Matyáš Lerch
Pravidla o derivování jisté kategorie řad trigonometrických

Věstník Král. čes. spol. nauk 5 (1896), 71–80

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501490

VĚSTNÍK

ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA

PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.

ROČNÍK V. ÚNOR 1896. ČÍSLO 2.

Referáty a zprávy vědecké, slovesné a umělecké.

Pravidla o derivování jisté kategorie řad trigonometrických.*)

Sdílí *M. Lerch.*

Svého času předložil mi pan Hermite úkol, vyhledati methodu pro differencování řad trigonometrických, u nichž dosavadní pravidla vedou k řadám divergentním, jako zvláště u známé řady Kummerovy, vyjadřující funkci $\log \Gamma(x)$. Nalezl jsem řešení pro tento zvláštní případ na základě theorie malmsténovských řad, jež mají zajímavé vztahy k theorii funkce gamma.

Dosáhnuv žádaného výsledku ve zvláštním tomto případě, přišel jsem pak verifikací na cestu k řešení problému za podmínek velmi obecných. Těmito obecnými výsledky budeme se právě zabývati v této stati, již netřeba prodlužovati výkladem naší první methody, sdělené v jedné z rozprav předložených Akademii císaře Františka Josefa.**)

1. Budiž dána trigonometrická řada konvergentní

$$(1)\qquad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu} \sin 2\nu x\pi;$$

tvrdíme, že derivace jejího součtu $f(x)$ je dána rovnicí

$$(2)\qquad f'(x)\,\frac{\sin x\pi}{\pi} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sin(2\nu+1)x\pi, \qquad c_0 = 0,$$

jakmile pravá strana této konverguje stejnoměrně.

Na důkaz znamenejme $g(x)$ součet řady (2) násobený veličinou $\frac{\pi}{\sin x\pi}$,

*) Francouzský originál vyšel u výtahu v Comptes Rendus r. 1891 na podzim, obšírnější spracování na žádost redakce dodáno do XII. svazku Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1895.

**) Ročník III. č. 28.

tak že možno psáti

$$\frac{1}{\pi} g(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{n} (c_\nu - c_{\nu+1}) \frac{\sin(2\nu+1)x\pi}{\sin x\pi}.$$

Užijme nyní Abelovy identity

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) + A_n b_n, \text{ v níž } A_\nu = a_0 + a_1 + \ldots + a_\nu$$

tím způsobem, že volíme $a_\nu = c_\nu - c_{\nu+1}$, $b_\nu = \dfrac{\sin(2\nu+1)x\pi}{\sin x\pi}$, i obdržíme tak

$$\frac{1}{\pi} g(x) = \lim_{n=\infty} \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} c_{\nu+1} 2\cos(2\nu+2)x\pi - c_{n+1} \frac{\sin(2n+1)x\pi}{\sin x\pi} \right].$$

Buďtež nyní x_0 a x_1 dvě místa v oboru, obsaženém uvnitř intervallu $(0 \ldots 1)$, v němž řada $g(x)$ konverguje stejnoměrně; i plyne pak z posledního vzorce dle známých vět elementárných

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu}{\nu} (\sin 2\nu x_1 \pi - 2\nu x_0 \pi) + R_n \right],$$

kde položeno pro přehled

$$-R_n = c_{n+1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\pi \sin(2n+1)x\pi}{\sin x\pi}\, dx.$$

Částečnou integrací obdržíme z tohoto vzorce především

$$R_n = \frac{c_{n+1}}{2n+1} \left[\frac{\cos(2n+1)x_1\pi}{\sin x_1\pi} - \frac{\cos(2n+1)x_0\pi}{\sin x_0\pi} \right]$$

$$+ \frac{\pi c_{n+1}}{2n+1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\cos(2n+1)x\pi \cos x\pi}{\sin^2 x\pi}\, dx;$$

veličina $\dfrac{c_{n+1}}{2n+1}$, nekonečně malá, je zde násobena dvěma výrazy, jež zůstávají konečnými při nekonečně rostoucím n, tak že bude

$$\lim R_n = 0;$$

tedy náš hořejší vzorec se zjednoduší takto:

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu}{\nu} (\sin 2\nu x_1 \pi - \sin 2\nu x_0 \pi),$$

a tudíž máme

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx = f(x_1) - f(x_0),$$

čímž vzorec (2) dokázán.

Zároveň vidíme, že konvergence řady $f(x)$ vyplývá jakožto důsledek ze stejnoměrné konvergence řady $g(x)$ a z hypothese $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{c_\nu}{\nu} = 0$, jež, jak známo, jest nutnou ke konvergenci řady $f(x)$.

