Matyáš Lerch
Sur une espèce de séries semiconvergentes

Bulletin int. de l'Ac. Prague 3 (1896), 37–40

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501493

ou puisqu'il ne s'agit que du signe,

$$\left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(k-1)(p-1)p} \text{ sgn.} \prod_{\lambda} \sin \frac{k\lambda\pi}{p},$$

λ prenant les valeurs entières entre zéro et $p-1$, de la même parité que p.

Si donc p est paire et $=2m$, on a

$$(3) \qquad (-1)^{\frac{(k-1)(m-1)}{2}} = \text{sgn.} \prod_{\mu=1}^{m-1} \sin \frac{\mu k \pi}{m},$$

et pour m impair

$$(4) \quad \left(\frac{k}{m}\right) = (-1)^{\frac{(k-1)(m-1)}{2}} . \text{sgn.} \prod_{\lambda} \sin \frac{k\lambda\pi}{m}, \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots m-2).$$

En faisant usage de la formule évidente

$$\text{sgn } \sin z\pi = \text{sgn.} R\left(\frac{z}{2}\right),$$

on aura donc la formule suivante

$$(5) \quad \left(\frac{k}{m}\right) = (-1)^{\frac{(k-1)(m-1)}{2}} \text{ sgn.} \prod_{\lambda} R\left(\frac{k\lambda}{2p}\right), \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots m-2)$$

ou bien

$$(6) \qquad \left(\frac{k}{m}\right) = (-1)^{\frac{(k-1)(m-1)}{2} + \sum_{\lambda}\left[\frac{k\lambda}{m}\right]}.$$

Sur une espèce de séries semiconvergentes.

Par M. Lerch.

(Présenté le 13 mars 1896.)

1. Soit $f(z)$ une série de la forme

$$f(z) = \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \ldots$$

ocnvergente pour les valeurs de z suffisamment grandes, et considérons la somme

$$F(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f(a+n),$$

où l'on suppose que ou la partie imaginaire de a soit suffisamment grande, ou la partie réelle soit assez grande et positive, pour que toutes les quantités $a+n$ se trouvent à l'intérieur du domaine de convergence de la série $f(z)$.

Il s'agit d'obtenir une valeur approchée de la fonction $F(a)$, la convergence de la série qui la définit étant bien large. J'emploi pour ce but l'expression

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \left[\frac{1}{z^\nu} - \frac{1}{(z+1)^\nu}\right],$$

dans laquelle je détermine les coefficients de la sorte que les m premiers termes de son développement coïncident avec les m premiers termes du développement de $f(z)$.

A cause de l'identité

$$\varphi(z) = -\sum (-1)^\beta \frac{(\beta+\nu-1)!}{\beta!\,(\nu-1)!} A_\nu z^{-\beta-\nu}, \qquad \begin{pmatrix}\nu = 1, 2, \ldots m \\ \beta = 1, 2, \ldots \infty\end{pmatrix}$$

on a le système d'équations

$$\sum_{\beta+\nu=\alpha} \frac{(-1)^\beta}{\beta!} \frac{A_\nu}{(\nu-1)!} = -\frac{a_\alpha}{(\alpha-1)!}, \qquad \begin{pmatrix}\beta = 1, 2, 3, \ldots \\ \nu = 1, 2, \ldots m\end{pmatrix},$$

correspondant aux valeurs $\alpha = 2, 3, \ldots m+1$.

On voit aisément que les coefficients A_ν s'obtiennent à l'aide de l'identité

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{(-1)^\beta}{\beta!} x^\beta \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu x^\nu}{(\nu-1)!} = -\sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{a_\alpha}{(\alpha-1)!} x^\alpha$$

qui donne

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu x^\nu}{(\nu-1)!} = \frac{x}{1-e^{-x}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu+1}}{\nu!} x^\nu,$$

et d'où il suit

$$(1) \qquad A_\nu = \frac{1}{\nu} a_{\nu+1} + \frac{1}{2} a_\nu + \frac{1}{\nu} \sum_{\mu=1}^{[\frac{1}{2}\nu]} (-1)^{\mu-1} \binom{\nu}{2\mu} B_\mu a_{\nu-2\mu+1}.$$

Le développement de la fonction $f(z) - \varphi(z) = Q(z)$ ayant la forme

$$Q(z) = \frac{b}{z^{m+2}} + \frac{b'}{z^{m+3}} + \frac{b''}{z^{m+4}} + \ldots,$$

il suffit de se rappeler l'identité

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a+n) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{A_\nu}{a^\nu}$$

pour avoir la formule

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} f(a+n) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{A_\nu}{a^\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} Q(a+n)$$

qui donne la valeur approchée de $F(a)$, puisqu'on peut négliger la deuxième somme au second membre, la quantité a ayant été choisie de la sorte que toutes les quantités $Q(a+n)$ soient très petites. On peut le démontrer en employant l'inégalité connue des éléments

$$|Q(z)| < G \cdot \frac{1}{1 - \left|\frac{z_0}{z}\right|} \cdot \left|\frac{z_0}{z}\right|^{m+2},$$

qui a lieu pour $|z| > |z_0|$ et dans laquelle G représente le module maximum que $Q(z)$ prend sur la circonférence $|z| = |z_0|$. —

