$$2+3=3+2$$

$$\frac{1}{4}\cdot 3=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

Je. S. Berezanskaja – Přeložil E. Čech

Methodika aritmetiky

Pomůcka
pro učitele střední školy

JE. S. BEREZANSKAJA: METHODIKA ARITMETIKY

Je. S. Berezanskaja

METHODIKA ARITMETIKY

POMŮCKA PRO UČITELE STŘEDNÍ ŠKOLY

PODLE ČTVRTÉHO VYDÁNÍ PŘELOŽIL

PROF. DR EDUARD ČECH

ÚVODNÍMI POZNÁMKAMI DOPROVODIL

PROF. DR OTAKAR CHLUP

Nákladem Jednoty československých matematiků a fysiků v Praze

ÚVODNÍ POZNÁMKY

Univ. prof. Čech přispěl nemálo překladem této methodiky počtů k vyjasnění didaktických principů elementární aritmetiky na škole národní a střední. Měl jsem před lety příležitost pojednávati s prof. Čechem o vzdělání v elementární mathematice a překvapil mne živý jeho zájem o vyučování počtům a geometrii na školách. Představoval jsem si věc stejně jako i v ostatních oborech vyučovacích, v nichž dobré základy vhodnými methodami vštípené jsou hlavní podmínkou další stavby vzdělání. A tak o tom prof. Čech často se rozhovořil a spatřoval nedostatky mathematického vzdělání u žactva ve špatných postupech vyučovacích na stupni elementárního počítání.

Roku 1934 vydal Bakulův ústav ve sbírce Knihovna vědecké pedagogiky příspěvek k reformě vyučování počtům s návrhem podrobného osnování učiva pod názvem „Počty na škole prvního stupně“. Knihu tuto napsali Dr V. Příhoda, Václav Tvrdek a Mir. Disman. Obsáhlý úvod k vlastnímu praktickému návrhu napsal Dr Příhoda. V otázce cíle výchovného a vyučovacího obracejí se spisovatelé knihy, jak praví, od neživotného formalismu k životnému a k pojetí počtů jako dovednosti pro život potřebné. Škola prý předpokládá rozvití početních schopností k dokonalé zběhlosti v řešení určitých početních příkladů v životě. Musí prý se zjistiti, které početní výkony a která užitá látka je pro život důležitá, vyšetřit, které problémy a v jakém množství se vyskytují v jednotlivých povoláních, v školním životě, v rodině a na ulici.

Měl jsem již v r. 1934 námitky proti nepřesnosti ve formulaci cílů vyučovacích, ve výměrech formálního a reálného principu jednotlivých předmětů vyučování, které nejsou homogenní, nýbrž rozdílné podle své povahy. Mathematické vyučování má zajisté také své zvláštní poslání v pochodu výchovném a vyučovacím.

Ve své středoškolské didaktice jsem odlišil různé vlohy žactva v oblasti mathematického učení. Jsou žáci, kteří více nebo méně abstraktně počtářsky myslí a jsou jiní, kteří k úsudkům v oblasti množin potřebují konkretní představy. To je psychologická stránka počtářské dovednosti, logika pak hodnotí správnost nebo nesprávnost početních úsudků.

Obsah početního myšlení tvoří množiny a jejich vztahy a nikoli, jak se methodikové leckdy domnívají, konkretní představy, k nimž se mohou zvláště na elementárním stupni množiny přiřazovati. Formou jest tu logické myšlení, myšlení správné, které se cvikem zdokonaluje. Obsah i forma jsou jen abstraktní tvary téhož jednotného pochodu.

Vycházíme-li z těchto základních abstrakcí odvozených pouček, pak nebude nesnadno určiti, v čem spočívá význam formálního a věcného principu ve vyučování počtům. S hlediska formálního principu bude cílem vyučování v elementárním počítání zvyšovati správné logické myšlení, zrychlovati pochody logických operací s množinami a jejich vztahy. To znamená, že postupně vyřazujeme intermediární konkretní představové prvky. S hlediska obsahového jde o vlastní kvantitativní vztahy, o soustavu operací, v níž jsou všechny části skloubeny zásadou předpokladu a důsledku, jednoduchosti a složitosti.

Příliš zdůrazňovati praktický cíl vědomostí mathematických pro život směřuje proti formálnímu i obsahovému principu, jenž klade vlastní smysl učení do oblasti množin a jejich vztahů, které jsou vlastnosti všech jevů. Slovo vztahuje se jen k vymezené družině empirických jevů. Tím má množina mnohem všeobecnější a k abstrakci snáze vedoucí úlohu nežli slovo, které má strukturálnější vazbu s předmětem jím vyjádřeným. Proto již na úsvitě filosofie číslo bylo chápáno jako podstata věci a dění.

Na methodice počtů, kterou prof. Čech v překladu uvádí do naší školské praxe, můžeme v každé řádce pozorovati, jak je shodna s podstatou číselných vztahů a s vlastním kulturním cílem elementární aritmetiky. Již čtyři elementy veškeré matematiky, čtyři početní výkony, uváděny jsou ve vzájemný vztah, sečítání s násobením, odčítání s výkony dělení. Methoda, která vštěpuje počtáři zásadu, že každý výkon se provádí na základě určitých zákonů, že hlavní věcí je rozbor procesu provádění výkonu a návyk v technické dokonalosti při provádění, methoda, která každý důležitý výkon opírá o přesnou lehce pochopitelnou definici a o větší počet příkladů s abstraktními čísly, která bez obtíží uvede ve vztah číslo zvláštní a obecné na stupni elementárním, taková methoda jest nový ukazatel na cestě výuky počtářské.

K formální logické výchově vede také důsledný induktivní způsob, jímž se vyvozují pravidla a osvětlují pojmy. „Když si žáci všechny jednotlivé detaily výkonu dělení řádně uvědomili a osvojili, přejde se bez nesnází k odůvodnění pravidla postupného určování cifer podílu při dělení libovolných několikaciferných čísel a k utvrzení odpovídajícího návyku v provádění výkonu.“ Tak čteme v partii o dělení a při každém oddíle učení můžeme zjišťovati týž zájem o vlastní úsudky žactva. Ve zvláštních případech doporučuje se názorná ilustrace při přiměřených slovních úlohách, ale veliký důraz se klade na myšlení a zpamětní řešení. Je třeba podle autorky vésti žáky k tomu, aby v těch případech, kdy je možné provésti výpočet ústně, skutečně také ústně počítali. Proto se žáci cvičí v ústním sčítání a potom odčítání nejjednodušších zlomků. Důsledné a přesné zapisování prováděných výkonů ve všech cvičeních, při čemž výkony, pro které je to možné, mají se prováděti ústně nebo polopísemně, jsou technické poukazy, které svědčí, že mathematické učení má se díti podle rozpracovaného plánu, zbudovaného na jasných definicích a přesných pojmech.

