Lerch, Matyáš: Scholarly works

Matyáš Lerch

Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených. [IV.]

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 4 (1895), č. 1, 1–55

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501479

Terms of use:

© Akademie věd ČR, 1895

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených.

(Pokračování.)

Píše M. Lerch.

Podáno dne 4. září 1894.

VI.

1. Buď $f(x, y) = a x^2 + 2 b x y + c y^2$ kladná forma kvadratická, jejíž součinitelé a, b, c buďte veličiny jinak libovolné. Substitucí

$$x = \alpha \xi + \beta \eta\,,$$
$$y = \gamma \xi + \delta \eta\,,$$

čili jak zvykem psáti

$$(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} (\xi, \eta),$$

vznikne z ní forma odvozená

$$f'(\xi, \eta) = a' \xi^2 + 2 b' \xi \eta + c' \eta^2,$$

kde položeno

$$a' = a \alpha^2 + 2 b \alpha \gamma + c \gamma^2,\; c' = a \beta^2 + 2 b \beta \delta + c \delta^2\,,$$
$$b' = a \alpha \beta + b (\alpha \delta + \beta \gamma) + c \gamma \delta\,.$$

Toto předeslavše, uvažujme funkci *Rosenhainovu*

$$F(a, b, c; u, v)\,,$$

již definuje řada

$$F(a, b, c; u, v) = \sum_{m, n} q^{a m^2 + 2 b m n + c n^2} e^{2 \pi i (m u + n v)} \tag{1}$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)\,,$$

v níž u, v jsou neodvislé proměnné a $q = e^{\omega \pi i}$ značí libovolnou konstantu, jejíž prostý obnos je menší jedné.

Tato řada konverguje absolutně a nezávisí tedy na seřadění svých členů; transformujme summační ukazovatele m, n substitucí

$$(m, n) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} (\mu, \nu)\,,$$

jejíž prvky $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou čísla celistvá a determinant $\alpha\beta - \beta\gamma = d$ jest kladný. Tím obdrží obecný člen řady (1) tvar

$$a_{\mu,\nu} = q^{f'(\mu,\nu)} e^{2\pi i(\mu u' + \nu v')},$$

kde položeno

$$u' = \alpha u + \gamma v, \quad v' = \beta u + \delta v$$

Summační ukazovatelé μ, ν nebudou však probíhati čísla celistvá, nýbrž určité zlomky o jmenovateli d, totiž ony, pro něž výrazy

$$m = \alpha\mu + \beta\nu, \quad n = \gamma\mu + \delta\nu$$

jsou celistvá čísla.

My položíme

$$\mu = \frac{m'}{d}, \quad \nu = \frac{n'}{d},$$

takže m', n' jsou čísla celistvá, a opatříme obecný člen

$$a_{\mu,\nu} = \bar{a}_{m',n'}$$

součinitelem $\varepsilon_{m',n'}$, jenž zmizí, jakmile výrazy

$$m = \frac{\alpha m' + \beta n'}{d}, \quad n = \frac{\gamma m' + \delta n'}{d}$$

nejsou čísla celistvá, a v případě opačném má hodnotu 1. Pak bude řada (1) míti hodnotu

$$F = \sum_{m',n'} \varepsilon_{m',n'} \bar{a}_{m',n'}, \quad (m', n' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

kde m', n' probíhají neodvisle od sebe řadu všech celistvých čísel kladných a záporných.

Součinitele $\varepsilon_{m',n'}$ žádané vlastnosti poskytne nám výraz

$$\varepsilon_{m',n'} = \frac{1}{d^2} \sum_{\sigma,\tau} e^{\frac{2\pi i}{d}[\sigma(\alpha m' + \beta n') + \tau(\gamma m' + \delta n')]},$$

v němž součet vztahuje se k hodnotám

$$\sigma, \tau = 0, 1, 2, \ldots d - 1,$$

a obecný člen bude zníti

$$\varepsilon_{m',n'} \bar{a}_{m',n'} = \sum_{\sigma,\tau} q^{f'\left(\frac{m'}{d}, \frac{n'}{d}\right)} e^{\frac{2\pi i}{d}[m'(u' + \sigma\alpha + \tau\gamma) + n'(v' + \sigma\beta + \tau\delta)]}$$

provedemeli sčítání vůči m', n', vznikne v pravo d^2 výrazů, jež jsou tvaru

$$\frac{1}{d^2} \sum_{m',n'} q^{f'\left(\frac{m'}{d}, \frac{n'}{d}\right)} e^{\frac{2\pi i}{d}[m'(u' + \sigma\alpha + \tau\gamma) + n'(v' + \sigma\beta + \tau\delta)]}$$

$$= \frac{1}{d^2} F\left(\frac{a'}{d^2}, \frac{b'}{d^2}, \frac{c'}{d^2}; \frac{u' + \sigma\alpha + \tau\gamma}{d}, \frac{v' + \sigma\beta + \tau\delta}{d}\right)$$

a tak nacházíme důležitý vzorec

$$(2)\qquad F(a\,,b\,,c\,;u\,,v)=\frac{1}{d^2}\sum_{\sigma=0}^{d-1}\sum_{\tau=0}^{d-1}F\left(\frac{a'}{d^2}\,,\frac{b'}{d^2}\,,\frac{c'}{d^2}\,;\frac{u'+\sigma\alpha+\tau\gamma}{d}\,,\frac{v'+\sigma\beta+\tau\delta}{d}\right),$$

kde a',b',c',u',v' jsou dány rovnicemi

$$a'=a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2\,,\ c'=a\beta^2+2b\beta\delta+c\delta^2\,,$$
$$b'=a\alpha\beta+b(\alpha\delta+\beta\gamma)+c\gamma\delta\,;$$
$$u'=\alpha u+\gamma v\,,\qquad v'=\beta u+\delta v\,,$$

při čemž $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ jsou celistvá čísla a determinant $\alpha\delta-\beta\gamma=d$ je kladný.

2. Vzorec ten je důležitý zvláště pro případ $b'=0$, poněvadž pak se pravá strana redukuje na elliptické transcendenty. Jeli totiž $b'=0$, rovná se výraz

$$F\left(\frac{a'}{d^2}\,,0\,,\frac{c'}{d^2}\,;\bar u\quad\bar v\right)=\sum_{m,n}q^{\frac{a'}{d^2}m^2+\frac{c'}{d^2}n^2}e^{2\pi i(m\bar u+n\bar v)}$$

součinu dvou řad jednoduchých

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}q^{\frac{a'}{d^2}m^2}e^{2m\bar u\pi i}\quad\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{\frac{c'}{d^2}n^2}e^{2n\bar v\pi i}$$

čili součinu elliptických transcendent

$$\vartheta_3\left(\bar u\,\middle|\,\frac{a'\omega}{d^2}\right)\vartheta_3\left(\bar v\,\middle|\,\frac{c'\omega}{d^2}\right).$$

V tomto případě $b'=0$ tedy vzorec (2) poskytne výsledek

$$(2^a)\qquad F(a\,,b\,,c\,;u\,,v)=\frac{1}{d^2}\sum_{\sigma=0}^{d-1}\sum_{\tau=0}^{d-1}\vartheta_3\left(\frac{u'+\sigma\alpha+\tau\gamma}{d}\,\middle|\,\frac{a'\omega}{d^2}\right)\ \vartheta_3\left(\frac{v'+\sigma\beta+\tau\delta}{d}\,\middle|\,\frac{c'\omega}{d^2}\right),$$

z něhož plyne, že

lze řadu (1) *vždy vyjádřiti elliptickými transcendentami, vládneli mezi součiniteli* a,b,c *vztah*

$$a\alpha\beta+b(\alpha\delta+\beta\gamma)+c\gamma\delta=0\,,$$

kde $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ jsou celistvá čísla a determinant $\alpha\delta-\beta\gamma=d$ je kladný.

Klademeli $\alpha\beta=r$, $\alpha\delta+\beta\gamma=s$, $\gamma\delta=c$, bude $s^2-4rt=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$. V našem případě tedy vládne mezi a,b,c vztah

$$ra+sb+tc=0\,,$$

v němž

$$s^2-4rt=d^2.$$

Tato podmínka také postačí a lze vysloviti větu:

»Vládneli mezi veličinami a, b, c vztah

(a) $$ra + sb + tc = 0\,,$$

v němž součinitelé r, s, t jsou čísla celistvá, pro něž výraz

(b) $$s^2 - 4rt$$

jest úplným čtvercem od nully různým: pak lze řadu $F(a, b, c; u, v)$ vyjádřiti transcendentami elliptickými.«

Abychom to dokázali, uvažme, že z podmínky poslední plyne, že lze rovnici

(c) $$r\gamma^2 - s\alpha\gamma + t\alpha^2 = 0$$

řešiti celistvými čísly α, γ; jeli pak ϱ vhodně volené číslo celistvé, hoví veličiny

(d) $$\alpha\,,\quad \gamma\,,\quad \beta = \frac{\varrho r}{\alpha}\,,\quad \delta = \frac{\varrho t}{\gamma}$$

rovnicím

$$\alpha\beta = \varrho r\,,\ \alpha\delta + \beta\gamma = \varrho s\,,\ \gamma\delta = \varrho t$$

a jsou čísla celistvá; substitucí $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ vznikne pak z (a, b, c) forma (a', b', c'), v níž prostřední součinitel

$$b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta = \varrho(ar + bs + ct)$$

rovná se nulle. Tím věta dokázána.

3. Předešlá podmínka je splněna, jakmile podíl $\frac{b}{c}$ je racionalným. Znamenejme

$$\frac{b}{c} = -\frac{\nu}{\mu}\,;$$

pak rovnice (a) zní

$$\mu b + \nu c = 0\,,\quad \mu > 0\,,$$

a máme $r = 0$, $s = \mu$, $t = \nu$, $s^2 - 4rt = \mu^2$; rovnice (c) obdrží tvar

$$-\mu\alpha\gamma + \nu\alpha^2 = 0 \quad \text{čili} \quad \mu\gamma = \nu\alpha\,,$$

a máme řešení (d):

$$\alpha = \mu\,,\ \gamma = \nu\,,\ \beta = 0\,,\ \delta = \varrho\,;$$

Volímeli $\varrho = 1$, máme konečně hodnoty substitučních prvků:

$$\alpha = \mu\,,\ \beta = 0\,,\ \gamma = \nu\,,\ \delta = 1\,;\ d = \mu\,;$$

v rovnici (2^a) bude dlužno klásti

$$a' = a u^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2\,,\ c' = c\,;\ u' = \mu u + \nu v\,,\ v' = v\,.$$

Veličina $\vartheta_3\left(\frac{u' + \sigma\alpha + \tau\gamma}{d}\,\middle|\,\frac{a'\omega}{d^2}\right)\vartheta_3\left(\frac{v' + \sigma\beta + \tau\delta}{d}\,\middle|\,\frac{c'\omega}{d^2}\right)$ přejde ve výraz

$$\vartheta_3\left(\frac{u' + \tau\nu}{\mu}\,\middle|\,\frac{a'\omega}{\mu^2}\right)\vartheta_3\left(\frac{v + \tau}{\mu}\,\middle|\,\frac{c\omega}{\mu^2}\right)$$

a máme tedy větu:

Jeli podíl $\frac{b}{c} = -\frac{\nu}{\mu}$ *číslo racionalné, bude*

$$(3)\qquad F(a\,,b\,,c\,;u\,,v) = \frac{1}{\mu}\sum_{\tau=0}^{\mu-1} \vartheta_3\left(\frac{\mu u + \nu v + \tau\nu}{\mu}\,\middle|\,\frac{a'\omega}{\mu^2}\right)\vartheta_3\left(\frac{v+\tau}{\mu}\,\middle|\,\frac{c\,\omega}{\mu^2}\right),$$

při čemž

$$a' = a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2 = a\mu^2 + b\mu\nu$$

Zvláště lze vyjádřiti elliptickými transcendentami hodnoty řad $F(a\,,b\,,c\,;u\,,v)$, v nichž $a\,,b\,,c$ jsou čísla celistvá; některé elegantní výsledky v tomto oboru odvodil *Kronecker* pomocí principií vyvinutých Dirichletem při vyšetřování počtu tříd kvadratických forem.

VII.

V tomto článku chceme přímo uvažováním funkcionalných vlastností určitých výrazů vyvinouti a zobecniti některé výsledky velmi elegantní, k nimž *Kronecker* dospěl výpočtem.*) K vůli přehledu užívejme symboliky dvoupříponové, kladouce

$$\vartheta_0 = \vartheta_{01}\,,\ \vartheta_1 = \vartheta_{11}\,,\ \vartheta_2 = \vartheta_{10}\,,\ \vartheta_3 = \vartheta_{00}\,,$$

takže

$$\vartheta_{gh}(u\,|\,\omega)$$

značí celistvou funkci transcendentní hovící podmínkám

$$\vartheta_{gh}(u+1) = (-1)^g\,\vartheta_{gh}(u)\,,\ \vartheta_{gh}(u+\tau) = (-1)^h\,e^{-\pi i(2u+\omega)}\,\vartheta_{gh}(u)\,.$$

To předeslavše, znamenejme nyní

$$\Theta(\sigma\,,\tau) = e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\,\vartheta_{gh}(\sigma+\tau w_1\,|\,w_1)\,\vartheta_{g'h'}(\sigma-\tau w_2\ \ w_2)\,,$$

kde σ, τ jsou neodvisle proměnné, a w_1, w_2 mají kladné části pomyslné, a položme

$$a\,i = \frac{w_1 w_2}{w_1+w_2}\,,\ b\,i = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{w_1-w_2}{w_1+w_2}\,,\ c\,i = \frac{-1}{w_1+w_2}\,.$$

Pak máme

$$\Theta(\sigma+1\,,\tau) = (-1)^{g+g'}\,\Theta(\sigma\,,\tau)\,,$$
$$\Theta(\sigma\,,\tau+1) = (-1)^{h+h'}\,\Theta(\sigma\,,\tau)\,,$$
$$\Theta(\sigma+a\,i\,,\tau+b\,i) = (-1)^h\,e^{-\pi i(2\sigma+a\,i)}\,\Theta(\sigma\,,\tau)\,,$$
$$\Theta(\sigma+b\,i\,,\tau+c\,i) = (-1)^{g'}\,e^{-\pi i(2\tau+c\,i)}\,\Theta(\sigma\,,\tau)\,.$$

Z rovnic těch plyne, že $\Theta(\sigma\,,\tau)$ je Rosenhainovskou funkcí theta řádu prvního o známce (charakteristice)

$$\begin{pmatrix} g+g' & h+h' \\ h & g' \end{pmatrix}$$

a periodách $(a\,i\,,b\,i\,,c\,i)$.

*) Sitzungsberichte der kön. preussischen Akad. der Wiss. 1883 (Zur Theorie der ellipt. Functionen, čl. III.), dále tamtéž 1889, čl. XIX.

Musí tedy dle známé věty o těchto řadách platit vztah

$$\Theta(\sigma,\tau)=A\sum_{m,n} e^{-\pi f\left(m+\frac{g''}{2},\, n+\frac{h''}{2}\right)+2\pi i\left(m+\frac{g''}{2}\right)\left(\sigma+\frac{h}{2}\right)+2\pi i\left(n+\frac{h''}{2}\right)\left(\tau+\frac{g'}{2}\right)}$$

$$(m\,,n=0\,,\pm 1\,,\pm 2\,,\ldots)\,,$$

kde položeno

$$f(\xi,\eta)=a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2\,,$$

$$g''=g+g',\ h''=h'-h$$

a veličina A nezávisí na proměnných σ,τ. Tato konstanta určí se pomocí rovnice

$$\int_0^1 d\tau\int_0^1 d\sigma\,\Theta(\sigma,\tau)\,e^{-\pi i(g''\sigma+h''\tau)}=A\,e^{-\pi f\left(\frac{g''}{2},\frac{h''}{2}\right)+\frac{g''h+h''g'}{2}\pi i}$$

K určení levé strany potřebí je především znáti integrál

$$J(\tau)=\int_0^1\vartheta_{gh}(\sigma+\tau w_1\mid w_1)\,\vartheta_{g'h'}(\sigma-\tau w_2\mid w_2)\,e^{-g''\sigma\pi i}\,d\sigma\,.$$

K tomu cíli bude třeba znásobiti řady

$$\vartheta_{gh}(\sigma+\tau w_1\mid w_1)\,e^{-g\sigma\pi i}=(-1)^{gh}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{\pi i\left[\left(\nu+\frac{g}{2}\right)^2 w_1+2\left(\nu+\frac{g}{2}\right)\left(\sigma+\tau w_1+\frac{h}{2}\right)-g\sigma\right]},$$

$$\vartheta_{g'h'}(\sigma-\tau w_2\mid w_2)\,e^{-g'\sigma\pi i}=(-1)^{g'h'}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{\pi i\left[\left(\nu+\frac{g'}{2}\right)^2 w_2+2\left(\nu+\frac{g'}{2}\right)\left(\sigma-\tau w_2+\frac{h'}{2}\right)-g'\sigma\right]},$$

načež se obdrží $J(\tau)$ jako člen na σ nezávislý. Bude tedy

$$J(\tau)=(-1)^{gh+g'h'}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{\pi i\left[w_1\left(\nu+\frac{g}{2}\right)^2+w_2\left(\nu-\frac{g'}{2}\right)^2+(2\nu+g)\left(\tau w_1+\frac{h}{2}\right)+(2\nu-g')\left(\tau w_2-\frac{h'}{2}\right)\right]}$$

aneb

$$J(\tau)=(-i)^{gh+g'h'}\,\vartheta_3\left(\tau(w_1+w_2)+\frac{h-h'}{2}+\frac{gw_1-g'w_2}{2}\,\middle|\,w_1+w_2\right)$$

$$.\,e^{\pi i\left[\frac{g^2}{4}w_1+\frac{g'^2}{4}w_2+\tau(gw_1-g'w_2)\right]};$$

přetvořímeli ještě tento výraz podle vzorce

$$\vartheta_3(u\mid\omega)=\sqrt{\frac{i}{\omega}}\,e^{-\frac{u^2\pi i}{\omega}}\,\vartheta_3\left(\frac{u}{\omega}\,\middle|\,-\frac{1}{\omega}\right),$$

obdržíme

$$J(\tau)=(-i)^{gh+g'h'}\sqrt{\frac{i}{w_1+w_2}}\,\vartheta_3\left(\tau+\frac{h-h'}{2(w_1+w_2)}+\frac{gw_1-g'w_2}{2(w_1+w_2)}\,\middle|\,\frac{-1}{w_1+w_2}\right)$$

$$.\,e^{-\frac{\pi i}{w_1+w_2}\left[\tau(w_1+w_2)+\frac{h-h'}{2}+\frac{gw_1-g'w_2}{2}\right]}\,.\,e^{\pi i\left[\frac{g^2}{4}w_1+\frac{g'^2}{4}w_2+\tau(gw_1-g'w_2)\right]},$$

takže bude

$$J(\tau)\, e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i - h''\tau\pi i} = (-i)^{gh+g'h'} \sqrt{\frac{i}{w_1+w_2}}\; e^{\frac{\pi i}{4\,w_1+w_2}\left[g''^2 w_1 w_2 + 2h''(g w_1 - g' w_2) - h''^2\right]}$$

$$.\, \vartheta_3\left(\tau - \frac{h''}{2(w_1+w_2)} + \frac{g w_1 - g' w_2}{2(w_1+w_2)} \,\middle|\, \frac{-1}{w_1+w_2}\right).$$

Uvážímeli dále, že hořejší rovnice definující a, b, c poskytnou

$$\frac{w_1}{w_1+w_2} = b\,i\,, \quad \frac{w_2}{w_1+w_2} = 1 - b\,i\,,$$

a tedy

$$\frac{g w_1 - g' w_2}{w_1+w_2} = (g+g')\,b\,i - g' = g''\,b\,i - g',$$

máme konečně

$$J(\tau)\, e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i - h''\tau\pi i}$$

$$= (-i)^{gh+g'h'+g'h''} \sqrt{c}\; e^{-\frac{\pi}{4}(a g''^2 + 2b g'' h'' + c h''^2)}\; \vartheta_3\left(\tau + \mu \,\middle|\, \frac{-1}{w_1+w_2}\right),$$

kde μ značí určitou konstantu; odtud plyne

$$\int_0^1 J(\tau)\, e^{\tau^2(w_1+w_2) - h''\tau\pi i}\, d\tau = (-i)^{gh+g'h'+g'h''} \sqrt{c}\; e^{-\frac{\pi}{4}(a g''^2 + 2b g'' h'' + c h''^2)}$$

levá strana však splývá s integrálem

$$\int_0^1 d\tau \int_0^1 d\sigma\;\; \Theta(\sigma, \tau)\, e^{-(g''\sigma + h''\tau)\pi i} = A\, i^{g''h + g'h''}\, e^{-\pi f\left(\frac{g''}{2}, \frac{h''}{2}\right)}$$