Si l'on fait par exemple $f(z)=\frac{1}{z^2}$ on tombe sur le fait bien connu que la valeur approchée de la fonction

$$D^2 \log \Gamma(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2}$$

est donnée par l'expression

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{2a^2}+\sum_{\mu=1}^{m}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{a^{2\mu+1}}.$$

2. Le procédé que nous venons d'employer s'applique aussi aux séries de la forme

$$\Phi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nu} f(a+n),$$

dans lesquelles la fonction $f(z)$ est développable en série de la forme

$$f(z)=\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\frac{a_3}{z^3}+\dots,$$

et la quantité u a sa partie réelle négative ou nulle, comme la convergence l'exige.

Déterminons en effet les constantes $C_1, C_2, \dots C_m$ par la condition que le développement de l'expression

$$\psi(z)=\sum_{\nu=1}^{m} C_\nu\left[\frac{1}{z^\nu}-\frac{e^u}{(z+1)^\nu}\right]$$

coïncide, dans ses m premiers termes, avec celui de $f(z)$. On aura les m équations suivantes à résoudre

$$\frac{C_\alpha}{(\alpha-1)!}-e^u\sum_{\beta+\nu=\alpha}(-1)^\beta\frac{C_\nu}{\beta!(\nu-1)!}=\frac{a_\alpha}{(\alpha-1)!}, \quad \begin{pmatrix}\beta=0,1,2,\dots\\ \alpha=1,2,\dots m\end{pmatrix},$$

dont on conclut que nos coefficients inconnus s'obtiennent à l'aide de l'identité

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{C_\alpha}{(\alpha-1)!}x^\alpha\cdot\left[1-e^u\sum_{\beta=0}^{\infty}(-1)^\beta\frac{x^\beta}{\beta!}\right]=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{a_\alpha}{(\alpha-1)!}x^\alpha,$$

qui donne

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{C_\alpha}{(\alpha-1)!}x^\alpha=\frac{1}{1-e^{u-x}}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{a_\alpha}{(\alpha-1)!}x^\alpha.$$

On a par conséquent

$$(3) \qquad C_\nu=\sum_{\beta=0}^{\nu-1}(-1)^\beta\binom{\nu-1}{\beta}D_u^\beta\frac{1}{1-e^u}a_{\nu-\beta},$$

et il suffit d'employer l'identité

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{nu}\psi(a+n)=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{C_\nu}{a^\nu}$$

pour obtenir la valeur approchée de $\Phi(a)$. Car en effet on a le développement

$$f(z) = \psi(z) + Q(z),$$

où

$$Q(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_\nu}{z^{m+\nu}},$$

et par conséquent

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nu} f(a+n) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{C_\nu}{a^\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{nu} Q(a+n), \tag{4}$$

où la dernière somme est négligeable.

En faisant par exemple $f(z) = \frac{1}{z}$, on voit que la valeur approchée de la quantité

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nu}}{a+n}$$

est donnée par la série semiconvergente

$$\frac{1}{1-e^u} \cdot \frac{1}{a} - D_u \frac{1}{1-e^u} \cdot \frac{1}{a^2} + D_u{}^2 \frac{1}{1-e^u} \cdot \frac{1}{a^3} - \ldots .$$

Sur la transformation abélienne des séries trigonométriques.

Par M. Lerch.

(Présenté le 8 mai 1896.)

Soit donnée la série trigonométrique convergente

$$f(x) = \sum_{\mu=h}^{\infty} a_\mu \cos 2\mu x\pi, \qquad (0 < x < 1),$$

dans laquelle $h \geqq 0$. Pour la transformer, je substitue dans l'identité classique dont Abel a montré l'importance,

$$\sum_{\mu=h}^{m} a_\mu b_\mu = \sum_{\mu=h}^{m-1} (a_\mu - a_{\mu+1})(b_h + b_{h+1} + \ldots + b_\mu) + a_m (b_h + b_{h+1} + \ldots + b_m),$$

pour b_μ la quantité $\cos 2\mu x\pi$. On aura de la sorte identiquement

$$\sum_{\mu=h}^{m} a_\mu \cos 2\mu x\pi = \sum_{\mu=h}^{m-1} (a_\mu - a_{\mu+1}) \frac{\sin(2\mu+1)x\pi - \sin(2h-1)x\pi}{2\sin x\pi} + a_m \frac{\sin(2m+1)x\pi - \sin(2h-1)x\pi}{2\sin x\pi},$$