Matyáš Lerch
Über eine arithmetische Relation

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1894, č. 33, 1–16

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501471

XXXIII.

Ueber eine arithmetische Relation.

Von M. Lerch in Weinberge bei Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. November 1894.)

Diese Notiz beschäftigt sich mit den Eigenschaften der arithmetischen Functionen ψ und χ, und kann als Fortsetzung der vorhergehenden Arbeit angesehen werden.

Wir gehen aus von der unendlichen Reihe

$$(1) \qquad F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(k+1)\nu} x^{k+1}}{(1-q^\nu x)(1-q^{\nu+1} a x)(1-q^{\nu+2} a x)},$$

in welcher k eine positive ganze Zahl, dagegen a, x, q stetige Variable bedeuten, von welchen letztere numerisch kleiner als Eins vorausgesetzt werden muss, da sonst die Reihe divergirte. Für diese Reihe leiten wir eine neue Darstellung ab, indem wir die durch Partialbruchzerlegung gewonnene Identität benutzen:

$$\frac{1}{(1-q^{\nu+1} a x)(1-q^{\nu+2} a x)} = \frac{1}{(1-q)(1-q^{\nu+1} a x)} - \frac{q}{(1-q)(1-q^{\nu+2} a x)};$$

wird davon im allgemeinen Gliede von $F(x)$ Gebrauch gemacht, so erhält man zuvörderst

$$F(x) = \frac{1}{1-q} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(k+1)\nu} x^{k+1}}{(1-q^\nu x)(1-q^{\nu+1} a x)} - \frac{q}{1-q} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(k+1)\nu} x^{k+1}}{(1-q^\nu x)(1-q^{\nu+2} a x)}.$$

Hier benutzen wir die Identität

$$\frac{q^{(k+1)\nu}x^{k+1}}{1-q^\nu x} = \frac{q^\nu x}{1-q^\nu x} - \sum_{\lambda=1}^{k} q^{\lambda\nu}x^\lambda$$

und erhalten so die gesuchte Darstellung

$$(2) \qquad \begin{aligned} F(x) = {} & \frac{1}{1-q}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^\nu x}{(1-q^\nu x)(1-q^{\nu+1}a\,x)} \\ & - \frac{q}{1-q}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^\nu x}{(1-q^\nu x)(1-q^{\nu+2}a\,x)} \\ & - \frac{1}{1-q}\sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{q^{\lambda\nu}x^\lambda}{1-q^{\nu+1}a\,x} - \frac{q^{\lambda\nu+1}x^\lambda}{1-q^{\nu+2}a\,x}\right). \end{aligned}$$

Um hieraus durch Coefficientenvergleichung ein arithmetisches Resultat zu gewinnen, setzen wir $x = q$, $a = q^{n-1}$, unter n eine positive ganze Zahl verstanden, und erhalten zuerst die Formel

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{(k+1)\nu}}{(1-q^\nu)(1-q^{n+\nu})(1-q^{n+\nu+1})} = {} & \frac{1}{1-q}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^\nu}{(1-q^\nu)(1-q^{n+\nu})} \\ & - \frac{q}{1-q}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^\nu}{(1-q^\nu)(1-q^{n+\nu+1})} \\ & - \frac{1}{1-q}\sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{q^{\lambda\nu}}{1-q^{n+\nu}} - \frac{q^{\lambda\nu+1}}{1-q^{n+\nu+1}}\right), \end{aligned}$$

und hieraus folgt, wenn von der Beziehung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^\nu}{(1-q^\nu)(1-q^{n+\nu})} = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{q^\nu}{(1-q^\nu)(1-q^n)}$$

Gebrauch gemacht wird, schliesslich das Resultat:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{(k+1)\nu}}{(1-q^\nu)(1-q^{n+\nu})(1-q^{n+\nu+1})} \\ & = \frac{1}{1-q}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{q^\nu}{(1-q^n)(1-q^\nu)} - \frac{q}{1-q}\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{q^\nu}{(1-q^{n+1})(1-q^\nu)} \\ & \quad - \frac{1}{1-q}\sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{q^{\lambda\nu}}{1-q^{n+\nu}} - \frac{q^{\lambda\nu+1}}{1-q^{n+\nu+1}}\right). \end{aligned} \right.$$

