Matyáš Lerch
Sur la différentiation des séries trigonométriques

C. R. Acad. Sci., Paris 119 (1894), 72, 725–728

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501468

qu'au plus UNE *transformation infinitésimale indépendante de la constante h de la force vive.*

» Les conditions sous lesquelles existe cette transformation infinitésimale résultent immédiatement du théorème général donné par moi dans la Communication précédente; d'ailleurs elles ont été déjà trouvées par M. O. Staude (*Leipziger Berichte*, 1892).

» Revenons au cas général. Des calculs assez longs conduisent à ce théorème :

» *Pour que le système des $n-1$ équations différentielles en $p_1, p_2, \ldots, p_n$ admettent un groupe continu G_2 à deux paramètres indépendant de la constante h de la force vive il faut et il suffit qu'on puisse choisir les variables p_1, $p_2, \ldots, p_n$ de telle sorte que :*

» 1° *La fonction des forces π dépende seulement de $p_3, p_4, \ldots, p_n$;*

» 2° *L'expression de la force vive se réduise à une de ces deux formes*

$$\text{(A)}\qquad \tfrac{1}{2}e^{\omega_1 p_1+\omega_2 p_2}\sum_{k,\lambda} C_{k\lambda}(p_3, p_4, \ldots, p_n)\frac{dp_k}{dt}\frac{dp_\lambda}{dt},$$

$$\text{(B)}\qquad \tfrac{1}{2}\sum_{k,\lambda} p_2^{\gamma-\varepsilon_{k1}-\varepsilon_{k2}-\varepsilon_{\lambda1}-\varepsilon_{\lambda2}} C_{k\lambda}(p_3, p_4, \ldots, p_n)\frac{dp_k}{dt}\frac{dp_\lambda}{dt};$$

ω_1, ω_2 *et* γ *sont des constantes arbitraires et on doit prendre* $\varepsilon_{k\lambda}=0$ *pour* $k\neq\lambda$ et $\varepsilon_{kk}=1$.

» *Les transformations infinitésimales du groupe* G_2 *sont*

$$\text{(A)}\qquad \boxed{\frac{\partial f}{\partial p_1},\ \frac{\partial f}{\partial p_2}}$$

$$\text{(B)}\qquad \boxed{\frac{\partial f}{\partial p_1},\quad p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial f}{\partial p_2}}$$

» La démonstration de ces théorèmes sera donnée dans un des cahiers prochains des *Mathematische Annalen*. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la différentiation des séries trigonométriques.* Note de M. **MATYAS LERCH**. (Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite.)

« Vous m'avez proposé, Monsieur, la recherche de la différentiation des séries trigonométriques, telles que la série classique de Kummer. Pour répondre à votre question, je considère la série

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{c_\nu}{\nu} \sin 2\nu x\pi,$$

en admettant que la série suivante

$$(2) \qquad g(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sin(2\nu + 1)x\pi,$$

où $c_0 = 0$, converge uniformément dans un intervalle, je dis que sa valeur donne celle de la dérivée $f'(x)$ par la formule

$$(3) \qquad f'(x) = g(x) \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

» Posons, en effet, $g(x) \frac{\pi}{\sin \pi x} = g_1(x)$, nous aurons

$$\frac{1}{\pi} g_1(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (c_\nu - c_{\nu+1}) \frac{\sin(2\nu + 1)x\pi}{\sin x\pi},$$

et l'application de la formule d'Abel,

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\nu = A_\nu(b_\nu - b_{\nu+1}) + A_n b_n$$

où

$$A_\nu = a_0 + a_1 + \ldots + a_\nu,$$

dans laquelle il faut prendre $a_\nu = c_\nu - c_{\nu+1}$, $b_\nu = \frac{\sin(2\nu + 1)x\pi}{\sin x\pi}$, nous donne l'identité

$$\frac{1}{\pi} g_1(x) = \lim_{n=\infty} \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} c_{\nu+1} 2\cos(2\nu + 2)x\pi + c_{n+1} \frac{\sin(2n + 1)x\pi}{\sin x\pi} \right].$$

» Cela posé, soient x_0, x_1 deux points compris dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$, où la série $g_1(x)$ est uniformément convergente, on aura, d'après un théorème élémentaire,

$$\int_{x_0}^{x_1} g_1(x)\, dx = \lim_{n=\infty} \left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu}{\nu} (\sin 2\nu x_1\pi - \sin 2\nu x_0\pi) + R_n \right],$$

en posant, pour abréger,

$$R_n = c_{n+1}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\pi \sin(2n+1)x\pi}{\sin x\pi}\,dx.$$

