$$

kde A nezávisí na τ. Dosazením rozvojů

$$\vartheta_1' = 2\pi q^{\frac{1}{4}} + \ldots,\qquad \vartheta_2 = 2 q^{\frac{1}{4}} + \ldots,\qquad \vartheta_3 = 1 + \ldots,\qquad \vartheta_0 = 1 + \ldots,$$

se obdrží $A = \pi$, čímž vztah (34) dokázán.

7. Zbývá ještě funkci $\operatorname{sn} x$ převésti na $\wp x$. Za tím účelem položme

$$\varphi(x) = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 x},$$

takže

$$\varphi'(x) = -\frac{2\operatorname{cn} x\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn}^3 x},\quad \varphi'(x)^2 = 4\,\varphi(x)\,\big(\varphi(x) - 1\big)\,\big(\varphi(x) - k^2\big).$$

Tvar tento bude souhlasiti s differencialnou rovnicí funkce $\wp(u)$, položí-li se

$$\varphi(x) = \wp(x) - e_3,$$

a ovšem

$$e_1 = 1 + e_3, \quad e_2 = k^2 + e_3;$$

rovnice $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ poskytne pak

$$e_3 = -\frac{1+k^2}{3}.$$

Skutečně jest pak rovnice naše

$$\wp'(x)^2 = 4(\wp x - e_1)(\wp x - e_2)(\wp x - e_3).$$

Máme tedy

$$\operatorname{sn} x = \sqrt{\frac{1}{\wp(x) - e_3}},$$

t. j. podle vzorce (37)

(40) $$\operatorname{sn} x = \frac{\sigma(x)}{\sigma_3(x)},$$

při čemž periody ω_1 a ω_3 funkce $\wp x$ jsou určeny na základě konstant

$$e_1 = \frac{2-k^2}{3}, \quad e_2 = \frac{2k^2-1}{3}, \quad e_3 = -\frac{1+k^2}{3};$$

užijeme-li zde vzorců (33*), obdržíme

$$1 - k^2 = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\vartheta_0^4, \quad 1 = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\vartheta_3^4, \quad k^2 = \frac{\pi^2}{4\omega^2}\vartheta_2^4.$$

Prostřední rovnice poskytne

(41) $$2\omega_1 = \pi\vartheta_3^2,$$

čímž ostatní dvě obdrží tvar

(42) $$k = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^2, \quad k' = \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\right)^2, \quad k' = \sqrt{1-k^2}.$$

Z první neb druhé z rovnic (42) se určí (při daném k) veličina q a odtud logarithmováním τ, načež z (41) obdržíme ω_1 a po té $\omega_3 = \omega_1\tau$.

Je zvykem v tomto případě (funkce $\operatorname{sn} x$) znamenati poloviční periodu ω_1 literou K, ω_3 pak $K'i$, takže K, K' jsou kladné realné veličiny, jeli τ ryze pomyslné, což nastane pro $0 < k < 1$.

Proto přepišme rovnici (41) takto

(41*) $$2K = \pi\vartheta_3^2, \quad K'i = K\tau.$$

Chceme ještě pravou stranu rovnice (40) vyjádřiti funkcemi ϑ. I obdržíme pomocí vzorců (30) a (39):

$$\operatorname{sn}(x) = \frac{\vartheta_0 \, 2K \vartheta_1(u)}{\vartheta'_1 \, \vartheta_0(u)}, \quad u = \frac{x}{2K}.$$

Dosadíme-li sem hodnoty

$$2K = \pi \vartheta_3^2, \quad \vartheta'_1 = \pi \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3,$$

vyjde

(40*)
$$\operatorname{sn}(x) = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_1\left(\frac{x}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{x}{2K}\right)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\vartheta_1\left(\frac{x}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{x}{2K}\right)}.$$

při čemž parametr τ funkcí ϑ jest $\frac{K' i}{K}$.

Ze vzorce toho plyne pro případ $0 < k < 1$, kdy tedy K jest realné a kladné, že probíhá-li x intervall $0 \dots K$, probíhá $\operatorname{sn} x = \xi$ intervall $0 \dots 1$. Odtud soudíme dle vzorce

$$x = \int_0 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

že K má hodnotu

(43^a)
$$K = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}.$$

Dále bude

$$\wp(x) - e_1 = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 x} - 1 = \frac{\operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{sn}^2 x},$$

$$\wp(x) - e_2 = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 x} - k^2 = \frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{sn}^2 x}.$$

takže nalezneme dle (37)

$$\frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x} = \frac{\sigma_1(x)}{\sigma(x)}, \quad \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} = \frac{\sigma_2(x)}{\sigma(x)},$$

tudíž dle (40)