Wir setzen nun der Kürze wegen

$$S = \frac{1}{1-q}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{q^{\nu}}{(1-q^{\nu})(1-q^{n})} - \frac{q}{1-q}\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{q^{\nu}}{(1-q^{\nu})(1-q^{n+1})},$$

oder indem wir in der zweiten Summe das lezte Glied abtrennen,

$$S = \frac{1}{1-q}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{q^{\nu}}{(1-q^{\nu})(1-q^{n})} - \frac{q}{1-q}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{q^{\nu}}{(1-q^{\nu})(1-q^{n+1})} - \frac{q^{n+2}}{(1-q)(1-q^{n+1})^2},$$

und weiter

$$S_1 = \frac{1}{1-q}\sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{q^{\lambda\nu}}{1-q^{n+\nu}} - \frac{q^{\lambda\nu+1}}{1-q^{n+\nu+1}}\right),$$

sodass die rechte Seite von (3) mit $S - S_1$ übereinstimmt. Wir gelangen zum gesuchten arithmetischen Resultate, wenn wir die beiden Seiten von (3) nach steigenden Potenzen von q entwickeln und die Coefficienten gleich hoher Potenzen von q beiderseits vergleichen. Zu dem Zwecke seien

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} A_m q^m, \quad S_1 = \sum_{m=1}^{\infty} B_m q^m$$

die Potenzentwickelungen von S und S_1. Um A_m zu erhalten, bemerken wir, dass wir durch Entwickelung einzelner Glieder des letzten Ausdrucks für S erhalten

$$S = \sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta} q^{\mu\nu+\alpha n+\beta} - \sum_{\mu,\nu,\alpha,\gamma} q^{\mu\nu+n\alpha+\alpha+\gamma} - \sum_{\mu,\gamma}\mu q^{\mu(n+1)+\gamma},$$

wobei die Summationsbedingungen folgendermassen lauten:

$$\mu,\ \gamma = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\infty; \quad \nu = 1,\ 2,\ \ldots n;$$
$$\alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\infty.$$

Halten wir in den zwei ersten Summen die Werthe μ, ν, α fest und führen die Summation in Bezug auf β und γ aus, so heben sich die sämmtlichen Glieder $\gamma = 1, 2, 3, \ldots$ der zweiten Summe gegen die Glieder $\beta = \alpha+1, \alpha+2, \alpha+3, \ldots$ der ersten und es bleibt

$$S = \sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta} q^{\mu\nu+\alpha n+\beta} - \sum_{\mu,\gamma} \mu q^{\mu(n+1)+\gamma},$$

wobei die neue Summationsbedingung $\beta \leqq \alpha$ hinzugetreten ist.

Wird nun für einen Augenblick

$$\sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta} q^{\mu\nu+\alpha n+\beta} = \sum a_m q^m, \quad \begin{pmatrix} \mu \geqq 1, & 1 \leqq \nu \leqq n \\ \alpha \geqq \beta \geqq 0 \end{pmatrix},$$

gesetzt, so stimmt offenbar a_m mit der Anzahl Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$\mu\nu + \alpha n + \beta = m$$

überein, welche natürlich mit denselben Bedingungen

$$\mu \geqq 1, \quad 1 \leqq \nu \leqq n, \quad \alpha \geqq \beta \geqq 0$$

verbunden werden muss.

Schreibt man die Gleichung in der Form

$$\mu\nu = m - \alpha n - \beta,$$

so sieht man, dass bei festgehaltenem α und β die Gleichung soviel Lösungen besitzt, als es Theiler ν der Zahl $m - \alpha n - \beta$ gibt, welche die Zahl n nicht überschreiten.

Wir bezeichnen nun mit $\chi(a, b)$ die Zahl der Theiler von a, welche b nicht überschreiten, dagegen mit $\psi(a, b)$ die Anzahl der Theiler von a, welche grösser sind als b.

Alsdann wird die betrachtete Gleichung bei festgehaltenem α und β insgesammt $\chi(m - \alpha n - \beta, n)$ Lösungen besitzen und somit wird die gesuchte Zahl a_m mit der Summe

$$a_m = \sum_{\alpha,\beta} \chi(m - \alpha n - \beta, n), \quad (\alpha \geqq \beta \geqq 0)$$

übereinstimmen.

Nachdem a_m gefunden, wird offenbar

$$A_m = a_m - a'_m,$$

wenn noch

$$\sum \mu q^{\mu(n+1)+\gamma} = \sum_{m=1}^{\infty} a'_m q^m$$

gesetzt wird. Man bestimmt a'_m, wenn man die Summe $\Sigma\mu$, bezogen auf sämmtliche Lösungen der Gleichung

$$\mu(n+1)+\gamma=m, \quad (\mu,\ \gamma=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

berechnet.