Porovnáním pak nacházíme

$$A = (-i)^{gh + g'h' + 2g'h'' + g''h}\, \sqrt{c}$$

čili

$$A = i^{g'(h+h') - 2gh}\, \sqrt{c}\,.$$

Tím tedy dokázán vzorec

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\, \vartheta_{gh}(\sigma + \tau w_1 \mid w_1)\, \vartheta_{g'h'}(\sigma - \tau w_2 \mid w_2) \\ & = i^{g'(h+h') - 2gh} \sqrt{c} \sum_{m,n} e^{-\pi f\left(m + \frac{g''}{2},\, n + \frac{h''}{2}\right) + 2\pi i\left[\left(m+\frac{g''}{2}\right)\left(\sigma + \frac{h}{2}\right) + \left(n + \frac{h''}{2}\right)\left(\tau + \frac{g'}{2}\right)\right]}, \end{aligned} \right.$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

kde položeno

$$f(\xi, \eta) = a\,\xi^2 + 2b\,\xi\,\eta + c\,\eta^2, \quad g'' = g' + g\,,\; h'' = h' - h\,,$$

a veličiny a, b, c souvisejí s veličinami w_1 a w_2 rovnicemi

$$\frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2} = a i\,, \quad \frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2} = 2 b i - 1\,, \quad \frac{-1}{w_1 + w_2} = c i\,,$$

a z těch plyne, že w_1 a $-w_2$ jsou kořeny rovnice druhého stupně

$$a + (2b + i) w + c w^2 = 0\,.$$

Veličiny a, b, c však nejsou libovolné, nýbrž jsou vázány podmínkou

$$(2b + i)^2 - 4ac = -1$$

Píšemeli s Kroneckerem

$$a = a_0\,, \ 2b + i = b_0\,, \ c = c_0\,,$$

a předpokládámeli, že w_1 a $-w_2$ jsou sdružené veličiny, budou a_0, b_0, c_0 realné veličiny hovící podmínce

$$4 a_0 c_0 - b_0^2 = 1\,, \tag{1a}$$

a w_1, $-w_2$ budou kořeny rovnice

$$a_0 + b_0 w + c_0 w^2 = 0\,, \tag{1b}$$

načež rovnice (1) obdrží tvar

$$\left\{\begin{aligned} & e^{\tau^2 (w_1 + w_2)\pi i} \vartheta_{gh}(\sigma + \tau w_1 \mid w_1)\, \vartheta_{g'h'}(\sigma - \tau w_2 \mid w_2) = i^{g'(h+h') - 2gh} e^{(g+g')(h'-h)\frac{\pi i}{4}} \\ & \cdot \sqrt{c_0} \sum_{m,n} i^{2mn + g''n + h''m} e^{-\pi f_0\left(m + \frac{g''}{2},\, n + \frac{h''}{2}\right) + 2\pi i \left[\left(m + \frac{g''}{2}\right)\left(\sigma + \frac{h}{2}\right) + \left(n + \frac{h''}{2}\right)\left(\tau + \frac{g'}{2}\right)\right]}, \end{aligned}\right. \tag{1*}$$

kde položeno

$$f_0(\xi, \eta) = a_0 \xi^2 + b_0 \xi \eta + c_0 \eta^2\,, \ g'' = g' + g\,, \ h'' = h' - h\,.$$

Odtud se obdrží první výsledek Kroneckerův, kladeli se $g = h = g' = h' = 1$, a nahradímeli v řadě příponu $m + 1$ hodnotou m:

$$\left\{\begin{aligned} & e^{\tau^2 (w_1 + w_2)\pi i} \vartheta_1(\sigma + \tau w_1 \mid w_1)\, \vartheta_1(\sigma - \tau w_2 \mid w_2) \\ & = \sqrt{c_0} \sum_{m,n} (-1)^{mn + m + n} e^{-\pi(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2) + 2\pi i (m\sigma + n\tau)}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Volímeli dále $g = h = 1$, $g' = 0$, $h' = 1$, máme druhý výsledek Kroneckerův*)

$$e^{\tau^2 (w_1 + w_2)\pi i} \vartheta_1(\sigma + \tau w_1 \mid w_1)\, \vartheta_0(\sigma - \tau w_2 \mid w_2)$$
$$= -\sqrt{c_0} \sum_{\lambda, n} i^{\lambda(n+1)} e^{-\pi\left(a_0 \frac{\lambda^2}{4} + b_0 \frac{\lambda u}{2} + c_0 n^2\right) - 2\pi i \left(\frac{\lambda\sigma}{2} + n\tau\right)},$$

$$(\lambda = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\,.$$

---

*) Sitzber. 1889, čl. XIX, § 3.

VIII.

1. V posledních svých pracích o theorii funkcí elliptických zabýval se často Kronecker řadou

$$(1)\qquad \sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i(m\xi_1+n\xi_2)}}{u+2m\omega_1+2n\omega_2},$$

ve které ξ_1 a ξ_2 jsou realné ryzí zlomky a ω_1, ω_2 značí dvě komplexní veličiny, jichž poměr není realný, takže můžeme předpokládati, že veličina $\frac{\omega_2}{\omega_1}=\omega$ má kladnou část pomyslnou.

Řada tato nekonverguje absolutně a z té příčiny uvažujme řadu

$$(2)\qquad Z(u)=\frac{1}{u}+\sum_{m,n}{}' e^{2x\pi i}\left(\frac{1}{u+w}-\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right),$$

která jest analogickou *Weierstrassově* řadě pro $\wp u$, a ve které psáno k vůli stručnosti

$$x=m\xi_1+n\xi_2,\qquad w=2m\omega_1+2n\omega_2;$$

čárka u znamení součtu znamená, že dlužno vynechati člen $m=n=0$.

Můžemeli ukázati, že řady

$$A=\sum_{m,n}{}' \frac{e^{2x\pi i}}{w},\quad B=\sum_{m,n}{}' \frac{e^{2x\pi i}}{w^2}$$

konvergují při určitém pořádku summačním, pak konverguje při tomtéž pořádku summačním také řada (1) a její součet

$$(1^*)\qquad S(u,\xi_1,\xi_2\ \omega_1,\omega_2)=\sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i(m\xi_1+n\xi_2)}}{u+2m\omega_1+2n\omega_2}$$

bude míti hodnotu

$$(3)\qquad S(u)=Z(u)+A-Bu\,.$$

Ukážeme přímo, že výraz

$$(1^a)\qquad \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(\mu\xi_1+\nu\xi_2)}}{u+2\mu\omega_1+2\nu\omega_2}$$

konverguje; k tomu cíli užijeme identity Abelovy

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\nu=\sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu(b_\nu-b_{\nu+1})+A_n b_n,$$

kde

$$A_\nu=a_0+a_1+\ldots+a_\nu\,.$$

Klademeli

$$a_\nu = e^{2\pi i.\nu\xi_2}, \; b_\nu = \frac{1}{u + 2\mu\omega_2 + 2\nu\omega_2},$$

obdržíme

$$A_\nu = \frac{e^{2\pi i(\nu+1)\xi_2} - 1}{e^{2\pi i\xi_2} - 1}, \; b_\nu - b_{\nu+1} = \frac{2\omega_2}{(u + 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_2)(u 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_2 + 2\omega_2)};$$

zároveň tu patrno, že

$$\lim_{n=\infty} A_n b_n = 0,$$

a že tedy řada

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i.\nu\xi_2}}{u + 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_2}$$

konverguje a rovná se řadě absolutně konvergentní

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(\nu+1)\xi_2} - 1}{e^{2\pi i\xi_2} - 1} \, \frac{2\omega_2}{(u + 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_2)(u + 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_2 + 2\omega_2)}.$$

Kladeli se nyní

$$a_\mu = e^{2\pi i\mu\xi_1}, \; b_\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(\nu+1)\xi_2} - 1}{e^{2\pi i\xi_2} - 1} \, \frac{2\omega_2}{(u + w)(u + w + 2\omega_2)},$$

a užijemeli opětně označení

$$w = 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_2,$$

bude

$$A_\mu = \frac{e^{2\pi i(\mu+1)\xi_1} - 1}{e^{2\pi i\xi_1} - 1},$$

$$b_\mu - b_{\mu+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{e^{2\pi i(\nu+1)\xi_2} - 1}{e^{2\pi i\xi_2} - 1} \right.$$
$$\left. \frac{4\omega_1\omega_2(\omega_1 + \omega_2) + 4\omega_1\omega_2(u + w)}{(u + w)(u + w + 2\omega_1)(u + w + 2\omega_2)(u + w + 2\omega_1 + 2\omega_2)} \right\};$$

a poněvadž opětně

$$\lim_{m=\infty} A_m b_m = 0,$$

jak snadno se dá ukázati, máme dokázánu konvergenci výrazu

(a) $$\lim_{m=\infty} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(\mu\xi_1 + \nu\xi_2)}}{u + 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_2},$$

a zároveň nacházíme jeho hodnotu ve tvaru

$$\frac{1}{(e^{2\pi i\xi_1} - 1)(e^{2\pi i\xi_2} - 1)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (e^{2\pi i(\mu+1)\xi_1} - 1)(e^{2\pi i\xi_2(\nu+1)} - 1)\,\varphi(w),$$

kde položeno na okamžik

$$\varphi(w) = \frac{4\omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2)+4\omega_1\omega_2(u+w)}{(u+w)(u+w+2\omega_1)(u+w+2\omega_2)(u+w+2\omega_1+2\omega_2)}.$$

Avšak řada S sestává ze čtyř částí podobných jako (a) a tedy konverguje, provádíli se nejprve sčítání vůči ν a po té vůči μ.

Zcela podobně lze ukázati konvergenci řad A a B při tomto pořádku. Tím jest ale platnosť rovnice (3) zajištěna.

Z absolutní konvergence řady (2) snadno se odvodí, že $Z(u)$ jest analytickou funkcí jednoznačnou proměnné u, a nemá jiných míst zvláštních mimo póly stupně prvního $u = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$, $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Totéž platí, jak ze (3) vysvítá, také o funkci $S(u)$.

Pro tuto funkci obdržíme charakteristickou vlastnosť, jestliže v rovnici (1*) píšeme nejprve $n+\nu$ za n a u výsledku $m+\mu$ za m; tím se objeví vztah

$$(4)\qquad S(u) = e^{2\pi i(\mu\xi_1+\nu\xi_2)}\, S(u+2\mu\omega_1+2\nu\omega_2),$$

kde μ a ν jsou libovolná čísla celistvá.

Znamenejme nyní σu Weierstrassovu funkci $\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2)$ sestrojenou na základě polouperiod ω_1, ω_2, a položme

$$\Theta(u) = S(u)\,\sigma u;$$

pak jest $\Theta(u)$ celistvá funkce transcendentní a má vlastnosť

$$\Theta(u+2\bar\omega) = (-1)^{\mu\nu+\mu+\nu}\, e^{2\bar\eta(u+\bar\omega)-2\pi i\bar x}\,\Theta(u),$$

kde psáno

$$\bar\omega = \mu\omega_1+\nu\omega_2, \quad \bar\eta = \mu\eta_1+\nu\eta_2, \quad \bar x = \mu\xi_1+\nu\xi_2,$$

při čemž η_1, η_2 znamenají známé Weierstrassovy konstanty z theorie funkce sigma. Odtud plyne, že funkce $\Theta(u)$ liší se jen stálým činitelem od funkce

$$\sigma(u+2\xi_2\omega_1-2\xi_1\omega_2)\,.\,e^{2(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)u};$$

stálý ten činitel obdrží se porovnáním hodnot obou funkcí pro $u=0$; tu jest $\Theta(0)=1$, kdežto poslední funkce pro $u=0$ se rovná výrazu

$$\sigma(2\xi_2\omega_1-2\xi_1\omega_2)$$

a tedy

$$\Theta(u) = e^{2u(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)}\frac{\sigma(u+2\xi_2\omega_1-2\xi_1\omega_2)}{\sigma(2\xi_2\omega_1-2\xi_1\omega_2)}$$

čili

$$(5)\qquad \begin{aligned} &S(u, \xi_1, \xi_2 \mid \omega_1, \omega_2) \\ &= e^{2u(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)}\frac{\sigma(u+2\xi_2\omega_1-2\xi_1\omega_2 \mid \omega_1, \omega_2)}{\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2)\,\sigma(2\xi_2\omega_1-2\xi_1\omega_2 \mid \omega_1, \omega_2)}. \end{aligned}$$

Tím vyjádřena hodnota řady (1) pomocí Weierstrassovy funkce σ. Důkaz proveden pro všechny realné hodnoty ξ_1, ξ_2, pro něž konverguje řada (1), t. j. pro ony, které nejsou celistvé. Znamenámeli

$$v = 2\xi_2\omega_1 - 2\xi_1\omega_2,$$

bude veličině v odpovídati bod položený uvnitř určitého rovnoběžníku period, a veličiny $-\xi_1, \xi_2$ budou souřadnice bodu v v určité soustavě kosoúhlé, jejíž osy mají jednotkové body na místech $2\omega_1, 2\omega_2$.

Rovnice (5) pak ukazuje, jak lze vyjádřiti funkci

$$\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u \cdot \sigma v} e^{2u(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)}$$

trigonometrickou řadou o proměnných ξ_1, ξ_2

2. Buďtež nyní $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ celistvá čísla hovící podmínce $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$; jak známo, obdržíme veškera celistvá čísla m, n a každé jen jednou, klademeli ve výrazech

$$m = \alpha m' + \gamma n', \; n = \beta m' + \delta n'$$

za m' a n' veškery celistvé hodnoty; a sice soustavě $m = n = 0$ odpovídá soustava $m' = n' = 0$.

Ježto řada (2) konverguje absolutně, můžeme v ní za m a n klásti tyto výrazy a zaříditi pořad summační libovolně.

Tím ale výraz $w = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ přejde u výraz

$$w = 2m'(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) + 2n'(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2),$$

a zároveň bude

$$x = 2m'(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2) + 2n'(\gamma\xi_1 + \delta\xi_2);$$

píšemeli tedy

$$(6) \qquad \begin{cases} \omega' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \; \omega'_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \\ \xi'_1 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2, \; \xi'_2 = \gamma\xi_1 + \delta\xi_2, \end{cases}$$

objeví se hodnota řady (2) ve tvaru

$$Z(u, \xi'_1, \xi'_2 \mid \omega'_1, \omega'_2),$$

takže bude

$$(7) \qquad Z(u, \xi_1, \xi_2 \mid \omega_1, \omega_2) = Z(u, \xi'_1, \xi'_2 \mid \omega'_1, \omega'_2),$$

čímž shledána důležitá vlastnosť funkce $S(u)$.

Zbývá ještě vyšetřiti, jak se k transformaci (6) chová funkce $S(u)$; odpověď k této otázce poskytuje vzorec (5). Znamenámeli totiž η'_1, η'_2 hodnoty funkcí η_1, η_2 příslušné k polouperiodám ω'_1, ω'_2, bude

$$\eta'_1 = \alpha\eta_1 + \beta\eta_2, \; \eta'_2 = \gamma\eta_1 + \delta\eta_2,$$

takže obdržíme

$$\xi'_1\eta'_2 - \xi'_2\eta'_1 = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1,$$

a podobně

$$\xi'_2\omega'_1 - \xi'_1\omega'_2 = \xi_2\omega_1 - \xi_1\omega_2;$$

poněvadž mimo to

$$\sigma(z \mid \omega'_1, \omega'_2) = \sigma(z \mid \omega_1, \omega_2),$$

zůstane výraz na pravé straně rovnice (5) nezměněn, provedeli se v něm transformace (6), a bude tedy

$$(8) \qquad S(u, \xi_1, \xi_2 \mid \omega_1, \omega_2) = S(u, \xi'_1, \xi'_2 \mid \omega'_1, \omega'_2).$$

Z rovnice této plyne také, že řada (1) obdrží tutéž hodnotu při všech pořádcích summačních, které odpovídají substitucím

$$(m, n) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} . (m', n'), \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

Užijemeli dále rovnic (7) a (8) u výrazu

$$A - Bu = S(u) - Z(u),$$

shledáme, že *veličiny A a B se nemění při transformaci* (6).

Tyto veličiny možno také vyjádřiti přímo pomocí funkce sigma a její derivací. Z definice (2) totiž vysvítá, že rozvoj funkce $Z(u)$ je tvaru

$$\frac{1}{u} + a u^2 + a' u^3 + \ldots,$$

a že tedy

$$S(u) = \frac{1}{u} + A - Bu + a u^2 + a' u^3 + \ldots$$

Tento rozvoj porovnejme s oním, jenž se obdrží pomocí vzorce (5). Znamenámeli na okamžik

$$\alpha = 2\xi_2\omega_1 - 2\xi_1\omega_2, \quad \beta = 2\xi_1\eta_2 - 2\xi_2\eta_1,$$

obdržíme

$$S(u) = \frac{\sigma(u+\alpha)}{\sigma u \,.\, \sigma\alpha} e^{\beta u} = \frac{1}{u} + \left(\beta + \frac{\sigma'\alpha}{\sigma\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(\beta^2 + 2\beta\frac{\sigma'\alpha}{\sigma\alpha} + \frac{\sigma''\alpha}{\sigma\alpha}\right) u + \ldots$$

a tudíž máme porovnáním

$$A = \beta + \frac{\sigma'\alpha}{\sigma\alpha}, \quad -2B = \beta^2 + 2\beta\frac{\sigma'\alpha}{\sigma\alpha} + \frac{\sigma''\alpha}{\sigma\alpha}.$$

Výsledky tyto nám podávají rovnice

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{m,n}{}' \frac{e^{2\pi i(m\xi_1 + n\xi_2)}}{2m\omega_1 + 2n\omega_2} = 2(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + \frac{\sigma'(2\xi_2\omega_1 - 2\xi_1\omega_2)}{\sigma(2\xi_2\omega_1 - 2\xi_1\omega_2)}, \\ &-2\sum_{m,n}{}' \frac{e^{2\pi i(m\xi_1 + n\xi_2)}}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} = 4(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2 \\ &\qquad + 4(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)\frac{\sigma'(2\xi_2\omega_1 - 2\xi_1\omega_2)}{\sigma(2\xi_2\omega_1 - 2\xi_1\omega_2)} + \frac{\sigma''(2\xi_2\omega_1 - 2\xi_1\omega_2)}{\sigma(2\xi_2\omega_1 - 2\xi_1\omega_2)}. \end{aligned} \right.$$

Rovnice (5) a (9) poskytují řadu specialných výsledků, na kterých Kronecker velmi si zakládal;*) rovnice (5) ovšem není nová, neboť podána byla Kroneckerem v jiné formě, nový jest pouze její důkaz a jeho důsledky (9).

3. V řadě (2) dosaďme nyní za m, n hodnoty

$$m = \alpha \frac{m'}{d} + \gamma \frac{n'}{d}, \; n = \beta \frac{m'}{d} + \delta \frac{n'}{d},$$

při čemž $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou celistvá čísla, a determinant

$$\alpha \delta - \beta \gamma = d$$

je kladný; litery m', n' mají probíhati celistvé hodnoty, pro něž výrazy m, n jsou celistvé. Zavedemeli jako v čl. VI. do obecného členu činitele

$$\varepsilon_{m', n'} = \frac{1}{d^2} \sum_{\varkappa_1, \varkappa_2} e^{\frac{2\pi i}{d}[\varkappa_1(\alpha m' + \gamma n') + \varkappa_2(\beta m' + \delta n')]},$$

bude dovoleno vzíti součet vůči všem celistvým hodnotám m', n' bez rozdílu Ježto pak

$$x = m\xi_1 + n\xi_2 = m' \frac{\alpha \xi_1 + \beta \xi_2}{d} + n' . \frac{\gamma \xi_1 + \delta \xi_2}{d},$$

$$w = 2m\omega_1 + 2n\omega_2 = 2m' \frac{\alpha\omega + \beta\omega_2}{d} + 2n' \frac{\gamma\omega_1 + \delta\omega_2}{d},$$

bude obecný člen zníti

$$\frac{1}{d^2} e^{\frac{2\pi i}{d}[m'(\xi^0_1 + \varkappa_1\alpha + \varkappa_2\beta) + n'(\xi^0_2 + \varkappa_1\gamma + \varkappa_2\delta)]} \left(\frac{1}{u + w} - \frac{1}{w} + \frac{u}{w} \right),$$

kde psáno

$$\xi_1{}^0 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2, \quad \xi_2{}^0 = \gamma\xi_1 + \delta\xi_2,$$

a píšemeli dále

$$\omega_1{}^0 = \frac{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2}{d}, \; \omega_2{}^0 = \frac{\gamma\omega_1 + \delta\omega_2}{d},$$

obdržíme hodnotu řady (2) ve tvaru

$$Z(u) = \frac{1}{d^2} \sum_{\varkappa_1, \varkappa_2} Z\left(u, \frac{\xi_1{}^0 + \varkappa_1\alpha + \varkappa_2\beta}{d}, \frac{\xi_2{}^0 + \varkappa_1\gamma + \varkappa_2\delta}{d} \; \omega_1{}^0, \omega_2{}^0\right)$$

$$(\varkappa_1, \varkappa_2 = 0, 1, 2, \ldots d - 1).$$

Jde nyní o analogický problém při $S(u)$.

*) Zur Theorie der elliptischen Functionen (Sitzber. 1883, článek XX, § 6.) Srovnej též článek zvěčnělého mathematika berlínského P. *Günthera* (Partialbruchzerlegungen in der Theorie der elliptischen Functionen) otištěný ve 113. svazku Journalu für die reine und angew. Mathematik.

