Matyáš Lerch

Sur la transformation abélienne des séries trigonométriques

Bulletin int. de l'Ac. Prague 3 (1896), 40–44

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501492

pour obtenir la valeur approchée de $\Phi(a)$. Car en effet on a le développement

$$f(z) = \psi(z) + Q(z),$$

où

$$Q(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_\nu}{z^{m+\nu}},$$

et par conséquent

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nu} f(a+n) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{C_\nu}{a^\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{nu}\, Q(a+n), \tag{4}$$

où la dernière somme est négligeable.

En faisant par exemple $f(z) = \frac{1}{z}$, on voit que la valeur approchée de la quantité

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nu}}{a+n}$$

est donnée par la série semiconvergente

$$\frac{1}{1-e^u} \cdot \frac{1}{a} - D_u \frac{1}{1-e^u} \cdot \frac{1}{a^2} + D_u^2 \frac{1}{1-e^u} \cdot \frac{1}{a^3} - \ldots .$$

Sur la transformation abélienne des séries trigonométriques.

Par M. Lerch.

(Présenté le 8 mai 1896.)

Soit donnée la série trigonométrique convergente

$$f(x) = \sum_{\mu=h}^{\infty} a_\mu \cos 2\mu x\pi, \qquad (0 < x < 1),$$

dans laquelle $h \geqq 0$. Pour la transformer, je substitue dans l'identité classique dont Abel a montré l'importance,

$$\sum_{\mu=h}^{m} a_\mu b_\mu = \sum_{\mu=h}^{m-1} (a_\mu - a_{\mu+1})(b_h + b_{h+1} + \ldots + b_\mu) + a_m (b_h + b_{h+1} + \ldots + b_m),$$

pour b_μ la quantité $\cos 2\mu x\pi$. On aura de la sorte identiquement

$$\sum_{\mu=h}^{m} a_\mu \cos 2\mu x\pi = \sum_{\mu=h}^{m-1} (a_\mu - a_{\mu+1}) \frac{\sin(2\mu+1)x\pi - \sin(2h-1)x\pi}{2\sin x\pi} + a_m \frac{\sin(2m+1)x\pi - \sin(2h-1)x\pi}{2\sin x\pi},$$

d'où il suit, puisque $\lim_{m=\infty} a_m = 0$, le développement

$$\sum_{\mu=h}^{\infty} a_\mu \cos 2\mu x\pi = \sum_{\mu=h}^{\infty} \nabla a_\mu \,.\, \frac{\sin(2\mu+1)x\pi - \sin(2h-1)x\pi}{2\sin x\pi},$$

en posant pour abréger $\nabla a_\mu = a_\mu - a_{\mu+1}$. La série $f(x)$ se trouve de la sorte réduite à un développement de la même espèce

$$f(x) = -a_h \frac{\sin(2h-1)x\pi}{2\sin x\pi} + \frac{1}{2\sin x\pi}\sum_{\mu=h}^{\infty} \nabla a_\mu \,.\, \sin(2\mu+1)x\pi\,;$$

on peut évidemment soumettre la nouvelle série à la même transformation, le résultat de même et ainsi de suite. On parvient de cette manière à une formule générale que voici:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{\mu=h}^{\infty} a_\mu \cos 2\mu x\pi = & \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu+1} \nabla^{2\nu} a_h \,.\, \frac{\sin(2h+2\nu-1)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+1}} \\ & + \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu} \nabla^{2\nu+1} a_h \,.\, \frac{\cos(2h+2\nu)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+2}} \\ & + \frac{(-1)^k}{(2\sin x\pi)^{2k}} \sum_{\mu=h}^{\infty} \nabla^{2k} a_\mu \,.\, \cos(2\mu+2k)x\pi, \end{aligned}\right.$$

où nous avons posé

$$\nabla^2 a_\mu = \nabla a_\mu - \nabla a_{\mu+1}, \qquad \nabla^3 a_\mu = \nabla^2 a_\mu - \nabla^2 a_{\mu+1}, \text{ etc.}$$

Voilà une espèce nouvelle des développements, qu'on peut, dans beaucoup des cas, prolonger indéfiniment en passant à la limite pour k infini. Il faut et il suffit pour ce but que les séries auxquelles se changent les deux premières sommes du second membre soient convergentes et que le reste, c'est à dire la quantité

$$R_k = \frac{(-1)^k}{(2\sin x\pi)^{2k}} \sum_{\mu=h}^{\infty} \nabla^{2k} a_\mu \,.\, \cos(2\mu+2k)x\pi$$

devient infiniment petite pour k infini.