Man hat offenbar in

$$\gamma=m-\mu(n+1)$$

μ alle positiven ganzzahligen Werthe durchlaufen zu lassen, welche ein positives γ liefern; diese Werthe sind

$$\mu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\left[\frac{m-1}{n+1}\right],$$

und wir haben somit

$$a'_m=\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{m-1}{n+1}\right]}\mu=\frac{1}{2}E\left(\frac{m-1}{n+1}\right)E\left(\frac{m-1}{n+1}+1\right),$$

sodass sich der gesuchte Werth von A_m in der Form

$$A_m=\sum_{\alpha\geq\beta\geq0}\chi(m-\alpha n-\beta,\ n)-\frac{1}{2}E\left(\frac{m-1}{n+1}\right)E\left(\frac{m-1}{n+1}+1\right)$$

ergibt.

Es bleibt uns noch übrig den Coefficient B_m in der Entwickelung

$$S_1=\Sigma B_m q^m$$

der Grösse S_1 zu erhalten.

Da

$$S_1=\sum_{\lambda=1}^{k}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{\lambda\nu}}{(1-q)(1-q^{n+\nu})}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{\lambda\nu+1}}{(1-q)(1-q^{n+\nu+1})}\right\},$$

so haben wir die bekannten und sonst leicht zu verificirenden Gleichungen

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^{n+\nu})}=\sum_{\alpha=0}^{\infty}E\left(\frac{n+\nu+\alpha}{n+\nu}\right)q^\alpha,$$

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^{n+\nu+1})}=\sum_{\alpha=0}^{\infty}E\left(\frac{n+\nu+\alpha+1}{n+\nu+1}\right)q^\alpha$$

zu benutzen, um hieraus die Entwickelungen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{\lambda\nu}}{(1-q)(1-q^{n+\nu})}=\sum_m\left(\sum_\nu E\left(\frac{m+n+\nu-\lambda\nu}{n+\nu}\right)\right)q^m,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{\lambda\nu+1}}{(1-q)(1-q^{n+\nu+1})}=\sum_m\left(\sum_\nu E\left(\frac{m+n+\nu-\lambda\nu}{n+\nu+1}\right)\right)q^m$$

zu erhalten. Es folgt hieraus, dass der gesuchte Coefficient B_m durch die Formel

$$B_m=\sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{E\left(\frac{m+n+\nu-\lambda\nu}{n+\nu}\right)-E\left(\frac{m+n+\nu-\lambda\nu}{n+\nu+1}\right)\right\}$$

dargestellt werden muss.

Wir haben somit das Resultat, dass der Coefficient von q^m in der nach positiven ganzen Potenzen entwickelten rechten Seite der Gleichung (3) durch den Ausdruck

$$\sum_{\sigma\geqq\rho\geqq 0}\chi(m-\rho-\sigma n,\ n)-\frac{1}{2}\,E\left(\frac{m-1}{n+1}\right)E\left(\frac{m-1}{n+1}+1\right)$$
$$-\sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{E\left(\frac{m+n+\nu-\lambda\nu}{n+\nu}\right)-E\left(\frac{m+n+\nu-\lambda\nu}{n+\nu+1}\right)\right\}$$

dargestellt wird, wobei wir, was um alle Missverständnisse zu vermeiden bemerkt werden mag, die Function $E(x)$ gleich Null setzen, wenn das Argument x negativ wird.

Die Entwickelung der linken Seite von (3) lautet nun

$$\sum_{\alpha,\beta,\mu,\nu}q^{(k+\mu+\alpha+\beta)\nu+\alpha n+\beta n+\beta},\quad\begin{pmatrix}\alpha,\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\\ \mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\end{pmatrix}$$

und der Coefficient von q^m stimmt mit der Anzahl der Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$(k+\mu+\alpha+\beta)\nu+\alpha n+\beta n+\beta=m$$