Znamenejme

$$\mathfrak{S}(u)=\frac{1}{d^2}\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2} S\left(u\,,\,\frac{\xi_1{}^0+\varkappa_1\alpha+\varkappa_2\beta}{d}\,,\,\frac{\xi_2{}^0+\varkappa_1\gamma+\varkappa_2\delta}{d}\,\middle|\,\omega_1{}^0,\,\omega_2{}^0\right);$$

poněvadž druhá derivace rozdílu $S(u)-\mathfrak{S}(u)$ je nullou, musí

$$S(u)-\mathfrak{S}(u)=au+b\,,$$

kde třeba určiti konstanty a a b.

Vzrosteli u o $2d\omega_1{}^0$, vznikne odtud

$$S(u)\,e^{-2\pi i(\alpha\xi_1+\beta\xi_2)}-\mathfrak{S}(u)\,e^{-2\pi i\xi_1{}^0}=au+b+2ad\omega_1{}^0\,;$$

avšak tito exponencialní činitelé

$$e^{-2\pi i(\alpha\xi_1+\beta\xi_2)} \text{ a } e^{-2\pi i\xi_1{}^0}$$

mají hodnotu společnou a tudíž musí $a=0$, $b=0$, takže máme vztah

$$(10)\quad S(u)=\frac{1}{d^2}\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2} S\left(u\,,\frac{\xi_1{}^0+\varkappa_1\alpha+\varkappa_2\beta}{d}\,,\,\frac{\xi_2{}^0+\varkappa_1\gamma+\varkappa_2\delta}{d}\,\middle|\,\omega_1{}^0,\,\omega_2{}^0\right).$$

Tento výsledek obdrží elegantnější formu, vyjádřímeli v něm veličiny ω a ξ veličinami ω^0 a ξ^0; je tu totiž

$$\omega_1=\delta\,\omega_1{}^0-\beta\,\omega_2{}^0\,,\quad \omega_2=\alpha\,\omega_2{}^0-\gamma\,\omega_1{}^0\,,$$

$$\xi_1=\delta\,\frac{\xi_1{}^0}{d}-\beta\,\frac{\xi_2{}^0}{d}\,,\quad \xi_2=\alpha\,\frac{\xi_2{}^0}{d}-\gamma\,\frac{\xi_1{}^0}{d}\,,$$

a tudíž zní náš výsledek

$$S\left(u\,,\,\delta\frac{\xi_1{}^0}{d}-\beta\frac{\xi_2{}^0}{d}\,,\,\alpha\,\frac{\xi_2{}^0}{d}-\gamma\,\frac{\xi_1{}^0}{d}\,\middle|\,\delta\omega_1{}^0-\beta\,\omega_2{}^0\,,\,\alpha\,\omega_2{}^0-\gamma\,\omega_1{}^0\right)$$

$$=\frac{1}{d^2}\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2} S\left(u\,,\,\frac{\xi_1{}^0+\varkappa_1\alpha+\varkappa_2\beta}{d}\,,\,\frac{\xi_2{}^0+\varkappa_1\gamma+\varkappa_2\delta}{d}\,\middle|\,\omega_1{}^0,\,\omega_2{}^0\right)$$

aneb změnímeli označení

$$(10^*)\quad \left\{\begin{aligned} &S(u\,,\,\delta\xi_1-\beta\xi_2\,,\,-\gamma\xi_1+\alpha\xi_2\,|\,\delta\omega_1-\beta\omega_2\,,\,-\gamma\omega_1+\alpha\omega_2)\\ &=\frac{1}{d^2}\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2} S\left(u\,,\,\xi_1+\frac{\varkappa_1\alpha+\varkappa_2\beta}{d}\,,\,\xi_2+\frac{\varkappa_1\gamma+\varkappa_2\delta}{d}\,\middle|\,\omega_1\,,\,\omega_2\right),\end{aligned}\right.$$

kde summační přípony $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ probíhají hodnoty

$$\varkappa_1\,,\,\varkappa_2=0\,,\,1\,,\,2\,,\ldots d-1\,.$$

Vyjádřímeli konečně tento výsledek pomocí vzorce (5), máme

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{e^{2u\xi_1(\gamma\bar{\eta}_1+\delta\bar{\eta}_2-\eta_2)-2u\xi_2(\alpha\bar{\eta}_1+\beta\bar{\eta}_2-\eta_1)}\,\sigma(u+d\,.\,v\,|\,\bar{\omega}_1\,,\,\bar{\omega}_2)}{\sigma(u\,|\,\bar{\omega}_1\,,\,\bar{\omega}_2)\,\sigma(d\,.\,v\,|\,\bar{\omega}_1\,,\,\bar{\omega}_2)}\\ &=\frac{1}{d^2}\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2} e^{2u\left(\varkappa_1\frac{\alpha\eta_2-\gamma\eta_1}{d}+\varkappa_2\frac{\beta\eta_2-\delta\eta_1}{d}\right)}\frac{\sigma\left(u+v-\frac{2(\varkappa_1\bar{\omega}_2-\varkappa_2\bar{\omega}_1)}{d}\,\middle|\,\omega_1\,,\,\omega_2\right)}{\sigma(u\,|\,\omega_1\,,\,\omega_2)\,\sigma\left(v-\frac{2(\varkappa_1\omega_2-\varkappa_2\bar{\omega}_1)}{d}\,\middle|\,\omega_1\,,\,\omega_2\right)}\,,\end{aligned}\right.$$

kde psáno

$$\bar\omega_1 = \delta\,\omega_1 - \beta\,\omega_2\,,\ \bar\omega_2 = -\gamma\,\omega_1 + \alpha\,\omega_2\,,$$
$$v = 2\,\xi_2\,\omega_1 - 2\,\xi_1\,\omega_2\,,$$

a litery $\bar\eta_1$, $\bar\eta_2$ znamenají funkce η_1, η_2 příslušné k polovičním periodám $\bar\omega_1$, $\bar\omega_2$. Opakujeme, že α, β, γ, δ jsou čísla celistvá a determinant $\alpha\delta - \beta\gamma = d$ je kladný. Pravá strana je analytickou funkcí argumentu v, podobně všechny výrazy σ na levé straně, i musí tedy též

$$2\,\xi_1\,(\gamma\,\bar\eta_1 + \delta\,\bar\eta_2 - \eta_2) - 2\,\xi_2\,(\alpha\,\bar\eta_1 + \beta\,\bar\eta_2 - \eta_1)$$

býti funkcí argumentu v, a to patrně $\lambda\ v$, kde λ je konstanta; porovnámeli tento výraz s

$$2\,\lambda\,\omega_1\,\xi_2 - 2\,\lambda\,\omega_2\,\xi_1\,,$$

obdržíme po vyloučení λ, užijemeli vztahu

$$\eta_1\,\omega_2 - \eta_2\,\omega_1 = \frac{\pi i}{2}\,,$$

rovnici

$$(\alpha\,\eta + \beta\,\bar\eta_2)\,\omega_2 - (\gamma\,\bar\eta_1 + \delta\,\bar\eta_2)\,\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$$

která splývá se samozřejmým vzorcem

$$\bar\eta_1\,\bar\omega_2 - \bar\eta_2\,\bar\omega_1 = \frac{\pi i}{2}\,.$$

Vyjádřímeli v rovnici (5) funkci σ funkcí ϑ_1, obdržíme vzorec Kroneckerův

$$(5^{a})\quad S\,(u\,,\xi_1\,,\xi_2\,|\,\omega_1\,,\omega_2) = \frac{1}{2\,\omega_1}\,e^{-\frac{\xi_1 u \pi i}{\omega_1}}\,\frac{\vartheta'_1\left(0\,\middle|\,\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\vartheta_1\left(\frac{u + 2\,\xi_2\,\omega_1 - 2\,\xi_1\,\omega_2}{2\,\omega_1}\,\middle|\,\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\,\omega_1}\,\middle|\,\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\vartheta_1\left(\frac{2\,\xi_2\,\omega_1 - 2\,\xi_1\,\omega_2}{2\,\omega_2}\,\middle|\,\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)}\,,$$

který lze také psáti

$$(5^{b})\qquad \sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i(n\sigma - m\tau)}}{u + m + n\,\omega} = e^{2\tau u\pi i}\,\frac{\vartheta'_1\,(0\,|\,\omega)\,\vartheta_1\,(u + \sigma + \tau\,\omega\,|\,\omega)}{\vartheta_1\,(u\,|\,\omega)\,\vartheta_1\,(\sigma + \tau\,\omega\,|\,\omega)}\,.$$

IX.

1. Budiž $f\,(x\,,y) = a\,x^2 + 2\,b\,x\,y + c\,y^2$ kladná forma kvadratická; $\Delta = a\,c - b^2$ její opačně vzatý diskriminant, u veličina kladná; dále buďte w_1, w_2 dvě komplexní proměnné, jichž pomyslné části ve své prosté hodnotě nepřevyšují určitou mez, v_1, v_2 pak dvě veličiny realné, nikoli celistvé; konečně buď s veličina komplexní, jejíž realná část je kladna. Znamenejme na okamžik

$$F(w_1\,,w_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\,[v_1\,(w_1 + m) + v_2\,(w_2 + n)]}}{[u + f(w_1 + m\,,\,w_2 + n)]^s}\,,$$

a pokusme se o stanovení součinitelů trigonometrického rozvoje

$$F\,(w_1\,,w_2) = \sum_{\mu,\nu} A_{\mu,\nu}\,e^{2\pi i(\mu w_1 + \nu w_2)}\,,\qquad (\mu\,,\nu = 0\,,\pm 1\,,\pm 2\,,\ldots)$$

Tu bude

$$A_{\mu,\nu}=\int_0^1\int_0^1 F(w_1\,,w_2)\,e^{-2\pi i(\mu w_1+\nu w_2)}\,dw_1\,dw_2\,,$$

a dosadímeli sem za funkci F řadu, která ji definuje,

$$A_{\mu,\nu}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^1\int_0^1\frac{e^{2\pi i[(v_1-\mu)(w_1+m)+(v_2-\nu)(w_2+n)]}}{[u+f(w_1+m\,,w_2+n)]^s}\,dw_1\,dw_2$$

Transferujemeli tento integrál substitucí $w_1=x_1-m$, $w_2=x_2-n$, vznikne

$$A_{\mu,\nu}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_m^{m+1}dx_1\int_n^{n+1}dx_2\,\frac{e^{2\pi i[(v_1-\mu)x_1+(v_2-\nu)x_2]}}{[u+f(x_1\,,x_2)]^s}\,,$$

a odtud konečně

$$(1)\qquad A_{\mu,\nu}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i((v_1-\mu)x_1+(v_2-\nu)x_2)}}{[u+f(x_1\,,x_2)]^s}\,dx_1\,dx_2\,.$$

Tento integrál možno přetvořiti pomocí identity

$$\frac{\Gamma(s)}{[u+f(x_1,\,x_2)]^s}=\int_0^{\infty}e^{-t[u+f(x_1\,,x_2)]}\,t^{s-1}\,dt\,,$$

čímž se obdrží

$$\Gamma(s)\,A_{\mu,\nu}=\int_0^{\infty}e^{-tu}\,t^{s-1}\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-tf(x_1\,,x_2)+2\pi i[(v_1-\mu)x_1+(v_2-\nu)x_2]}\,dx_1\,dx_2$$

dvojnásobný vnitřní integrál určí se pomocí známého vzorce

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)+u'x+u''y}\,dx\,dy=\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\,e^{\frac{au''^2-2bu'u''+cu'^2}{4\Delta}}$$

v němž $\Delta=ac-b^2$, a který možno ostatně velmi snadno odvoditi; i obdržíme tak

$$(2)\qquad \Gamma(s)\,A_{\mu,\nu}=\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\int_0^{\infty}e^{-tu-\frac{\pi^2}{\Delta t}\left[a(v_2-\nu)^2-2b(v_2-\nu)(v_1-\mu)+c(v_1-\mu)^2\right]}\,t^{s-2}\,dt.$$

Při označení (1) neb (2) bude pak platit vztah

$$(3)\qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i[v_1(w_1+m)+v_2(w_2+n)]}}{[u+f(w_1+m\,,w_2+n)]^s}=\sum_{\mu,\nu}^{(-\infty\,..\,\infty)}A_{\mu,\nu}\,e^{2\pi i(\mu w_1+\nu w_2)}.$$

Předpokládámeli, že realná část veličiny s leží mezi 0 a 1, můžeme ve vzorci (2) přejíti k limitě pro $u = 0$; tím se obdrží pro $A_{\mu,\nu}$ hodnota

$$\Gamma(s)\,\overline{A}_{\mu,\nu} = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{\Delta t}\left[a(v_2-\nu)^2 - 2b(v_2-\nu)(v_1-\mu) + c(v_1-\mu)^2\right]}\, t^{s-2}\, dt$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\, \frac{\Gamma(1-s)\,\Delta^{1-s}}{\pi^{2-2s}\left[a(v_2-\nu)^2 - 2b(v_2-\nu)(v_1-\mu) + c(v_1-\mu)^2\right]^{1-s}},$$

takže jsme vedeni k reciprocitě

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Gamma(s)\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^{s} \sum_{m,n}^{(-\infty\ldots\infty)} \frac{e^{2\pi i\left(v_1(w_1+m)+v_2(w_2+n)\right)}}{\left(a(w_1+m)^2 + 2b(w_1+m)(w_2+n) + c(w_2+n)^2\right)^s} \\ &= \Gamma(1-s)\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^{1-s} \sum_{m,n}^{(-\infty\ldots\infty)} \frac{e^{2\pi i(m w_1 + n w_2)}}{\left(c(v_1-m)^2 - 2b(v_1-m)(v_2-n) + a(v_2-n)^2\right)^{1-s}}, \end{aligned} \right.$$

jejíž případ zvláštní jsme uvažovali ve své rozpravě Studie v oboru Malmsténovských řad a invariantů forem kvadratických.

2. Hodnotu levé strany rovnice (3) znamenejme

$$\mathfrak{K}(w_1, w_2; v_1, v_2 \mid a, b, c; s; u),$$

t. j. položme

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{K}(w_1, w_2; v_1, v_2 \mid a, b, c; s; u) \\ &= \sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i(m v_1 + n v_2)}}{\left(a(w_1+m)^2 + 2b(w_1+m)(w_2+n) + c(w_2+n)^2 + u\right)^s}. \end{aligned} \right.$$

Pro studium této funkce důležita je též řada, která se obdrží pomocí rovnice*)

$$e^{2vw\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}}{\left[(w+m)^2 + z\right]^s} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{2\mu w\pi i} \int_0^{\infty} e^{-zx - \frac{\pi^2(v-\mu)^2}{x}}\, x^{s-\frac{3}{2}}\, dx.$$

Převeďme nejprve výraz

$$a(w_1+m)^2 + 2b(w_1+m)(w_2+n) + c(w_2+n)^2$$

na tvar

$$c\left[w_2 + n + \frac{b}{c}(w_1+m)\right]^2 + \frac{\Delta}{c}(w_1+m)^2,$$

a proveďme v řadě (5) nejprve sčítání vůči n; tu bude třeba položiti

$$v = v_2,\quad w = w_2 + \frac{b}{c}(w_1+m),\quad z = \frac{\Delta}{c^2}\cdot(w_1+m)^2 + \frac{u}{c},$$

) Základové theorie Malmsténovských řad, str. 41, vzorec (1).

a obdrží se

$$
(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & \mathfrak{K}(w_1, w_2; v_1, v_2 \mid a, b, c; s; u) \\ & = e^{-2 v_2 w_2 \pi i} \frac{\sqrt{\pi}}{c^s \Gamma(s)} \sum_{m, \mu} e^{2\pi i \left[\frac{b}{c}(\mu - v_2)(w_1 + m) + m v_1 + \mu w_2\right]} \\ & \qquad \cdot \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\Delta}{c^2}(w_1+m)^2 + \frac{u}{c}\right) x - \frac{\pi^2 (v_2 - \mu)^2}{x}} x^{s - \frac{3}{2}} \, dx , \end{aligned} \right.
$$

$$(\mu, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Součin $\Gamma(s)\,\mathfrak{K}(w_1, w_2; v_1, v_2 \mid a, b, c; s; u)$ je tedy celistvou funkcí transcendentní vůči s a zůstane jí i pro $u = 0$, neníli w_1 celistvým číslem.

Nás zajímá hlavně hodnota této funkce pro $s = 1$; tu máme především

$$
\int_0^\infty e^{-\left[\frac{\Delta}{c^2}(w_1+m)^2 + \frac{u}{c}\right] x - \frac{\pi^2 (v_2 - \mu)^2}{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}
$$

$$
= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\Delta}{c^2}(w_1 + m)^2 + \frac{u}{c}}} e^{-2 |v_2 - \mu| \pi \sqrt{\frac{\Delta}{c^2}(w_1+m)^2 + \frac{u}{c}}},
$$

a tedy bude

$$
(7)\quad \left\{ \begin{aligned} & \mathfrak{K}(w_1, w_2; v_1, v_2 \mid a, b, c; 1; u) \\ & = \pi \, e^{-2 v_2 w_2 \pi i} \sum_{m, \mu} \frac{e^{2\pi i \left(\frac{b}{c}(\mu - v_2)(w_1 + m) + m v_1 + \mu w_2\right) - \frac{2\pi}{c} |v_2 - \mu| \sqrt{\Delta (w_1 + m)^2 + c u}}}{\sqrt{\Delta (w_1 + m)^2 + c u}}, \end{aligned} \right.
$$

$$(\mu, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Předpokládámeli $0 < v_2 < 1$, a provedemeli sčítání vůči μ, vznikne v pravo výraz

$$
(a)\quad \left\{ \begin{aligned} & \pi e^{-2 v_2 w_2 \pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\Delta (w_1 + m)^2 + c u}} \left\{ \frac{e^{-2\pi i \left(-m v_1 + \frac{b}{c} v_2 (w_1 + m)\right) - \frac{2\pi v_2}{c} \sqrt{\Delta (w_1+m)^2 + c u}}}{1 - e^{-2\pi i \left(w_2 + \frac{b}{c}(w_1 + m)\right) - \frac{2\pi}{c} \sqrt{\Delta (w_1+m)^2 + c u}}} \right. \\ & \qquad \left. + \frac{e^{2\pi i \left(m v_1 + w_2 + \frac{b}{c}(1 - v_2)(w_1 + m)\right) - \frac{2\pi (1 - v_2)}{c} \sqrt{\Delta (w_1+m)^2 + c u}}}{1 - e^{2\pi i \left(w_2 + \frac{b}{c}(w_1 + m)\right) - \frac{2\pi}{c} \sqrt{\Delta (w_1+m)^2 + c u}}} \right\} \end{aligned} \right.
$$

čili

$$
(7^*)\quad \left\{ \begin{aligned} & e^{\frac{2 v_2 \pi i}{c}(b w_1 + c w_2)} \mathfrak{K}(w_1, w_2; v_1, v_2 \mid a, b, c; 1; u) \\ & = \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2 m \pi i}{c}(c v_1 - b v_2)}}{\sqrt{\Delta (w_1 + m)^2 + c u}} \left\{ \frac{e^{-\frac{2\pi v_2}{c} \sqrt{\Delta (w_1+m)^2 + c u}}}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{c}(b w_1 + c w_2 + b m) - \frac{2\pi}{c} \sqrt{\Delta (w_1+m)^2 + c u}}} \right. \\ & \qquad \left. - \frac{e^{\frac{2\pi v_2}{c} \sqrt{\Delta (w_1+m)^2 + c u}}}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{c}(b w_1 + c w_2 + b m) + \frac{2\pi}{c} \sqrt{\Delta (w_1+m)^2 + c u}}} \right\}. \end{aligned} \right.
$$

Případ $w_1 = w_2 = 0$ tohoto vzorce byl jiným způsobem vyšetřen v rozpravě Studie v oboru Malmsténovských řad a invariantů forem kvadratických.*)

Vyšetřme ještě případ $u = 0$; tu bude dle vzoru (a)

$$\mathfrak{K}(w_1, w_2; v_1, v_2 \mid a, b, c; 1, 0)$$
$$= \frac{\pi e^{-2v_2 w_2 \pi i}}{\sqrt{\Delta}} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|w_1 + m|} \left\{ \frac{e^{2\pi i\left(m v_1 - \frac{b v_2}{c}(w_1 + m)\right) - \frac{2\pi v_2}{c}\sqrt{\Delta}\,|w_1 + m|}}{1 - e^{-2\pi i\left(w_2 + \frac{b}{c}(w_1 + m)\right) - \frac{2\pi}{c}\sqrt{\Delta}\,|w_1 + m|}} \right.$$
$$\left. + \frac{e^{2\pi i\left(m v_1 + w_2 + \frac{b}{c}(1 - v_2)(w_1 + m)\right) - \frac{2\pi(1 - v_2)}{c}\sqrt{\Delta}\,|w_1 + m|}}{1 - e^{2\pi i\left(w_2 + \frac{b}{c}(w_1 + m)\right) - \frac{2\pi}{c}\sqrt{\Delta}\,|w_1 + m|}} \right\}.$$

V tomto vzorci předpokládejme $0 < w_1 < 1$, načež $|w_1 + m|$ má hodnotu $w_1 + m$ pro $m \geq 0$, ale hodnotu $n - w_1$ pro $m = -n$, $n \geqq 1$. Spojímeli zároveň členy positivních m v prvém výrazu se členy negativních m ve druhém výrazu, což dá

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{w_1 + m} \frac{e^{2\pi i m v_1 + 2 v_2 \pi i (w_1 + m) \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{c}}}{1 - e^{-2\pi i w_2 + 2\pi i (w_1 + m) \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{c}}}$$
$$- \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{1}{w_1 + m} \frac{e^{2\pi i (m v_1 + w_2) - 2\pi i (1 - v_2)(w_1 + m) \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{c}}}{1 - e^{2\pi i w_2 - 2\pi i (w_1 + m) \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{c}}},$$

obdržíme výraz

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w_1 + m} \frac{e^{2\pi i (m v_1 + \omega_1 v_2 (w_1 + m))}}{1 - e^{2\pi i (-w_2 + \omega_1 (w_1 + m))}},$$

a podobný výraz se objeví, spojímeli členy ostatní; při tom znamenáme

$$\omega_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{c}, \quad \omega_2 = \frac{b + i\sqrt{\Delta}}{c},$$

takže ω_1 a $-\omega_2$ jsou kořeny kvadratické rovnice

$$a + 2b\omega + c\omega^2 = 0.$$

Zavedemeli označení

$$\Phi(u, w, v \mid \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{u + m} \frac{e^{2mv\pi i}}{1 - e^{2\pi i (w + m\omega)}}, \tag{8}$$

obdrží náš výsledek tvar

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{K}(w_1, w_2; v_1, v_2 \mid a, b, c; 1; 0) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \Big\{ e^{2 v_2 \pi i (-w_2 + w_1 \omega_1)} \Phi(w_1, -w_2 + w_1 \omega_1, v_1 + v_2 \omega_1 \mid \omega_1) \\ &\quad - e^{2 v_2 \pi i (-w_2 - w_1 \omega_2)} \Phi(w_1, -w_2 - w_1 \omega_2, v_1 - v_2 \omega_2 \mid -\omega_2) \Big\}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

*) Vzorec (2).

kde pravou stranu lze také psáti

$$\tag{9^a} \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\Big\{e^{2v_2\pi i(-w_2+w_1\omega_1)}\,\Phi\,(w_1\,,\,-w_2+w_1\,\omega_1\,,\,v_1+v_2\,\omega_1\,|\,\omega_1)$$
$$+\,e^{2\pi i(1-v_2)(w_2+w_1\omega_2)}\,\Phi\,(w_1\,,\,w_2+w_1\,\omega_2\,,\,v_1+(1-v_2)\,\omega_2\,|\,\omega_2)\Big\}\,.$$

Touto velezajímavou transcendentou zabývali jsme se již ve článku IV. [§ 2., vzorec (9)], kde jsme uvažovali výraz

$$J\,(x\,,y\,,s\,|\,v_1\,,v_2)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{x+n v_1}\,\frac{e^{\frac{2ns\pi i}{v_2}}}{e^{\frac{2\pi i}{v_2}(y+nv_1)}-1}\,,$$

který jsme vyjádřili omezeným integrálem sestrojeným z elliptických transcendent.*)

3. S transcendentou $\Phi\,(u\,,w_1\,v\,|\,\omega)$ setkal se také *Kronecker* v jedné ze svých posledních studií o theorii funkcí elliptických.**) Za příčinou úplnosti budiž nám dovoleno reprodukovati úvahu slavného mathematika, pokud toho vyžaduje souvislosť s našimi studiemi.

