Lerch, Matyáš: Scholarly works

Matyáš Lerch

Sur la différentiation d'une classe de séries trigonométriques

Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (3), 12 (1895), 351–361

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501480

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

SUR LA DIFFÉRENTIATION

D'UNE CLASSE

DE SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

NOTE DE M. LERCH.

M. Hermite nous a posé le problème d'obtenir la dérivée de la série de Kummer et des séries trigonométriques analogues, où la règle ordinaire conduit à des séries divergentes. Nous avons obtenu la solution dans le cas particulier de la série de Kummer, en poursuivant nos recherches antérieures sur les séries malmsténiennes qui ont des rapports intéressants avec la théorie de la fonction gamma. Cette première formule étant obtenue, il était facile d'en trouver la vraie origine et de résoudre le problème sous des conditions plus générales. Ce sont ces résultats généraux qui font l'objet de cette Note, que nous ne croyons pas utile d'allonger par l'indication de la voie primitive qui se trouve expliquée dans un Mémoire présenté à l'Académie François-Joseph (de Prague).

1. Soit donnée une série trigonométrique convergente

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu} \sin 2\nu x\pi; \tag{1}$$

je dis que la dérivée de sa somme $f(x)$ sera donnée par l'équation

$$f'(x)\frac{\sin x\pi}{\pi} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sin(2\nu+1)x\pi, \tag{2}$$

où $c_0 = 0$, toutes les fois que le deuxième membre est une série uniformément convergente.

Représentons, en effet, par $g(x)$ la somme de la série (2), multipliée par $\frac{\pi}{\sin x\pi}$, x étant supposé entre zéro et l'unité; on peut écrire

$$\frac{1}{\pi} g(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{n} (c_\nu - c_{\nu+1}) \frac{\sin(2\nu+1)x\pi}{\sin x\pi}.$$

En employant l'identité dont Abel a fait usage le premier

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) + A_n b_n,$$

où

$$A_\nu = a_0 + a_1 + \ldots + a_\nu,$$

prenons

$$a_\nu = c_\nu - c_{\nu+1}, \qquad b_\nu = \frac{\sin(2\nu+1)x\pi}{\sin x\pi},$$

et nous aurons

$$\frac{1}{\pi} g(x) = \lim_{n=\infty} \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} c_{\nu+1}\, 2\cos(2\nu+2)x\pi + c_{n+1} \frac{\sin(2n+1)x\pi}{\sin x\pi} \right].$$

Cela posé, soient x_0 et x_1 deux points de l'intervalle, intérieur à $(0, \ldots, 1)$, dans lequel la série $g(x)$ est uniformément convergente, nous aurons évidemment

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu}{\nu} (\sin 2\nu x_1\pi - \sin 2\nu x_0\pi) + R_n \right],$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$R_n = c_{n+1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\pi \sin(2n+1)x\pi}{\sin x\pi}\,dx.$$

Or on trouve, en intégrant par parties,

$$R_n = -\frac{c_{n+1}}{2n+1} \left[\frac{\cos(2n+1)x_1\pi}{\sin x_1\pi} - \frac{\cos(2n+1)x_0\pi}{\sin x_0\pi} \right]$$
$$- \frac{\pi c_{n+1}}{2n+1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\cos(2n+1)x\pi \cos x\pi}{\sin^2 x\pi}\,dx;$$

la quantité infiniment petite $\frac{c_{n+1}}{2n+1}$ se trouve ici multipliée par deux quantités qui restent finies pour n infini et l'on a par conséquent

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{R}_n = 0,$$

ce qui fait voir que l'on a

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu}(\sin 2\nu x_1\pi - \sin 2\nu x_0\pi),$$

ou bien

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx = f(x_1) - f(x_0),$$

et le théorème est démontré.

On voit de même que la convergence de la série $f(x)$ est une conséquence de la convergence uniforme de $g(x)$ et de l'hypothèse $\lim_{\nu=\infty} \frac{c_\nu}{\nu} = 0$ qui, comme on sait, est nécessaire.