überein; diese kann man aber schreiben

$$(k+\mu+\alpha+\beta)\nu=m-\alpha n-\beta n-\beta,$$

und hieraus ist ersichtlich, dass die Zahl $k+\mu+\alpha+\beta$ ein Theiler von $m-\alpha n-\beta n-\beta$ sein muss, welcher natürlich grösser ist als $k+\alpha+\beta$, und zwar entspricht einem gegebenen Werthsystem α, β und einem der in endlicher Anzahl vorhandenen die Zahl $k+\alpha+\beta$ übertreffenden Theiler von $m-\alpha n-\beta n-\beta$, die man selbstverständlich auf nur eine Weise in die Form

$$k+\mu+\alpha+\beta$$

setzen kann, ein einziges Werthsystem μ, ν. Der Coefficient von q^m in der betrachteten Entwickelung der linken Seite von (3) wird daher der Summe

$$\sum_{\alpha,\beta}\psi(m-\alpha n-\beta n-\beta,\ k+\alpha+\beta),\quad (\alpha,\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

gleich sein müssen, wenn wie wir schon bemerkt haben, mit $\psi(a,\ b)$ die Anzahl der Theiler von a, die grösser sind als b, bezeichnet wird.

Schreibt man hier noch $\alpha+\beta=\sigma$, $\beta=\varrho$, so geht dies in die Summe über

$$\sum_{\sigma\geqq\varrho\geqq 0}\psi(m-\varrho-\sigma n,\ k+\sigma),$$

und wenn man diesen Coefficienten mit demjenigen bei gleich hoher Potenz rechts vorkommenden vergleicht, so ergibt sich schliesslich

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{0\leqq\varrho\leqq\sigma}[\psi(m-\varrho-\sigma n,\ k+\sigma)-\chi(m-\varrho-\sigma n,\ n)] \\ \displaystyle+\frac{1}{2}E\left(\frac{m-1}{n+1}\right)E\left(\frac{m-1}{n+1}+1\right) \\ \displaystyle+\sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{E\left(\frac{m+n+\nu-\lambda\nu}{n+\nu}\right)-E\left(\frac{m+n+\nu-\lambda\nu}{n+\nu+1}\right)\right\}=0. \end{cases}$$

Für $k\geqq m$ hat man hieraus

$$(5)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{0\leqq\varrho\leqq\sigma}\chi(m-\varrho-\sigma n,\ n) \\ \displaystyle=\frac{1}{2}E\left(\frac{m-1}{n+1}\right)E\left(\frac{m-1}{n+1}+1\right) \\ \displaystyle+\sum_{\lambda,\nu}\left\{E\left(\frac{m+n+\nu-\lambda\nu}{n+\nu}\right)-E\left(\frac{m+n+\nu-\lambda\nu}{n+\nu+1}\right)\right\}, \\ \qquad (\lambda,\ \nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \end{cases}$$

Trennt man hier die Glieder $\lambda = 1$ ab, und setzt $(\lambda - 1)\nu = d$, so wird ν sämmtliche Divisoren δ von d durchlaufen und wir können die rechte Seite von (5) auch wie folgt schreiben

$$(5a)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} E\left(\frac{m+n}{n+1}\right) E\left(\frac{m+n}{n+1}+1\right) \\ + \sum_{d,\delta}\left[E\left(\frac{m+n-d}{n+\delta}\right) - E\left(\frac{m+n-d}{n+\delta+1}\right)\right], \end{cases}$$

die Summation bezogen zuerst auf sämmtliche Divisoren δ von d und dann auf sämmtliche Zahlen d, welche kleiner sind als $m+n$.

Im Falle $k = 0$ ist offenbar in (4) die Summe $\sum_{\lambda=1}^{0}$ durch Null zu ersetzen, sodass wir haben

$$(6)\quad \begin{cases} \sum_{0 \leqq \varrho \leqq \sigma}[\psi(m-\varrho-\sigma n,\ \sigma) - \chi(m-\varrho-\sigma n,\ n)] \\ + \frac{1}{2} E\left(\frac{m-1}{n+1}\right) E\left(\frac{m-1}{n+1}+1\right) = 0. \end{cases}$$

Um einige weiteren Resultate zu erhalten, setzen wir in der Formel (2) $x = q$, $a = \frac{1}{q}$, wodurch sich die Identität