Vycházejme ze vzorce (5^b) článku VIII.:

$$\sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i(n\sigma'-m\tau')}}{u+m+n\omega}\,e^{2\tau' u\pi i}\,\frac{\vartheta_1'\,\vartheta_1\,(u+u')}{\vartheta_1\,(u)\,\vartheta_1\,(u')}\,,$$

kde $u'=\sigma+\tau\,\omega$.

Píšemeli nyní $\dfrac{u}{v},\dfrac{w}{v}$ za u a ω, a klademeli $u=\sigma v+\tau w\,,\,u'=\sigma' v+\tau' w$, máme vzorec

$$\sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i(n\sigma'-m\tau')}}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}=\frac{1}{v}\,e^{\frac{2\tau' u\pi i}{v}}\,\frac{\vartheta_1'\,\vartheta_1\left(\frac{u+u'}{v}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{v}\right)\vartheta_1\left(\frac{u'}{v}\right)}$$

Vyměnímeli u a u', plyne odtud vztah

$$\tag{10} \sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i[\sigma'(n+\tau)-\tau'(m+\sigma)]}}{(\sigma+m)\,v+(\tau+n)\,w}=\sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i(n\sigma-m\tau)}}{(\sigma'+m)\,v+(\tau'+n)\,w}\,;$$

při tom bylo předpokládáno, že pomyslná část veličiny $\dfrac{w}{v}$ je kladná; hledejme nyní hodnotu řady

$$A=\sum\frac{e^{2\pi i[\sigma'(n+\tau)-\tau'(m+\sigma)]}}{(\sigma+m)\,v+(\tau+n)\,w}$$

*) V citovaném článku nedopatřením udán výsledek (8) chybně: má tam pravá strana zníti

$$\pi i\left(1-\frac{2s}{v_1\,v_2}\right)\frac{1}{e^{\frac{-2x\pi i}{v_2}}-1}-\frac{\pi i}{2\,v_1\,\sin^2\frac{x\pi}{v_2}}-v_2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{x+n\,v_2}\,\frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_1 v_2}(x+nv_2)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_1}(x+nv_2)}-1}\,.$$

**) Sitzungsberichte der kön. preuss. Akad. z r. 1890, str. 1025—1029.

v případě, kdy pomyslná část veličiny $\frac{w}{v}$ je záporna; tu vyměňme n za $-n$, a obdržíme

$$A = \sum \frac{e^{2\pi i[-\sigma'(n-\tau)-\tau'(m+\sigma)]}}{(\sigma+m)v+(n-\tau)(-w)},$$

tedy dle (10)

$$A = \sum \frac{e^{2\pi i(n\sigma+m\tau)}}{(-\sigma'+m)v+(\tau'+n)(-w)},$$

a píšemeli zde $-m$ za m,

$$A = -\sum \frac{e^{2\pi i(n\sigma-m\tau)}}{(\sigma'+m)v+(\tau'+n)w} \quad \text{pro Im.}\ \frac{w}{v} < 0.$$

Značíli nám tedy ε znamení sgn. Im. $\frac{w}{v}$, t. j. $\varepsilon = \pm 1$, jak jest pomyslná část veličiny $\frac{w}{v}$ kladnou neb zápornou, bude

$$(10^*) \qquad \varepsilon \sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i[\sigma'(n+\tau)-\tau'(m+\sigma)]}}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w} = \sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i(n\sigma-m\tau)}}{(\sigma'+m)v+(\tau'+n)w}.$$

Společnou hodnotu obou stran znamenejme Ser. $(\sigma v+\tau w, \sigma' v+\tau' w)$ a utvořme integrál

$$J = 2\varepsilon v\pi i \int_{\sigma_0}^{\sigma'_0} \text{Ser.}(\sigma v+\tau w, \sigma' v+\tau_0' w)\, d\sigma'$$

$$+ 2\varepsilon w\pi i \int_{\tau_0}^{\tau'_0} \text{Ser.}(\sigma v+\tau w, \sigma_0 v+\tau' w)\, d\tau'$$

Počítámeli jej pomocí pravé strany, obdržíme

$$J = 2\varepsilon\pi i \sum_{m,n} e^{2\pi i(n\sigma-m\tau)} \log \frac{(\sigma'_0+m)v+(\tau_0'+n)w}{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w};$$

při užití levé strany obdržíme pak

$$v\sum \frac{e^{2\pi i[\sigma'_0(n+\tau)-\tau_0'(m+\sigma)]}}{(\tau+n)[(\sigma+m)v+(\tau+n)w]}$$

$$-v\sum \frac{e^{2\pi i[\sigma_0(n+\tau)-\tau_0'(m+\sigma)]}}{(\tau+n)[(\sigma+m)v+(\tau+n)w]}$$

$$-w\sum \frac{e^{2\pi i[\sigma_0(n+\tau)-\tau_0'(m+\sigma)]}}{(\sigma+m)[(\sigma+m)v+(\tau+n)w]}$$

$$+w\sum \frac{e^{2\pi i[\sigma_0(n+\tau)-\tau_0(m+\sigma)]}}{(\sigma+m)[(\sigma+m)v+(\tau+n)w]}.$$

Obě prostřední řady po sečtení obecných členů poskytnou

$$-\sum \frac{e^{2\pi i[\sigma_0(n+\tau)-\tau'_0(m+\sigma)]}}{(\sigma+m)(\tau+n)}$$

a tedy máme jako druhý tvar integrálu J:

$$J = v\sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i[(\tau+n)\sigma_0'-(\sigma+m)\tau_0']}}{(\tau+n)[(\sigma+m)v+(\tau+n)w]}$$

$$+w\sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i[(\tau+n)\sigma_0-(\sigma+m)\tau_0]}}{(\sigma+m)[(\sigma+m)v+(\tau+n)w]}$$

$$-\sum_n \frac{e^{2\pi i\sigma_0(\tau+n)}}{\tau+n}\cdot\sum_m \frac{e^{-2\pi i\tau_0'(\sigma+m)}}{\sigma+m};$$

porovnáním obou výrazů pro J máme vzorec Kroneckerův

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &2\varepsilon\pi i\sum_{m,n} e^{2\pi i(n\sigma-m\tau)}\log\frac{(\sigma'_0+m)v+(\tau_0'+n)w}{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w}\\ &=v\sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i[(\tau+n)\sigma_0'-(\sigma+m)\tau_0']}}{(\tau+n)[(\sigma+m)v+(\tau+n)w]}+w\sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i[(\tau+n)\sigma_0-(\sigma+m)\tau_0]}}{(\sigma+m)[(\sigma+m)v+(\tau+n)w]}\\ &\quad-\sum_n\frac{e^{2\pi i\sigma_0(\tau+n)}}{\tau+n}\cdot\sum_m\frac{e^{-2\pi i\tau_0'(\sigma+m)}}{\sigma+m}.\end{aligned}\right.$$

Řady na pravé straně vyčíslíme nyní pomocí vzorce

$$\text{(a)}\qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2kb\pi i}}{a-k}=2\pi i\,\frac{e^{2ab\pi i}}{e^{2a\pi i}-1},\quad (0<b<1).$$

Tu především obdržíme pro výraz

$$\mathfrak{a}=v\sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i[(\tau+n)\sigma_0'-(\sigma+m)\tau_0']}}{(\tau+n)[(\sigma+m)v+(\tau+n)w]},$$

píšemeli v něm $-m$ za m, a provedeme sčítání vůči m, předpokládajíce $0<\tau_0'<1$

$$\mathfrak{a}=2\pi i\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau+n}\,\frac{e^{\frac{2\pi i}{v}(\sigma_0'v+\tau_0'w)(\tau+n)}}{e^{\frac{2w\pi i}{v}(\tau+n)+2\sigma\pi i}-1};$$

abychom obdrželi řadu

$$\mathfrak{b}=w\sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i[(\tau+n)\sigma_0-(\sigma+m)\tau_0]}}{(\sigma+m)[(\sigma+m)v+(\tau+n)w]},$$

přetvořme nejprve obecný člen pomocí identity

$$\frac{1}{(\sigma+m)\left[(\sigma+m)v+(\tau+n)w\right]}$$
$$=\frac{1}{(\tau+n)w}\left[\frac{1}{\sigma+m}-\frac{1}{\sigma+m+(\tau+n)\frac{w}{v}}\right],$$

takže bude

$$\mathfrak{b}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(\tau+n)\sigma_0}}{\tau+n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i(\sigma+m)\tau_0}}{\sigma+m}-\mathfrak{b}_0,$$

kde

$$\mathfrak{b}_0=\sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i\left[(\tau+n)\sigma_0-(\sigma+m)\tau_0\right]}}{(\tau+n)\left[\sigma+m+(\tau+n)\frac{w}{v}\right]}$$

se určí jako dříve a sice bude za supposice $0<\tau_0<1$:

$$\mathfrak{b}_0=2\pi i\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau+n}\cdot\frac{e^{\frac{2\pi i}{v}(\sigma_0 v+\tau_0 w)(\tau+n)}}{e^{\frac{2w\pi i}{v}(\tau+n)+2\sigma\pi i}-1};$$

vložením nalezených výsledků za $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ do vzorce (11) obdržíme

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}&s\sum_{m,n}e^{2\pi i(n\sigma-m\tau)}\log\frac{(\sigma_0'+m)v+(\tau_0'+n)w}{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w}\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau+n}\,\frac{e^{\frac{2\pi i}{v}(\sigma_0'v+\tau_0'w)(\tau+n)}}{e^{\frac{2w\pi i}{v}(\tau+n)+2\sigma\pi i}-1}\\&-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau+n}\,\frac{e^{\frac{2\pi i}{v}(\sigma_0 v+\tau_0 w)(\tau+n)}}{e^{\frac{2w\pi i}{v}(\tau+n)+2\sigma\pi i}-1},\end{aligned}\right.$$

kde se předpokládá $0<\tau_0<1$, $0<\tau_0'<1$.

Při počítání řady $\mathfrak{b}$ objevila se rovnice

$$v\sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i\left[(\tau+n)\sigma_0-(\sigma+m)\tau_0\right]}}{(\tau+n)\left[(\sigma+m)v+(\tau+n)w\right]}$$
$$+w\sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i\left[(\tau+n)\sigma_0-(\sigma+m)\tau_0\right]}}{(\sigma+m)\left[(\sigma+m)v+(\tau+n)w\right]}$$
$$=\sum_{n}\frac{e^{2\pi i(\tau+n)\sigma_0}}{\tau+n}\sum_{m}\frac{e^{-2\pi i(\sigma+m)\tau_0}}{\sigma+m};$$

vyjádříme-li obě strany pomocí vzorce (a), předpokládajíce $0 < \sigma_0 < 1$, $0 < \tau_0 < 1$, obdržíme vztah

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{v}(\sigma_0 v + \tau_0 w)(\tau+n)}}{e^{\frac{2w\pi i}{v}(\tau+n)+2\sigma\pi i} - 1} \\ &+\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma+m} \frac{e^{2\tau\pi i + \frac{2\pi i}{w}(v-\sigma_0 v - \tau_0 w)(\sigma+m)}}{e^{\frac{2v\pi i}{w}(\sigma+m)+2\tau\pi i} - 1} = \frac{2\pi i\, e^{2\tau\pi i}}{(e^{2\tau\pi i}-1)(e^{2\sigma\pi i}-1)}, \end{aligned}\right.$$

který jsme ve článku IV. odvodili přímo pomocí věty Cauchyovy,*) kdy nám práce Kroneckerova nebyla ještě přístupnou.

4. Vzorec, kterým jsme definovali integrál J, t. j.

$$J = 2\varepsilon v\pi i \int_{\sigma_0}^{\sigma_0'} \text{Ser.}\,(\sigma v + \tau w\,,\, \sigma' v + \tau_0' w)\, d\sigma'$$

$$+ 2\varepsilon w\pi i \int_{\tau_0}^{\tau_0'} \text{Ser.}\,(\sigma v + \tau w\,,\, \sigma_0 v + \tau' w)\, d\tau'\,,$$

poskytne nové vyjádření naší funkce, nahradíli se v něm výraz

$$\text{Ser.}\,(\sigma v + \tau w\,,\, \sigma_0 v + \tau' w)$$

hodnotou

$$\frac{1}{v} e^{\frac{2\tau u'\pi i}{v}} \frac{\vartheta_1'(0 \mid \frac{w}{v})\, \vartheta_1(\frac{u+u'}{v} \mid \frac{w}{v})}{\vartheta_1(\frac{u}{v})\, \vartheta_1(\frac{u'}{v})} = \varphi(u')\,,$$

kde položeno

$$u = \sigma v + \tau w\,,\; u' = \sigma' v + \tau' w\,,$$

a zároveň se předpokládá $\varepsilon = 1$.

Poněvadž tu zároveň $v\,d\sigma'$ a $w\,d\tau'$ značí hodnoty differencialu du', máme

$$\frac{J}{2\pi i} = \int_{u_1}^{u_0'} \varphi(u')\, du' + \int_{u_0}^{u_1} \varphi(u')\, du'\,,$$

kde $u_1 = \sigma_0 v + \tau'_0 w$, a integrace jsou přímočaré.

Pokud $0 < \tau_0 < 1$, $0 < \tau_0' < 1$, neleží v trojúhelníku $u_0\, u_1\, u_0'$ žádný pól integrované funkce a dle věty Cauchyovy bude tedy

$$\frac{J}{2\pi i} = \int_{u_0}^{u_0'} \varphi(u')\, du'\,,$$

kde integrál je přímočarý.

) Str. 25., vzorec (5).

Máme tedy

$$\int_{u_0}^{u'_0} \frac{1}{v} \frac{\vartheta'_1(0 \mid \frac{w}{v})\, \vartheta_1(\frac{u+x}{v} \mid \frac{w}{v})}{\vartheta_1(\frac{u}{v})\, \vartheta_1(\frac{x}{v})} e^{\frac{2\tau x\pi i}{v}} dx$$

$$= -\Phi\left(\tau, \frac{u}{v}, \frac{u'_0}{v} \,\middle|\, \frac{w}{v}\right) e^{\frac{2\tau u'_0 \pi i}{v}} + \Phi\left(\tau, \frac{u}{v}, \frac{u_0}{v}, \,\middle|\, \frac{w}{v}\right) e^{\frac{2\tau u_0 \pi i}{v}}$$

aneb což totéž jest

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{x_0}^{x} \frac{\vartheta'_1(0 \mid \omega)\, \vartheta_1(u+x \mid \omega)}{\vartheta_1(u \mid \omega)\, \vartheta_1(x \mid \omega)} e^{2\tau x\pi i} dx \\ &\qquad = -\Phi(\tau, u, x \mid \omega)\, e^{2\tau x\pi i} + \Phi(\tau, u, x_0 \mid \omega)\, e^{2\tau x_0 \pi i}, \end{aligned} \right.$$

ze kteréžto rovnice (kterou ostatně differencováním přímo lze verifikovati) plyne, že

$\Phi(\tau, u, x \mid \omega)$ *jest funkce mající logarithmická místa zvláštní* $x = m + n\omega$, a tato vlastnosť stává se evidentní výrazem na levé straně vzorce (12).

5. Kroneckerův vzorec (12) možno psáti

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+n} \frac{e^{\frac{2u'_0\pi i}{v}(\tau+n)}}{e^{\frac{2u\pi i}{v} + \frac{2nw\pi i}{v}} - 1}$$

$$- \varepsilon \log \frac{u'_0}{v} - \varepsilon \sum_{m,n}{}' e^{2\pi i(n\sigma - m\tau)} \log \frac{u'_0 + mv + nw}{mv + nw}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+n} \frac{e^{\frac{2u_0\pi i}{v}(\tau+n)}}{e^{\frac{2u\pi i}{v} + \frac{2nw\pi i}{v}} - 1}$$

$$- \varepsilon \log \frac{u_0}{v} - \varepsilon \sum_{m,n}{}' e^{2\pi i(n\sigma - m\tau)} \log \frac{u_0 + mv + nw}{mv + nw},$$

kde v součtech Σ' dlužno vynechati kombinaci $m = n = 0$. Z rovnice té patrno, že každý z těchto výrazů je nezávislý na u_0, resp. na u'_0, takže bude zajímavo určiti výraz

$$F(\sigma, \tau, v, w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+n} \frac{e^{\frac{2u_0\pi i}{v}(\tau+n)}}{e^{\frac{2u\pi i}{v} + \frac{2nw\pi i}{v}} - 1} - \varepsilon \log \frac{u_0}{v}$$

$$- \varepsilon \sum_{m,n}{}' e^{2\pi i(n\sigma - m\tau)} \log \frac{u_0 + mv + nw}{mv + nw}$$

přechodem k limitě pro $u_0 = 0$.

Členové první řady jsou dvojí: jeli $n\varepsilon$ záporné, blíží se při limitním přechodu $u_0 = 0$ členové tito členům řady absolutně konvergentní, kdežto členové druzí, kde $n\varepsilon$ je kladné, blíží se členům řady divergentní $\frac{-1}{\tau + n\varepsilon}$. Připojme tedy k řadě součet

$$S(u_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2u_0\pi i}{v}(\tau+n)}}{\tau+n} \frac{1+\operatorname{sgn}(n\varepsilon+\frac{1}{2})}{2},$$

jenž se rovná výrazu

$$S(u_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{2u_0\pi i}{v}(\tau+n\varepsilon)}}{\tau+n\varepsilon},$$

a obdržíme

$$F = -\varepsilon \log\frac{u_0}{v} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2u_0\pi i(\tau+n\varepsilon)}}{\tau+n\varepsilon}$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2u_0\pi i}{v}(\tau+n)}}{\tau+n} \left[\frac{1}{e^{\frac{2nw\pi i}{v}+\frac{2u\pi i}{v}}-1} + \frac{1+\operatorname{sgn.}(n\varepsilon+\frac{1}{2})}{2} \right]$$

$$- \varepsilon \sum_{m,n}' e^{2\pi i(n\sigma - m\tau)} \log \frac{u_0+mv+nw}{mv+nv}.$$

Poslední řada blíží se nulle zároveň s u_0, a máme tedy

$$F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+n} \left[\frac{1}{e^{\frac{2nw\pi i}{v}+\frac{2u\pi i}{v}}-1} + \frac{1+\operatorname{sgn.}(n\varepsilon+\frac{1}{2})}{2} \right]$$

$$- \lim_{u_0=0} \left\{ \varepsilon \log\frac{u_0}{v} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{2u_0\pi i}{v}(\tau+n\varepsilon)}}{\tau+n\varepsilon} \right\},$$

takže zbývá jen určiti limitu vzávorkovaného výrazu.