Mais on peut aller plus loin en considérant d'autres types de séries trigonométriques, et l'on parvient à des résultats analogues que nous nous contentons d'indiquer, les démonstrations étant toutes semblables au raisonnement qui précède. Ils subsistent dans les couples de formules simultanées suivants :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu} \cos 2\nu x\pi, \\ f'(x)\frac{\sin x\pi}{\pi} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \cos(2\nu+1)x\pi, \qquad c_0 = 0; \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2c_\nu}{2\nu-1} \sin(2\nu-1)x\pi, \\ f'(x)\frac{\sin x\pi}{\pi} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sin 2\nu x\pi. \end{aligned}\right.$$

$$
(5)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2c_\nu}{2\nu-1}\cos(2\nu-1)x\pi,\\
&f'(x)\frac{\sin x\pi}{\pi}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(c_\nu-c_{\nu+1})\cos 2\nu x\pi,\qquad c_0=0.
\end{aligned}
\right.
$$

A ces résultats on peut ajouter les théorèmes un peu plus généraux qui consistent dans les couples de formules

$$
(6)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{u+n}\sin 2x\pi(u+n),\\
&f'(x)\frac{\sin x\pi}{\pi}=-c_0\sin(2u-1)x\pi+\sum_{\nu=0}^{\infty}(c_\nu-c_{\nu+1})\sin x\pi(2u+2\nu+1),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(7)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{u+n}\cos 2x\pi(u+n),\\
&f'(x)\frac{\sin x\pi}{\pi}=-c_0\cos(2u-1)x\pi+\sum_{\nu=0}^{\infty}(c_\nu-c_{\nu+1})\cos x\pi(2u+2\nu+1),
\end{aligned}
\right.
$$

ce qu'on peut réunir dans un seul couple suivant

$$
(8)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{u+n}e^{\pm 2x\pi i(u+n)},\\
&f'(x)\frac{\sin x\pi}{\pi}=-c_0e^{\pm x\pi i(2u-1)}+\sum_{\nu=0}^{\infty}(c_\nu-c_{\nu+1})e^{\pm x\pi i(2u+2\nu+1)}.
\end{aligned}
\right.
$$

2. Les formules qui précèdent permettent d'évaluer, d'une manière élémentaire, quelques séries connues, par exemple les suivantes :

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx\pi}{n\pi},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx\pi}{n}\qquad (0<x<1).
$$

Car ici les différences $c_\nu - c_{\nu+1}$ seront nulles sauf la première $c_0 - c_1$

qui a pour valeur respectivement $-\frac{1}{\pi}$ et -1, d'où l'on tire les équations

$$f'(x) = -1, \qquad \text{respectivement,} \qquad f'(x) = -\pi \cot x\pi,$$

dont il est aisé de conclure que les valeurs des deux séries considérées sont respectivement

$$f(x) = \frac{1}{2} - x \qquad \text{et} \qquad f(x) = -\log 2 \sin x\pi.$$

Un exemple plus intéressant nous fournit la série classique de Kummer

$$\log\Gamma(x) + \frac{1}{2}\log\frac{\sin x\pi}{\pi} + \left(x - \frac{1}{2}\right)[\log 2\pi - \Gamma'(1)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n\pi} \sin 2nx\pi,$$

pour laquelle on obtient le résultat

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\sin x\pi + \frac{\pi}{2}\cos x\pi + [\log 2\pi - \Gamma'(1)]\sin x\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{n}{n+1} \sin(2n+1)x\pi,$$

qui a été le point de départ de nos recherches.

Le théorème qu'expriment les équations (8) permet d'évaluer directement la série connue

$$y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x\pi i(u+n)}}{u+n}.$$

Décomposons-la en les deux suivantes :

$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2x\pi i(u+n)}}{u+n}, \qquad y_1 = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x\pi i(1-u+n)}}{1-u+n},$$

qui sont en effet de la forme (8); les différences $c_\nu - c_{\nu+1}$ étant nulles, on aura

$$\frac{dy_0}{dx}\,\frac{\sin x\pi}{\pi} = -e^{(2u-1)x\pi i},$$

$$\frac{dy_0}{dx}\,\frac{\sin x\pi}{\pi} = +e^{-(1-2u)x\pi i},$$

et, par conséquent,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_0}{dx} + \frac{dy_1}{dx} = 0,$$

de sorte que la somme y ne dépend de x pourvu que l'on ait $0 < x < 1$.