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{k\nu+\nu}}{(1-q^\nu)^2(1-q^{\nu+1})} = \frac{1}{1-q} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu}{(1-q^\nu)^2}$$
$$- \frac{q}{1-q} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu}{(1-q^\nu)(1-q^{\nu+1})}$$
$$- \frac{1}{1-q} \sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{q^{\lambda\nu}}{1-q^\nu} - \frac{q^{\lambda\nu+1}}{1-q^{\nu+1}}\right)$$

ergibt. Da aber

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu}{(1-q^\nu)(1-q^{\nu+1})} = \frac{q}{(1-q)^2},$$

so folgt schliesslich die Identität

$$(7)\quad \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{k\nu+\nu}}{(1-q^\nu)^2(1-q^{\nu+1})} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu}{(1-q)(1-q^\nu)^2} - \frac{q^2}{(1-q)^3} \\ \qquad - \sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{q^{\lambda\nu}}{(1-q)(1-q^\nu)} - \frac{q^{\lambda\nu+1}}{(1-q)(1-q^{\nu+1})} \right]. \end{cases}$$

Da hat man nun die Entwickelungen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{k\nu+\nu}}{(1-q^\nu)^2(1-q^{\nu+1})} = \sum_{\nu,\mu,\alpha} \mu q^{(k+\mu+\alpha)\nu+\alpha},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu}{(1-q)(1-q^\nu)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{m}{\nu}\right) E\left(\frac{m}{\nu}+1\right) \right\} q^m.$$

$$\frac{q^2}{(1-q)^3} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(m-1)}{2} q^m,$$

und die Coefficienten der Entwickelung

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{q^{\lambda\nu}}{(1-q)(1-q^\nu)} - \frac{q^{\lambda\nu+1}}{(1-q)(1-q^{\nu+1})} \right] = \sum_{m=1}^{\infty} b_m q^m$$

ergeben sich in derselben Weise wie oben die B_m in der Form

$$b_m = \sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ E\left(\frac{m+\nu-\lambda\nu}{\nu}\right) - E\left(\frac{m+\nu-\lambda\nu}{\nu+1}\right) \right\}$$

oder besser geschrieben

$$b_m = \sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m}{\lambda}\right]} \left[E\left(\frac{m+\nu-\lambda\nu}{\nu}\right) - E\left(\frac{m+\nu-\lambda\nu}{\nu+1}\right) \right].$$

Hier können die Glieder $\lambda = 1$ abgetrennt werden, wodurch entsteht, wenn man $\lambda = \mu + 1$ schreibt:

$$b_m = m + \sum_{\mu=1}^{k-1} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m}{\mu+1}\right]} \left[E\left(\frac{m-\mu\nu}{\nu}\right) - E\left(\frac{m-\mu\nu}{\nu+1}\right) \right].$$

Es bleibt nur noch übrig, die Bestimmung des Coefficienten von q^m in der Entwickelung der linken Seite von (7) zu Ende zu führen. Da hat man die Lösungen der Gleichung

$$(k+\mu+\alpha)\nu+\alpha=m, \quad \begin{pmatrix}\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\\ \alpha=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\end{pmatrix}$$

zu finden und für sie die Summe der μ (d. i. $\Sigma\mu$) zu bilden; schreibt man die Gleichung in der Form

$$(k+\alpha+\mu)\nu=m-\alpha,$$

so sieht man, dass $k+\alpha+\mu=\delta$ sämmtliche Theiler von $m-\alpha$ durchläuft, welche grösser sind als $k+\alpha$, und jeden nur einmal, wenn μ und ν sämmtliche demselben α entsprechende Werthecombinationen annehmen. Für jede Lösung μ, ν ist dann $\mu=\delta-(k+\alpha)$ und die einem festen α entsprechende Partialsumme $\Sigma'\mu$ hat den Werth $\Sigma\delta$ vermindert um $(k+\alpha)$ so oft genommen als es Lösungen μ, ν gibt.

Diese Zahl der Lösungen ist offenbar $\psi(m-\alpha,\ k+\alpha)$ und es wird

$$\Sigma\delta=\Psi(m-\alpha,\ k+\alpha),$$

wenn mit $\Psi(a,\ b)$ die *Summe der Divisoren von a, die grösser sind als b*, bezeichnet wird. Die Partialsumme $\Sigma'\mu$ hat somit den Werth

$$\Psi(m-\alpha,\ k+\alpha)-(k+\alpha)\psi(m-\alpha,\ k+\alpha);$$

um die Totalsumme $\Sigma\mu$ zu erhalten, hat man hier α die Werthe $0, 1, \ldots m-1$ durchlaufen zu lassen und die Summe der Resultate zu bilden. Man erkennt daher, dass der Coefficient von q^m in der Entwickelung der linken Seite von (7) durch den Ausdruck

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1}[\Psi(m-\alpha,\ k+\alpha)-(k+\alpha)\psi(m-\alpha,\ k+\alpha)]$$

dargestellt wird.

