Matyáš Lerch

O jistém druhu semikonvergentních rozvojů

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 5 (1896), 8. 18, 1–6

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501487

O jistém druhu semikonvergentních rozvojů.

Sdílí M. Lerch.

Předloženo dne 18. března 1896.

1. Chceme vyvinouti prostředky k sblíženému vystižení řad tvaru

$$F(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f(a+n), \tag{1}$$

ve kterých funkce $f(z)$ pro dostatečně veliká z připouští rozvoj tvaru

$$f(z) = \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \frac{a_4}{z^4} + \dots \tag{2}$$

Za tím účelem ustanovme konstanty $A_1, A_2, \dots A_m$ tím způsobem, aby funkce

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \left[\frac{1}{z^\nu} - \frac{1}{(z+1)^\nu}\right]$$

ve svém rozvoji v klesající mocnosti veličiny z reprodukovala prvých m členů řady (2). Poněvadž

$$\frac{1}{z^\nu} - \frac{1}{(z+1)^\nu} = -\sum_{\beta=1}^{\infty} \binom{-\nu}{\beta} z^{-\beta-\nu},$$

bude rozvoj funkce $\varphi(z)$ zníti

$$\varphi(z) = -\sum_{\beta,\nu} A_\nu \binom{-\nu}{\beta} z^{-\beta-\nu}, \quad \binom{\nu = 1, 2, \dots m}{\beta = 1, 2, \dots \infty},$$

a konverguje za podmínky $|z| > 1$.

Součinitel při z^α rovná se součtu

$$-\sum_{\beta,\nu} A_\nu \binom{-\nu}{\beta}, \quad \left(\begin{matrix}\nu = 1, 2, \dots m; \quad \beta = 1, 2, 3 \dots \infty, \\ \beta + \nu = \alpha,\end{matrix}\right),$$

i lze jej též psáti

$$-(\alpha-1)! \sum_{\beta+\nu=\alpha} \frac{(-1)^\beta}{\beta!} \frac{A_\nu}{(\nu-1)!}.$$

Výrazy tyto pro $\alpha = 2, 3, 4, \ldots m+1$ mají splývati s koefficienty a_α, a tedy máme rovnice

$$\sum_{\beta+\nu=\alpha} \frac{(-1)^\beta}{\beta!} \frac{A_\nu}{(\nu-1)!} = -\frac{a_\alpha}{(\alpha-1)!},$$

v počtu m. Výraz na levé straně rovná se součiniteli při x^α ve výrazu

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{(-1)^\beta}{\beta!} x^\beta \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu x^\nu}{(\nu-1)!},$$

a obdržíme tedy veličiny $A_1, A_2, \ldots$ pomocí identity

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{(-1)^\beta}{\beta!} x^\beta \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu x^\nu}{(\nu-1)!} = -\sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{a_\alpha}{(\alpha-1)!} x^\alpha.$$

Dosadímeli sem hodnotu

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{(-1)^\beta}{\beta!} x^\beta = e^{-x} - 1,$$

obdržíme rovnici

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{(\nu-1)!} x^\nu = \frac{x}{1-e^{-x}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu+1}}{\nu!} x^\nu. \tag{3}$$

Odtud vychází, že součinitelé $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nezávisejí na m, a že je lze definovati rozvojem (3).

Z rovnice (3) lze součinitele A_ν vyjádřiti velmi jednoduše pomocí čísel Bernouilliových, užijeli se řady

$$\frac{x}{1-e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2} x + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} B_\mu \frac{x^{2\mu}}{(2\mu)!};$$

tak se totiž obdrží

$$\frac{A_g}{(g-1)!} = \frac{a_{g+1}}{g!} + \frac{1}{2} \frac{a_g}{(g-1)!} + \sum_{\mu=1}^{[\frac{1}{2}g]} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu a_{g-2\mu+1}}{(2\mu)!(g-2\mu)!},$$

čili

$$A_g = \frac{1}{g} a_{g+1} + \frac{1}{2} a_g + \frac{1}{g} \sum_{\mu=1}^{[\frac{1}{2}g]} (-1)^{\mu-1} \binom{g}{2\mu} B_\mu a_{g-2\mu+1}. \tag{4}$$