(40^a)
$$\operatorname{cn} x = \frac{\sigma_1(x)}{\sigma_3(x)}, \quad \operatorname{dn} x = \frac{\sigma_2(x)}{\sigma_3(x)},$$

čili

(40^b)
$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{cn} x &= \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_2\left(\frac{x}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{x}{2K}\right)} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(u)}{\vartheta_0(u)}, \\ \operatorname{dn} x &= \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_3\left(\frac{x}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{x}{2K}\right)} = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_0(u)}. \end{aligned}\right.$$

Předpokládejme nyní k mezi 0 a 1, takže K a K' budou kladné realné veličiny; funkce

$$\operatorname{cn}(K+iy) = -\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{iy}{2K}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{iy}{2K}\right)}$$

je ryze pomyslná pro realná y, a tedy funkce

$$\operatorname{sn}^2(K+iy) = 1 - \operatorname{cn}^2(K+iy)$$

bude realná a větší než 1, a sice pro $y=0$ má hodnotu 1.

Funkce

$$\xi = sn(K+iy) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\vartheta_2\left(\frac{iy}{2K}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{iy}{2K}\right)}$$

je realná a větší než 1; probíhá-li y intervall $0 \ldots K'$, probíhá ξ intervall $1 \ldots \frac{1}{k}$. Zároveň je

$$\left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2 = (\xi^2-1)\,(1-k^2\xi^2),$$

a odtud plyne

$$y = \int_1^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}},$$

a ježto pro $\xi = \frac{1}{k}$ jest $y = K'$, máme

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)\,(1-k^2\xi^2)}}. \tag{43^b}$$

Tento integrál přetvořme substitucí

$$1-k^2\xi^2 = k'^2\eta^2;$$

tu bude nejprve

$$\xi^2 = \frac{1-k'^2\eta^2}{k^2}, \quad \xi^2-1 = \frac{k'^2(1-\eta^2)}{k^2},$$

tedy

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)\,(1-k^2\xi^2)}} = -\frac{k'^2}{k^2}\,\frac{\eta\,d\eta}{\sqrt{k'^2\eta^2\,.\,\frac{1-k'^2\eta^2}{k^2}\,.\,\frac{k'^2(1-\eta^2)}{k^2}}}$$

$$= -\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)\,(1-k'^2\eta^2)}};$$

meze integrační jsou 1 a 0, pročež bude

$$(43^e)\qquad K' = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k'^2\eta^2)}},$$

t. j. veličina K' závisí týmž způsobem na modulu k', jako veličina K na modulu k.

8. V našem případě bylo

$$\wp(x) = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 x} - \frac{1+k^2}{3},$$

tedy

$$\zeta(x) = -\int \wp(x)\,dx = -\int \frac{dx}{\operatorname{sn}^2 x} + \frac{1+k^2}{3}x + C,$$

kde C je neznámá konstanta, tak volená, aby v mocninovém rozvoji funkce $\zeta(x)$ nevyskytoval se člen stálý, t. j. musí $\lim\limits_{x=0}\left[\zeta(x) - \frac{1}{x}\right] = 0.$

Zavedeme-li do integrálu proměnnou $\xi = \operatorname{sn} x$, bude

$$dx = \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

a vzorec obdrží tvar

$$\zeta(x) = -\int \frac{d\xi}{\xi^2\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} + \frac{1+k^2}{3}x + C.$$

Jinak psáno, máme

$$\zeta(x) - \frac{1+k^2}{3}x = \int_\xi^1 \frac{dt}{t^2\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + C',$$

kde předpokládáme $0 < \xi < 1$.

Pravou stranu možno psáti

$$\int_\xi^1 \left[\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} - 1\right]\frac{dt}{t^2} + \frac{1}{\xi} - 1 + C'.$$

Podmínku

$$\lim_{x=0}\left[\zeta(x) - \frac{1}{x}\right] = 0$$

přetvořme přičtením rovnice

$$\lim_{x=0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{sn\,x}\right] = 0,$$

a obdržíme ji ve tvaru

$$\lim\left[\zeta(x) - \frac{1}{\xi}\right] = 0,$$

takže máme pro stálou C' podmínku

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} - 1\right]\frac{dt}{t^2} - 1 + C' = 0,$$

a obdržíme konečně

$$\zeta(x) = \frac{1+k^2}{3}x + \frac{1}{\xi} - \int_0^\xi \left[\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} - 1\right]\frac{dt}{t^2}, \tag{44}$$

při čemž $\xi = \operatorname{sn} x$. Odtud pro $x = K$ vyjde

$$\eta_1 = \frac{1+k^2}{3}K + 1 - \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} - 1\right]\frac{dt}{t^2}.$$

