Matyáš Lerch

Sur le nombre des classes de formes quadratiques de determinant négatif

C. R. Acad. Sci., Paris 121 (1895), 878–880

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501481

accompagné du système complémentaire (9); seulement la fonction H doit vérifier l'équation

$$\text{(10)} \qquad H - \sum_i z_i \frac{\partial H}{\partial z_i} = 0,$$

en sorte qu'alors H est homogène du premier degré d'homogénéité par rapport aux variables z.

» Il convient d'ajouter que si l'on se place dans le cas le plus général, si l'on prend un invariant tel que I, *mais quelconque, non singulier, le nombre q est nul;* le système complémentaire (9) disparaît. On obtient donc, si n est impair, un système canonique (7), accompagné de l'équation (8), et, si n est pair, l'unique système (7), mais où H vérifie l'équation (10).

» Ainsi, la réduction aux types (A) ou (B) de l'élément différentiel d'un invariant intégral tel que I entraîne la réduction des équations (1) au type canonique (7) avec ou sans l'équation (8).

» On reconnaît par là que, chaque invariant intégral de (1) se trouve attaché à un problème de variations qui est résolu par les équations du système (1). »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant négatif;* par M. **Matyas Lerch**. (Extrait d'une Lettre à M. Hermite.)

« Permettez-moi de rappeler votre attention sur une classe de formules dont Kronecker a donné le premier des exemples. Dans le Mémoire tchèque que j'ai eu l'honneur de vous adresser l'été précédent (*Mémoires de l'Académie François-Joseph,* IV^e année, n° 1), se trouve une formule généralisant l'équation fondamentale de Kronecker :

$$\text{(1)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\, \vartheta_1(\sigma + \tau w_1 \mid w_1)\, \vartheta_1(\sigma - \tau w_2 \mid w_2) \\ & \quad = \sqrt{e_0} \sum_{m,n} (-1)^{mn+m+n} e^{-\pi(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2) + 2\pi i(m\sigma + n\tau)} \\ & \qquad\qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \end{aligned} \right.$$

où les éléments a_0, b_0, c_0 satisfont à la condition $4a_0c_0 - b_0^2 = 1$ et w_1, $-w_2$ sont les deux racines de l'équation du second degré $a_0 + c_0 w + c_0 w^2 = 0$. Ladite formule consiste à remplacer le premier membre par le produit de deux fonctions thêta des caractéristiques fondamentales quelconques. Mais l'on peut aller un peu plus loin, en introduisant des caractéristiques fractionnaires et construire à l'aide de l'élément

$$(2)\qquad \Theta_{gh}(x, w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{(m+g)^2 w\pi i + 2(m+g)(x+h)\pi i},$$

la formule plus générale

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} & e^{\eta^2(w_1+w_2)\pi i + 2g'(h-h')\pi i}\,\Theta_{gh}(\xi + \eta w_1, w_2)\Theta_{g'h'}(\xi - \eta w_2, w_2) \\ & = \sqrt{e_0}\sum_{\mu,\nu} e^{-\pi(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2) + mn\pi i + 2m(\xi+h)\pi i + 2n(\eta - g')\pi i} \\ & \begin{pmatrix} m = \mu + g + g', \; n = \nu + h' - h, \\ \mu, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{pmatrix}. \end{aligned}\right.$$

La démonstration est tout à fait semblable à celle que Kronecker a développée de sa formule dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie des Sciences de Berlin, de 1883; je me borne donc à transcrire la formule, en employant l'identité

$$\Theta_{gh}(x, w) = e^{g\pi i(gw + 2x + 2h)}\,\vartheta_3(x + h + gw \mid w);$$

je pose $\xi + h = \sigma_1$, $\xi + h' = \sigma_2$, $\eta + g = \tau_1$, $-\eta + g' = \tau_2$ et j'aurai l'équation