Budiž předně $\varepsilon = 1$, i bude

$$S(u_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{2u_0\pi i}{v}(\tau+n)}}{\tau+n} = \int_0^{\infty} e^{\frac{2\tau u_0\pi i}{v} - \tau x} \frac{dx}{1-e^{-x+\frac{2u_0\pi i}{v}}},$$

při čemž se předpokládá $\tau > 0$, aneb

$$S(u_0) = e^{\frac{2\tau u_0\pi i}{v}} V\left(\frac{u_0}{v}\right),$$

kde položeno

$$V(z) = \int_0^{\infty} e^{-\tau x} \frac{dx}{1-e^{-x+2z\pi i}}.$$

Ježto integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau x} - e^{-x+2z\pi i}}{1-e^{-x+2z\pi i}} dx = V(z) + \log(1-e^{2z\pi i})$$

se chová pravidelně pro $z=0$, máme

$$V(z)=-\log(-2z\pi i)+(z)+\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\tau x}-e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx\,;$$

kde (z) značí veličinu, která mizí zároveň s z.

Bude tudíž

$$\lim_{u_0=0}\left(\log\frac{u_0}{v}+S(u_0)\right)$$

$$=\lim_{u_0=0}\left(\log\frac{u_0}{v}-\log\left(\frac{-2u_0\pi i}{v}\right)\right)+\int\limits_0^\infty\frac{e^{-\tau x}-e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx\,;$$

veličina $\frac{u_0}{v}$ je kladna ve své části pomyslné, tedy

$$\log\left(\frac{-2u_0\pi i}{v}\right)=\log\frac{u_0}{v}+\log\frac{2\pi}{i}\,,$$

a následkem toho

$$\lim_{u_0=0}\left(\log\frac{u_0}{v}+S(u_0)\right)=-\log 2\pi+\frac{\pi i}{2}+\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(\tau)}{\Gamma(\tau)}$$

tudíž máme výsledek

$$F(\sigma,\tau,v,w)=-\frac{\pi i}{2}+\log 2\pi-\Gamma'(1)+\frac{\Gamma'(\tau)}{\Gamma(\tau)}$$
$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau+n}\left(\frac{1}{e^{\frac{2n w\pi i}{v}+\frac{2u\pi i}{v}}-1}+\frac{1+\operatorname{sgn.}(n+\frac{1}{2})}{2}\right),$$

předpokládaje sgn. Im. $\frac{w}{v}=1$.

Náš výsledek tedy zní takto: *Jeli pomyslná část veličiny ω kladnou, znamenámeli dále $u=\sigma+\tau\omega$, a jeli z komplexní veličina, jejíž pomyslná část leží mezi nullou a pomyslnou částí veličiny ω*, bude při podmínce $0<\tau<1$:

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau+n}\,\frac{e^{2z\pi i(\tau+n)}}{e^{2\pi i(u+n\omega)}-1}-\log z-\sum_{m,n}{}'\,e^{2\pi i(m\sigma-n\tau)}\log\frac{z+m+n\omega}{m+n\omega}\\&=-\frac{\pi i}{2}+\log 2\pi-\Gamma'(1)+\frac{\Gamma'(\tau)}{\Gamma(\tau)}\\&+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau+n}\left(\frac{1}{e^{2\pi i(u+n\omega)}-1}+\frac{\operatorname{sgn.}(n+\frac{1}{2})+1}{2}\right);\end{aligned}\right.$$

funkce na pravé straně se vyskytující je nám již známý útvar z rozpravy *Základové theorie Malmsténovských řad.**)

*) Str. 54.

Jeli za jinak stejných podmínek pomyslná část veličin ω a z zápornou, máme

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+n} \frac{e^{2z\pi i(\tau+n)}}{e^{2\pi i(u+n\omega)}-1} + \log z + \sum_{m,n}{}' e^{2\pi i(m\sigma-n\tau)} \log \frac{z+m+n\omega}{m+n\omega}$$

$$= -\frac{\pi i}{2} - \log 2\pi + \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(-\tau)}{\Gamma(-\tau)}$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+n} \left(\frac{1}{e^{2\pi i(u+n\omega)}-1} + \frac{1-\operatorname{sgn.}(n-\frac{1}{2})}{2} \right)$$

6. V Kroneckerově vzorci

$$(12) \quad \begin{cases} \varepsilon \sum_{m,n} e^{2\pi i(n\sigma-m\tau)} \log \dfrac{(\sigma'_0+m)v+(\tau'_0+n)w}{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w} \\ = \Phi\left(\tau, \dfrac{u}{v}, \dfrac{u_0}{v} \,\middle|\, \dfrac{w}{v}\right) e^{\frac{2\pi i\tau u_0}{v}} - \Phi\left(\tau, \dfrac{u}{v}, \dfrac{u'_0}{v} \,\middle|\, \dfrac{w}{v}\right) e^{\frac{2\pi i\tau u'_0}{v}} \end{cases}$$

ve kterém

$$u = \sigma v + \tau w\,, \qquad u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w\,, \qquad u'_0 = \sigma'_0 v + \tau'_0 w\,,$$

pišme nyní, znamenajíce ω_1 a $-\omega_2$ kořeny kvadratické rovnice

$$a + 2b\omega + c\omega^2 = 0\,,$$

jednou $v=+1$, $w=\omega_1$, $\varepsilon=+1$, podruhé $v=-1$, $w=\omega_2$, $\varepsilon=-1$, a odečtěme výsledky; i obdržíme

$$(16) \quad \begin{cases} \sum_{m,n} e^{2\pi i(n\sigma-m\tau)} \log \dfrac{a(\tau'_0+n)^2-2b(\tau'_0+n)(\sigma'_0+m)+c(\sigma'_0+m)^2}{a(\tau_0+m)^2-2b(\tau_0+n)(\sigma_0+m)+c(\sigma_0+m)^2} \\ = \Phi(\tau, \sigma+\tau\omega_1, \sigma_0+\tau_0\omega_1 \mid \omega_1)\, e^{2\tau\pi i(\sigma_0+\tau_0\omega_1)} \\ - \Phi(\tau, \sigma-\tau\omega_2, \sigma_0-\tau_0\omega_2 \mid -\omega_2)\, e^{2\tau\pi i(\sigma_0-\tau_0\omega_2)} \\ - \{\Phi(\tau, \sigma+\tau\omega_1, \sigma'_0+\tau'_0\omega_1 \mid \omega_1)\, e^{2\tau\pi i(\sigma'_0+\tau'_0\omega_1)} \\ - \Phi(\tau, \sigma-\tau\omega_2, \sigma'_0-\tau'_0\omega_2 \mid -\omega_2)\, e^{2\tau\pi i(\sigma'_0-\tau'_0\omega_2)}\}\,. \end{cases}$$

Levou stranu lze považovati za derivaci funkce

$$\sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i(n\sigma-m\tau)}}{[a(\tau_0+n)^2-2b(\tau_0+n)(\sigma_0+m)+c(\sigma_0+m)^2]^s}$$

$$-\sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i(n\sigma-m\tau)}}{[a(\tau'_0+n)^2-2b(\tau'_0+n)(\sigma'_0+m)+c(\sigma'_0+m)^2]^s}$$

vzatou vůči s na místě $s=0$, kteroužto funkci dle označení § 2. možno psáti

$$\mathfrak{K}(\sigma_0, \tau_0; -\tau, \sigma \mid c, -b, a; s, 0)$$
$$-\mathfrak{K}(\sigma'_0, \tau'_0; -\tau, \sigma \mid c, -b, a; s, 0)\,.$$

A proto možno obdržeti výsledek (16) též pomocí vzorce (4), jestliže jej applikujeme na náš rozdíl a přejdeme k limitě pro $s = 0$.

7. Uvažujme nyní nekonečnou řadu

$$(17)\quad \begin{cases} S(u, u'; \xi_1, \xi_2 \mid \omega_1, \omega_2; s) \\ = \sum\limits_{m,n}^{(-\infty \ldots \infty)} e^{2\pi i (m\xi_1 + n\xi_2)} \left[\left(\dfrac{u' + 2m\omega_1 + 2n\omega_2}{u + 2m\omega_1 + 2n\omega_2} \right)^s - 1 \right], \end{cases}$$

ve které ξ_1, ξ_2 značí dvě realné veličiny, jež nejsou celistvými čísly, u, u' dvě komplexní veličiny, pro něž žádný ze zlomků

$$a = \frac{u + 2m\omega_1 + 2n\omega_2}{u' + 2m\omega_1 + 2n\omega_2} \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

neobdrží zápornou hodnotu realnou. Mocnina a^s má býti dána jednoznačně výrazem $e^{s \log a}$, v němž pomyslná část logarithmu je mezi $-\pi$ a π; kromě toho předpokládejme, že pomyslná část veličiny $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ je kladnou. Užijemeli nyní vzorce známého z elementů

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{-s}\, dx}{a + x} = \frac{\pi}{\sin s\pi} a^{-s},$$

obdržíme pro naši řadu výraz

$$\frac{\pi}{\sin s\pi} S$$
$$= \sum_{m,n} e^{2\pi i (m\xi_1 + n\xi_2)} \int\limits_0^\infty \left\{ \frac{u' + 2m\omega_1 + 2n\omega_2}{u + u'x + (1 + x)(2m\omega_1 + 2n\omega_2)} - \frac{1}{1 + x} \right\} x^{-s}\, dx,$$

aneb sečtemeli pod integračním znamením

$$\frac{\pi}{\sin s\pi} S = \sum_{m,n} e^{2\pi i (m\xi_1 + n\xi_2)} (u' - u) \int\limits_0^\infty \frac{1}{u + u'x + (1 + x)(2m\omega_1 + 2n\omega_2)} \cdot \frac{x^{-s}\, dx}{1 + x}$$
$$= (u' - u) \int\limits_0^\infty \frac{x^{-s}\, dx}{1 + x} \sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i (m\xi_1 + n\xi_2)}}{u + u'x + (1 + x)(2m\omega_1 + 2n\omega_2)}.$$

Řada pod integračním znamením obdrží se podle vzorce (5^a) článku VIII. ve tvaru

$$\frac{1}{2\omega_1 (1 + x)} e^{-\frac{\pi i \xi_1 (u + u'x)}{\omega_1 (1 + x)}} \frac{\vartheta'_1\, \vartheta_1 \left(\frac{u + u'x}{2\omega_1 (1 + x)} + \xi_2 - \xi_1 \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)}{\vartheta_1 \left(\frac{u + u'x}{2\omega_1 (1 + x)} \right) \vartheta_1 \left(\xi_2 - \xi_1 \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)},$$

kde funkce ϑ_1 tvořena na základě parametru $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, a tedy bude

$$\frac{\pi}{\sin s\pi} S =$$

$$\frac{u'-u}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1\left(\xi_2 - \xi_1 \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{\pi i \xi_1 (u+u'x)}{\omega_1 (1+x)}} \frac{\vartheta_1\left(\frac{u+u'x}{2\omega_1(1+x)} + \frac{u_0}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u+u'x}{2\omega_1(1+x)}\right)} \frac{x^{-s}\, dx}{(1+x)^2},$$

kde psáno $\frac{u_0}{2\omega_1} = \xi_2 - \xi_1 \frac{\omega_2}{\omega_1}$.

V tomto integrálu proveďme nyní transformaci

$$\frac{u+u'x}{1+x} = z,$$

a obdržíme

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\pi}{\sin s\pi} S(u, u'; \xi_1, \xi_2 \mid \omega_1, \omega_2; s) \\ \quad = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta'_1(0)}{\vartheta_1\left(\frac{u_0}{2\omega_1}\right)} \int_u^{u'} \frac{\vartheta_1\left(\frac{z+u_0}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{z}{2\omega_1}\right)} e^{-\frac{\xi_1 z \pi i}{\omega_1}} \left(\frac{u'-z}{z-u}\right)^s dz, \end{cases}$$

kde funkce ϑ_1 tvořeny na základě parametru $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, a mimo to položeno

$$u_0 = 2\xi_2\omega_1 - 2\xi_1\omega_2.$$

Integrační cesta je přímočará, jsouli u, u' realné kladné ryzí zlomky, ale vzorec zůstane správným, jakmile oba body u, u' leží uvnitř rovnoběžníka $(0, 2\omega_1, 2\omega_1 + 2\omega_2, 2\omega_2)$.

Kroneckerova řada (11) obdrží se odtud pro $s = 0$.

8. Vraťme se ke vzorci (3), volíce $s = \frac{3}{2}$; tu nám poskytne vzorec (2) nejprve

$$A_{\mu,\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta u}} e^{-2\pi\sqrt{\frac{u}{\Delta}}\sqrt{a(v_2-\nu)^2 - 2b(v_2-\nu)(v_1-\mu) + c(v_1-\mu)^2}}$$

a tudíž obdržíme identitu

$$(19) \quad \begin{cases} \sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i[v_1(w_1+m) + v_2(w_2+n)]}}{\left[u + a(w_1+m)^2 + 2b(w_1+m)(w_2+n) + c(w_2+n)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\ \quad = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta u}} \sum_{m,n} e^{2\pi i(mw_1 + nw_2) - 2\pi\sqrt{\frac{u}{\Delta}}\sqrt{a(v_2-n)^2 - 2b(v_2-n)(v_1-m) + c(v_1-m)^2}}, \end{cases}$$

kde položeno jak obyčejně $\Delta = ac - b^2 > 0$, a součty vztahují se k hodnotám $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Volímeli dále v témž vzorci $s = \frac{1}{2}$, vypočteme nejprve

$$A_{\pi,\nu} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2\pi\sqrt{\frac{u}{\Delta}}\sqrt{a(v_2-\nu)^2 - 2b(v_2-\nu)(v_1-\mu) + c(v_1-\mu)^2}}}{\sqrt{a(v_2-\nu)^2 - 2b(v_2-\nu)(v_1-\mu) + c(v_1-\mu)^2}},$$

a tedy

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i[v_1(w_1+m)+v_2(w_2+n)]}}{\sqrt{n + a(w_1+m)^2 + 2b(w_1+m)(w_2+n) + c(w_2+n)^2}} \\ & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i(mw_1+nw_2) - 2\pi\sqrt{\frac{u}{\Delta}}\sqrt{a(v_2-n)^2 - 2b(v_2-n)(v_1-m) + c(v_1-m)^2}}}{\sqrt{a(v_2-n)^2 - 2b(v_2-n)(v_1-m) + c(v_1-m)^2}}. \end{aligned} \right.$$

9. Obraťme se nyní ku vzorci (6); v tomto bylo předpokládáno, že v_1, v_2 nejsou celistvá čísla; my předpokládáme, že w_1 není celistvé, a přejdeme k limitě pro $v_1 = v_2 = 0$; tím obdržíme nejprve

$$\begin{aligned} & \mathfrak{K}(w_1, w_2; 0, 0 \mid a, b, c; s, u) \\ & = \frac{\sqrt{\pi}}{c^s\Gamma(s)} \sum_{m,\mu} e^{\frac{2\mu\pi i}{c}(b(w_1+m)+cw_2)} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\Delta}{c^2}(w_1+m)^2 + \frac{u}{c}\right)x - \frac{\pi^2\mu^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}}\, dx; \end{aligned}$$

vyloučímeli z této řady členy $\mu = 0$, vznikne

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathfrak{K}(w_1, w_2; 0, 0 \mid a, b, c; s; u) \\ & \quad = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{c^s\Gamma(s)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{\Delta}{c^2}(w_1+m)^2 + \frac{u}{c}\right)^{s-\frac{1}{2}}} \\ & \quad + \frac{\sqrt{\pi}}{c^s\Gamma(s)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}{}' e^{\frac{2\mu\pi i}{c}(b(w_1+m)+cw_2)} \\ & \qquad \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\Delta}{c^2}(w_1+m)^2 + \frac{u}{c}\right)x - \frac{\mu^2\pi^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}}\, dx. \end{aligned} \right.$$

Abychom upravili pro naše účely první řadu, která zní

$$\frac{c^{s-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(s)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left((w_1+m)^2 + \frac{cu}{\Delta}\right)^{s-\frac{1}{2}}},$$

odvoďme ze vzorce (2) § 2. naší rozpravy Základové theorie Malmsténovských řad rovnici

$$\begin{aligned} \sum_m \frac{1}{((w+m)^2+u_0)^\sigma} = 2\sin\sigma\pi \int_0^\infty \Bigg\{ & \frac{e^{2\pi(wi+\sqrt{u_0+x^2})}}{e^{2\pi(wi+\sqrt{u_0+x^2})} - 1} \\ & + \frac{1}{e^{2\pi(-wi+\sqrt{u_0+x^2})} - 1} \Bigg\} \frac{x^{1-2\sigma}\, dx}{\sqrt{u_0+x^2}}; \end{aligned}$$

tu lze pravé straně uděliti tvar

$$2\sin\sigma\pi\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^{2\pi(wi+\sqrt{u_0+x^2})}-1}+\frac{1}{e^{2\pi(-wi+\sqrt{u_0+x^2})}-1}\right)\frac{x^{1-2\sigma}\,dx}{\sqrt{u_0+x^2}}$$

$$+2\sin\sigma\pi\int_0^\infty\frac{x^{1-2\sigma}\,dx}{\sqrt{u_0+x^2}},$$

a vyčíslímeli poslední integrál, máme konečně

$$\text{(a)}\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{((w+m)^2+u_0)^\sigma}=u_0^{\frac{1}{2}-\sigma}\sin\sigma\pi\frac{\Gamma(1-\sigma)\,\Gamma(\sigma-\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\\&+4\sin\sigma\pi\int_0^\infty\frac{e^{2\pi\sqrt{u_0+x^2}}\cos 2w\pi-1}{e^{4\pi\sqrt{u_0+x^2}}-2e^{2\pi\sqrt{u_0+x^2}}\cos 2w\pi+1}\,\frac{x^{1-2\sigma}\,dx}{\sqrt{u_0+x^2}}.\end{aligned}\right.$$

Pomocí tohoto vzorce vypočteme

$$\text{(b)}\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{c^{s-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}\,\Gamma(s)}\sum_m\frac{1}{((w_1+m)^2+\frac{cu}{\Delta})^{s-\frac{1}{2}}}\\&=\frac{\pi u^{1-s}}{\sqrt{\Delta}}\cdot\frac{1}{s-1}+\frac{4c^{s-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})\sin\pi(s-\frac{1}{2})}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}\,\Gamma(s)}\\&\quad\int_0^\infty\frac{e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}\cos 2w_1\pi-1}{e^{4\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}-2e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}\cos 2w_1\pi+1}\,\frac{x^{2-2s}\,dx}{\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}\end{aligned}\right.$$

Chceme nyní vyšetřiti první dva členy rozvoje našeho výrazu $\mathfrak{K}$ podle mocností veličiny $s-1$. Ti budou patrně

$$\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\,\frac{1}{s-1}-\frac{\pi\log u}{\sqrt{\Delta}}$$

$$+\frac{4\pi}{\sqrt{\Delta}}\int_0^\infty\frac{e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}\cos 2w_1\pi-1}{e^{4\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}-2e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}\cos 2w_1\pi+1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}}{c}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}{}'\,e^{\frac{2\mu\pi i}{c}(bw_1+cw_2+bm)}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\Delta}{c^2}(w_1+m)^2+\frac{u}{c}\right)x-\frac{\mu^2\pi^2}{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Dosadímeli sem hodnotu

$$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\Delta}{c^2}(w_1+m)^2+\frac{u}{c}\right)x-\frac{\mu^2\pi^2}{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{c\sqrt{\pi}}{\sqrt{\Delta(w_1+m)^2+cu}}e^{-\frac{2|\mu|\pi}{c}\sqrt{\Delta(w_1+m)^2+cu}}$$

obdržíme pro náš rozvoj

$$(22^a)\quad \left\{\begin{aligned}&\mathfrak{K}(w_1, w_2; 0, 0 \mid a, b, c; s; u)\\ &= \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\frac{1}{s-1} + A_0 + A_1(s-1) + A_2(s-1)^2 + \dots\end{aligned}\right.$$

součinitele A_0 ve tvaru

$$A_0 = -\frac{\pi \log u}{\sqrt{\Delta}} + \frac{4\pi}{\sqrt{\Delta}}\int\limits_0^\infty \frac{e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}\cos 2w_1\pi - 1}{e^{4\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}} - 2e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}\cos 2w_1\pi + 1}\frac{dx}{\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}$$

$$+ 2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{\frac{2\mu\pi i}{c}(bw_1+cw_2+bm) - \frac{2\pi}{c}|\mu|\sqrt{\Delta(w_1+m)^2+cu}}}{\sqrt{\Delta(w_1+m)^2+cu}}$$

aneb po sečtení vůči μ:

$$(22^b)\quad \left\{\begin{aligned}A_0 &= -\frac{\pi\log u}{\sqrt{\Delta}} + \frac{4\pi}{\sqrt{\Delta}}\int\limits_0^\infty \frac{e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}\cos 2w_1\pi - 1}{e^{4\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}} - 2e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}\cos 2w_1\pi + 1}\frac{dx}{\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}\\ &+ 2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\Delta(w_1+m)^2+cu}}\left(\frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{c}(bw_1+cw_2+bm)+\frac{2\pi}{c}\sqrt{\Delta(w_1+m)^2+cu}}-1}\right.\\ &\left.+\frac{1}{e^{-\frac{2\pi i}{c}(bw_1+cw_2+bm)+\frac{2\pi}{c}\sqrt{\Delta(w_1+m)^2+cu}}-1}\right).\end{aligned}\right.$$

V tomto výrazu vyskytuje se integrál, který je dosti složitý; můžeme jej nahraditi jiným výrazem, ustanovímeli jiným způsobem stálý člen uvažovaného rozvoje ve funkci (b).