Aby autorka dosáhla vlastního cíle každé části arithmetické látky, nelituje času potřebného na úsudky, nechtějíc příliš brzo přecházeti k formulaci znaků těžších úkonů.

Přítomná methodika není však jen osobní práce autorčina. Je zároveň zpracovanou methodikou arithmetiky elementární ruské, německé, francouzské, je synthesou stejně jako kritikou práce předchozí. V kapitole o zlomcích zabývá se autorka pořádkem probírání látky a uvažuje o problému, zda lépe a účelněji vyučovati nejprve zlomkům obyčejným a pak desetinným nebo naopak. K řešení problému používá autorka jak historických, tak vědeckých důvodů, aby přesvědčila o správnosti pořadí od zlomků obyčejných k zlomkům desetinným. Tuto kritiku a řešení doprovází poznámkou, kterou třeba citovati a která ukazuje, jak sovětské didaktice záleží na tom, aby mládež od elementárního stupně byla vychovávána k správnému, logicky uspořádanému myšlení. „V naší, praví, sovietské škole nařízení „O škole“ přeťalo všecky zjednodušovací pokusy při probírání arithmetiky a položilo požadavek vychovat plně vzdělané budovatele socialismu, ovládající základy věd.“

Napsal jsem na počátku, že obsahem vědy mathematické jsou množiny a jejich vztahy a že formální stránkou elementárního mathematického učení jsou logické operace v oblasti vztahů množinných. Tím myslím jest zároveň vyjádřen úsudek o řešení methodických problémů v oboru elementární arithmetické výuky, kterou nám v tak skvělém, vědecky upraveném uspořádání předkládá tato methodika. Je patrno, že mathematická methodika jest v sovietské škole na vysoké úrovni, a že přítomná knížka bude dobrým průvodcem našich učitelů počtů. Kdybych měl stručně vyjádřiti dojem z jednotlivých kapitol této knihy o vyučování počtům, tedy jest to hlavně úsilí autorčino, aby žactvo bylo uvedeno k takové sběhlosti v elementárním počítání, které mu umožní dále pěstovati vyšší stupně mathematiky beze zvláštních obtíží, poněvadž již na tomto elementárním stupni dosaženo jest formální způsobilosti, která jest podmínkou dalšího postupu.

Profesoru Čechovi můžeme býti vděčni za to, že při svých úkolech vědeckých nachází dosti kdy, aby věnoval pozornost pokroku vědy o vyučování počtům elementárním. Jistě ho vede vůdčí myšlenka, že na základech pevných se dobře buduje.

Dr O. Chlup.

POZNÁMKY PŘEKLADATELOVY

Úvodní slovo k překladu této Methodiky napsal na mou žádost univ. prof. Dr Otakar Chlup, odborník k tomu nejpovolanější, jemuž zde budiž vysloven můj nejupřímnější dík. Mohu se proto omeziti na konkretní poznámky.

Sovětská desetiletá škola (ponenáhlu přeměňovaná na jedenáctiletou) rozpadá se na tři části. Prvé 4 třídy tvoří počáteční školu,*) jež spolu s dalšími 3 třídami tvoří povinnou sedmiletou školu; 5. až 10. třída tvoří úplnou střední školu. Bylo by velmi žádoucí, aby vyšel český překlad některé ze skvělých ruských methodik počtů na počáteční škole. Methodika Berezanské se týká látky střední školy; v době tisku 4. vydání se aritmetice vyučovalo pouze v 5. třídě (7 hodin týdně). Od r. 1947 bylo vyučování aritmetice v RSFSR rozšířeno o dalších 32 vyučovacích hodin v 1. pololetí 6. třídy. Nyní platné osnovy aritmetiky na střední škole znějí takto:

PÁTÁ TŘÍDA
ARITMETIKA
(7 hodin týdně, celkem 229 hodin, z toho na opakování 18 hodin)

1. *Opakování látky počáteční školy* (21 hod.).

Ústní a písemná numerace několikaciferných čísel. Sčítání, odčítání, násobení a dělení několikaciferných čísel. Zkouška správnosti výsledku výkonu. Pořádek provádění výkonů a závorky. Závislost mezi danými čísly a výsledkem u každého výkonu. Změna součtu, rozdílu, součinu a podílu při změně daných čísel. Vlastnosti sčítání, odčítání, násobení a dělení. Methody ústního výpočtu.

Řešení slovních úloh na všecky výkony (také úloh typových). Míry délkové, plošné a prostorové. Řešení úloh na výpočet obvodu nejjednodušších obrazců, na výpočet obsahu čtverce a obdélníka; úlohy na výpočet objemu krychle a kvádru.

2. *Dělitelnost čísel* (20 hod.).

Znaky dělitelnosti čísly 2, 3, 4, 5, 9 a 25.

Prvočíslo a číslo složené. Rozklad čísel na prvočinitele. Určování nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele několika čísel.

3. *Obyčejné zlomky* (90 hod.).

*) Výraz načal'naja škola překládám v textu obecná škola; příliš pozdě jsem si uvědomil, že by bylo lépe užít výrazu počáteční (nebo základní) škola.

Základní pojmy. Změna velikosti zlomku při změně čitatele a jmenovatele. Krácení zlomku. Uvádění zlomků na nejmenšího společného jmenovatele. Sčítání a odčítání zlomků. Násobení zlomku celým číslem. Určování zlomku čísla. Násobení celého čísla, zlomku a smíšeného čísla zlomkem. Dělení zlomku celým číslem. Určování čísla z velikosti daného jeho zlomku. Dělení celého čísla, zlomku a smíšeného čísla zlomkem. Čísla navzájem převrácená.

Poměr dvou čísel. Záměna poměru lomených čísel poměrem čísel celých.

Řešení slovních úloh na všecky výkony s čísly celými i lomenými. Řešení úloh geometrického obsahu. Výpočet povrchu krychle a kvádru.

Obsah rovnoběžníka a trojúhelníka.

4. *Desetinné zlomky* (50 hod.).

Desetinný zlomek. Jeho jmenovatel. Krácení desetinného zlomku a uvádění desetinných zlomků na společného jmenovatele. Násobení a dělení desetinného zlomku čísly 10, 100, 1000 atd. Čtyři početní výkony s desetinnými zlomky.

Zápis desetinného zlomku ve tvaru obyčejného zlomku. Převádění obyčejného zlomku na desetinný (konečný i nekonečný). Pojem periodického zlomku. Zaokrouhlování daných čísel i výsledku výkonů.

Řešení slovních úloh na všecky výkony s obyčejnými i desetinnými zlomky.

Řešení úloh geometrického obsahu; výpočet délky kružnice, obsahu kruhu, povrchu a objemu válce.

5. *Procenta* (30 hod.).

Tři základní úlohy o procentech: a) určení daného počtu procent čísla, b) určení čísla z velikosti daného počtu jeho procent, c) určení procentního poměru dvou čísel.

Řešení složitějších úloh o procentech.