Avant de donner des applications, rappelons ces trois autres résultats qu'on trouve sur la même voie,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{\mu=h}^{\infty} b_\mu \sin 2\mu x\pi = & \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu} \nabla^{2\nu} b_h \,.\, \frac{\cos(2h+2\nu-1)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+1}} \\ & + \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu} \nabla^{2\nu+1} b_h \,.\, \frac{\sin(2h+2\nu)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+2}} \\ & + \frac{(-1)^k}{(2\sin x\pi)^{2k}} \sum_{\mu=h}^{\infty} \nabla^{2k} b_\mu \,.\, \sin(2\mu+2k)x\pi, \end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\sum_{\mu=h}^{\infty} a_\mu \cos(2\mu+1)x\pi = &\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^{\nu+1}\varDelta^{2\nu} a_h \cdot \frac{\sin(2h+2\nu)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+1}}\\ &+\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^{\nu}\varDelta^{2\nu+1} a_h \cdot \frac{\cos(2h+2\nu+1)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+2}}\\ &+\frac{(-1)^k}{(2\sin x\pi)^{2k}}\sum_{\mu=h}^{\infty}\varDelta^{2k} a_\mu \cdot \cos(2\mu+2k+1)x\pi,\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}\sum_{\mu=h}^{\infty} b_\mu \sin(2\mu+1)x\pi = &\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^{\nu}\varDelta^{2\nu} b_h \cdot \frac{\cos(2h+2\nu)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+1}}\\ &+\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^{\nu}\varDelta^{2\nu+1} b_h \cdot \frac{\sin(2h+2\nu+1)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+2}}\\ &+\frac{(-1)^k}{(2\sin x\pi)^{2k}}\sum_{\mu=h}^{\infty}\varDelta^{2k} b_\mu \cdot \sin(2\mu+2k+1)x\pi\end{aligned}\right.$$

Dans les applications que nous allons de donner, les quantités $\varDelta^{2k} a_\mu$ $(\mu = h, h+1, \ldots)$ sont de même signe et leur somme étant finie $(= \varDelta^{2k-1} a_h)$, on aura une limite supérieure pour le reste

$$\frac{|\varDelta^{2k-1} a_h|}{(2\sin x\pi)^{2k}}.$$

Lorsque x est contenu dans un certain intervalle $(x_0 \ldots x_1)$ lequel le plus souvent sera $\left(\frac{1}{6}\ldots\frac{5}{6}\right)$, cette quantité devient infiniment petite pour k infini et on aura pour la série trigonométrique donnée un développement nouveau dont la convergence en général est plus rapide.

Soient par exemple les séries

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\cos 2\mu x\pi}{w+\mu} + i\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\sin 2\mu x\pi}{w+\mu};$$

en employant l'intégrale

$$a_\mu = \frac{1}{w+\mu} = \int_0^1 x^{w+\mu-1}\,dx$$

on aura évidemment

$$\varDelta^m a_\mu = \int_0^1 (1-x)^m x^{w+\mu-1}\,dx = \frac{1.2.3\ldots m}{(w+\mu)(w+\mu+1)\ldots(w+\mu+m)},$$

et on se trouve dans le cas dont nous venons de parler.

On parvient de la sorte à une expression de la fonction

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{e^{2\mu x\pi i}}{w+\mu},$$

qui donne en y écrivant $e^{2x\pi i} = z$ cette formule élémentaire et simple

$$w \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^\mu}{w+\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\binom{w+\mu}{\mu}} \frac{z^\mu}{(1-z)^{\mu+1}}. \tag{5}$$

Je pose $z = -1$ pour en déduire l'équation

$$\psi\left(\frac{w+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{w}{2}\right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\mu w \binom{w+\mu}{\mu}}, \tag{6}$$

dans laquelle la lettre $\psi(x)$ représente la dérivée logarithmique de $\Gamma(x)$.