Řada

$$D(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\frac{1}{\left((w_1+m)^2+\frac{cu}{\Delta}\right)^{s-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{|m|^{2s-1}}\right\}$$

konverguje pokud realná část veličiny s je kladna a chová se pravidelně na $s = 1$. Veličina (b) zní pak

$$\frac{c^{s-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(s)}\left\{\frac{1}{(w_1{}^2+\frac{cu}{\Delta})^{s-\frac{1}{2}}} + D(s) + 2\zeta(2s-1)\right\}.$$

Ježto v okolí místa $s = 1$ platí

$$\Gamma(2s-1)\zeta(2s-1) = \frac{1}{2s-2} + a_1(2s-2) + \dots,$$

tedy dle vzorce

$$\Gamma(2s-1) = \frac{2^{2s-2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\Gamma(s-\tfrac{1}{2})$$

bude

$$\frac{2c^{s-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(s)}\zeta(2s-1)=\frac{2\pi\,.\,2^{2-2s}c^{s-1}}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(s)^2}\Gamma(2s-1)\zeta(2s-1)$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\frac{1}{s-1}+\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\frac{c}{4\Delta}-\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\Gamma'(1)+(s-1),$$

kde $(s-1)$ značí funkci mizící na $s=1$; tudíž *funkce* (b) *začíná svůj rozvoj členy*

$$\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\frac{1}{s-1}+a_0+a_1(s-1)+\ldots$$

kde položeno

$$a_0=\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\left(\log\frac{c}{4\Delta}-2\Gamma'(1)\right)+\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{1}{\sqrt{w_1^2+\frac{cu}{\Delta}}}+D(1)\right)$$

Avšak

$$D(1)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{\sqrt{(w_1+m)^2+\frac{cu}{\Delta}}}-\frac{1}{|m|}\right)$$

podle vzorce

$$\lim_{M=\infty}\left(\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m}-\log M\right)=-\Gamma'(1)$$

obdrží též tvar

$$D(1)=\lim_{M=\infty}\left(\sum_{m=-M}^{M}{}'\frac{1}{\sqrt{(w_1+m)^2+\frac{cu}{\Delta}}}-2\log M\right)+2\Gamma'(1),$$

takže možno psáti

$$a_0=\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\frac{c}{4\Delta}+\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\lim_{M=\infty}\left(\sum_{m=-M}^{M}\frac{1}{\sqrt{(w_1+m)^2+\frac{cu}{\Delta}}}-2\log M\right)$$

Porovnámeli tento výraz s výsledkem dříve nalezeným, obdržíme, píšíce u za $\frac{cu}{\Delta}$, w za w_1

$$(23)\quad\left\{\begin{aligned}&4\int_0^{\infty}\frac{e^{2\pi\sqrt{u+x^2}}\cos 2w\pi-1}{e^{4\pi\sqrt{u+x^2}}-2e^{2\pi\sqrt{u+x^2}}\cos 2w\pi+1}\frac{dx}{\sqrt{u+x^2}}\\&\qquad=\log\frac{u}{4}+\lim_{M=\infty}\left(\sum_{m=-M}^{M}\frac{1}{\sqrt{(w+m)^2+u}}-2\log M\right).\end{aligned}\right.$$

Znamenáli tedy

$$(23^a)\qquad\psi(w,u)=\lim_{M=\infty}\left(\sum_{m=-M}^{M}\frac{1}{\sqrt{(w+m)^2+u}}-2\log M\right),$$

bude výraz (22^b) zníti

$$
(22^c)\quad \left\{
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\left(\log\frac{c}{4\Delta} + \psi\left(w_1, \frac{cu}{\Delta}\right)\right) \\
&+ \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(w_1+m)^2 + \frac{cu}{\Delta}}} \left(\frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{c}(b w_1 + c w_2 + b m) + \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c}\sqrt{(w_1+m)^2 + \frac{cu}{\Delta}}} - 1} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{e^{-\frac{2\pi i}{c}(b w_1 + c w_2 + b m) + \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c}\sqrt{(w_1+m)^2 + \frac{cu}{\Delta}}} - 1} \right)
\end{aligned}
\right.
$$

Podobně shledáme pomocí rovnic (21) a (b), že Maclaurinovský rozvoj funkce (21) začíná členy

$$
(24^a)\quad \mathfrak{K}(w_1, w_2; 0, 0 \mid a, b, c; u; s) = -\frac{\pi u}{\sqrt{\Delta}} + B_1 s + B_2 s^2 + \ldots
$$

kde položeno

$$
\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{\pi u}{\sqrt{\Delta}} + \frac{\pi u \log u}{\sqrt{\pi}} \\
&+ \frac{8\pi\sqrt{\Delta}}{\ } \int_0^{\infty} \frac{e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta} + x^2}} \cos 2 w_1 \pi - 1}{e^{4\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta} + x^2}} - 2 e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta} + x^2}} \cos 2 w_1 \pi + 1} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{\frac{cu}{\Delta} + x^2}} \\
&+ \sqrt{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}{}' e^{\frac{2\mu\pi i}{c}(b(w_1+m) + c w_2)} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\Delta}{c^2}(w_1+m)^2 + \frac{u}{c}\right)x - \frac{\mu^2\pi^2}{x}} x^{-\frac{3}{2}}\, dx ;
\end{aligned}
$$

avšak

$$
\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\Delta}{c^2}(w_1+m)^2 + \frac{u}{c}\right)x - \frac{\mu^2\pi^2}{x}} x^{-\frac{3}{2}}\, dx = \frac{1}{|\mu|} e^{-\frac{2|\mu|\pi}{c}\sqrt{\Delta(w_1+m)^2 + cu}}
$$

a tedy poslední dvojnásobná řada se rovná veličině

$$
\begin{aligned}
-\sum_{m=-\infty}^{\infty} &\left\{ \log\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{c}(b w_1 + c w_2 + b m) - \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c}\sqrt{(w_1+m)^2 + \frac{cu}{\Delta}}}\right) \right. \\
&\left. + \log\left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{c}(b w_1 + c w_2 + b m) - \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c}\sqrt{(w_1+m)^2 + \frac{cu}{\Delta}}}\right) \right\},
\end{aligned}
$$

takže hodnota B_1 ve vzorci (24^a) bude zníti

$$
(24^b)\quad \left\{
\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{\pi u}{\sqrt{\Delta}} + \frac{\pi u \log u}{\sqrt{\Delta}} + \frac{8\pi\sqrt{\Delta}}{c}\chi\left(w_1, \frac{cu}{\Delta}\right) \\
&- \log \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{c}(b w_1 + c w_2 + b m) - \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c}\sqrt{(w_1+m)^2 + \frac{cu}{\Delta}}}\right) \right. \\
&\qquad \left. \cdot \left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{c}(b w_1 + c w_2 + b m) - \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c}\sqrt{(w_1+m)^2 + \frac{cu}{\Delta}}}\right) \right\} .
\end{aligned}
\right.
$$

I.

při čemž kladeno

$$(24^c)\qquad \chi(w, z) = \int_0^\infty \frac{e^{2\pi\sqrt{z+x^2}}\cos 2w\pi - 1}{e^{4\pi\sqrt{z+x^2}} - 2e^{2\pi\sqrt{z+x^2}}\cos 2w\pi + 1}\,\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+z}}.$$

Při tom je dobře poznamenati, že výraz

$$b_1 = -\frac{\pi u}{\sqrt{\Delta}} + \frac{\pi u \log u}{\sqrt{\Delta}} + \frac{8\pi\sqrt{\Delta}}{c}\,\chi\left(w_1, \frac{cu}{\Delta}\right)$$

rovná se součiniteli při s v Maclaurinovském rozvoji funkce

$$\frac{c^{s-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}\,\Gamma(s)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left((w_1+m)^2+\frac{cu}{\Delta}\right)^{s-\frac{1}{2}}}.$$

Tak přejdemeli k limitě pro $u=0$, bude nám při $0 < w_1 < 1$ uvažovati funkci

$$\frac{c^{s-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}\,\Gamma(s)}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(w_1+m)^{2s-1}}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(1-w_1+m)^{2s-1}}\right\}$$

čili v našem označení*)

$$\frac{c^{s-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}\,\Gamma(s)}\left\{R(w_1, 2s-1)+R(1-w_1, 2s-1)\right\}.$$

Podle vzorce (17) na citovaném místě platí však vztah

$$\frac{(2\pi)^\sigma}{\Gamma(\sigma)}R(w, 1-\sigma) = e^{\frac{1}{2}\sigma\pi i}\,\mathfrak{L}(1-w, \sigma) + e^{-\frac{1}{2}\sigma\pi i}\,\mathfrak{L}(w, \sigma)$$

a dle toho máme

$$\frac{(2\pi)^{2-2s}}{\Gamma(2-2s)}\left\{R(w_1, 2s-1)+R(1-w_1, 2s-1)\right\}$$
$$= -2\cos s\pi\left\{\mathfrak{L}(w_1, 2-2s)+\mathfrak{L}(1-w_1, 2-2s)\right\};$$

naše funkce (b) bude tedy v tomto krajním případě zníti

$$-\frac{2c^{s-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Delta^{s-\frac{1}{2}}\,\Gamma(s)}(2\pi)^{2s-2}\,\Gamma(2-2s)\cos s\pi$$
$$.\left\{\mathfrak{L}(w_1, 2-2s)+\mathfrak{L}(1-w_1, 2-2s)\right\}$$

a odtud je patrno, že její Maclaurinovský rozvoj začíná členem $b_1's$, kde b_1' má hodnotu

$$\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{c}\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2nw_1\pi i}}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2nw_1\pi i}}{n^2}\right) = \frac{2\sqrt{\Delta}}{c\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nw_1\pi}{n^2}$$

*) Viz naše *Další studie v oboru Malmsténovských řad*, článek I., § 3.

a tedy v případě $0 < w_1 < 1$

$$b'_1 = \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c}\left(w_1^2 - w_1 + \tfrac{1}{6}\right).$$

Zbývá ještě vyjádřiti hodnotu nekonečného součinu, jehož logarithmus přichází ve výrazu (24^b), pro případ $u = 0$. Předpokládejme opětně $0 < w_1 < 1$, a oddělme činitele $m = 0$; tím vznikne výraz

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{c}(b w_1 + c w_2) - \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c} w_1}\right)\left(1 - e^{\frac{-2\pi i}{c}(b w_1 + c w_2) - \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c} w_1}\right)$$

$$\prod_m \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{c}(b w_1 + c w_2 + b m) - \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c}|w_1 + m|}\right)$$

$$. \prod_m \left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{c}(b w_1 + c w_2 + b m) - \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c}|w_1 + m|}\right)$$

Člen m prvního součinu spojme vždy se členem $-m$ součinu druhého a naopak, a užijme opětně označení

$$\omega_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{c}, \quad \omega_2 = \frac{b + i\sqrt{\Delta}}{c},$$

takže ω_1 a ω_2 jsou kořeny rovnice druhého stupně

$$a + b\omega + c\omega^2 = 0.$$

Tím se oba poslední součiny spojí u výraz

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - e^{-2\pi i w_2 + 2\pi i \omega_1 (w_1 + m)}\right)\left(1 - e^{2\pi i w_2 + 2\pi i \omega_1 (m - w_1)}\right)$$

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - e^{2\pi i w_2 + 2\pi i \omega_2 (w_1 + m)}\right)\left(1 - e^{-2\pi i w_2 + 2\pi i \omega_2 (m - w_1)}\right).$$

Připojímeli k němu vynechané činitele

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{c}(b w_1 + c w_2) - \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c} w_1}\right)\left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{c}(b w_1 + c w_2) - \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c} w_1}\right)$$

$$= 4\, e^{-\frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c} w_1} \sin\pi(w_2 + w_1\omega_2)\sin\pi(-w_2 + w_1\omega_1),$$

které lze psáti

$$4\, e^{w_1 \pi i(\omega_1 + \omega_2)} \sin\pi(w_2 + w_1\omega_2)\sin\pi(-w_2 + w_1\omega_1),$$

shledáme, že součin za znamením log. má hodnotu

$$e^{w_1 \pi i(\omega_1 + \omega_2) - \frac{\pi i}{6}(\omega_1 + \omega_2)} \frac{\vartheta_1(-w_2 + w_1\omega_1 \mid \omega_1)\,\vartheta_1(w_2 + w_1\omega_2 \mid \omega_2)}{H(\omega_1)\,H(\omega_2)},$$

kde $H(\omega)$ má obvyklý význam

$$e^{\frac{\omega\pi i}{12}} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2n\omega\pi i})$$

Výraz tento dlužno logarithmovati a k opačnému logarithmu přičísti

$$b_1' = \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c}\,(w_1^2 - w_1 + \tfrac{1}{6}) = -\pi i\,(\omega_1 + \omega_2)\,(w_1^2 - w_1 + \tfrac{1}{6});$$

nacházíme tedy, že v případě $u = 0$ veličina (24^b) bude zníti

$$(24^d)\quad \begin{cases} -\log \dfrac{e^{w_1^2(\omega_1+\omega_2)\pi i}\,\vartheta_1(-w_2 + w_1\,\omega_1 \mid \omega_1)\,\vartheta_1(w_2 + w_1\,\omega_2 \mid \omega_2)}{H(\omega_1)\,H(\omega_2)} \\ \qquad = -\log \Delta(-w_2\,,\,w_1 \mid \omega_1\,,\,\omega_2)\,. \end{cases}$$

Máme tedy zajímavý výsledek, že Maclaurinovský rozvoj funkce

$$\mathfrak{K}(w_1\,,\,w_2\,;\,0\,,\,0\quad a\,,\,b\,,\,c\,;\,s\,;\,0)$$

začíná členem

$$-s\quad \log \Delta(-w_2\,,\,w_1 \mid \omega_1\,,\,\omega_2)\,,$$

kde Δ je známý Kroneckerův invariant, který v našich pracích již byl uvažován.

10. Buďte $\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma\,,\,\delta$ celistvá čísla hovící podmínce

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

a přetvořme výraz (5) substitucí

$$m = \alpha m' + \beta n'\,,\; n = \gamma m' + \delta n'$$

píšemeli zároveň

$$w_1 = \alpha w'_1 + \beta w'_2\,,\; w_2 = \gamma w'_1 + \delta w'_2\,,$$

přejde řada

$$\mathfrak{K}(w_1\,,\,w_2\,;\,v_1\,,\,v_2\quad a\,,\,b\,,\,c\,;\,s\,;\,u)$$

v řadu

$$\mathfrak{K}(w_1'\,,\,w_2'\,;\,v_1'\,,\,v'_2\quad a'\,,\,b'\,,\,c'\,;\,s\,;\,u)\,,$$

kde položeno

$$(25)\quad \begin{cases} a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2\,, \\ b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta\,; \\ c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2\,; \\ w_1 = \alpha w'_1 + \beta w'_2\,,\; w_2 = \gamma w'_1 + \delta w'_2\,, \\ v'_1 = \alpha v_1 + \gamma v_2\,,\; v'_2 = \beta v_1 + \delta v_2\,; \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1\,; \end{cases}$$

při tom zároveň platí

$$w_1 v_1 + w_2 v_2 = w_1' v_1' + w_2' v_2'$$

Dvě soustavy

$$(a\,,\,b\,,\,c\,;\,w_1\,,\,w_2\,;\,v_1\,,\,v_2)\quad \text{a}\quad (a'\,,\,b'\,,\,c'\,;\,w_1'\,,\,w'_2\,;\,v'_1\,,\,v'_2)\,,$$

které vespolek souvisejí rovnicemi (25), nazýváme rovnomocnými, a pro ně platí vztah

$$(25^a)\quad \begin{cases} \mathfrak{K}(w'_1\,,\,w'_2\,;\,v'_1\,,\,v'_2 \mid a'\,,\,b'\,,\,c'\,;\,s\,;\,u) \\ \qquad = \mathfrak{K}(w_1\,,\,w_2\,;\,v_1\,,\,v_2 \mid a\,,\,b\,,\,c\,;\,s\,;\,u) \end{cases}$$

takže *funkce* $\mathfrak{K}(w_1, w_2; v_1, v_2 \mid a, b, c; s; u)$ jest *invariantem rovnomocných soustav*

$$(a, b, c; w_1, w_2; v_1, v_2).$$

Totéž platí o funkci $\mathfrak{K}(w_1, w_2; v_1, v_2 \mid a, b, c; 1, 0)$ a o jiných útvarech z funkce $\mathfrak{K}$ odvozených.

Můžeme považovati za nejznamenitější náš výsledek větu, že [dle vzorce (9)] *funkce*

$$e^{2v_2\pi i(-w_2+w_1\omega_1)}\,\Phi(w_1, -w_2+w_1\omega_1, v_1+v_2\omega_1 \mid \omega_1)$$
$$-\,e^{2v_2\pi i(-w_2-w_1\omega_2)}\,\Phi(w_1, -w_2-w_1\omega_2, v_1-v_2\omega_2 \mid -\omega_2)$$

jest invariantem rovnomocných soustav (25).

X.

1. Transcendenta $X(z', z'' \mid \omega, \omega', \omega''; s)$, jejíž některé vlastnosti jsme dokázali ve článku IV., vyskytuje se podivuhodným způsobem v theorii transcendenty

$$(1)\qquad P(u; v_1, v_2, \ldots v_p; c_1, c_2, \ldots c_p; s)$$
$$= \sum_{m_1, m_2, \ldots m_p} \frac{e^{2\pi i(m_1 v_1 + m_2 v_2 + \ldots + m_p v_p)}}{(u + c_1 m_1 + c_2 m_2 + \ldots + c_p m_p)^s}$$
$$(m_1, m_2, \ldots m_p = 0, 1, 2, \ldots \infty),$$

kterou jsme se zabývali v jedné z posledních prací.*)

V této řadě mějte veličiny $c_1, c_2, \ldots c_p$ realnou část kladnou, podobně u, aby výraz

$$c_1 m_1 + c_2 m_2 + \ldots + c_p m_p$$

pro všecky soustavy kladných čísel $m_1, m_2 \ldots m_p$ převyšoval určitou mez. Veličiny $v_1, v_2, \ldots v_p$ buďte kladny ve svých částech pomyslných, aby řada byla absolutně konvergentní. Mocnina z^s buď opětně dána výrazem $e^{s \log z}$, kde pomyslná část logarithmu byla mezi $-\pi$ a π.

Položme nyní $u = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_p w_p$, kde $w_1, w_2, \ldots w_p$ jsou realné veličiny mezi nullou a jednou, a rozviňme funkci

$$e^{2\pi i(v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_p w_p)}\, P(u; v; c; s) = f(w_1, w_2, \ldots w_p)$$

v trigonometrickou řadu

$$f(w_1, w_2, \ldots w_p) = \sum_{n_1 \ldots n_p}^{(-\infty \ldots \infty)} A_{n_1 n_2 \ldots n_p}\, e^{2\pi i(n_1 w_1 + n_2 w_2 + \ldots + n_p w_p)}$$

---

*) Sur une fonction transcendante. Věstník král. české společnosti nauk z r. 1898.

koefficient $A_{n_1 n_2 \dots n_p}$ bude dán rovnicí

$$A_{n_1 n_2 \dots n_p} = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 f(w_1, w_2, \dots w_p)\, e^{-2\pi i (n_1 w_1 + n_2 w_2 + \dots + n_p w_p)}\, dw_1\, dw_2 \dots dw_p .$$

Dosadímeli sem za funkci f příslušnou řadu, vznikne

$$A_{n_1 n_2 \dots n_p} = \sum_{(m)} \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{e^{2\pi i \Sigma^* (w_\alpha + m_\alpha) v_\alpha - 2\pi i \Sigma^* n_\alpha w_\alpha}}{[c_1 (w_1 + m_1) + \dots + c_p (w_p + m_p)]^s}\, dw_1\, dw_2 \dots dw_p ,$$

kde součty Σ^* vztahují se k příponě $\alpha = 1, 2, \dots p$.