Nejjednodušší diagramy (sloupcové a kruhové).

Řešení slovních úloh na všecky oddíly probrané látky.

ŠESTÁ TŘÍDA

(7 hodin týdně, celkem 229 hodin, z toho na opakování 15 hodin).

ARITMETIKA*)

(2 hodiny týdně v prvním pololetí, celkem 32 hod.).

1. *Úměry* (10 hod.).

Úměry. Základní vlastnost úměry. Určování neznámého členu úměry.

2. *Přímá a nepřímá úměrnost* (22 hod.).

Závislost mezi dvěma veličinami. Přímá a nepřímá úměrnost. Řešení úloh úměrou i přechodem přes jednotku. Úlohy na rozdělování přímo a nepřímo úměrné daným číslům.

Lineární měřítko a jeho užití. Pojem o sestrojování plánu.

---

*) Osnovu algebry a geometrie v 6. třídě neuvádím.

Řešení slovních úloh na všecky oddíly probrané látky.

Připojuji úřední text vysvětlivek k osnovám (z r. 1948), pokud se týká aritmetiky v 5. a 6. třídě:

Soustavný kurs aritmetiky se probírá v 5. a 6. třídě. To umožňuje odůvodněně a prohloubeně probrat theoretickou látku i vyzbrojit žáky vhodnými počtářskými návyky a dovedností řešit slovní úlohy.

V 5. třídě kurs aritmetiky počíná opakováním látky z počáteční školy. Při opakování a systemisaci aritmetiky celých čísel mají žáci docílit přesného a uvědomělého ovládání aritmetické terminologie a dovednosti odůvodňovat své úsudky, na př. souvisle vysvětlovat užití výkonů na základě definice a probraných vlastních výkonů. Všecky úsudky se provádějí na konkretním číselném materiálu, ale při zápise vlastností výkonů se doporučuje ponenáhlé zavádění písmen, kterých se později užívá také k obecnému zápisu postupu při řešení slovních úloh.

Nauka o dělitelnosti se probírá na základě rozkladu čísel na prvočinitele s využitím dostatečného počtu příkladů. Při probírání znaků dělitelnosti se doporučuje seznámit žáky s devítkovou zkouškou výkonů.

Pojem *poměru* se zavádí už při srovnávání celých čísel; k náležitému jeho zobecnění se dojde po zavedení zlomků. V obojím případě se smysl pojmu objasní na vhodných slovních úlohách, ve kterých se vyskytují přímo úměrné veličiny.

Bod osnov „Zaokrouhlování daných čísel i výsledků výkonů" jest chápati tak, že žák má několikaciferné číslo celé (nebo desetinný zlomek), které je dáno, nebo které vyjde jako výsledek výpočtu, zaokrouhlit „na nejbližší tisíce", „na nejbližší číslo celé", „na nejbližší sta" atd. pro libovolně předepsaný řád.

Bod osnov „Pojem periodického zlomku" se nesmí chápati tak, že by se od žáků daného věku žádala znalost nějaké theorie o vyjádření obyčejných zlomků desetinnými. Stačí, aby žák uměl převésti daný obyčejný zlomek na desetinný (s daným počtem desetinných míst a náležitým zaokrouhlením); v souvislosti s opakováním cifer, které se při tom vyskytuje, mohou se zavésti názvy „ryze" a „neryze" periodický zlomek. Ze znaků vyjádřitelnosti stačí uvésti jediný (s odůvodněním), totiž znak toho, aby obyčejný zlomek se dal vyjádřit ve tvaru konečného desetinného zlomku. Pro další theorii je vhodné místo v 9. třídě v souvislosti s limitami a nekonečnými řadami.

V 5. a 6. třídě se věnuje velká pozornost řešení slovních úloh s celými i lomenými čísly. Řeší se především složené aritmetické úlohy na užití všech čtyř početních výkonů. Obsahem úloh jsou obecně známé závislosti, na př.: mezi cenou za jednotku, cenou za celek a množstvím; mezi rychlostí, vzdáleností a dobou; mezi pracovní normou, dobou práce a velikostí výroby a pod. Zvláště se doporučuje řešit úlohy, ve kterých se žáci setkávají s otázkami obrany státu, zemědělství a socialistického budování, dále úlohy geometrického obsahu na výpočet obvodu a obsahu čtverce a obdélníka, povrchu a objemu krychle a kvádru, délky kružnice a obsahu kruhu.*)

Z typových úloh se probírají:

1. úlohy na určení dvou čísel: a) z jejich součtu a rozdílu, b) z jejich poměru a součtu nebo rozdílu;

2. úlohy na dělení v daném poměru;

3. úlohy řešitelné vyloučením jedné neznámé pomocí záměny druhou neznámou nebo pomocí srovnání daných;**)

4. úlohy, jejichž řešení je založeno na změně součinu způsobené změnou činitelů.

U každého z uvedených typů se mají probírat úlohy rozmanitého obsahu: o pohybu, o směsích, o společné práci, o nádržkách a pod. Úlohy všech uvedených typů se mají řešit po celý rok. Při řešení úloh na složenou trojčlenku se mají žáci upozornit na to, že podobné úlohy řešili při probírání celých a lomených čísel, že však nyní se seznamují s novým jednodušším zápisem řešení těchto úloh, při kterém není třeba provádět částečné výpočty.***)

Velmi důležité je pěstovat počítání zpaměti s celými i lomenými čísly, racionální zápis výpočtů a návyk v kontrole správnosti číselných výsledků.

Při probírání zlomků, procent, úměrnosti veličin a také při řešení slovních úloh je nezbytné věnovat pozornost zkoumání závislosti mezi veličinami (závislost mezi členy početního výkonu, mezi veličinami vyskytujícími se ve slovní úloze) a tak budovat základ pro lepší chápání ideje funkční závislosti při dalších oddílech matematiky.

Ačkoli aritmetika jako samostatný předmět končí 6. třídou, je nezbytné uložit pro další třídy (7. až 10.) povinnost, aby se při vyučování algebře a geometrii stále utvrzoval a zdokonaloval početní výcvik. Při řešení algebraických a geometrických úloh se musí trvat na dopočítávání do konce a žáci musí býti vedeni k tomu, aby počítali nejracionálnější methodou, je třeba uvádět methody kontrol správnosti a dbáti toho, aby žáci předem odhadovali velikost číselného výsledku. Žádoucí je seznamovat žáky s kratšími způsoby provádění výkonů, na př. se zkráceným násobením a dělením.

Snažil jsem se o věrné přetlumočení originálu, ač ovšem jsem se nevyhýbal opravě zřejmých tiskových nedopatření. Při překladu některých obtížnějších míst mi poskytl cenné rady docent Mir. Katětov, kterému za to zde srdečně děkuji. Při transkripci azbuky do latinky v citátech jsem se řídil návrhem transliterační komise Slovanského ústavu v Praze ze 2. února 1939.†)

V Praze dne 6. února 1949. *E. Čech.*

*) Další vysvětlivky týkající se geometrické látky neuvádím.