Pro takto stanovenou funkci $\varphi(z)$ platí nyní věta, že rozvoj funkce

$$f(z) - \varphi(z) \quad \text{má tvar} \quad \frac{b}{z^{m+2}} + \frac{b'}{z^{m+3}} + \frac{b''}{z^{m+4}} + \cdots$$

Znamenámeli tuto řadu $Q(z)$, obdržíme

$$f(z) = \varphi(z) + Q(z);$$

jeli a ve své realné části kladné a dosti veliké, aneb jeli pomyslná část veličiny a dostatečně velkou, budou veličiny $a, a+1, a+2, \ldots$ vesměs nalézati se v oboru konvergence řady $Q(z)$, a tedy bude

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(a+n) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a+n) + \sum_{n=0}^{\infty} Q(a+n).$$

Avšak z definice

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \left[\frac{1}{z^\nu} - \frac{1}{(z+1)^\nu}\right]$$

plyne, že tu bude

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a+n) = \lim_{r=\infty} \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \left[\frac{1}{a^\nu} - \frac{1}{(a+r)^\nu}\right],$$

čili

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a+n) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{A_\nu}{a^\nu},$$

a následkem toho má náš výsledek tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(a+n) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{A_\nu}{a^\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} Q(a+n). \tag{5}$$

Jeli tu buď pomyslná část veličiny a dosti velikou, aneb jeli realná část její kladnou a dosti velikou, bude každá z řad

$$Q(a+n) = \frac{b}{(a+n)^{m+2}} + \frac{b'}{(a+n)^{m+3}} + \frac{b''}{(a+n)^{m+4}} + \dots$$

míti malou hodnotu, a také jejich součet.

Budiž z_0 hodnota, pro kterou řada $Q(z)$ konverguje; i bude pak na kružnici $|z| = |z_0|$ funkce $Q(z)$ míti určitou největší absolutní hodnotu G, načež bude

$$|b^{(\mu)}| \leq G \, . \, |z_0|^{m+\mu+2},$$

a tedy pro $|z| > |z_0|$

$$|Q(z)| < G \, . \, \frac{1}{1 - \left|\frac{z_0}{z}\right|} \, . \, \left|\frac{z_0}{z}\right|^{m+2}.$$

Jsouli tedy všecky veličiny $a+n$ absolutně větší než z_0, jest

$$|Q(a+n)| < G \, . \, \frac{1}{1 - \left|\frac{z_0}{a+n}\right|} \, . \, \left|\frac{z_0}{a+n}\right|^{m+2},$$

a odtud plyne, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} |Q(a+n)|$$

konverguje a jest menší než

$$G \, . \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 - \left|\frac{z_0}{a+n}\right|} \, . \, \left|\frac{z_0}{a+n}\right|^{m+2}. \tag{6}$$

Jsouli všecky poměry $\frac{z_0}{a+n}$ dosti příkré, čehož lze docíliti dostatečným zvětšením části pomyslné při a, aneb zvolením velké kladné části realné této veličiny, bude výraz poslední a následovně také součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q(a+n)$$

libovolně malým. Takže pak *bude lze veličinu*

$$F(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f(a+n)$$

nahraditi [dle (5)] *součtem*

$$\sum_{\nu=1}^{m} \frac{A_\nu}{a^\nu};$$

chybu, které se tím dopustíme, lze posouditi na základě výrazu (6). Číslo m lze zvětšovati ovšem jen při současném »zvětšení« veličiny a, čímž se pak chyba zmenšuje.

Volímeli tu jako příklad $f(z) = \frac{1}{z^2}$, obdržíme podle (4)

$$A_1 = 1, \quad A_2 = \frac{1}{2}, \quad A_{2n} = 0, \quad A_{2n+1} = (-1)^{n-1} B_n,$$

a tedy pro řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2} = D_a{}^2 \log \Gamma(a)$$

máme sblíženou hodnotu ve tvaru

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \sum_{\mu=1}^{m} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu}{a^{2\mu+1}},$$

což se shoduje s výsledky odjinud známými.