Vergleicht man diesen Coefficienten mit der Summe derjenigen, welche als Coefficienten von q^m in einzelnen Bestandtheilen der rechten Seite auftreten, so erhalten wir das Resultat

$$
(8)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\alpha=0} [\Psi(m-\alpha,\ k+\alpha) - (k+\alpha)\psi(m-\alpha,\ k+\alpha)] \\ = \frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{m} E\left(\frac{m}{\nu}\right) E\left(\frac{m}{\nu}+1\right) - \frac{m(m+1)}{2} \\ - \sum\limits_{\mu=1}^{k-1} \sum\limits_{\nu=1}^{\left[\frac{m}{\mu+1}\right]} \left[E\left(\frac{m-\mu\nu}{\nu}\right) - E\left(\frac{m-\mu\nu}{\nu+1}\right)\right]. \end{cases}
$$

Dies gilt auch im Falle $k=1$, in welchem dann die letzte Summe wegfällt; dagegen wird im Falle $k=0$ der Ausdruck verschieden sein, und zwar

$$
(8a)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\alpha=0}^{m-1} [\Psi(m-\alpha,\ \alpha) - \alpha\psi(m-\alpha,\ \alpha)] \\ = \frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{m} E\left(\frac{m}{\nu}\right) E\left(\frac{m}{\nu}+1\right) - \frac{m(m-1)}{2}. \end{cases}
$$

Wird in (8) $k \geqq m$ vorausgesetzt, so verschwindet die linke Seite und es bleibt uns das Resultat zurück:

$$
(9)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\mu=1}^{m-1} \sum\limits_{\nu=1}^{\left[\frac{m}{\mu+1}\right]} \left[E\left(\frac{m-\mu\nu}{\nu}\right) - E\left(\frac{m-\mu\nu}{\nu+1}\right)\right] \\ = \frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{m} E\left(\frac{m}{\nu}\right) E\left(\frac{m}{\nu}+1\right) - \frac{m(m+1)}{2}, \end{cases}
$$

wobei die linke Seite auch wie folgt geschrieben werden kann

$$
(9a)\quad \sum_{d,\delta}\left[E\left(\frac{m-d}{\delta}\right) - E\left(\frac{m-d}{\delta+1}\right)\right],
$$

die Summation erstreckt über sämmtliche positive ganze Zahlen d unterhalb m und über sämmtliche Theiler δ von d; die rechte Seite stimmt bekanntlich mit der Summe

$$
(9b)\quad \sum_{k=1}^{m} \Theta_1(k) - \frac{m(m+1)}{2}
$$

überein, in welcher $\Theta_1(k)$ die Divisorensumme von k bezeichnet.

Man gelangt zu einem merkwürdigen arithmetischen Resultate, wenn man in der Gleichung (2) $a = \frac{1}{q}$ setzt, dagegen aber x unbestimmt lässt. Man hat zunächst die Relation

$$
(10) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{k\nu+\nu} x^{k+1}}{(1-q^\nu x)^2 (1-q^{\nu+1} x)} = \frac{1}{1-q} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^\nu x}{(1-q^\nu x)^2}
$$
$$
- \frac{qx}{(1-q)^2(1-x)} - \frac{1}{1-q} \sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{q^{\lambda\nu} x^\lambda}{1-q^\nu x} - \frac{q^{\lambda\nu+1} x^\lambda}{1-q^{\nu+1} x} \right\},
$$

bei deren Deduction wir die Identität

$$
\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^\nu x}{(1-q^\nu x)(1-q^{\nu+1} x)} = \frac{x}{(1-q)(1-x)}
$$

benutzten.

Wir wollen nun beide Seiten von (10) nach positiven Potenzen von q und x entwickeln (wozu die Voraussetzung $|x| < 1$ nöthig ist); durch Coefficientenvergleichung gelangen wir zu dem erwähnten Resultate.