Znamenejme nyní

$$\psi(x) = \int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x\, dx; \tag{45}$$

funkce $k^2 \operatorname{sn}^2 x$ se v okolí místa $x = iK'$ dá rozvinouti v řadu tvaru

$$\frac{1}{(x-iK')^2} + c_0 + c_1(x-iK')^2 + \ldots,$$

a tedy v okolí $x = iK'$ máme

$$\psi(x) = -\frac{1}{x-iK'} + \ldots$$

Jiných míst zvláštních mimo místa tvaru

$$2mK + (2n+1)iK'$$

funkce $\psi(x)$ nemá. Funkce tato musí míti podobnou povahu jako funkce $\zeta(x)$ co do period, t. j. musí

$$\psi(x+2K) = \psi(x) + \text{const},$$

$$\psi(x+2iK') = \psi(x) + \text{const},$$

takže součet

$$\psi(x) + \zeta(x-iK'),$$

který je všude konečný, musí býti stálou veličinou, a sice obdrží se volbou $x = 0$. Tu jest $\psi(0) = 0$, $\zeta(-iK') = -\eta_3$, a tedy

$$\psi(x) + \zeta(x-iK') = -\eta_3$$

čili

$$\psi(x) + \zeta(x+iK') = \eta_3, \quad (\omega_1 = K, \omega_3 = K'i). \tag{46}$$

Funkce $\zeta(x+iK') - \zeta(x)$ je dvojperiodickou, jak se snadně přesvědčíme. Její vyjádření se obdrží z věty addiční (16).

Volíme-li tam $y = K'i$, tedy $\wp(y) = e_3$, $\zeta(a - y) = \zeta(a + iK') - 2\eta_3$, obdržíme

$$\zeta(a + K'i) - \zeta(a) = \eta_3 + \frac{1}{2}\frac{\wp'(a)}{\wp(a) - e_3}.$$

Podle toho bude

(47) $$\psi(x) + \zeta(x) = -\frac{1}{2}\frac{\wp'(x)}{\wp(x) - e_3} = \frac{\sigma_1(x)\sigma_2(x)}{\sigma(x)\sigma_3(x)}$$

čili

(47ᵃ) $$\psi(x) + \zeta(x) = \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} = D_x \log \operatorname{sn} x.$$

Odtud plyne bezprostředně

(47ᵇ) $$\psi(x) = - D_x \log \sigma_3(x).$$

Z definice (45) plyne

$$x - \psi(x) = \int_0^x (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x)\, dx$$

a tedy

(48) $$x - \psi(x) = \int_0^{\operatorname{sn} x} \sqrt{\frac{1 - k^2\xi^2}{1 - \xi^2}}\, d\xi;$$

pro $x = K$ plyne odtud

$$K - \psi(K) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2\xi^2}{1 - \xi^2}}\, d\xi,$$

aneb ježto dle (47) $\psi(K) + \zeta(K) = 0$ čili $\psi(K) = -\eta_1$,

(49) $$K + \eta_1 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2\xi^2}{1 - \xi^2}}\, d\xi = E,$$

kde E má dle Jacobia sloužiti za označení tohoto integrálu.

Funkce $\psi(x)$ jest jednoznačnou v celé rovině; dosadíme-li do rovnice

$$D_x\left[x - \psi(x)\right] = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x$$

za x výraz $K + iy$, obdržíme

$$D_y\left[K + iy - \psi(K + iy)\right] = i - ik^2 \operatorname{sn}^2 (K + iy)$$

a odtud

$$K + iy - \psi(K + iy) = C + i\int_0^y \left(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 (K + iy)\right) dy.$$

Konstanta C se určí volbou $y=0$, a sice obdržíme

$$C=K-\psi(K)=E,$$

tudíž

$$K+iy-\psi(K+iy)=E+i\int_0^y\left[1-k^2\operatorname{sn}^2(K+iy)\right]dy.$$

Zavedeme-li do integrálu proměnnou

$$\xi=\operatorname{sn}(K+iy),$$

která probíhá intervall $\left(1\ldots\frac{1}{k}\right)$, probíhá-li y intervall $(0\ldots.K')$, obdržíme

$$dy=\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}},$$

a tedy volíme-li hned hořejší mez rovnu K':

$$K+iK'-\psi(K+iK')=E+i\int_1^{\frac{1}{k}}\sqrt{\frac{1-k^2\xi^2}{\xi^2-1}}\,d\xi.$$