Táž methoda postačí k odvození derivačních pravidel pro řady trigonometrické dalších tvarů, které lze zahrnouti v následující páry rovnic:

$$(3)\quad \begin{cases} f(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu} \cos 2\nu x\pi\,, \\ f'(x)\,\frac{\sin x\pi}{\pi} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \cos(2\nu+1)x\pi, \quad c_0 = 0; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} f(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{2c_\nu}{2\nu-1} \sin(2\nu-1)x\pi\,, \\ f'(x)\,\frac{\sin x\pi}{\pi} = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sin 2\nu x\pi\,; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} f(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{2c_\nu}{2\nu-1} \cos(2\nu-1)x\pi\,, \\ f'(x)\,\frac{\sin x\pi}{\pi} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \cos 2\nu x\pi, \quad c_0 = 0. \end{cases}$$

Rovněž lze tímto způsobem dokázati následující dvě věty:

$$(6)\quad \begin{cases} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{u+n} \sin 2x\pi(u+n), \\ f'(x)\cdot\frac{\sin x\pi}{\pi} = -c_0 \sin(2u-1)x\pi + \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sin x\pi(2u+2\nu+1); \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{u+n} \cos 2x\pi(u+n), \\ f'(x)\,\frac{\sin x\pi}{\pi} = -c_0 \cos(2u-1)x\pi + \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \cos x\pi(2u+2\nu+1), \end{cases}$$

kteréž lze zahrnouti párem rovnic

$$(8)\quad \begin{cases} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n}{u+n} e^{\pm x\pi i(u+n)}, \\ f'(x) \dfrac{\sin x\pi}{\pi} = -c_0 e^{\pm x\pi i(2u-1)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) e^{\pm x\pi i(2u+2\nu+1)}. \end{cases}$$

2. Předcházející věty poskytují elementárné methody k vyčíslení některých řad odjinud známých, na př. těchto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx\pi}{n\pi}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx\pi}{n}, \quad (0 < x < 1).$$

Zde rozdíly $c_\nu - c_{\nu+1}$ jsou nullami, pouze první z nich $c_0 - c_1$ má hodnotu od nully různou a sice $-\frac{1}{\pi}$, resp. -1, tak že bude tu $f'(x)$ míti hodnotu -1, resp. $-\pi \cot x\pi$. Ustanoví-li se ještě hodnota $f(x)$ v případě $x = \frac{1}{2}$, obdržíme pro funkci $f(x)$ hodnotu

$$\frac{1}{2} - x, \quad \text{resp.} \quad -\log 2 \sin x\pi,$$

t. j.

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin 2nx\pi}{n\pi} = \frac{1}{2} - x, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx\pi}{n} = -\log 2 \sin x\pi.$$

Zajímavější je derivace řady Kummerovy

$$\log \Gamma(x) + \frac{1}{2} \log \frac{\sin x\pi}{\pi} + (x - \tfrac{1}{2}) [\log 2\pi - \Gamma'(1)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n\pi} \sin 2nx\pi,$$

jež dává vzorec

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \sin x\pi + \frac{\pi}{2} \cos x\pi + [\log 2\pi - \Gamma'(1)] \sin x\pi$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n}{n+1} \sin (2n+1) x\pi,$$

který byl východiskem našich úvah směřujících za výsledky výše vyloženými.

Věta vyjádřená rovnicemi (8) poskytuje vyčíslení nekonečné řady

$$y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x\pi i(u+n)}}{u+n}.$$

Rozložme ji nejdříve ve dvě části

$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2x\pi i(u+n)}}{u+n}, \quad y_1 = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x\pi i(1-u+n)}}{1-u+n},$$

jež mají obě tvar řady (8).

Rozdíly $c_\nu - c_{\nu+1}$ jsou nullami, a bude tedy

$$\frac{dy_0}{dx} \cdot \frac{\sin x\pi}{\pi} = -e^{(2u-1)x\pi i}, \quad \frac{dy_1}{dx} e^{-(1-2u)x\pi i},$$

i vychází odtud, že $\frac{dy_0}{dx} + \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx} = 0$. Pokud tedy proměnná x jest uvnitř oboru $(0 \ldots 1)$, jest veličina y nezávislá na x; pro $x = \frac{1}{2}$ nabývá hodnoty

$$e^{u\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{u+n} = \frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi},$$

čímž dokázán známý vzorec

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x\pi i(u+n)}}{u+n} = \frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi} = \frac{2\pi i e^{2u\pi i}}{e^{2u\pi i} - 1}. \tag{9}$$