Přetvořímeli tu obecný člen substitucí

$$w_1 + m_1 = x_1 , \; w_2 + m_2 = x_2 , \dots w_p + m_p = x_p ,$$

obdržíme konečně

$$A_{n_1 n_2 \dots n_p} = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{e^{2\pi i \Sigma^* v_\alpha x_\alpha - 2\pi i \Sigma^* n_\alpha x_\alpha}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_p}{(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_p x_p)^s} ,$$

i zbývá pouze vyčísliti tento p-násobný integrál; to se podaří pomocí vzorce

$$\frac{1}{(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_p x_p)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-z(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_p x_p)} z^{s-1} dz ,$$

jenž je možný, jakmile realná část veličiny s je kladná. Dosadímeli tuto hodnotu, obdržíme výraz

$$\Gamma(s) A_{n_1 n_2 \dots n_p} = \int_0^\infty z^{s-1} dz \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\Sigma^* x_\alpha (c_\alpha z + 2\pi i (n_\alpha - v_\alpha))}\, dx_1 \dots dx_p ,$$

v němž lze provésti vnitřní integrace; učinímeli to, objeví se A ve tvaru

$$\Gamma(s) A_{n_1 n_2 \dots n_p}$$
$$= \int_0^\infty \frac{z^{s-1}\, dz}{[c_1 z + 2\pi i (n_1 - v_1)] \cdot [c_2 z + 2\pi i (n_2 - v_2)] \dots [c_p z + 2\pi i (n_p - v_p)]} .$$

Funkci, jež násobí pod integrálem $z^{s-1} dz$, rozložme v částečné zlomky:

$$\frac{1}{[c_1 z + 2\pi i (n_1 - v_1)] \dots [c_p z + 2\pi i (n_p - v_p)]} = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{C_\alpha}{z + \frac{2\pi i}{c_\alpha} (n_\alpha - v_\alpha)} ,$$

kde položeno k vůli přehlednosti

$$C_\alpha = \frac{1}{c_1 c_2 \dots c_p} \frac{1}{\prod_{\beta=1}^{p}{}' \left(\frac{2\pi i}{c_\beta} (n_\beta - v_\beta) - \frac{2\pi i}{c_\alpha} (n_\alpha - v_\alpha) \right)} ,$$

při čemž v součinu $\prod'$ dlužno vynechati činitele $\beta = \alpha$. Pak bude

$$\Gamma(s) A_{n_1 n_2 \dots n_p} = \sum_{\alpha=1}^{p} C_\alpha \int_0^\infty \frac{z^{s-1}\, dz}{z + \frac{2\pi i}{c_\alpha}(n_\alpha - v_\alpha)},$$

a integrály v pravo určí se podle vzorce

$$\int_0^\infty \frac{z^{s-1}\, dz}{z+g} = \frac{\pi}{\sin s\pi} \cdot g^{s-1},$$

kde se předpokládá, že g není realné a záporné; jestliže tedy žádná z veličin

$$\frac{2\pi i}{c_\alpha}(n_\alpha - v_\alpha), \quad (\alpha = 1, 2, \dots p),$$

není realnou a zápornou, bude

$$A_{n_1 n_2 \dots n_p} = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{\alpha=1}^{p} C_\alpha \frac{\pi}{\sin s\pi} \left[\frac{2\pi i}{c_\alpha}(n_\alpha - v_\alpha)\right]^{s-1}$$

kde mocnost g^{s-1} je dána jednoznačně výrazem $e^{(s-1)\log g}$, v němž logarithmus má pomyslnou část v mezích $-\pi$ a π.

Vložímeli tuto hodnotu za A do uvažované řady trigonometrické a dosadímeli zároveň za C_α explicitní výraz, obdržíme vzorec

$$(2)\quad \begin{cases} e^{2\pi i (v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_p w_p)} P(c_1 w_1 + c_2 w_2 \dots + c_p w_p ; v_1, v_2 \dots v_p ; c_1, c_2, \dots c_p ; s) \\ = \dfrac{(2\pi)^{s-p} \Gamma(1-s)}{i^{p-1} \cdot c_1 c_2 \dots c_p} \left[\sum_{n_1 n_2 \dots n_p}^{(-\infty \dots \infty)} \left| \sum_{\alpha=1}^{p} \dfrac{\left(i \dfrac{n_\alpha - v_\alpha}{c_\alpha}\right)^{s-1}}{\prod_{\beta=1}^{p}{}' \left(\dfrac{n_\beta - v_\beta}{c_\beta} - \dfrac{n_\alpha - v_\alpha}{c_\alpha}\right)} \right| e^{2\pi i (n_1 w_1 + n_2 w_2 + \dots + n_p} \right. \end{cases}$$

Tento vzorec byl námi v citované práci vyvozen právě vyloženým způsobem a jde nám nyní pouze o jeho další přetvoření, t. j. o zjednodušení výrazu v závorce [ ]. Sčítání řady zařiďme takto:

Volme nejprve za α určité číslo mezi prvky $1, 2, \dots p$, sečtěme vůči všem ukazovatelům $n_1, n_2, \dots n_{\alpha-1}, n_{\alpha+1}, \dots n_p$, při čemž obecný člen znamenejme

$$T^{(\alpha)}_{n_1 n_2 \dots n_p} = e^{2\pi i . n_\alpha w_\alpha} \left(i \frac{n_\alpha - v_\alpha}{c_\alpha}\right)^{s-1} \prod_{\beta=1}^{p}{}' \frac{e^{2\pi i n_\beta w_\beta}}{\frac{n_\beta - v_\beta}{c_\beta} - \frac{n_\alpha - v_\alpha}{c_\alpha}};$$

tímto způsobem vytvoříme p částečných součtů, které dohromady dají řadu původní.

Avšak v částečném součtu prvků $T^{(\alpha)}$ přípony n_β probíhají neodvisle vespolek veškery celistvé hodnoty, takže máme zde součin řad:

$$\sum^{(\alpha)}_{n_1 n_2 \ldots n_p} T^{(\alpha)}_{n_1 \ldots n_p} = e^{2\pi i n_\alpha w_\alpha}\left(i\frac{n_\alpha - v_\alpha}{c_\alpha}\right)^{s-1}\prod_{\beta=1}^{p}{}'\sum_{n_\beta=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i n_\beta w_\beta}}{\frac{n_\beta - v_\beta}{c_\beta}-\frac{n_\alpha - v_\alpha}{c_\alpha}},$$

kde součin řad se vztahuje k příponám $\beta = 1, 2, \ldots \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots p$. Jednotlivé tyto řady sečtou se pomocí vzorce

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2kb\pi i}}{a-k} = 2\pi i\frac{e^{2ab\pi i}}{e^{2a\pi i}-1}, \quad (0 < b < 1),$$

čímž se obdrží

$$\sum^{(\alpha)}_{(n)} T^{(\alpha)}_{n_1 \ldots n_p} = e^{2\pi i n_\alpha w_\alpha}\left(i\frac{n_\alpha - v_\alpha}{c_\alpha}\right)^{s-1}\prod_{\beta=1}^{p}{}'(-2\pi i)\frac{c_\beta\, e^{\frac{2\pi i}{c_\alpha} w_\beta (n_\alpha c_\beta - v_\alpha c_\beta + v_\beta c_\alpha)}}{e^{\frac{2\pi i}{c_\alpha}(n_\alpha c_\beta - v_\alpha c_\beta + v_\beta c_\alpha)} - 1},$$

což lze též psáti $\sum^{(\alpha)}_{(n)} T^{(\alpha)}_{n_1 n_2 \ldots n_p} =$

$$(-2\pi i)^{p-1}\frac{c_1 c_2 \ldots c_p}{c_\alpha} e^{2\pi i \sum^* v_\beta w_\beta + \frac{2\pi i}{c_\alpha}(n_\alpha - v_\alpha)\sum^* w_\beta c_\beta}\frac{\left(i\frac{n_\alpha - v_\alpha}{c_\alpha}\right)^{s-1}}{\prod_{\beta=1}^{p}{}'\left(e^{\frac{2\pi i}{c_\alpha}(c_\alpha v_\beta - c_\beta v_\alpha + n_\alpha c_\beta)} - 1\right)}.$$

Sečtemeli tyto výrazy pro $\alpha = 1, 2, \ldots p$, obdržíme hodnotu řady obsažené na pravé straně rovnice (2) v závorce [ ]. Pravá strana rovnice (2) tedy bude zníti

$$(-1)^{p-1}(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\, e^{2\pi i \sum^* v_\beta w_\beta}\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{1}{c_\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{2u\pi i}{c_\alpha}(n - v_\alpha)}\left(i\frac{n - v_\alpha}{c_\alpha}\right)^{s-1}}{\prod_{\beta=1}^{p}{}'\left(e^{\frac{2\pi i}{c_\alpha}(c_\alpha v_\beta - c_\beta v_\alpha + n c_\beta)} - 1\right)},$$

čímž rovnice ta nabude tvaru

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(-1)^{p-1}}{(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)} P(u; v_1, v_2, \ldots v_p; c_1, c_2, \ldots c_p; s) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{p}\frac{1}{c_\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{2u\pi i}{c_\alpha}(n - v_\alpha)}\left(i\frac{n - v_\alpha}{c_\alpha}\right)^{s-1}}{\prod_{\beta=1}^{p}{}'\left(e^{\frac{2\pi i}{c_\alpha}(c_\alpha v_\beta - c_\beta v_\alpha + n c_\beta)} - 1\right)};\end{aligned}\right.$$

připomeňme, že zde součin ve jmenovateli vztahuje se k příponám $\beta = 1, 2, \ldots \ldots \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots p$, t. j. lépe řečeno, že dlužno vynechati v něm činitele $\beta = \alpha$.

Tento vzorec jsme obdrželi ve formě jen málo změněné v citované naší práci pod čís. (4), kde jsme jej odvodili na základě věty Cauchyovy o integrálech v komplexním oboru; rozdíl spočívá v tom, že v onom mocnost $\left(i\,\frac{v_a+k}{c_a}\right)^{s-1}$ je dána výrazem

$$e^{(s-1)\log\left(i\,\frac{v_a+k}{c_a}\right)}$$

v němž logarithmus má pomyslnou část mezi nullou a 2π, kdežto v našem vzorci (3) mocnost $\left(i\,\frac{n-v_a}{c_a}\right)^{s-1}$ odpovídá logarithmu, jehož pomyslná část leží v mezích $-\pi$ a π

Zajímavá rovnice tato vyjadřuje vztah mezi p funkcemi tvaru

$$X(z_2, z_3, \ldots z_p \mid c_1, c_2, \ldots c_p; u, v; s)$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(v+n)^{s-1}e^{\frac{2nu\pi i}{c_1}}}{\left(e^{\frac{2\pi i}{c_1}(z_2+nc_2)}-1\right)\left(e^{\frac{2\pi i}{c_1}(z_3+nc_3)}-1\right)\cdots\left(e^{\frac{2\pi i}{c_1}(z_p+nc_p)}-1\right)}$$

a funkcí $P(u; v; c; s)$

Klademeli zvláště $s=1$, vznikne

$$\sum_{a=1}^{p}\frac{1}{c_a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{2u\pi i}{c_a}(n-v_a)}}{\prod_{\beta=1}^{p}{}'\left(e^{\frac{2\pi i}{c_a}(c_a v_\beta - c_\beta v_a + n c_\beta)}-1\right)}=0, \tag{4}$$

což v případě $p=3$ poskytne známý nám vztah*)

$$\frac{1}{c_1}X(c_1v_2-c_2v_1, c_1v_3-c_3v_1 \mid c_1, c_2, c_3)\,e^{\frac{-2uv_1\pi i}{c_1}}$$
$$+\frac{1}{c_2}X(c_2v_3-c_3v_2, c_2v_1-c_1v_2 \mid c_2, c_3, c_1)\,e^{\frac{-2uv_2\pi i}{c_2}}$$
$$+\frac{1}{c_3}X(c_3v_1-c_1v_3, c_3v_2-c_2v_3 \mid c_3, c_1, c_2)\,e^{\frac{-2uv_3\pi i}{c_3}}=0,$$

kde položeno

$$X(z', z'' \mid \omega, \omega', \omega''; s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{2ns\pi i}{\omega}}}{\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z'+n\omega')}-1\right)\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z''+n\omega'')}-1\right)}. \tag{5}$$

*) Článek IV., vzorec (1).

Výsledek ten připouštěl zjednodušení následující:

Jsouli z_1, z_2, z_3 veličiny podrobené podmínce

$$c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 = 0,$$

lze řešiti rovnice

$$c_1 v_2 - c_2 v_1 = z_3, \quad c_2 v_3 - c_3 v_1 = z_1, \quad c_3 v_1 - c_1 v_3 = z_2,$$

a sice bude lze jim vyhověti hodnotami

$$v_1 = \frac{c_2 z_2 - c_3 z_3}{3 c_2 c_3}, \quad v_2 = \frac{c_3 z_3 - c_1 z_1}{3 c_1 c_3}, \quad v_3 = \frac{c_1 z_1 - c_2 z_2}{3 c_1 c_2};$$

vložením těchto výrazů do naší rovnice obdržíme známý nám vztah*)

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{c_1} X(z_3, -z_2 \mid c_1, c_2, c_3; u)\, e^{2u\pi i \cdot \frac{c_3 z_3 - c_2 z_2}{3 c_1 c_2 c_3}} \\ & + \frac{1}{c_2} X(z_1, -z_3 \mid c_2, c_3, c_1; u)\, e^{2u\pi i \cdot \frac{c_1 z_1 - c_3 z_3}{3 c_1 c_2 c_3}} \\ & + \frac{1}{c_3} X(z_2, -z_1 \mid c_3, c_1, c_2; u)\, e^{2u\pi i \cdot \frac{c_2 z_2 - c_1 z_1}{3 c_1 c_2 c_3}} = 0. \end{aligned} \right.$$

Vypišme ještě podrobně vztah (3) v případě $p = 2$, kde je tvaru zvláště jednoduchého:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)} P(u; v_1, v_2; c_1, c_2; s) \\ & = \frac{1}{c_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\left(i\,\frac{n-v_1}{c_1}\right)^{s-1} \cdot e^{\frac{2u\pi i}{c_1}(n-v_1)}}{e^{\frac{2\pi i}{c_1}(c_1 v_2 - c_2 v_1 + n c_2)} - 1} \\ & + \frac{1}{c_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\left(i\,\frac{n-v_2}{c_2}\right)^{s-1} \cdot e^{\frac{2u\pi i}{c_2}(n-v_2)}}{e^{\frac{2\pi i}{c_2}(c_2 v_1 - c_1 v_2 + n c_1)} - 1} \end{aligned} \right.$$

Klademeli zde $s = 0$, máme

$$P(u) = \sum_{m_1, m_2}^{(0\ldots\infty)} e^{2\pi i (m_1 v_1 + m_2 v_2)} = \frac{1}{(1 - e^{2 v_1 \pi i})(1 - e^{2 v_2 \pi i})},$$

a rovnice (7) přejde ve známý nám výsledek (13) čl. IX. aneb (5*) čl. IV.:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n - v_1} \cdot \frac{e^{\frac{2u\pi i}{c_1}(n-v_1)}}{e^{\frac{2\pi i c_2}{c_1}(n-v_1) + 2 v_2 \pi i} - 1}$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n - v_2} \cdot \frac{e^{\frac{2u\pi i}{c_2}(n-v_2)}}{e^{\frac{2\pi i c_1}{c_2}(n-v_2) + 2 v_1 \pi i} - 1} = \frac{-2\pi i}{(e^{2 v_1 \pi i} - 1)(e^{2 v_2 \pi i} - 1)}$$

) Článek IV., vzorec (1). Tam omylem nesprávně udány přípony u liter z, což tímto budiž opraveno.

Vytkněme ještě výsledek, jejž obdržíme, násobímeli rovnici (7) na obou stranách $\Gamma(1-s)$ a přejdeme k limitě pro $s=1$; vznikne tak

$$(8)\qquad \sum_{m_1,m_2}^{(0\ldots\infty)} \frac{e^{2\pi i(m_1 v_1+m_2 v_2)}}{u+m_1 c_1+m_2 c_2} = \frac{1}{c_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2u\pi i}{c_1}(n-v_1)}\log\left(i\frac{n-v_1}{c_1}\right)}{e^{\frac{2\pi i c_2}{c_1}(n-v_1)+2\pi i v_2}-1} + \frac{1}{c_2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2u\pi i}{c_2}(n-v_2)}\log\left(i\frac{n-v_2}{c_2}\right)}{e^{\frac{2\pi i c_1}{c_2}(n-v_2)+2\pi i v_1}-1}.$$

Předpokládámeli realnou část proměnné s větší než dvě, bude

$$\lim_{v_1=0,\,v_2=0} P(u\,;\,v_1\,,\,v_2\,;\,c_1\,,\,c_2\,;\,s) = \sum_{m_1,m_2}^{(0\ldots\infty)} \frac{1}{(u+c_1 m_1+c_2 m_2)^s}.$$

Znamenámeli tedy

$$(9)\qquad R(u\,|\,c_1\,,\,c_2\,;\,s) = \sum_{m_1,m_2}^{(0\ldots\infty)} \frac{1}{(u+c_1 m_1+c_2 m_2)^s},$$

obdržíme z rovnice (7) vztah

$$(10)\qquad -\frac{R(u\,|\,c_1\,,\,c_2\,;\,s)}{(2\pi)^{s-1}\,\Gamma(1-s)} = \frac{1}{c_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{ni}{c_1}\right)^{s-1} \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_1}}}{e^{\frac{2nc_2\pi i}{c_1}}-1} + \frac{1}{c_2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{ni}{c_2}\right)^{s-1} \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_2}}}{e^{\frac{2nc_1\pi i}{c_2}}-1},$$

kde v součtech $\sum'$ vynecháno po členu $n=0$.

Pravá strana je celistvá funkce transcendentní proměnné s a tím jest dána propagace funkce $R(u\,|\,c_1\,,c_2\,;s)$ vůči s. Poněvadž $\Gamma(1-s)$ má póly $s=1,2,3,\ldots$, může $R(u\,|\,c_1\,,c_2\,;s)$ míti pouze tyto póly; ale na místech $s=3,4,5,\ldots$ chová se tato funkce pravidelně a zbývá tedy jen vyšetřiti body $s=1$, $s=2$.

Klademeli v rovnici (7) $s=1$, obdržíme

$$\frac{1}{c_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{\frac{2u\pi i}{c_1}(n-v_1)}}{e^{\frac{2\pi i}{c_1}(c_1 v_2-c_2 v_1+nc_2)}-1} + \frac{1}{c_2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{\frac{2u\pi i}{c_2}(n-v_2)}}{e^{\frac{2\pi i}{c_2}(c_2 v_1-c_1 v_2+nc_1)}-1}$$
$$+\frac{1}{c_1}\,\frac{e^{-\frac{2u\pi i}{c_1}v_1}}{e^{\frac{2\pi i}{c_1}(c_1 v_2-c_2 v_1)}-1} + \frac{1}{c_2}\,\frac{e^{-\frac{2u\pi i}{c_2}v_2}}{e^{-\frac{2\pi i}{c_2}(c_1 v_2-c_2 v_1)}-1} = 0\,;$$

přejdemeli zde k limitě pro $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, vznikne

$$\frac{1}{c_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_1}}}{e^{\frac{2nc_2\pi i}{c_1}}-1} + \frac{1}{c_2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_2}}}{e^{\frac{2nc_1\pi i}{c_2}}-1} = \frac{1}{2c_1} + \frac{1}{2c_2} - \frac{u}{c_1 c_2};$$

z rovnice (10) pak plyne, že bod $s = 1$ je pólem funkce R, a že residuum příslušné zní

$$\text{(11)} \qquad \frac{1}{c_1}\sum{}' \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_1}}}{e^{\frac{2nc_2\pi i}{c_1}}-1} + \frac{1}{c_2}\sum{}' \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_2}}}{e^{\frac{2nc_1\pi i}{c_2}}-1},$$

které tedy má hodnotu $\frac{1}{2c_1} + \frac{1}{2c_2} - \frac{u}{c_1 c_2}$.

2. V okolí místa $s = 1$ existuje tedy rozvoj tvaru

$$\text{(a)} \qquad R(u \mid c_1, c_2; s) = \frac{B}{s-1} + B_0 + B_1(s-1) + B_2(s-1)^2 + \dots,$$

kde

$$B = \frac{c_1 + c_2 - 2u}{2c_1 c_2}.$$

Podobně existují rozvoje

$$\text{(b)} \qquad R(u \mid c_1, c_2; s) = \frac{C}{s-2} + C_0 + C_1(s-2) + C_2(s-2)^2 + \dots,$$

$$\text{(c)} \qquad R(u \mid c_1, c_2; s) = D_0 + D_1(s-3) + D_2(s-3)^2 + \dots,$$

platné v okolí míst $s = 2$, resp. $s = 3$.