Podle (47^a) jest

$$\psi(K+iK')=-\zeta(K+iK')=\eta_2=-\eta_1-\eta_3;$$

tedy máme

(50) $$iK'+\eta_3=i\int_1^{\frac{1}{k}}\sqrt{\frac{1-k^2\xi^2}{\xi^2-1}}\,d\xi.$$

Přetvoříme-li poslední integrál substitucí

$$1-k^2\xi^2=k'^2\eta^2,$$

obdrží tvar

$$\int_0^1\frac{k'^2\eta^2\,d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k'^2\eta^2)}},$$

i lze jej psáti

$$\int_0^1\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k'^2\eta^2)}}-\int_0^1\sqrt{\frac{1-k'^2\eta^2}{1-\eta^2}}\,d\eta,$$

a ježto prvý integrál má hodnotu K', máme ze vzorce (50) při označení

(51) $$E'=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k'^2\eta^2}{1-\eta^2}}\,d\eta$$

výsledek

(50*) $$\eta_3 = -E'i.$$

Dosadíme-li do vzorce

(a) $$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \frac{\pi i}{2}$$

hodnoty nalezené $\eta_1 = E - K$, $\eta_3 = -E'i$, $\omega_1 = K$, $\omega_3 = K'i$, obdržíme vztah

(52) $$EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2},$$

který objeven *Legendrem*. Proto se také nazývá vztah (*a*) Legendreovou relací.

(Dokončení.)

Metamorfosa pigmentová.

(Přehled.)

Napsal *Vladislav Růžička.*

(Pokračování.)

V.

O klassifikaci pathologických pigmentací. – Pathologická pigmentace haematogenní. — Zbarvení diffusní. — Ochronosa. — Haemosiderosy. — Při zánětech. Per diapedesin. — Plethora. — Hnědá indurace. — Perniciosní anaemie — Senilní atrofie. — Malariová melanaemie. — Vakuolisace rudých krvinek. Fysiologická melanaemie Recklinghausenova. — Pseudomelanosy. — Tvorba vivianitu. — Černý pigment střevní. — Pigment haemorrhagických infarktů. — Snětivá těliska. — Pigmentace thrombů, haematomů, aneurysmat, obliterovaných cev, mozkových kapillar. — Pathologická pigmentace žlučová. — Žlučové barvivo při horečce. — Icterus. — Osudy haemoglobinu rozpuštěného. — Icterus haematogenní. — Pokus Kühneův Naunyn, Tarchanov. — Polycholie. — Rhaestocythaemie. Icterus neonatorum. Icterus resorpční. — Bilirubinové infarkty při ikteru novorozených. — Icterus retenční. — Bilirubin. — Hydrobilirubin. — *Theorie o hydrobilirubinurii.* — *O jedovatosti bilirubinu.* — O kyselinách žlučových. — Rozpad bílkovin při ikteru. Choleoterinaemie. — Resorpce tuku při ikteru. Müllerovo differencialně-diagnostické schema mezi obliterací ductus choledochus a Wirsungianus. — Morfologie žloutenky. — Jaterní icterus. Je snad zjevem normalním? — Melas icterus. Icterus — pravou degenerací pigmentovou. — Cirrhonosa. — Biliverdin secernující adenomy.

Konečně přistupujeme k vlastní pathologické metamorfose pigmentové. Není to pochod jednotný, co tímto jménem označujeme. Existují zajisté různé druhy pigmentové metamorfosy. Již Virchow (67) upozornil na to pozorovav, že po užití kyseliny sírové se na ledvinném pigmentu novorozeňat nedostavuje při změně barev, o níž byla řeč v odstavci III., barva zelená, což považoval za znamení, že jde o druh pigmentace odchylný od obyčejné metamorfosy pigmentové. Na rozmanitost pathologických pigmentací ukazuje dále okolnost, že se objevují na rozličných místech organismu, v rozličných odstínech barevných a v průvodu nejrůznějších pathologických stavů. Avšak material příslušný jest dosud tak málo propracován, že ani z daleka nelze pomýšleti na jakousi podrobnou genetickou klassifikaci pathologických pigmentací v několik speciálních skupin. Každou metamorfosu pathologickou lze rozděliti na infiltraci a degeneraci. Tohoto rozdělení zde nepoužijeme, jelikož čtenář, znaje rozdíl mezi infiltrací a degenerací, každý jednotlivý případ, který v následujících řádcích bude projednáván, snadno do té neb oné kategorie si zařadí.