**) Viz o tom v této Methodice na str. 372 až 377.

***) Viz o tom v této Methodice na str. 408 a 409.

†) Slavia, časopis pro slovanskou filologii, XVII, 1939, str. 317 až 320: Návrh na transliteraci cyrilského písma do latinky.

PŘEDMLUVA KE ČTVRTÉMU VYDÁNÍ

Od doby posledního vydání „Methodiky aritmetiky“ (r. 1936) změnily se požadavky, které se kladou žákům 5. třídy v aritmetice: zejména se značně zvýšily požadavky na dovednost řešit slovní úlohy; částečně se změnily také osnovy 5. třídy.

V té době byl do osnov 5. třídy zaveden oddíl „Periodické zlomky“, jehož obsah doznal změn; otázka o „Přibližných výpočtech“ na střední škole stále ještě není rozhodnutá, je však na denním pořádku. Vzhledem k tomu a aby se vyhovělo přání učitelů, jsou obě tyto otázky pojaty do tohoto vydání „Methodiky aritmetiky“; kapitola o řešení slovních úloh je značně rozšířena; oddíl „Celá čísla“ byl zkrácen, nicméně zaujímá značné místo, ježto bez prohloubeného opakování aritmetiky „Celých čísel“ nelze s porozuměním si osvojiti látku o „Lomených číslech“. V příslušných kapitolách „Methodiky aritmetiky celých čísel“ se odhaluje, jaké požadavky z předcházející látky musí splnit žák, který se má učit „Zlomkům“ a podává se methodika výkladu příslušné látky v soustavném kurse aritmetiky. Z tohoto oddílu může čerpati učitel i při opakování aritmetické látky obecné školy i při studiu aritmetiky v nižších třídách střední školy i při přehledu celé probrané látky.

Oddíl obecně didaktických a methodických pokynů byl v tomto vydání také poněkud rozšířen, ale přání učitelů v tomto směru jdou ještě dále a přesahují rámec methodiky aritmetiky. Některé historické poznámky, uváděné v této příručce spolu s materiálem pro práci mimo třídu, mají za svůj cíl pomoci mladému učiteli při výběru themat pro rozpravy v kroužku, ale nemohou nahradit nutné studium udaných literárních pramenů.

Jako ve dřívějších vydáních „Methodiky aritmetiky“ ani 4. vydání neobsahuje theorii „Aritmetiky“ a neklade si úkol orientovat učitele k určité učebnici.

Odkazy na čísla úloh v kapitole „Slovní úlohy“ týkají se knihy: Je. S. Berezanskaja, „Sbornik zadač i upražnenij po arifmetike“, vyd. z r. 1938 a pozdější.

Tato kniha je určena především pro mladého učitele. Nejsou v ní, ač se to mnohdy vyžaduje, zcela přesné pokyny k vedení vyučovacích hodin v celém kurse aritmetiky nižších tříd střední školy, protože to může vypracovat pouze sám učitel, který si musí všímat daných podmínek práce a vnésti osobitou tvořivost do vyučování. Ale mladý učitel rozšíří svůj obzor v otázkách vyučování aritmetice, ověří vlastní zkušenosti, seznámí se s vykládanými v „Methodice aritmetiky" prostředky a metodami, dobře odůvodněnými a mnohokrát praxí ověřenými, zvyšujícími kvalitu žákovských vědomostí v aritmetice.

Doplňky a opravy byly ve 4. vydání provedeny podle cenných pokynů a přání, za které je spisovatelka povděčna, jež podali methodikové a učitelé střední školy.

Moskva, březen 1946. *Spisovatelka.*

KAPITOLA I.

OBECNÉ METHODICKÉ POKYNY PRO VYUČOVÁNÍ ARITMETICE

§ 1. Cíle aritmetického vyučování

1. Cílem vyučování matematice v sovětské škole jest vychovati vlastence našeho velikého sovětského domova znalé základů matematické vědy a způsobilé využíti svých znalostí k velikému dílu socialistického budování a obrany naší země.

Aritmetika — nauka o číslech — je v celkové soustavě matematiky prvou částí; znalost aritmetiky je základ, na kterém stojí celé další vyučování matematice. Soustavné probírání aritmetiky má přispěti k rozvoji duševních schopností žáků, má jim dáti nezbytné pojmově jasné vědomosti a dovednosti, naučit je užívat jich prakticky a připravit žactvo pro další studium matematiky a jiných věd.

2. Vadou všeobecného vzdělání, kterého se dostává absolventu naší sovětské střední školy, stále ještě se jeví to, že neovládají aritmetiku v plné míře ani po stránce theoretické ani po stránce praktické. Příčinou toho je především, že podle platných osnov aritmetice se vyučuje pouze v nižších třídách, a mladí lidé přicházejí do dospělého věku s takovými aritmetickými představami, jakých nabyli v dětství, a s primitivními počtářskými návyky. Je nezbytné, jak to jednotlivci mezi učiteli již konají, po celou dobu vyučování na střední škole soustavně a plánovitě při probírání jiných partií elementární matematiky utvrzovati, prohlubovati a rozšiřovati početní znalosti žactva. Bylo by žádoucí zavésti v nejvyšší třídě soustavný obecný výklad o aritmetice s přesností žactvu této třídy dostupnou, ale to vyžaduje přidělení určitého vyučovacího období této látce a k tomu není v dosavadních osnovách pro matematiku na střední škole ještě přihlédnuto.

3. Úkol „methodiky aritmetiky" spočívá v tom, podati učiteli na základě pro školu platných předpisů osnov aritmetiky soustavu nejúčelnějších prakticky vyzkoušených method, jejichž upotřebení

může přispěti k vysoce kvalitnímu vyplnění úkolu osnov a k dosažení výše uvedených cílů vyučování aritmetice.

V tomto spise o „methodice aritmetiky“ najde učitel soustavný rozbor celého učiva a methodiku výkladu jednotlivých partií osnov aritmetiky, což mu poslouží jako vodítko při jeho praktické práci. Zdržíme se jen krátce u některých obecně platných methodických a didaktických otázek při vyučování aritmetice a zároveň snažně doporučujeme mladému učiteli, aby otázky obecně methodické studoval podle speciálních knih (viz „literaturu“ na konci tohoto spisu).

§ 2. Definice a pravidla ve vyučování

1. Vyučování aritmetice v 5. třídě stojí na základě té zkušenosti a těch znalostí, kterých žactvo nabylo v obecné škole; proto v prvních hodinách aritmetiky v 5. třídě musíme především obraceti zřetel k tomu, jaké vědomosti a dovednosti žáci si přinášejí z obecné školy. Musíme v jejich paměti obnovit a mimo to precisovat, doplnit, uvést v soustavu a zobecnit představy a pojmy z dřívějška známé a k nim připojit nové, tak aby aritmetické vyučování docílilo u žactva uvědomělého osvojení základních aritmetických pojmů čísla a veličiny, čítání a měření (známých z látky obecné školy), osvojení pojmu závislosti mezi veličinami, přímé a nepřímé úměrnosti a j.