Si l'on veut employer l'équation

$$(\alpha)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{u+n} = \frac{\pi}{\sin u\pi},$$

on aura la valeur de y en prenant $x = \frac{1}{2}$, ce qui donne

$$(9)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x\pi i(u+n)}}{u+n} = \frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi} = \frac{2\pi i}{1-e^{-2u\pi i}},$$

où il faut, bien entendu, supposer $0 < x < 1$.

Mais, sans connaître l'équation (α), on obtient directement la quantité

$$\varphi(u) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x\pi i(u+n)}}{u+n}, \qquad 0 < x < 1,$$

dont on sait qu'elle ne dépend pas de x. A cet effet, employons l'identité

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a+b}\,\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}\,\frac{1}{b}$$

en y posant $a = u+m$, $b = v+n$; après avoir multiplié par $e^{2x\pi i(u+m)+2y\pi i(v+n)}$, faisons la somme pour $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm M$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$. Il vient de la sorte

$$\sum_{-M}^{M} \frac{e^{2x\pi i(u+m)}}{u+m} \sum_{-N}^{N} \frac{e^{2y\pi i(v+n)}}{v+n} = \sum_{m=-M}^{M} \frac{e^{2\pi i(x-y)(u+m)}}{u+m} \sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{2y\pi i(u+v+m+n)}}{u+v+m+n}$$
$$+ e^{-2v\pi i} \sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{2\pi i(1+y-x)(v+n)}}{v+n} \sum_{m=-M}^{M} \frac{e^{2x\pi i(u+v+m+n)}}{u+v+m+n}.$$

Supposons $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ et passons à la limite pour $M = \infty$, $N = \infty$; en supposant de plus $x > y$, la quantité $1+y-x$ ainsi que $x-y$ sera entre zéro et l'unité, et l'équation deviendra

$$\varphi(u)\,\varphi(v) = \varphi(u)\,\varphi(u+v) + e^{-2v\pi i}\,\varphi(v)\,\varphi(u+v).$$

Cela étant, la fonction

$$\psi(u) = e^{-u\pi i}\varphi(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{u+n}$$

est réelle en même temps que la variable u, et jouit de la propriété

$$\psi(u)\psi(v) = \psi(u+v)[\psi(u)e^{u\pi i} + \psi(v)e^{-v\pi i}];$$

en prenant u et v réelles, la partie imaginaire dans l'expression entre crochets devra s'évanouir, de sorte qu'on a l'équation

$$\psi(u)\sin u\pi - \psi(v)\sin v\pi = 0,$$

et par conséquent

$$\psi(u)\sin u\pi = \text{const.};$$

en passant à la limite pour $u = 0$ la constante se trouve égale à π et l'équation (α) est démontrée.

3. Proposons-nous maintenant d'évaluer la série

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)} e^{2x\pi i(u+n)}.$$

En la décomposant comme la série précédente, on est conduit à deux séries de la forme (8) :

$$S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n)} \frac{e^{2x\pi i(u+n)}}{u+n},$$

$$S_1 = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma'(u-n-1)}{\Gamma(u-n-1)} \frac{e^{-2x\pi i(1-u+n)}}{1-u+n},$$

dont les dérivées satisfont aux équations

$$\frac{dS_0}{dx}\frac{\sin x\pi}{\pi} = -\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} e^{(2u-1)x\pi i} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(2u+2n+1)x\pi i}}{u+n},$$

$$\frac{dS_1}{dx}\frac{\sin x\pi}{\pi} = +\frac{\Gamma'(u-1)}{\Gamma(u-1)} e^{(2u-1)x\pi i} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2-2u+2n+1)x\pi i}}{u-n-2};$$