Z rovnice (9) plyne dále

$$\text{(d)} \qquad \frac{\partial R(u \mid c_1, c_2; s)}{\partial u} = -sR(u \mid c_1, c_2; s+1).$$

V řadě (c) můžeme přímo určiti stálý člen

$$D_0 = \sum_{m_1, m_2} \frac{1}{(u + c_1 m_1 + c_2 m_2)^3} = -\frac{1}{2}\sum_{m_1=0}^{\infty} D_u^{\,3} \log \Gamma\left(\frac{u + c_1 m_1}{c_2}\right)$$

Differencujemeli (b), máme dle (d) rovnici

$$\frac{\frac{\partial C}{\partial u}}{s-2} + \frac{\partial C_0}{\partial u} + \dots = -sD_0 - sD_1(s-2) + \dots.$$

a po jednoduchém přetvoření pravé strany

$$= -2D_0 - (s-2)(D_0 + 2D_1) + \dots$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial C_0}{\partial u} = -2D_0.$$

Tím nalezena rovnice

$$\frac{\partial C_0}{\partial u} = \sum_{m=0}^{\infty} D_u{}^2 \log \Gamma\left(\frac{u + c_1 m}{c_2}\right)$$

Znamenámeli u_0 určitou hodnotu proměnné u, $C_0(u_0)$ příslušnou hodnotu funkce $C_0 = C_0(u)$, máme integrací z poslední rovnice

$$C_0(u) - C_0(u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} D^2{}_{x=0} \log \frac{\Gamma\left(\frac{x \pm u + m c_1}{c_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x + u_0 + m c_1}{c_2}\right)}.$$

Veličinu C_0 lze vyjádřiti dalším způsobem plynoucím z rovnice (10). Z rovnice (b) plyne totiž

$$C_0 = D_{s=2}\left\{(s-2)\, R(u\ c_1, c_2; s)\right\}$$

a výraz uzávorkovaný obdržíme, násobímeli v rovnici (10) obě strany veličinou $(2-s)\,\Gamma(1-s)\,(2\pi)^{s-1}$ čili, což totéž jest, veličinou $\dfrac{\Gamma(3-s)\,(2\pi)^{s-1}}{1-s}$; provedemeli pak differencování, a dosadíme $s = 2$, obdržíme:

$$C_0 = 2\pi\left(1 - \log 2\pi + \Gamma'(1)\right)\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{ni}{c_1{}^2}\, \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_2}}}{e^{\frac{2nc_2\pi i}{c_1}} - 1} \right.$$

$$\left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{ni}{c_2{}^2}\, \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_1}}}{e^{\frac{2nc_1\pi i}{c_2}} - 1}\right\}$$

$$-2\pi\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{ni}{c_1{}^2} \log \frac{ni}{c_1} \cdot \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_1}}}{e^{\frac{2nc_2\pi i}{c_1}} - 1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{ni}{c_2{}^2} \log \frac{ni}{c_2}\, \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_2}}}{e^{\frac{2nc_1\pi i}{c_2}} - 1}\right\}$$

Hodnotu první závorky lze vyjádřiti v zakončeném tvaru. Za tím účelem položme $s = 2$ v rovnici (7), a obdržíme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' i\, \frac{n - v_1}{c_1{}^2}\, \frac{e^{\frac{2u\pi i}{c_1}(n - v_1)}}{e^{\frac{2\pi i}{c_1}(c_1 v_2 - c_2 v_1 + n c_2)} - 1}$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' i\, \frac{n - v_2}{c_2{}^2} \cdot \frac{e^{\frac{2u\pi i}{c_2}(n - v_2)}}{e^{\frac{2\pi i}{c_2}(c_2 v_1 - c_1 v_2 + n c_1)} - 1}$$

$$- \frac{i v_1}{c_1{}^2}\, \frac{e^{-\frac{2u\pi i}{c_1} v_1}}{e^{\frac{2\pi i}{c_1}(c_1 v_2 - c_2 v_1)} - 1} - \frac{i v_2}{c_2{}^2}\, \frac{e^{-\frac{2u\pi i}{c_2} v_2}}{e^{-\frac{2\pi i}{c_2}(c_1 v_2 - c_2 v_1)} - 1} = 0\,;$$

přejdemeli k limitě pro $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, vznikne

$$(12)\quad 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{ni}{c_1^2} \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_1}}}{e^{\frac{2nc_2\pi i}{c_1}} - 1} + 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{ni}{c_2^2} \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_2}}}{e^{\frac{2nc_1\pi i}{c_2}} - 1} = -\frac{1}{c_1 c_2},$$

a pomocí této rovnice náš výraz pro C_0 obdrží tvar

$$C_0 = \frac{-\Gamma'(1) + \log 2\pi - 1}{c_1 c_2} - 2\pi i \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{n}{c_1^2} \log \frac{ni}{c_1} \cdot \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_1}}}{e^{\frac{2nc_2\pi i}{c_1}} - 1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{n}{c_2^2} \log \frac{ni}{c_2} \cdot \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_2}}}{e^{\frac{2nc_1\pi i}{c_2}} - 1} \right\}.$$

Dosadímeli pak do našeho výrazu pro $C_0(u) - C_0(u_0)$ hodnotu z tohoto vzorce plynoucí, nacházíme výsledek

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} D^2{}_{x=0} \log \frac{\Gamma\left(\frac{x+u+mc_1}{c_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+u_0+mc_1}{c_2}\right)} \\ & = 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' n \left\{ \frac{1}{c_1^2} \log \frac{ni}{c_1} \cdot \frac{e^{\frac{2nu_0\pi i}{c_1}}}{e^{\frac{2nc_2\pi i}{c_1}} - 1} + \frac{1}{c_2^2} \log \frac{ni}{c_1} \cdot \frac{e^{\frac{2nu_0\pi i}{c_2}}}{e^{\frac{2nc_1\pi i}{c_2}} - 1} \right\} \\ & - 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' n \left\{ \frac{1}{c_1^2} \log \frac{ni}{c_1} \cdot \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_1}}}{e^{\frac{2nc_2\pi i}{c_1}} - 1} + \frac{1}{c_2^2} \log \frac{ni}{c_2} \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_2}}}{e^{\frac{2nc_1\pi i}{c_2}} - 1} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Zbývá nám ještě vyšetřiti konvergenci našich výrazů. Staneli se, že v rovnici (2) podíl dvou veličin c, na př. $\frac{c_\alpha}{c_\beta}$, jest realným, stane se pro nekonečný počet soustav čísel n_α, n_β výraz $n_\beta - v_\beta - \frac{c_\beta}{c_\alpha}(n_\alpha - v_\alpha)$ velmi blízkým hodnotě

$$z - v_\beta + \frac{c_\beta}{c_\alpha} v_\alpha,$$

kde z značí libovolnou veličinu realnou; neníli pak veličina $v_\beta - \frac{c_\beta}{c_\alpha} v_\alpha$ realnou, bude pomyslná část veličiny $n_\beta - v_\beta - \frac{c_\beta}{c_\alpha}(n_\alpha - v_\alpha)$ stálou a od nully různou, z čehož plyne, že

veličiny $\frac{n_\beta - v_\beta}{c_\beta} - \frac{n_\alpha - v_\alpha}{c_\alpha}$ *se nemohou následkem rozmanitých soustav ce-*

listvých čísel n_α, n_β státi nekonečně malými, neníli aspoň jedna z veličin $\frac{c_\beta}{c_\alpha}, \frac{v_\beta}{v_\alpha}$ realnou.

Jeli tato podmínka splněna, zůstává ve vzorci (2) na pravé straně jmenovatel obecného členu od nully v konečné vzdálenosti, a řada může konvergovati, když čitatel pro vzdálené členy je malý, což vyžaduje, aby realná část veličiny s byla menší jedné, při čemž ovšem konvergence může býti pouze podmíněná, aspoň jdeli při tom o případ $p = 2$; konvergence bude však najisto absolutní, jeli realná část veličiny s zápornou.

I v obecném případě, kdy žádné $\frac{c_\alpha}{c_\beta}$ není realné a kdy ovšem všecka v_α mají kladné části pomyslné, může konvergence pravé strany v rovnici (2) býti jen podmíněná, když realná část veličiny s je kladnou, poněvadž pro $w_1 = w_2 = \ldots = w_p = 0$ levá strana rovnice je nekonečnou.

Naproti tomu konvergence pravé strany rovnice (3) je vždy absolutní, jestliže buď aspoň jeden z podílů $\frac{c_\alpha}{c_\beta}$ není realným, a pro ostatní realné podíly $\frac{c_\gamma}{c_\delta}$ podíly $\frac{v_\gamma}{v_\delta}$ nejsou realné; aneb když by všecky podíly $\frac{c_\alpha}{c_\beta}$ byly realné, jeli realná část veličiny s zápornou. V obou těchto případech se předpokládá, že lze u vpraviti do tvaru $c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_p w_p$, kde $w_1, w_2, \ldots w_p$ jsou realné veličiny obsažené mezi nullou a jednou.

Výjimku z našich úvah tvoří případ, kdy uvažované poměry $\frac{c_\alpha}{c_\beta}$ jsou racionalné.

Abychom se vyhnuli komplikacím, *předpokládáme zejména ve vzorcích* (7) — (13), *i nadále, že podíl $\frac{c_2}{c_1}$ není realný; veličina u pak musí býti representována bodem ležícím uvnitř rovnoběžníka, jehož vrcholy jsou* $0, c_1, c_2, c_1 + c_2$.

Abychom určili veličinu B_0, differencujme rovnici (a) vůči u a užijme vztahu (d); tím obdržíme

$$\frac{\frac{\partial B}{\partial u}}{s-1} + \frac{\partial B_0}{\partial u} + \ldots = -s \frac{C}{s-1} - s C_0 - s C_1 (s-1) - \ldots,$$

čili po upravení pravé strany

$$\frac{\frac{\partial B}{\partial u}}{s-1} + \frac{\partial B_0}{\partial u} + \ldots = -\frac{C}{s-1} - (C + C_0) - (C_0 + C_1)(s-1) + \ldots,$$

z čehož plyne

$$\frac{\partial B}{\partial u} = -C, \quad \frac{\partial B_0}{\partial u} = -C - C_0.$$

prvá rovnice poskytne

$$C = \frac{1}{c_1 c_2},$$

druhá pak zní

$$\frac{\partial}{\partial u} B_0(u) = -\frac{1}{c_1 c_2} - C_0(u),$$

a z té plyne:

$$\frac{\partial}{\partial u}\Big(B_0(u) - B_0(u + u_0)\Big) = C_0(u + u_0) - C_0(u)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} D_u{}^2 \log \frac{\Gamma\left(\frac{u + u_0 + m c_1}{c_1}\right)}{\Gamma\left(\frac{u + m c_1}{c_1}\right)},$$

a tedy integrací v mezích u_1, u:

$$B_0(u) - B_0(u + u_0) + B_0(u_1 + u_0) - B_0(u_1)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} D_{x=0} \log \frac{\Gamma\left(\frac{x + u + u_0 + m c_1}{c_2}\right) . \Gamma\left(\frac{x + u_1 + m c_1}{c_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x + u_1 + u_0 + m c_1}{c_2}\right) \Gamma\left(\frac{x + u + m c_2}{c_2}\right)}$$

Z rovnice (a) plyne

$$B_0 = D_{s=1}\big[(s-1)\, R(u \mid c_1, c_2; s)\big]$$

a veličina uvnitř závorky se obdrží, násobímeli strany rovnice (10) veličinou

$$(1 - s)(2\pi)^{s-1}\Gamma(1 - s) = \Gamma(2 - s) \,.\, (2\pi)^{s-1};$$

po provedeném differencování tedy shledáme

$$B_0 = (-\Gamma'(1) + \log 2\pi) . \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{c_1} \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_1}}}{e^{\frac{2nc_2\pi i}{c_1}} - 1} + \frac{1}{c_2} \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_2}}}{e^{\frac{2nc_1\pi i}{c_2}} - 1} \right)$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{c_1} \log \frac{n i}{c_1} \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_1}}}{e^{\frac{2nc_2\pi i}{c_1}} - 1} + \frac{1}{c_2} \log \frac{n i}{c_2} . \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_2}}}{e^{\frac{2nc_1\pi i}{c_2}} - 1} \right);$$

prvý součet splývá s výrazem (11) a má tedy hodnotu $\frac{c_1 + c_2 - 2u}{2 c_1 c_2}$ takže obdržíme

$$B_0 = (-\Gamma'(1) + \log \sqrt{2\pi}) \frac{c_1 + c_2 - 2u}{2 c_1 c_2}$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{c_1} \log \frac{n i}{c_1} . \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_1}}}{e^{\frac{2nc_2\pi i}{c_1}} - 1} + \frac{1}{c_2} \log \frac{n i}{c_2} . \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_2}}}{e^{\frac{2nc_1\pi i}{c_2}} - 1} \right).$$

Vyjádřímeli pomocí tohoto vzorce výraz

$$B_0(u) - B_0(u+u_0) + B_0(u_0+u_1) - B_0(u_1)$$

a porovnáme s hořejším výsledkem, obdržíme

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} D_{x=0} \log \frac{\Gamma\left(\frac{x+u+u_0+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{x+u_1+mc_1}{c_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+u_0+u_1+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{x+u+mc_1}{c_2}\right)} \\ &= F(u_0+u_1) + F(u) - F(u_0+u) - F(u_1), \end{aligned} \right.$$

kde položeno

$$(14^a)\quad F(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{c_1} \log \frac{ni}{c_1} \cdot \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_1}}}{e^{\frac{2nc_2\pi i}{c_1}} - 1} + \frac{1}{c_2} \log \frac{ni}{c_2} \cdot \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_2}}}{e^{\frac{2nc_1\pi i}{c_2}} - 1} \right).$$

V okolí bodu $s=0$ konečně existuje rozvoj

$$R(u \mid c_1, c_2; s) = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 +$$

differencujemeli jej dle u a užijemeli rovnice (d), obdržíme

$$\frac{\partial A_0}{\partial u} + \frac{\partial A_1}{\partial u} \cdot s + \frac{\partial A_2}{\partial u} \cdot s^2 + \ldots = -B - B_0 s - B_1 s^2 - \ldots,$$

takže obdržíme

$$\frac{\partial A_1}{\partial u} = -B_0$$

Odtud odvodíme

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[A_1(u+u_0+u_1) + A_1(u) - A_1(u+u_0) - A_1(u+u_1)\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} D_u \log \frac{\Gamma\left(\frac{u+u_0+u_1+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{u+mc_1}{c_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{u+u_0+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{u+u_1+mc_1}{c_2}\right)},$$

tedy integrací v mezích u a u_2

$$A_1(u+u_0+u_1) + A_1(u) + A_1(u_0+u_2) + A_1(u_1+u_2)$$

$$- A_1(u_0+u_1+u_2) - A_1(u_2) - A_1(u+u_0) - A_1(u+u_1)$$

$$= \log \prod_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{u+u_0+u_1+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{u+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{u_0+u_2+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{u_1+u_2+mc_1}{c_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{u_0+u_1+u_2+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{u_2+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{u+u_0+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{u+u_1+mc_1}{c_2}\right)}.$$

Avšak výraz $A_1 = D_{s=0} R(u \mid c_1, c_2; s)$ se obdrží z rovnice (10) ve tvaru

$$A_1 = -(\Gamma'(1) - \log 2\pi) A_0$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{n} \left\{ \log \frac{ni}{c_1} \cdot \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_1}}}{e^{\frac{2nc_2\pi i}{c_1}} - 1} + \log \frac{ni}{c_2} \cdot \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_2}}}{e^{\frac{2nc_1\pi i}{c_2}} - 1} \right\};$$

dále z rovnice

$$\frac{\partial A_0}{\partial u} = -B = \frac{2u - c_1 - c_2}{2c_1 c_2}$$

plyne, že A_0 je kvadratická funkce u, a tedy obdržíme, nahradímeli v našem posledním výsledku výrazy A_1 jich hodnotami:

$$\log \prod_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{u+u_0+u_1+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{u+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{u_0+u_2+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{u_1+u_2+mc_1}{c_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{u_0+u_1+u_2+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{u_2+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{u+u_0+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{u+u_1+mc_1}{c_2}\right)}$$
$$= G(u+u_0+u_1) + G(u) + G(u_0+u_2)\, G(u_1+u_2)$$
$$- G(u_0+u_1+u_2) - G(u_2) - G(u+u_0) - G(u+u_1),$$

kde znamenáno

$$(15)\quad G(u) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{n} \left\{ \log \frac{ni}{c_1} \cdot \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_1}}}{e^{\frac{2nc_2\pi i}{c_1}} - 1} + \log \frac{ni}{c_2} \cdot \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{c_2}}}{e^{\frac{2nc_1\pi i}{c_2}} - 1} \right\}.$$

Znamenámeli

$$u_0 + u_2 = u,\; u_1 + u_2 = w,\; u_2 = z,$$

obdržíme při označení (15):

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} &\log \prod_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{u+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{v+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{w+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{u+v+w-2z+mc_1}{c_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z+mc_1}{c_2}\right).\Gamma\left(\frac{v+w-z+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{u+v-z+mc_1}{c_2}\right)\Gamma\left(\frac{u+w-z+mc_1}{c_2}\right)} \\ &= G(u) + G(v) + G(w) + G(u+v+w-2z) \\ &- G(z) - G(u+v-z) - G(u+w-z) - G(v+w-z), \end{aligned} \right.$$

kde se předpokládá, že veškery argumenty

$$u, v, w, z;\; u+v+w-2z;\; u+v-z,\; u+w-z,\; v+w-z$$

leží v rovnoběžníku $(0, c_1, c_2, c_1+c_2)$.

3. Užijemeli vzorce

$$\frac{\Gamma(s)}{(u+c_1m_1+c_2m_2)^s} = \int_0^\infty e^{-(u+c_1m_1+c_2m_2)x} x^{s-1}\, dx,$$

obdržíme známý nám vzorec

$$(17)\qquad \Gamma(s) R(u \mid c_1, c_2; s) = \int_0^\infty \frac{e^{-ux} x^{s-1}\, dx}{(1-e^{-c_1x})(1-e^{-c_2x})}$$

ve kterém realná část veličiny s musí býti větší dvou.

Násobením mocninového rozvoje

$$\frac{1}{1-e^{-c_1x}} = \frac{1}{c_1x} + \frac{1}{2} + \frac{B_1c_1}{2}x - \frac{B_2c_1^3}{24}x^3 + \dots,$$

kde $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, atd., podobným rozvojem funkce

$$\frac{1}{1 - e^{c_2 x}},$$

obdržíme

$$\frac{1}{(1 - e^{-c_1 x})(1 - e^{-c_2 x})} - \frac{1}{c_1 c_2 x^2} - \frac{c_1 + c_2}{2 c_1 c_2 x} - \frac{3 c_1 c_2 + c_1^2 + c_2^2}{12 c_1 c_2}$$

$$= a_1 x + a_2 x^2 + \ldots ;$$

Integrál

$$(18) \quad \varpi(u \mid c_1, c_2; s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{(1 - e^{-c_1 x})(1 - e^{-c_2 x})} - \frac{1}{c_1 c_2 x^2} - \frac{c_1 + c_2}{2 c_1 c_2 x} - \frac{3 c_1 c_2 + c_1^2 + c_2^2}{12 c_1 c_2} \right) e^{-ux} x^{s-1} dx$$

tedy existuje i když realná část exponentu s je zápornou, ale ovšem větší než -1. Pokud je tato realná část větší dvou, máme patrně podle (17)

$$(19) \quad \varpi(u \mid c_1, c_2; s) = \Gamma(s) R(u \mid c_1, c_2; s) - \frac{\Gamma(s-2)}{c_1 c_2 u^{s-2}} - \frac{(c_1 + c_2)}{2 c_1 c_2} \frac{\Gamma(s-1)}{u^{s-1}} - \frac{3 c_1 c_2 + c_1^2 + c_2^2}{12 c_1 c_2} \frac{\Gamma(s)}{u^s},$$

a tento vztah musí býti platným pro všecka s, pro něž funkce R a ϖ jsou definovány. Rovnici tu možno psáti

$$(19^*) \quad \left\{ \begin{aligned} R(u \mid c_1, c_2; s) = & \frac{1}{c_1 c_2 u^s} \left\{ \frac{u^2}{(s-1)(s-2)} + \frac{c_1 + c_2}{2} \frac{u}{s-1} \right. \\ & \left. + \frac{3 c_1 c_2 + c_1^2 + c_2^2}{12} \right\} + \frac{\varpi(u \mid c_1, c_2; s)}{\Gamma(s)} \end{aligned} \right.$$

Odtud se obdrží výsledek, že prví dva součinitelé Maclaurinovského rozvoje

$$(20) \quad R(u \mid c_1, c_2; s) = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \ldots$$

mají hodnoty

$$(20^*) \quad \left\{ \begin{aligned} A_0 = & \frac{u^2}{2 c_1 c_2} - \frac{c_1 + c_2}{2 c_1 c_2} u + \frac{3 c_1 c_2 + c_1^2 + c_2^2}{12 c_1 c_2} \\ A_1 = & \frac{3 u^2}{4 c_1 c_2} - \frac{c_1 + c_2}{2 c_1 c_2} u \\ & - \log u \left(\frac{u^2}{2 c_1 c_2} - \frac{c_1 + c_2}{2 c_1 c_2} u + \frac{3 c_1 c_2 + c_1^2 + c_2^2}{12 c_1 c_2} \right) \\ & + \varpi(u \mid c_1, c_2; 0). \end{aligned} \right.$$

Místo $\varpi\,(u \mid c_1, c_2; 0)$ pišme stručněji $\varpi\,(u \mid c_1, c_2)$, takže

$$(21)\quad \varpi\,(u \mid c_1, c_2) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{(1-e^{-c_1 x})(1-e^{-c_2 x})} - \frac{1}{c_1 c_2 x^2} - \frac{c_1 + c_2}{2 c_1 c_2 x} - \frac{3 c_1 c_2 + c_1^2 + c_2^2}{12 c_1 c_2} \right) e^{-ux} \frac{dx}{x}.$$

Dosadímeli do (20[a]) za A_1 hodnotu výše nalezenou

$$A_1 = A_0 \left(\log 2\pi - \Gamma'(1)\right) + G(u),$$

obdržíme vztah

$$(22)\quad \varpi\,(u \mid c_1, c_2) = \frac{c_1 + c_2}{2 c_1 c_2} u - \frac{3 u^2}{4 c_1 c_2} + A_0 \left(\log 2u\pi - \Gamma'(1)\right) + G(u),$$

kde psáno jako výše

$$A_0 = \frac{u^2}{2 c_1 c_2} - \frac{c_1 + c_2}{2 c_1 c_2} u + \frac{(c_1 + c_2)^2 + c_1 c_2}{12 c_1 c_2}.$$

Vzorec tento lze považovati za analogii řady Kummerovy.