2. Utvoření jasných a správných zobecnění, osvojení nového pojmu opírá se o znalost konkretních fakt, o živou představu těch různých předmětů a dějů, které jsou zahrnuty v daném pojmu. Jedním z prostředků pro správný vyučovací postup v aritmetice v 5. třídě jeví se názornost, pojatá v širokém smyslu slova, ne nutně spjatá s bezprostředním smyslovým nazíráním s užitím názorných pomůcek.

Konkretním se jeví žáku 5. třídy vše to, co je mu známo, co už dříve pochopil a osvojil si. Konkretní jsou pro žáka 5. třídy slova učitelova v tom případě, že budí v jeho vědomí jasné a plně názorné představy o popisovaném ději nebo výkonu, a v 5. třídě učitel má především pomocí slova nebo knihy — učebnice — vésti žáka od konkretního k abstraktnímu, seznamuje ho při tom s novými pojmy, s novou látkou.

3. Podstatu nového pojmu nebo nového početního pravidla vy-

světlujeme žactvu 5. třídy především cestou induktivní vycházejíce z rozboru jednotlivých konkretních příkladů. Čím větší pozornost věnuje vyučující výběru počátečních příkladů, tím konkretněji a reálněji si žáci představí a uvědoměleji si osvojí smysl prováděného výkonu, tím vědomější a trvalejší jsou jimi získané vědomosti a návyky, tím uvědoměleji se dojde k obecnému závěru.

S obecným tvarem pravidla a definice není radno pospíchat. Je třeba pečovat o to, aby žák si jasně představoval tu logickou cestu, kterou se dojde k závěru, celý myšlenkový pochod, a aby jej dovedl reprodukovat ze začátku tak, že odpovídá na otázky, později samostatně.

Při vyvozování pravidla, jímž se řídí ten či onen výkon, vybíráme i skutečnou konkretní látku i číselné údaje tak, aby pravidlo co nejzřetelněji vyniklo, abychom dostali co nejlepší jeho ilustraci, aby žáci v řadě probíraných příkladů rozpoznávali společný proces, který se jim potom jeví obecný a může být proto vysloven ve tvaru pravidla (viz příklady v příslušných kapitolách methodiky).

Pravidla tedy žákům nepodáváme v hotovém tvaru; odvození pravidla se jeví jaksi výsledkem jejich vlastní práce a zároveň se později pravidlo stává nástrojem (návykem), kterého užíváme při provádění výkonů a úprav takřka automaticky, neobnovujíce po každé znovu celý myšlenkový pochod. Takový postup pomáhá žactvu, že si uvědomí a zapamatuje pravidlo. Otázkami „proč?" „jak jsi usuzoval?" vedeme žactvo k odůvodňování úsudku a kontrolujeme, jak věc chápe. Nové výrazy také podle možnosti uvádíme v souvislosti s nashromážděnou zkušeností žactva. Tak na příklad definici zlomku podáme teprve tehdy, když žák s některými zlomky se už obeznámil; výrazy „čitatel" a „jmenovatel" zavedeme tehdy, když žák už trochu pochopil význam čitatele a jmenovatele atd. Správné a srozumitelné definice a pravidla, jakož i formulaci otázek žactvu, musí si učitel pečlivě promysliti při přípravě na hodinu.

Poznámka. „Methody neúplné indukce" — usuzování z jednotlivých případů na případ obecný, z fakt na jejich zobecnění — je třeba užívati opatrně; musíme ukázati, že platnost určité vlastnosti v řadě případů nezaručuje její platnost v jiných případech obdobných.

4. Odvození pravidla nebo znaku v aritmetické látce 5. třídy nezakládá se vždycky na rozboru jednotlivých konkretních příkladů, jako při odvození znaků dělitelnosti a j. Někdy, jako na př. při odvození pravidla pro násobení zlomku celým číslem, vyjdeme z definice násobení celým číslem, jinde se pouze přesvědčujeme o správnosti užívaného postupu na základě známého vztahu, na př. na vztahu mezi dvěma navzájem obrácenými početními výkony atd. Se všemi těmito elementárními postupy usuzování a odůvodňování žáci se postupně seznamují.

5. Po rozřešení každé nové otázky, po odvození příslušného zákona nebo pravidla přijde na řadu utvrzení znalosti ve většině případů tím způsobem, že se obecného zákona nebo pravidla užívá na jednotlivé příklady (převládá deduktivní postup myšlení), na vysvětlení konkretních fakt; při tom žáci poznávají nová konkretní fakta a rozřešení dané otázky se prohlubuje.

Důsledkem utvrzení je zapamatování. Základem úspěšného zapamatování se jeví plné pochopení obsahu látky, t. j. rozumové zapamatování. Pouze za této podmínky budou vědomosti žactva dostatečně pevné a trvalé, znalosti nebudou brzo zapomínány a nebude docházeti ke skutečnosti, že žáka lze snadno přiměti k pochybnostem o správnosti jím učiněného závěru nebo získané odpovědi.

6. Jak známo, fundamentem aritmetiky, jako každé matematické nauky, jest několik nedefinovaných primitivních pojmů, pro které se udává soustava axiomů, popisujících formální vztahy mezi nimi. Pro každý nově zavedený pojem je nutná přesná definice. Axiomy aritmetiky poprvé udal Grassmann (v 60. letech 19. století), ale problém základů aritmetiky nepovažuje se dodnes za úplně rozřešený. Nejužívanější je soustava primitivních pojmů a axiomů aritmetiky přirozených čísel, kterou udal italský matematik Peano:

Primitivní pojmy:

1. Číslo (přirozené).
2. Jednička.
3. Nástupce čísla.

Axiomy:

1. Jednička je číslo.
2. Každé číslo má jediné číslo za svého nástupce.
3. Jednička není nástupcem žádného čísla.
4. Různá čísla mají různé nástupce.
5. (Princip úplné indukce). Jestliže nějaké tvrzení je správné pro jedničku a jestliže ze správnosti tohoto tvrzení pro kterékoli číslo následuje jeho správnost pro nástupce toho čísla, je to tvrzení správné pro všecka čísla.

Na střední škole axiomy aritmetiky se nevykládají, ačkoli mlčky se jich užívá. Při školním výkladu aritmetiky určitá část užívaných pojmů podává se žactvu bez definice (viz kap. II, § 3 a j.).

§ 3. Výchovná práce

V procesu vyučování aritmetice uskutečňují se obecné úkoly komunistické výchovy žactva jako v celém učebně výchovném procesu, ale při tom se také užívá některých specifických zvláštností aritmetiky jako učebného předmětu.