Es werde zuerst

$$
\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{k\nu+\nu} x^{k+1}}{(1-q^\nu x)^2 (1-q^{\nu+1} x)} = \sum_{m,r} A_{m,r} q^m x^r
$$

gesetzt; um $A_{m,r}$ zu erhalten, setzen wir die linke Seite in die Form

$$
\sum_{\mu,\nu,\alpha} \mu q^{(k+\mu+\alpha)\nu+\alpha} x^{k+\mu+\alpha}, \quad \begin{pmatrix} \mu, \alpha = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix},
$$

woraus man sieht, dass man zuerst das System zweier Gleichungen

$$
k + \mu + \alpha = r, \quad r\nu + \alpha = m, \quad \begin{pmatrix} \mu, \alpha = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}
$$

aufzulösen, und die entsprechenden μ zu summiren hat. Aus der ersten Gleichung folgt nun, dass α kleiner sein muss als $r - k$, aus der zweiten folgt dann die Congruenz

$$
\alpha \equiv m (\text{mod. } r),
$$

welche nur eine Wurzel $\alpha < r$ besitzt.

Ist diese Wurzel zugleich kleiner als $r-k$, so ist α ein für unsere Lösung brauchbarer Werth und es ergibt sich

$$A_{m,r} = \mu = r - k - \alpha$$

als der gesuchte Coefficientenbetrag. Ist aber jene Congruenzwurzel α nicht kleiner als $r-k$, so ist sie kein brauchbares α für unser Gleichungssystem, welches in diesem Falle unverträglich ist, und man hat $A_{m,r} = 0$ zu nehmen.

Da $\nu + \frac{\alpha}{r} = \frac{m}{r}$, so hat man $\nu = E\left(\frac{m}{r}\right)$ und daher

$$\alpha = m - rE\left(\frac{m}{r}\right),$$

sodass wir

$$\mu = r - k - m + rE\left(\frac{m}{r}\right)$$

erhalten; es ist somit

$$\text{(a)} \qquad A_{m,r} = rE\left(\frac{m+r}{r}\right) - k - m,$$

wenn die rechte Seite positiv ausfällt, im entgegengesetzten Falle aber $A_{m,r} = 0$.

Die zwei ersten Bestandtheile der rechten Seite von (10) geben nun weiter

$$\frac{1}{1-q}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^{\nu}x}{(1-q^{\nu}x)^2} = \sum_{m,r} rE\left(\frac{m+r}{r}\right) q^m x^r,$$

$$\frac{qx}{(1-q)^2(1-x)} = \sum m q^m x^r,$$

und es bleibt nur übrig, die Summe

$$\frac{1}{1-q}\sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{q^{\lambda\nu}x^{\lambda}}{1-q^{\nu}x} - \frac{q^{\lambda\nu+1}x^{\lambda}}{1-q^{\nu+1}x}\right\}$$

in eine Reihe

$$\Sigma c_{m,r} q^m x^r$$

zu entwickeln. Man kann sie durch die mehrfache Reihe ersetzen

$$\sum_{\lambda,\alpha,\beta,\nu} q^{(\lambda+\alpha)\nu+\beta} x^{\lambda+\alpha} - \sum_{\lambda,\alpha,\gamma,\nu} q^{(\lambda+\alpha)\nu+\alpha+\gamma} x^{\lambda+\alpha},$$

in der die Summationsbedingungen lauten

$$\alpha,\ \beta,\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad \gamma = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\quad \lambda = 1,\ 2,\ \ldots k.$$

In der ersten Summe hat man die Anzahl der Lösungen des Systems

$$\lambda + \alpha = r,\quad r\nu + \beta = m$$

zu bestimmen; wir setzen $r \geqq k$ voraus, und dann werden sich die Unbekannten α und β durch die unabhängigen Veränderlichen λ und ν folgendermassen ausdrücken

$$\alpha = r - \lambda,\quad \beta = m - r\nu,\quad \left(\begin{array}{l}\lambda = 1,\ 2,\ \ldots k\\ \nu = 0,\ 1,\ \ldots \left[\frac{m}{r}\right]\end{array}\right),$$

woraus folgt, dass unsere Gleichungen

$$kE\left(\frac{m+r}{r}\right)$$

Lösungen besitzen.