3. Abychom ukázali užitečnost předeslaných theorémů, hledejme hodnotu řady

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)} e^{2x\pi i(u+n)}.$$

Rozložíme-li ji v části

$$S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n)} \frac{e^{2x\pi i(u+n)}}{u+n},$$

$$S_1 = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma'(u-n-1)}{\Gamma(u-n-1)} \frac{e^{-2x\pi i(1-u+n)}}{1-u+n},$$

tak že $S = S_0 + S_1$, bude dle (8):

$$\frac{dS_0}{dx} \frac{\sin x\pi}{\pi} = -\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} e^{(2u-1)x\pi i} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(2u+2n+1)x\pi i}}{u+n},$$

$$\frac{dS_1}{dx} \frac{\sin x\pi}{\pi} = \frac{\Gamma'(u-1)}{\Gamma(u-1)} e^{(2u-1)x\pi i} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2-2u+2n+1)x\pi i}}{u-n-2},$$

neboť zde rozdíly $c_n - c_{n+1}$ jsou pro první řadu

$$\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n)}-\frac{\Gamma'(u+n+1)}{\Gamma(u+n+1)}=-\frac{1}{u+n},$$

a podobně u druhé řady.

Uváží-li se, že součet prvých členů pravých stran

$$-\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}e^{(2u-1)x\pi i}+\frac{\Gamma''(u-1)}{\Gamma'(u-1)}e^{(2u-1)x\pi i}$$

má hodnotu $-\dfrac{e^{(2u-1)x\pi i}}{u-1}$, obdržíme

$$\left(\frac{dS_0}{dx}+\frac{dS_1}{dx}\right)\frac{\sin x\pi}{\pi}=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{(2u+2n+1)x\pi i}}{u+n}$$

a tedy dle (9)

$$\frac{dS}{dx}=-\frac{\pi e^{x\pi i}}{\sin x\pi}\frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi}.$$

Integrací plyne odtud vztah

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)}\left(e^{2x\pi i(u+n)}-e^{2x_0\pi i(u+n)}\right)\\&=\frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi}\left[\log\frac{\sin x_0\pi}{\sin x\pi}+i\pi(x_0-x)\right],\end{aligned}\right.$$

platný za podmínek $0<x<1$, $0<x_0<1$.

Ve zvláštním případě $x_0=1-x$ nabude tato rovnice tvaru zvlášť jednoduchého

$$(11)\quad\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)}\sin 2\pi\left(ux+nx-\frac{u}{2}\right)=\frac{\pi^2}{\sin u\pi}\left(\tfrac{1}{2}-x\right).$$

Rovnice (10) nestanoví hodnotu řady S, nýbrž udávajíc rozdíl hodnot S příslušných ke dvěma různým argumentům x a x_0, připouští stanovení řady S až na jistou additivní stálou; určením této konstanty, která bude záviseti na u, zakončíme tyto úvahy.

V rovnici (10) položme $x_0=x+v$, kde v je kladné a ovšem menší jedné; po té násobme $e^{-2ux\pi i}\,dx$ a integrujme od 0 do $1-v$; po té položme $x_0=x+v-1$, násobme toutéž veličinu $e^{-2ux\pi i}\,dx$ a integrujme od $1-v$ do 1. Sečtením obou výsledků obdrží se

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u+1)}\left[1-(1-v)\,e^{2uv\pi i}-v\,e^{2u(v-1)\pi i}\right]$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)}e^{2uv\pi i}\left(1-e^{-2u\pi i}\right)\frac{1-e^{2nv\pi i}}{2n\pi i}$$

$$=\frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi}\left\{\int_0^1 \log\left|\frac{\sin\pi(v+x)}{\sin\pi x}\right|\right| e^{-2ux\pi i}\,dx+i\pi v\int_0^{1-v} e^{-2ux\pi i}\,dx$$

$$+i\pi(v-1))\int_{1-v}^1 e^{-2ux\pi i}\,dx\right\},$$

při čemž v součtu Σ' dlužno vynechati člen $n=0$. Provedeme-li poslední dvě integrace, obdržíme výsledek

$$(12)\quad\begin{cases}(1-e^{2uv\pi i})\dfrac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u+1)}+e^{2uv\pi i}((1-e^{-2u\pi i})\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)}\dfrac{e^{2nv\pi i}-1}{2n\pi i}\\[2ex] =\dfrac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi}\displaystyle\int_0^1\log\left|\dfrac{\sin\pi(v+x)}{\sin\pi x}\right| e^{-2ux\pi i}\,dx+\dfrac{v\pi i}{u}\\[2ex] +\dfrac{\pi e^{-u\pi i}}{2u\sin u\pi}(1-e^{2uv\pi i}),\end{cases}$$

při čemž v členu $n=0$ nekonečné řady na levé straně má se za neurčitý výraz $\frac{e^{2nv\pi i}-1}{2n\pi i}$ klásti t. zv. pravá hodnota, která se rovná v.