Je considère ensuite la série

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \log \frac{\mu}{\mu+1} . \sin(2\mu+1)x\pi$$

dont la valeur est

$$\psi(x) \sin x\pi + \frac{\pi}{2} \cos x\pi + \left[\log 2\pi - \Gamma'(1)\right] \sin x\pi ;$$

la formule (4) conduit au résultat qu'on peut mettre sous la forme

$$\log 2\pi - \Gamma'(1) + \frac{\pi}{2} \cot x\pi + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$
$$= -2 \sum_{\mu=1}^{\infty} (\nabla^\mu \log h)_{h=1} . \frac{\cos(\mu+1)(x-\frac{1}{2})\pi}{(2\sin x\pi)^{\mu+1}}.$$

la condition de convergence étant $\frac{1}{6} < x < \frac{5}{6}$. La démonstration de la convergence de ce développement se fait assez commodément en s'appuyant sur la formule

$$\log h = \int_0^1 \frac{x^{h-1}-1}{\log x} dx$$

qui donne

$$\nabla^m \log h = \int_0^1 \frac{(1-x)^m x^{h-1}}{\log x} dx .$$

Le résultat s'écrit plus simplement en changeant x en $x + \frac{1}{2}$, à savoir

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma'(x+\frac{1}{2})}{\Gamma(x+\frac{1}{2})} &= \Gamma'(1) - \log 2\pi + \frac{\pi}{2} \tan x\pi \\ &\quad -2 \sum_{\mu=1}^{\infty} (\nabla^\mu \log h)_{h=1} . \frac{\cos(\mu+1)x\pi}{(2\cos x\pi)^{\mu+1}}, \end{aligned} \right. \tag{7}$$

où il faut que l'on ait $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$.

Terminons par une remarque concernant la série

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\cos 2\mu x\pi}{(w+\mu)^s} \tag{8}$$

laquelle la formule (1) permet de réduire à l'expression

$$(8^a)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\,\Gamma^{2\nu}\,\frac{1}{w^s}\cdot\frac{\sin(2\nu-1)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+1}} \\ +&\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\,\Gamma^{2\nu+1}\,\frac{1}{w^s}\cdot\frac{\cos 2\nu x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+2}}, \qquad \left(\frac{1}{6}<x<\frac{5}{6}\right).\end{aligned}\right.$$

Je pose $x=\frac{1}{2}$, $w=1$ pour en déduire la formule

$$(9)\qquad (1-2^{1-s})\,\zeta(s)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu+1}}\left(\Gamma^{\nu}\frac{1}{w^s}\right)_{w=1},$$

dans laquelle $\zeta(s)$ est la série de Riemann

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\ldots.$$

Über Kohlenhydrate aus den Knollen von Cyclamen europaeum.

Von Dr. **Bohuslav Raýman.**

(Vorgelegt am 5. Juni 1896.)

Cyclamin, das Glykosid aus den Knollen von *Cyclamen europaeum*, wurde von dem Chemiker *de Luca**) studirt, welcher ihm die Formel $(C_2H_4O)_n$ beigelegt hat. Nach diesem Forscher ist das reine, *mannit*freie Cyclamin eine amorphe Substanz, welche durch die Einwirkung von Hefe Glukose und Mannit abspaltet. Später studirten das Glykosid *Saladin*,**) *Klinger*,***) *Buchner* und *Herberger*†) und endlich *Martius*,††) welcher ein genaueres Darstellungsverfahren beschrieb.

Nach *Klinger* hat das Cyclamin die Zusammensetzung $C_{20}H_{34}O_{10}$, und zerfällt in zwei Componenten nach der Gleichung

$$\underset{\text{Cyclamin}}{C_{20}H_{34}O_{10}}=\underset{\text{Cyclamiretin}}{C_{14}H_{24}O_5}+C_6H_{12}O_6+H_2O\,.$$

Die ausführlichste Abhandlung über Cyclamin rührt von *Mutschler* her,†††) welcher nach *Martius*' Vorschrift die Knollen mit 65 bis 75%igem Alkohol digerirt, die alkoholischen Auszüge concentrirt und der Krystallisation überlässt.

*) *De Luca*, Comptes Rendus *44*. 723.; Journ. de pharm. et de chimie IV. *28*. 450.
**) *Saladin*, Journal de chimie médical *6*. 417.
***) *Klinger*, Mittheilungen der physik. med. Societät zu Erlangen *2*. 23. cit. *Mutschler*.
†) *Buchner* u. *Herberger*, Repert. f. Pharm. *37*. 36.
††) *Martius*, Neues Repert. f. Pharm. *8*. 388.
†††) *L. Mutschler*, Lieb. Ann. *185*. 214.