In der zweiten vielfachen Summe hat man dagegen das System

$$\lambda + \alpha = r,\quad r\nu + \alpha + \gamma = m$$

zu lösen. Wir setzen hier $\alpha + \gamma = \gamma'$, sodass die neue Variable γ' die Bedingung $\gamma' > \alpha$ zu befriedigen hat, und haben das System

$$\lambda + \alpha = r,\quad r\nu + \gamma' = m.$$

Unsere ν sind solche, dass die Differenz $m - r\nu$ einer positiven Zahl γ' gleich wird, welche die Differenz $\alpha = r - \lambda$ übersteigt, d. h. unsere Unbekannte ν soll so bestimmt werden, dass

$$m - r\nu > r - \lambda,\quad (\lambda = 1,\ 2,\ \ldots k)$$

wird. Aus der hieraus sich ergebenden Ungleichung $r(\nu + 1) < m + \lambda$ folgt nun, dass die Variable $\nu + 1$ folgende Werthe annehmen kann

$$1,\ 2,\ \ldots \left[\frac{m+\lambda-1}{r}\right],$$

deren Anzahl $E\left(\frac{m+\lambda-1}{r}\right)$ ist.

Hieraus folgt, dass unsere mehrfache Summe in ihrer Potenzentwickelung bei $q^m x^r$ folgenden Coefficienten besitzt:

$$\sum_{\lambda=1}^{k} E\left(\frac{m+\lambda-1}{r}\right).$$

Es ist somit

$$c_{m,r} = kE\left(\frac{m+r}{r}\right) - \sum_{\lambda=1}^{k} E\left(\frac{m+\lambda-1}{r}\right)$$

und durch Zusammenfassung unserer Resultate erhalten wir den Satz, dass für $r \geqq k$ *die Gleichung besteht*

$$(11)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{\lambda=1}^{k} E\left(\frac{m+\lambda-1}{r}\right) + (r-k)E\left(\frac{m+r}{r}\right) - m \\ = rE\left(\frac{m+r}{r}\right) - k - m, \end{cases}$$

wenn die rechte Seite positiv ausfällt, dagegen aber die linke Seite verschwindet, wenn die rechte Seite negativ oder Null wird.

Man kann dieses Resultat einfacher ausdrücken, wenn man das Kronecker'sche Symbol sgn. a für das Vorzeichen von a einführt, worunter also 1 oder -1 zu verstehen ist, jenachdem a eine positive oder negative Grösse bedeutet.

Die Grösse $\frac{1+\text{sgn. } a}{2} \cdot a$ ist nun gleich a, wenn $a > 0$, dagegen 0, wenn $a \leqq 0$ ist. Die rechte Seite der Gleichung (11) ist also gleich

$$\frac{1}{2}\left\{1 + \text{sgn.}\left[rE\left(\frac{m+r}{r}\right) - k - m\right]\right\} \cdot \left[rE\left(\frac{m+r}{r}\right) - k - m\right],$$

und hieraus folgt, nachdem man beide Seiten von (11) mit 2 multiplicirt und eine Reduction ausgeführt hat, dass die Gleichung

$$(11^*)\quad \begin{cases} 2\sum_{\lambda=1}^{k} E\left(\frac{m+\lambda-1}{r}\right)+(r-2k)E\left(\frac{m+r}{r}\right)-m+k \\ =\text{abs.}\left[rE\left(\frac{m+r}{r}\right)-k-m\right] \end{cases}$$

besteht, wobei mit abs. angedeutet werden soll, dass von der eingeklammerten Grösse nur ihr absoluter Betrag zu nehmen ist. Die Bedeutung des Theorems (11) besteht darin, dass es die Summation der Reihe

$$\sum_{\sigma=0}^{k-1} E\left(\frac{m+\sigma}{r}\right)=S(m, r, k)$$

liefert. Unter der Voraussetzung $k \leqq r$ hat man nämlich

$$(11a)\quad S(m, r, k)=kE\left(\frac{m}{r}\right), \text{ wenn } k \leqq rE\left(\frac{m+r}{r}\right)-m,$$

aber

$$(11b)\quad S(m, r, k)=m-(r-k)E\left(\frac{m+r}{r}\right), \text{ wenn } k \geqq rE\left(\frac{m+r}{r}\right)-m.$$

Und diese Resultate sind leicht direct zu verificiren. Die erste Formel behauptet, dass sämmtliche k Glieder der Summe einander gleich sind, die zweite geht darauf hinaus, dass die Zahlen

$$E\left(\frac{m+k}{r}\right),\ E\left(\frac{m+k+1}{r}\right),\ \ldots\ E\left(\frac{m+r-1}{r}\right)$$

einander gleich sind, wenn $k \geqq rE\left(\frac{m+r}{r}\right)-m$, und dies ist leicht zu bestätigen.

Verlag der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr, Prag 1894.