Or vous trouverez, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} R_n = &-\frac{c_{n+1}}{n+1}\left[\frac{\cos(2n+1)x_1\pi}{\sin x_1\pi} - \frac{\cos(2n+1)x_0\pi}{\sin x_0\pi}\right] \\ &-\frac{\pi c_{n+1}}{2n+1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\cos(2n+1)x\pi.\cos x\pi}{\sin^2 x\pi}\,dx; \end{aligned}$$

là la quantité infiniment petite $\frac{c_{n+1}}{2n+1}$ se trouve multipliée successivement par deux quantités qui restent finies pour n infini, et nous aurons, par conséquent, $\lim R_n = 0$, ce qui fait voir qu'on a, avec une entière rigueur,

$$\int_{x_0}^{x_1} g_1(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu}{\nu}(\sin 2\nu x_1\pi - \sin 2\nu x_0\pi) = f(x_1) - f(x_0),$$

ce qui prouve l'exactitude de la formule (3).

» J'applique maintenant le théorème à la série de Kummer

$$\log\Gamma(w) + \frac{1}{2}\log\frac{\sin w\pi}{\pi} + \left(w - \frac{1}{2}\right)[\log 2\pi - \Gamma'(1)] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n\pi}\sin 2nw\pi,$$

la relation (3) me donne le résultat cherché

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}\sin w\pi + \frac{\pi}{2}\cos w\pi + [\log 2\pi - \Gamma'(1)]\sin w\pi \\ &\quad = \sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n}{n+1}\sin(2n+1)w\pi. \end{aligned}$$

» C'est, Monsieur, la théorie des quantités Malusténiennes qui m'a conduit directement à cette formule, et m'a inspiré la vraie voie pour parvenir au résultat général. Il m'a frappé qu'on puisse, à l'aide de cette règle, trouver la valeur de la série $\sum\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi}$, car, les c_ν étant égaux, les différences $c_\nu - c_{\nu+1}$ seront nulles, sauf la première $c_0 - c_1$, qui est égale à $-\frac{1}{\pi}$; on aura donc $f'(x) = -\frac{1}{\pi}\sin x\pi\frac{\pi}{\sin x\pi} = -1$, d'où $f'(x) = \text{const.} - x$, et la constante s'obtient en posant $x = \frac{1}{2}$. J'ai étendu la règle aux autres formes, $\sum\frac{c_\nu}{\nu}\cos 2\nu x\pi$, $\sum\frac{2c\nu}{2\nu - 1}\sin(2\nu - 1)x\pi$, ..., et aussi aux séries

$\sum \frac{c_n}{u+n} \frac{\sin}{\cos} [2x\pi(u+n)]$. Un exemple que j'ai considéré m'a conduit à l'identité suivante

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'(u+n)}{\Gamma(u+n+1)} \sin 2\pi\left(ux + nx - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{\sin u\pi}\left(\frac{1}{2} - x\right).$$

et à d'autres formules analogues. Ce sont des théorèmes qui me font une véritable joie et dont je suis redevable uniquement à votre question, à laquelle je n'ai pu répondre qu'après bien des tâtonnements. »

SPECTROSCOPIE. — *Sur la constitution de l'arc électrique.* Note de M. L. Thomas, présentée par M. Mascart.

« La production de franges d'interférences avec la lumière de l'arc montre qu'une région voisine du pôle négatif est sensiblement monochromatique. En éclairant simultanément une moitié du champ avec l'arc et l'autre avec une flamme chargée de sodium, on reconnaît que les deux séries de franges se raccordent exactement. Le phénomène est donc dû à l'éclat considérable qu'acquiert la vapeur de sodium au voisinage du pôle négatif, relativement aux autres gaz présents. On reconnaît en outre que c'est à partir du pôle négatif que la vapeur se répand dans la flamme extérieure.

» Il y avait lieu de supposer que cette accumulation au pôle négatif n'est pas particulière au sodium; mais, pour les autres corps, la question ne pouvait être traitée qu'avec l'aide du spectroscope. Or les modifications éprouvées par les raies métalliques dans les diverses régions de l'arc seraient, d'après M. Lockyer [1], des plus irrégulières, un corps montrant en même temps certaines lignes près du pôle positif, d'autres près du pôle négatif, d'autres au milieu seulement.

» J'ai repris cette étude, en ayant égard aux deux points suivants : 1° une modification dans une raie ne peut être rapportée sûrement à une région particulière de la source que si, l'image de la source étant projetée sur le plan de la fente, le spectroscope fournit pour chaque point de la fente un spectre linéaire, c'est-à-dire qu'il faut réaliser le *réglage aplanétique* indiqué par M. Cornu dans son beau Mémoire sur les groupes A, B, α

(1) *Proc. R. S. L.*, t. XXVIII, p. 425.