2. Zobecněním předešlé úvahy lze dospěti k semikonvergentnímu rozvoji funkce

(7) $$\Phi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nu} f(a+n),$$

kde $f(z)$ značí funkci rozvinutelnou v řadu tvaru

(8) $$f(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots,$$

a ve které u je buď ryze pomyslné aneb má realnou část zápornou, aby řada $\Phi(a)$ konvergovala.

Za tím účelem ustanovme konstanty $C_1, C_2, \dots C_m$ tak, aby funkce

$$\psi(z) = \sum_{\nu=1}^{m} C_\nu \left[\frac{1}{z^\nu} - \frac{e^u}{(z+1)^\nu}\right]$$

měla ve svém rozvoji s řadou (8) prvých m členů společných.

Poněvadž patrně

$$\psi(z) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{C_\nu}{z^\nu} - e^u \sum_{\beta,\nu} C_\nu \binom{-\nu}{\beta} z^{-\beta-\nu}, \quad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \dots m \\ \beta = 0, 1, 2, \dots \infty \end{pmatrix},$$

obdržíme tak rovnice

$$C_\alpha - e^u \sum_{\beta+\nu=\alpha} C_\nu \binom{-\nu}{\beta} = a_\alpha,$$

v nichž α má hodnoty $1, 2, 3, \dots m$. Možno je psáti

$$\frac{C_\alpha}{(\alpha-1)!} - e^u \sum_{\beta+\nu=\alpha} (-1)^\beta \frac{C_\nu}{\beta!\,(\nu-1)!} = \frac{a_\alpha}{(\alpha-1)!},$$

a odtud soudíme, že lze naše veličiny C_α charakterisovati identitou

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{C_\alpha}{(\alpha-1)!} x^\alpha \cdot \left[1 - e^u \sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^\beta \frac{x^\beta}{\beta!}\right] = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a_\alpha}{(\alpha-1)!} x^\alpha,$$

z níž plyne

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_\nu}{(\nu-1)!} x^\nu = \frac{1}{1 - e^{u-x}} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a_\alpha}{(\alpha-1)!} x^\alpha .$$

Užijemeli zde řady Taylorovy

$$\frac{1}{1 - e^{u-x}} = \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(-1)^\beta}{\beta!} D_u^\beta \frac{1}{1 - e^u} x^\beta,$$

obdržíme

$$C_\nu = \sum_{\beta=0}^{\nu-1} (-1)^\beta \binom{\nu-1}{\beta} D_u^\beta \frac{1}{1 - e^u} \cdot a_{\nu-\beta}. \tag{9}$$

Mocninový rozvoj funkce

$$f(z) - \psi(z) = Q(z)$$

zní pak

$$Q(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_\nu}{z^{m+\nu}}.$$

Pro veličiny a s dostatečně velikou částí pomyslnou aneb s velikou kladnou částí realnou bude

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nu} f(a+n) - \sum_{n=0}^{\infty} e^{nu} \psi(a+n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nu} Q(a+n),$$

a zároveň máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nu} \psi(a+n) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{C_\nu}{a^\nu},$$

takže obdržíme rovnici

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nu} f(a+n) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{C_\nu}{a^\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} Q(a+n)\, e^{nu}, \tag{10}$$

ve které druhá řada v pravo má při dosti velikých a hodnotu velmi malou, takže *lze pak řadu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nu} f(a+n) = \Phi(a)$$

nahraditi její sblíženou hodnotou

$$\sum_{\nu=1}^{m} \frac{C_\nu}{a^\nu},$$

ve které C_ν jsou dána vzorcem (9).

Volme jako příklad $f(z) = \frac{1}{z}$; tu bude dle (9)

$$C_\nu = (-1)^{\nu-1} D_u^{\nu-1} \frac{1}{1-e^u},$$

a sblížená hodnota řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nu}}{a+n}$$

bude zníti

$$\frac{1}{1-e^u} \cdot \frac{1}{a} - D \frac{1}{1-e^u} \cdot \frac{1}{a^2} + D^2 \frac{1}{1-e^u} \cdot \frac{1}{a^3} - \dots$$

(kde počet členů závisí na velikosti veličiny a).