Násobme nyní obě strany $\frac{e^{-2uv\pi i}}{2\pi i}$ a differencujme vůči v; i vznikne

$$-\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}e^{-2uv\pi i}+\frac{1-e^{-2u\pi i}}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)}e^{2nv\pi i}$$

$$=\frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi}\left(e^{-2uv\pi i}\frac{e^{-2u\pi i}-1}{2\pi i}\log\sin v\pi+u\int_0^1\log\sin x\pi\,.\,e^{-2u\pi i(v+x)}\,dx\right)$$

$$+e^{-2uv\pi i}\left(\frac{1}{2u}-v\pi i\right)-\frac{\pi e^{-u\pi i}}{2\sin u\pi}e^{-2uv\pi i}.$$

Tento výsledek obdrží elegantnější tvar, znásobíme-li $e^{2uv\pi i+u\pi i}$, totiž

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}e^{u\pi i}+\frac{\sin u\pi}{\pi}\sum_{u=\infty}^{\infty}\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)}e^{2v\pi i(u+n)}$$

$$=\frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi}\left(-\frac{\sin u\pi}{\pi}\log\sin v\pi+u\,e^{u\pi i}\int_0^1\log\sin x\pi\,.\,e^{-2ux\pi i}\,dx\right)$$

$$+e^{u\pi i}\left(\frac{1}{2u}-v\pi i\right)-\frac{\pi}{2\sin u\pi}.$$

Z rovnice této obdržíme hodnotu řadly S, jakmile určíme integrál

$$\int_0^1 \log \sin x\pi . e^{-2ux\pi i}\, dx .$$

K tomu cíli užijme řady

$$\log \sin x\pi = -\log 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx\pi}{k},$$

z níž plyne

$$\int_0^1 \log \sin x\pi . e^{-2ux\pi i}\, dx = -\log 2 . \frac{e^{-u\pi i} \sin u\pi}{u\pi}$$

$$+ \frac{u e^{-u\pi i} \sin u\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k^2 - u^2)} .$$

Avšak patrně

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k^2 - u^2)} = \frac{1}{2u^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-u} + \frac{1}{k+u} - \frac{2}{k} \right)$$

$$= -\frac{1}{2u^2} \left[\frac{\Gamma'(1+u)}{\Gamma(1+u)} + \frac{\Gamma'(1-u)}{\Gamma(1-u)} - 2\Gamma'(1) \right].$$

Tak nacházíme příležitostně výsledek o sobě zajímavý

$$(13) \qquad \int_0^1 \log \sin x\pi . e^{-2ux\pi i}\, dx = -\frac{e^{-u\pi i} \sin u\pi}{2u\pi} \left[2\log 2 + \frac{\Gamma'(1+u)}{\Gamma(1+u)} \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma'(1-u)}{\Gamma(1-u)} - 2\Gamma'(1) \right].$$

Vložíme-li tuto hodnotu integrálu do svého posledního výsledku, obdržíme nejprve

$$\frac{\sin u\pi}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)} e^{2v\pi i(u+n)}$$

$$= e^{u\pi i} \left[\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} - \log \sin v\pi - \log 2 - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(1+u)}{\Gamma(1+u)} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(1-u)}{\Gamma(1-u)} \right.$$

$$\left. + \Gamma'(1) + \frac{1}{2u} - v\pi i \right] - \frac{\pi}{2 \sin u\pi} .$$

Avšak pomocí rovnic

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1+u)}{\Gamma(1+u)}+\frac{1}{2u}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)},$$

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}-\frac{\Gamma'(1-u)}{\Gamma(1-u)}=-\pi\cot u\pi$$

redukuje se pravá strana na tvar

$$-e^{u\pi i}\left[\frac{\pi}{2}\cot u\pi+\log(2\sin v\pi)-\Gamma'(1)+v\pi i\right]-\frac{\pi}{2\sin u\pi},$$

jejž lze psáti

$$-e^{u\pi i}\left[\pi\cot u\pi+\log(2\sin v\pi)-\Gamma'(1)+v\pi i\right]+\frac{\pi i}{2}e^{u\pi i},$$

a náš hledaný výsledek bude:

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)}e^{2v\pi i(u+n)}\\&=-\frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi}\left[-\Gamma'(1)+\pi\cot u\pi+\log(2\sin v\pi)+\pi i\left(v-\tfrac{1}{2}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Odvození této rovnice bylo by ovšem mnohem jednodušší, kdybychom předem znali vztah plynoucí z ní pro $v=\frac{1}{2}$:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)}=-\frac{\pi}{\sin u\pi}\left[-\Gamma'(1)+\log 2+\pi\cot u\pi\right].$$

Stanovení konstanty uvažované může se provésti také takto: Rovnici (10) násobme $e^{-2x_0u\pi i}dx_0$ a integrujme od nully do jedné; i obdržíme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)}e^{2x\pi i(u+n)}\frac{1-e^{-2u\pi i}}{2u\pi i}-\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u+1)}$$

$$=-\frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi}\left[(\log\sin x\pi+i\pi x)\frac{1-e^{-2u\pi i}}{2u\pi i}\right.$$

$$\left.-\int_0^1\log\sin x_0\pi . e^{-2ux_0\pi i}\,dx_0-i\pi\int_0^1 x_0e^{-2ux_0\pi i}\,dx\right].$$

Dosadíme-li sem hodnoty

$$\int_0^1\log\sin x_0\pi . e^{-2ux_0\pi i}\,dx_0=-\frac{e^{-u\pi i}\sin u\pi}{u\pi}\left[\log 2-\Gamma'(1)+\frac{1}{2u}\right.$$

$$+\frac{\pi}{2}\cot u\pi+\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\Big],$$

$$i\pi\int_0^1 x_0 e^{-2ux_0\pi i}\,dx_0=\frac{e^{-u\pi i}\sin u\pi}{u\pi}\left[\frac{\pi i}{2}-\frac{\pi}{2}\cot u\pi+\frac{1}{2u}\right],$$

obdrží pravá strana tvar

$$-\frac{1}{u}(\log\sin x\pi+i\pi x)-\frac{1}{u}\Big[\log 2-\Gamma'(1)+\pi\cot u\pi$$

$$+\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}-\frac{\pi i}{2}\Big],$$

načež se objeví po krátké redukci rovnice (14).

O pokusech paprsky Röntgenovými.

Píše Dr. *K. Domalíp.*

Když jsem dne 17. ledna t. r. podával první svou zprávu o pokusech paprsky Röntgenovými, nebyly mi známy pokusy, které Röntgen konal. Bylo mi tedy vykonati některé pokusy, které by poněkud stav tohoto nového zjevu objasnily.

Na základě těchto pokusů dospěl jsem vzhledem na podstatu tohoto nového úkazu k tomu náhledu, že jest nový zjev tento úkazem optickým, vycházejícím ze skla roury Crooksovy. Kathodové paprsky jen sklo ve zvláštní stav uvádějí Dle toho úkaz tento není úkazem elektrickým, nýbrž toliko optickým. Röntgen ve své předběžné zprávě týž názor zastává. V ostatních pokusech v mé zprávě uvedených vyskytuje se shoda s pokusy Röntgenovými, jen ve příčině prostupnosti skla poněkud neshoda vystupuje.

Röntgen ve své zprávě předběžné řadí sklo mezi prostředí propustná pro paprsky neviditelné, kdežto jsem ve své zprávě sklo co prostředí nepropustné naznačil.

Propustnost prostředí jest, jak jsem v první své zprávě uvedl, jen relativní.

Srovnáme-li propustnost skla s propustností tvrzené gummy, shledáme, že gumma tvrzená o tloušťce dvakrát větší než sklo propouští paprsky Röntgenovy u větší míře. Jelikož právě tímto srovnámím velmi dobře paprsky Röntgenovy se charakterisují na rozdíl od obyčejných paprsků světelných, bylo mi to důvodem, označiti sklo jako prostředí pro paprsky Röntgenovy nepropustné.

Označení skla Röntgenem co prostředí propustné může snad býti tou okolností vysvětleno, že Röntgen zkoumall sklo toliko methodou fosforescenční a nikoliv methodou fotografickou. Případ tento by nasvědčoval té okolnosti, že sklo propouští paprsky, které budí fosforescenci, lépe než paprsky s účinkem chemickým.

Vzhledem na upotřebení paprsků těchto v chirurgii uvedl jsem v první své zprávě, že bude možno dobu exposice zkrátiti nebo těmito paprsky hlubší obaly masové proniknouti, jestliže místo desky dřevěné užijeme látky propustnější a jestliže energii skla zvýšíme.