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} & e^{\pi i[\tau_1^2 w_1 + \tau_2^2 w_2 + 2\sigma_1(\tau_1+\tau_2)]}\,\vartheta_3(\sigma_1 + \tau_1 w_1 \mid w_1)\,\vartheta_3(\sigma_2 + \tau_2 w_2 \mid w_2) \\ & = \sqrt{c_0}\sum_{\mu,\nu} e^{-\pi(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2) + mn\pi i + 2\pi i(m\sigma_1 - n\tau_2)} \\ & \begin{pmatrix} m = \mu + \tau_1 + \tau_2, \qquad n = \nu + \sigma_2 - \sigma_1, \\ \mu, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \end{pmatrix}, \end{aligned}\right.$$

dont Kronecker semble avoir eu connaissance.

» J'aurais plusieurs choses analogues à vous présenter, auxquelles votre encouragement m'a donné l'occasion de parvenir, mais en me les réservant à un autre moment; c'est une application arithmétique que je viens soumettre à votre jugement. Je considère le système complet de représentants (a, b, c) des formes quadratiques $ax^2 + bxy + cy^2$ du même discriminant négatif $b^2 - 4ac = -\Delta$, que je suppose fondamental et congru à 5 suivant le module 8, de sorte que Δ a la forme $8\mu + 3$; sous cette hypothèse les a, b, c seront impairs et l'application de la formule classique de

Dirichlet

$$\sum_{m,n}{}' \mathfrak{F}(am^2 + bmn + cn^2) = \sum_{h,k} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \mathfrak{F}(hk)$$

$$\begin{pmatrix} m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \text{ sauf } m = n = 0 \\ h, k = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix},$$

qui consiste dans l'hypothèse $F(x) = (-1)^x e^{-\frac{x\pi}{\sqrt{\Delta}}}$, donne immédiatement

$$\sum_{(a,b,c)} \sum_{m,n}{}' (-1)^{mn+m+n} e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}(am^2+bmn+cn^2)} = \sum_{h,k} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) (-1)^{hk} e^{-\frac{hk\pi}{\sqrt{\Delta}}}.$$

» Or, la formule (1), dans le cas de $\sigma = \tau = 0$, fait voir que la somme $\sum (-1)^{mn+m+n} e^{-\pi(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)}$ s'évanouit; en y mettant à part le terme $m = n = 0$, qui est égal à un, vous voyez que le premier membre de notre dernière équation est autant de fois -1 qu'il y a de représentants (a, b, c). En convenant donc de représenter par $\mathrm{Cl}(\mathrm{D})$ le nombre des classes correspondant au discriminant D, j'aurai l'équation

$$(5) \quad \mathrm{Cl}(-\Delta) = -\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) (-1)^{hk} e^{-\frac{kh\pi}{\sqrt{\Delta}}} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{h}{\Delta}\right) \frac{(-1)^{h-1} e^{-\frac{h\pi}{\sqrt{\Delta}}}}{1 + (-1)^{h-1} e^{-\frac{h\pi}{\sqrt{\Delta}}}}.$$

» Il n'est point difficile d'exprimer le deuxième membre à l'aide des fonctions thêta, ce qui donne

$$(5) \qquad \sum_{\rho=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\rho}{\Delta}\right) \frac{\vartheta_1'\left(\frac{\rho}{\Delta} \middle| \frac{-2}{\Delta + i\sqrt{\Delta}}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\rho}{\Delta} \middle| \frac{-2}{\Delta + i\sqrt{\Delta}}\right)} = \gamma . \mathrm{Cl}(-\Delta) . (\Delta + i\sqrt{\Delta})\pi i,$$

$$\begin{pmatrix} \gamma = \frac{5}{3} \text{ pour } \Delta = 3 \\ \gamma = 1 \text{ pour } \Delta > 3 \end{pmatrix}.$$

» La même méthode permet d'évaluer cette somme pour les autres discriminants fondamentaux; mais les résultats sont moins simples. »