1. Žák se vychovává s vědomím, že jeho žákovská práce je přípravou k práci pro rodnou zemi. Při praktickém užívání získaných vědomostí z aritmetiky, zejména při řešení úloh s konkretním obsahem (viz kap. XII, „Slovní úlohy“), sestavených podle číselných dat našeho socialistického budování, obrany naší vlasti, vychovává se u žactva láska k vlasti, důvěra v její moc a snaha býti účasten při provádění úkolů položených pro blaho vlasti.

2. Při vyučování aritmetice kladou se základy pro rozvinutí myšlenkových schopností žactva: vychovává se a pěstuje se uvědomělé, soustavné a stále odůvodňované usuzování, rozvíjí se schopnost všímati si obecného v jednotlivých zvláštních skutečnostech (zobecňovat) a užívati obecného zákona nebo pravidla na jednotlivé případy (indukce a dedukce). Při řešení aritmetických úloh důkladně se užívá methody analysy a synthesy a stále si všímáme veličin v jejich změnách a vzájemných vztazích, což slouží k vypěstování funkčního myšlení žactva.

3. Vyučování aritmetice musíme vésti tak, abychom u žáků pěstovali vědychtivost, zájem o vědění a úctu k práci. Vhodně organisované vyučování aritmetice vychovává návyk k samostatné práci, vytrvalost v jejím provádění, úsilí dovést práci až ke konci, rozřešit úkol, který je spojen s nesnází, pěstuje pocit zodpovědnosti za správnost obdrženého výsledku, zvyk kontrolovat výsledek a dovednost najít a opravit chybu, došlo-li k ní.

4. Při hodinách aritmetiky jako v jiných učebných předmětech rozvíjí se vůle, pamět, všímavost žactva, tvoří se návyk pravidelně pracovat, souvisle, jasně a přesně vyjadřovat svoji myšlenku (ústně i písemně).

5. V 5. třídě žactvo se asi po prvé učí číst v aritmetické knize; naučit získávat vědomosti vlastní četbou, to je veliká úloha stojící

před učitelem vychovávajícím rozumově vyspělého občana naší sovětské země.

6. Pečlivě promyšlenou prací, osobním příkladem učitel může docíliti velikých výsledků ve výchově žactva při vyučování aritmetice.

§ 4. Praktické návyky

1. Při probírání aritmetické látky mohou žáci získati mnohem více praktických návyků nežli se to děje v přítomnosti. Kromě toho, při správném pojetí vyučování aritmetice, dostatečném zřeteli k theorii, při péči o rozvoj rozumové činnosti žáků, v budoucím životě, až se toho ukáže potřeba, obecná matematická vyspělost pomůže žákovi samostatně v životní praxi užívati získaných vědomostí k řešení praktických otázek. Proto máme-li mluviti o jakémsi začátku přípravy žactva na praktickou činnost v průběhu vyučování, je třeba především mluvit o vysoce kvalitním pojetí vyučování aritmetice a o nerozlučném spojení mezi vyučováním a výchovou.

2. Řešení slovních úloh v aritmetice přispívá k rozvoji duševních schopností žactva, učí stanovit a analysovat závislosti mezi veličinami, přesně vyjadřovat svoje myšlenky, správně, hbitě a racionálně počítat, kontrolovat svou práci atd. a tím právě připravuje žactvo k praktické činnosti, k plnění praktických úkolů, které se jim v životě vyskytnou.

Při řešení úloh s geometrickým obsahem žáci získávají určité praktické znalosti o výpočtu obsahů, objemů, váhy, učí se prováděti výpočty s neúplnými čísly, která se vždycky vyskytují při řešení praktických otázek. Zejména je třeba obrátit pozornost k řešení dostatečného počtu úloh na určení skutečných rozměrů podle daného měřítka, plánu a mapy (a obráceně).

Veliký praktický význam má řešení úloh na procentní výpočty, o čemž je podrobně promluveno v kapitole „Procenta“.

3. Počtářská zručnost, dovednost počítati správně, hbitě a racionálně písemně, zpaměti a na ščotách je to prvé, co připravuje žactvo bezprostředně na praktickou činnost (v. dále). Je nezbytné naučit žactvo nazírat na počty s vyššího hlediska — nejenom počítat správně a hbitě, ale užívat nejracionálnějšího postupu v daném konkretním

případě (jak je zde ukázáno při početních výkonech s celými a lomenými čísly) a se splněním všech požadavků o zápise čísel a znaků výkonů. U žactva je nutné vypěstovat smysl pro potřebu vlastní kontroly, zkoušek správnosti výkonů, a dovednost zkoušky provádět, zejména dovednost vhodným zaokrouhlením dat přibližně odhadnout správnost výsledku, na př. při násobení 28 . 2,5 vyšlo 700; je jasné, že výsledek je nesprávný, neboť v odpovědi se nemůže dostat celé trojciferné číslo, ježto 28 . 3 dává toliko 84 a násobitel 3 je větší než 2,5.

4. Měřické návyky také potřebujeme ve všech odvětvích výroby, v zemědělství i v denním životě a při dalším studiu.

Žák 5. třídy musí solidně znát míry metrické soustavy, jejich měnitele a dovést převést míry z jedné jednotky na jinou (rozvody i převody).

K tomu cíli: a) je třeba dáti žákům konkretní představy o měrách; oni musí umět ukázat (a odhadnout) délku 20 cm, 40 cm, 1 m a j.; 1 cm^2, 1 dm^2, 1 m^2 a j.; b) učit přibližnému určování od oka rozměrů místnosti, okna, tabule, stolu, plotu atd., různých druhů hřebíků a j., pročež je třeba odhady, které žáci provádějí „od oka", ověřovat bezprostředně změřením; c) provádět ústní cviky, na př.: Kolik metrů je v $\frac{3}{8}$ km, v $\frac{2}{5}$ km? Jakou část kilometru tvoří 50 m? 300 m? atd. Kolik čtverečních metrů má 1 a? 1 ha? Kolikrát je 1 t větší než 1 q? Jakou částí metrického centu (nebo tuny) je 1 kg? Co měříme na litry? Co znamenají předpony kilo, deci atd? atd.

Ježto zapamatování měnitelů u plošných a prostorových měr působí žactvu potíže, je účelné užívati následujících zápisů: 1 m^3 = (1 . 100 . 100 . . 100) cm^3 = 1 000 000 cm^3; 130 cm^2 = (130 : 100 : 100) m^2 = 0,013 m^2 atd.

d) Znáti některé rozměry, na př. délku vlastního kroku, rozměry některých místností, vzdálenost od domu, lesa, pole a j. Vědět, jaký náklad je možné naložit na vůz, na nákladní auto, do vagonu; vědět, kolik semena je třeba na osev 1 m^2 a j.; znáti některé nejjednodušší poměry, lehko zapamatovatelné, byť i ne přesné, ale užitečné v těch případech, kdy je třeba hbitě přibližně určit velikost té či oné míry nebo váhy, na př.: 1 vědro $\doteq$ 12 l vody; do 1 vědra se umístí asi 8 kg bramborů; 1 m^3 cihel váží asi 1,6 t; vlhký písek je přibližně dvakrát těžší než týž objem vody atd.