en observant que les deux premiers termes ont pour somme la quantité

$$\left[-\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}+\frac{\Gamma'(u-1)}{\Gamma(u-1)}\right]e^{(2u-1)x\pi i}=-\frac{e^{(2u-1)x\pi i}}{u-1},$$

on aura l'équation

$$\left(\frac{dS_0}{dx}+\frac{dS_1}{dx}\right)\frac{\sin x\pi}{\pi}=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{(2u+2n+1)x\pi i}}{u+n},$$

d'où, en employant l'équation (9),

$$\frac{dS}{dx}=-\frac{\pi e^{x\pi i}}{\sin x\pi}\,\frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi}.$$

Il s'ensuit que la différence de deux séries S, dont les arguments u sont égaux, s'exprime sous forme finie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)}\left(e^{2x\pi i(u+n)}-e^{2x_0\pi i(u+n)}\right)$$
$$=\frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi}\left[\log\frac{\sin x_0\pi}{\sin x\pi}+i\pi(x_0-x)\right], \tag{10}$$

où il faut que $0<x<1$, $0<x_0<1$.

Si l'on fait par exemple $x_0=1-x$, il vient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)}\sin 2\pi\left(ux+nx-\frac{u}{2}\right)=\frac{\pi^2}{\sin u\pi}\left(\frac{1}{2}-x\right). \tag{11}$$

Posons maintenant, dans l'équation (10), $x_0=x+v$, la quantité v étant positive et moindre que un; multiplions par $e^{-2ux\pi i}\,dx$ et intégrons depuis zéro à $1-v$; puis posons $x_0=x+v-1$, multiplions par la même quantité $e^{-2ux\pi i}\,dx$ et intégrons depuis $1-v$ à 1. En ajoutant les deux résultats il vient

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u+1)}\left[1-(1-v)e^{2vu\pi i}-ve^{2(v-1)u\pi i}\right]-\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\,\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)}e^{2uv\pi i}(1-e^{-2u\pi i})\frac{1-e^{2nv\pi i}}{2n\pi i}$$
$$=\frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi}\left\{\int_0^1\log\left|\frac{\sin\pi(v+x)}{\sin\pi x}\right|e^{-2ux\pi i}\,dx+i\pi v\int_0^{1-v}e^{-2ux\pi i}\,dx+i\pi(v-1)\int_{1-v}^{1}e^{-2ux\pi i}\,dx\right\},$$

la sommation s'étendant aux valeurs $n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

En effectuant les deux dernières intégrations, on obtient la formule

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}&(1-e^{2u\nu\pi i})\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u+1)}+e^{2u\nu\pi i}(1-e^{-2u\pi i})\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)}\,\frac{e^{2n\nu\pi i}-1}{2n\pi i}\\ &=\frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi}\int_0^1\log\left|\frac{\sin\pi(\nu+x)}{\sin\pi x}\right|e^{-2ux\pi i}\,dx+\frac{\nu\pi i}{u}+\frac{\pi e^{-u\pi i}}{2u\sin u\pi}(1-e^{2u\nu\pi i})\end{aligned}\right.$$

en convenant de remplacer la quantité $\dfrac{e^{2n\nu\pi i}-1}{2n\pi i}$, pour $n=0$, par sa vraie valeur.

Dans cette équation, multiplions les deux membres par $\dfrac{e^{-2u\nu\pi i}}{2\pi i}$ et différentions par rapport à ν; il vient

$$\begin{aligned}&-\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}e^{-2u\nu\pi i}+\frac{1-e^{-2u\pi i}}{2\pi i}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)}e^{2n\nu\pi i}\\ &=\frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi}\left(e^{-2u\nu\pi i}\frac{e^{-2u\pi i}-1}{2\pi i}\log\sin\nu\pi+u\int_0^1\log\sin\pi x\, e^{-2u\pi i(\nu+x)}\,dx\right)\\ &\quad+e^{-2u\nu\pi i}\left(\frac{1}{2u}-\nu\pi i\right)-\frac{\pi e^{-u\pi i}}{2\sin u\pi}e^{-2u\nu\pi i}.\end{aligned}$$