Někdy váha polní úrody (a jiných věcí) udává se v pudech a je třeba ji převésti na kilogramy: 1 pud $\doteq$ 16 kg, 61 pud $\doteq$ 1 t atd.

e) Prováděti bezprostřední měření vzdáleností pomocí kroků, seznámiti se s užívanými nástroji (měřické pásmo).

Příklad: jestliže délka kroku je 0,7 m, pak 275 kroků dá vzdálenost 192,5 m. Skutečně:

10 kroků	7 m		200 kroků	140 m
20 kroků	14 m		60 kroků	42 m
40 kroků	28 m		10 kroků	7 m
60 kroků	42 m	z čehož	5 kroků	3,5 m
80 kroků	56 m			192,5 m
100 kroků	70 m			
200 kroků	140 m			

f) Seznámit se se soustavou smluvených značek na plánech a prováděti některé práce podle náčrtu, v prvé řadě jednoduchý a prakticky nezbytný pro každého pionýra náčrt odhadem od oka, podle kroků nebo podle doby pochodu.

§ 5. Samostatná práce ve vyučovací hodině

1. Matematické vyučování musí budit a pěstovat myšlenkovou samostatnost žactva, rozvíjet jejich tvůrčí schopnosti. Vědomosti a dovednosti vznikají při vyučování jako výsledek cílevědomě promyšlené snahy a cvičení; zejména dovednosti v provádění výkonů s čísly a řešení slovních úloh nelze docíliti bez vlastní činnosti, bez vytrvalé samostatné duševní práce. Pod učitelovým vedením žák se učí samostatně přemýšlet a pracovat. Je nutné pěstovati u žactva zájem o samostatnou práci; touhu samostatně najít řešení úlohy, zdůvodnění závěru, k němuž se došlo. Je nutné učit samostatnosti při domácí práci; proto při ukládání domácích úloh je třeba věnovat několik minut na nezbytné pokyny jak o podstatě úkolu tak i o jeho provedení. Je nutné tvořit u žactva návyk toho, aby sami svou práci kontrolovali, aby se přesvědčovali, zdali výsledek vyhovuje daným podmínkám a v případě chyby aby vytrvale usilovali o výsledek správný.

2. Při každé samostatné práci má se vyskytnouti žákům nová potíž, kterou oni musí samostatně překonat. Potíž musí býti přiměřená silám žactva, aby zjevná nemožnost ji zdolat nevedla k nechuti k práci nejen pro daný případ, ale i pro budoucnost.

3. Když žák pracuje u tabule, nevypracuje se u něho přesvědčení o vlastní síle, on nespoléhá na sebe, nýbrž na podporu s učitelovy strany. Proto je užitečné prováděti často krátké polosamostatné a samostatné práce ve třídě.

Velikou a velmi vděčnou látku k samostatné práci poskytuje řešení slovních úloh. V kapitole XII „Slovní úlohy“ jest vyloženo, jak lze přispěti k vypěstování samostatného tvůrčího myšlení žactva. Polosamostatná práce slouží jako přípravný stupeň k samostatné práci. Jestliže úloha předložená k řešení je obtížná (podle učitelova mínění) k samostatnému řešení pro značnou část žactva, tu učitel částečně pomůže při jejím řešení — práce bude polosamostatná. Taková pomoc se poskytne dříve, než žáci přistoupí k samostatnému řešení; její rozsah a obsah jsou rozmanité: učitel může se žáky probrati i plán řešení i výkony, kterými se úloha řeší; může probrati pouze plán řešení; může dáti jenom několik pokynů atd.

Jelikož samostatná práce, o které zde je řeč, má za svůj hlavní cíl učit samostatnému myšlení, udílí průběhem práce učitel dodatečnou pomoc slabším žákům, všímaje si jejich práce, dávaje nutné pokyny, uče je usuzovat.

4. Je nutné učit žáky, aby přezkoumávali odpověď, kterou musí dostat jako výsledek samostatné práce a vůbec je třeba, aby neužívali hned odpovědi udané ve sbírce úloh, nýbrž aby si napřed sami ověřili obdržený výsledek; někdy ať pouze uváží, je-li výsledek možný, není-li příliš veliký nebo příliš malý, jindy ať provedou přibližný odhad zaokrouhlujíce čísla, se kterými počítali atd. V kapitole „Slovní úlohy" jsou udány konkretní příklady, jak to prováděti. Je třeba poznamenat, že ověřování správnosti obdrženého výsledku a s tím spojený rozbor úlohy jsou jedním z prostředků, jak dosáhnouti uvědomělého a samostatného promyšlení a řešení úloh.[1])

§ 6. Opakování

1. Obecně známý je význam opakování při všech vyučování, pro upevnění získaných vědomostí, bez čehož není možné pochopení a osvojení nových otázek.

Jednou z nejdůležitějších starostí učitele musí býti, aby nedopustil, aby žáci zase zapomněli to, čemu se učí; proto po celý vyučovací rok, kdykoli přistupujeme k novému bodu osnovy (při tom vždy je třeba opírati se o vědomosti dříve získané), máme připomínat a zopakovat se žáky určité věci z předchozí látky spojené s novou látkou, se

[1]) Podrobněji o rozvíjení samostatného myšlení žactva při vyučování v. literaturu o obecných vyučovacích otázkách.

kterou se seznamují. Tak, na příklad, rozšiřují se vědomosti žactva o výkonech s čísly: při přechodu k výkonům s obyčejnými zlomky zopakuje se vše, co už je známo o výkonech s celými čísly; při učení výkonům s desetinnými čísly znovu se kladou tytéž otázky — o zákonech pro výkony, o závislosti mezi danými čísly a výsledkem výkonu, o normálním pořádku výkonů atd. Toto opakování nesmí býti pouhou reprodukcí jednou probraného; musí pokaždé vnésti něco nového do vědomostí dříve získaných, doplňovati je, prohlubovati, uváděti v soustavu, vyžadovati od žactva určitého rozumového úsilí.

2. Na začátku prvého čtvrtletí 5. třídy stojíme před úkolem obnovit v paměti žactva přicházejícího z obecné školy vědomosti, které mají, uvésti je v soustavu, vyplnit vyskytující se mezery. Tomu se věnuje speciální doba. Tyto první opakovací hodiny aritmetiky v 5. třídě (po seznámení s vědomostmi žactva) je nutné vésti tak, aby se nezadržoval pokrok žáků, aby se nenudili opakováním věcí známých a aby se pokud možno položil zobecňující základ pod vědomosti žáků. Na příklad, žáci se na obecné škole seznámili s dekadickou číselnou soustavou; v 5. třídě je účelné položit otázku o principech číselné soustavy a o číselných soustavách s libovolným základem. Pokyny k úlohám jsou udány v kapitole II; tamtéž je ukázáno, že při opakování je užitečné sdělovat žákům stručné historické poznatky a jsou tam uvedeny příklady themat.