En multipliant par $e^{2u\nu\pi i+u\pi i}$, ce résultat devient

$$\begin{aligned}&-\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}e^{u\pi i}+\frac{\sin u\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)}e^{2\nu\pi i(u+n)}\\ &=\frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi}\left(-\frac{\sin u\pi}{\pi}\log\sin\nu\pi+ue^{u\pi i}\int_0^1\log\sin x\pi\, e^{-2ux\pi i}\,dx\right)\\ &\quad+e^{u\pi i}\left(\frac{1}{2u}-\nu\pi i\right)-\frac{\pi}{2\sin u\pi}.\end{aligned}$$

Cette équation nous donnera l'expression définitive de la somme S lorsqu'on aura la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1\log\sin x\pi\, e^{-2ux\pi i}\,dx.$$

J'emploie à cet effet le développement

$$\log\sin x\pi = -\log 2 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx\pi}{k},$$

qui donne

$$\int_0^1 \log\sin x\pi\, e^{-2ux\pi i}\,dx = -\log 2\,\frac{e^{-u\pi i}\sin u\pi}{u\pi} + \frac{u e^{-u\pi i}\sin u\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k^2-u^2)}.$$

On a évidemment

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k^2-u^2)} = \frac{1}{2u^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-u}+\frac{1}{k+u}-\frac{2}{k}\right)$$
$$= -\frac{1}{2u^2}\left[\frac{\Gamma'(1+u)}{\Gamma(1+u)}+\frac{\Gamma'(1-u)}{\Gamma(1-u)}-2\Gamma'(1)\right]$$

et par conséquent

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 \log\sin x\pi\, e^{-2ux\pi i}\,dx \\ &\quad = -\frac{e^{-u\pi i}\sin u\pi}{2u\pi}\left[2\log 2 + \frac{\Gamma'(1+u)}{\Gamma(1+u)}+\frac{\Gamma'(1-u)}{\Gamma(1-u)}-2\Gamma'(1)\right].\end{aligned}\right.$$

En substituant dans la formule que nous venons de considérer, il vient d'abord

$$\frac{\sin u\pi}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)}e^{2v\pi i(u+n)}$$
$$= e^{u\pi i}\left[\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} - \log\sin v\pi - \log 2 - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1+u)}{\Gamma(1+u)} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1-u)}{\Gamma(1-u)} + \Gamma'(1) + \frac{1}{2u} - v\pi i\right] - \frac{\pi}{2\sin u\pi};$$

or la quantité

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1+u)}{\Gamma(1+u)} + \frac{1}{2u}$$

étant égale à $\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}$, on aura, en employant l'équation

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} - \frac{\Gamma'(1-u)}{\Gamma(1-u)} = -\pi\cot u\pi,$$

l'expression

$$-e^{u\pi i}\left[\frac{\pi}{2}\cot u\pi + \log 2\sin v\pi - \Gamma'(1) + v\pi i\right] - \frac{\pi}{2\sin u\pi},$$

qui se réduit à la suivante

$$-e^{u\pi i}[\pi\cot u\pi + \log 2\sin v\pi - \Gamma'(1) + v\pi i] + \frac{\pi i}{2}e^{u\pi i},$$

et notre résultat devient

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)}e^{2v\pi i(u+n)} \\ &= -\frac{\pi e^{u\pi i}}{\sin u\pi}\left[-\Gamma'(1) + \pi\cot u\pi + \log 2\sin v\pi + \pi i\left(v - \frac{1}{2}\right)\right]; \end{aligned}\right.$$

cette formule, qui a lieu pour les valeurs de v contenues entre 0 et 1, remplace entièrement l'équation (10) qui nous a servi à l'établir. Le raisonnement assez long qui précède serait superflu, si l'on connaissait l'équation (14) dans le cas de $v = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire

$$(14'')\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)} = -\frac{\pi}{\sin u\pi}[-\Gamma'(1) + \log 2 + \pi\cot u\pi].$$