Kromě toho je třeba v dalším nejednou se vraceti k takovým otázkám, které obyčejně dělají potíže, zejména dávati cvičení, která vyžadují převodu a počítání s měrami různých jednotek, násobení a dělení několikaciferných čísel, u kterých se vyskytuje číslice nula, případy násobení nulou a jedničkou, dělení nuly číslem atd.

Plán soustavného opakování je třeba si sestavit záhy, na počátku roku, při rozvržení celého učiva aritmetiky v 5. třídě; je třeba si také zaznamenat čísla numerických i slovních úloh, které budou řešeny za účelem opakování průběhem roku. Toho plánu je třeba se držet při pracovním procesu.[2])

[2]) V této „Methodice aritmetiky“ je věnována velká pozornost opakování oddílu „Celá čísla“. Učitel vybírá takové otázky, jaké jsou přiměřené a vhodné vzhledem k podmínkám, za nichž pracuje. Kromě toho, methodika výkladu veškerých otázek oddílu „Celá čísla“ neopakuje methodiku těchto otázek pro obecnou školu.

3. Veliká pozornost má býti v plánu opakování věnována řešení slovních úloh. Dovednost v řešení takových úloh nelze stále ještě pokládat za uspokojivou. Methodický průzkum vyučování slovním úlohám v 5. třídách a rozbor kontrolních prací ukazují, že ve většině případů žáci mající známku 3 řeší pouze „rozložené" úlohy (ve kterých znění úlohy napovídá pořádek výkonů) s velmi omezeným okruhem vyskytujících se v nich závislostí. Jednou z příčin toho, soudě z prohlédnutých sešitů, jeví se krajně nepatrný počet slovních úloh ve srovnání s počtem ryze početních příkladů v roce řešených, a zejména je nepatrný počet řešených „obtížnějších" úloh, vyžadujících od dětí matematického důvtipu a zároveň přispívajících k rozvoji duševních schopností dětí.

Někdy se v 5. třídách vyskytne část žáků, kteří vůbec neumějí řešit slovní úlohy a bohužel učitelé staví práci při řešení takových úloh orientujíce se podle té části a tím právě zadržují druhou část třídy v jejím rozvoji a ponechávají celou třídu na nižší úrovni, než by mohla být při jiném způsobu práce, totiž při vyrovnávání třídy cestou individuální učitelovy práce s méně připravenými žáky.

Je nevyhnutelné značně rozmnožit počet řešených slovních úloh, zvýšit stupeň jejich obtížnosti a pečlivě si promýšlet methodické otázky týkající se řešení takových úloh. Za tímto cílem v plánu opakování, sestaveném na začátku roku (paralelně s plánem probírání nových bodů osnovy) jest zaznamenati určitý počet slovních úloh přibližně tak, aby na jednu vyučovací hodinu připadla jedna opakovací slovní úloha řešená doma nebo ve třídě.

a) Na začátku školního roku učitel 5. třídy nemá v předepsaném učivu pro řešení se žáky složené aritmetické nebo typové úlohy (o takových jmenovitě tu mluvíme, ne o slovních úlohách na jednotlivé výkony). Prohlídka sešitů žáků 5. třídy mnoha škol ukazuje, že po celou tu dobu až do probrání všech výkonů s obyčejnými zlomky řeší se skoro výhradně slovní úlohy na jeden výkon. Za tuto dobu (ba ještě po hlavních prázdninách) žáci si odvykají řešení slovních úloh. Proto je třeba do tohoto časového intervalu umístit plán opakování slovních úloh za oddíl „Celá čísla" (viz kapitolu „Slovní úlohy").

Řešit mnoho slovních úloh stejné struktury jednu po druhé není účelné, protože v takovém případě místo rozvoje usuzovacích schopností pěstuje se bezmyšlenkovité procvičování určitého „typu", proto jest dáti přednost střídání úloh řešených rozmanitými methodami a řešení úloh, ve kterých základní methoda je komplikována doplňujícími podmínkami.

b) Řešení slovních úloh na všecky výkony s celými čísly může se zakončit v době, kdy se proberou do konce všecky čtyři výkony s obyčejnými zlomky a přistupuje se k bodu „řešení slovních úloh na čtyři výkony s obyčejnými zlomky".

V důsledku provedeného opakování budou žáci připraveni k této práci.

c) V době probírání „desetinných čísel" slovní úlohy (a příklady) na výkony s obyčejnými zlomky slouží k opakování a upevnění získaných vědomostí a dovedností v tomto oddíle. Potom, při řešení „slovních úloh na čtyři výkony s desetinnými zlomky" žáci po třetí opakují rozmanité methody řešení aritmetických úloh.

Soustavné plánovité opakování průběhem celého školního roku zabezpečuje úspěch práce.

§ 7. Názornost. Diagramy. Grafy

1. Na obecné škole a v nižších třídách střední školy při vyučování aritmetice značně se užívá názoru. To je pochopitelné, neboť tehdy se tvoří u žactva první představy o matematických pojmech a čím jasnější a názornější jsou vjemy, které dětem vštípíme (využije se nejen sluchová, ale i zraková a motorická pamět), tím trvalejší představy u nich vyvineme; proto se v nižších třídách obecné školy vydatně užívá početních a měřických pomůcek a zařízení při vyučování aritmetice, jak při vysvětlování nově zaváděných pojmů a pravidel, tak při opakování, při zjišťování hloubky chápání.

Ale již ve 4. třídě při provádění výkonů s několikacifernými čísly žáci provádějí výpočty s nepojmenovanými čísly bez potřeby názorných pomůcek; tím méně je jich třeba v 5. třídě a dále.

V „Methodice aritmetiky" uvádějí se v příslušných kapitolách doporučované názorné pomůcky: abaky, pravítka, ščoty, úsečky (zejména při řešení slovních úloh, viz kap. XII „Slovní úlohy", § 7).

2. Pro rozvoj představivého myšlení žáků je užitečné zobrazovati názorně, graficky, vyskytující se veličiny a jejich vzájemné vztahy. Na obecné škole se žákům dávají názorné představy o číselné hodnotě veličin a o porovnávání veličin pomocí diagramů ve tvaru úseček, obdélníkových pásů nebo kruhových výsečí.

V 5. třídě je třeba pokračovat ve čtení diagramů a ve znázorňování číselných hodnot porovnávaných veličin diagramy sestrojovanými v určitém měřítku, a to na konkretním materiálu aktuálním a zajímavém pro žáka (12 až 13letého) naší sovětské školy.

Jest užitečné obeznámit žáky s „procentním úhloměrem" (kapitola „Procenta", § 7) pro znázornění procentového poměru číselných hodnot veličin.

3. Žáky 5. třídy můžeme obeznámit i s ideou názorného způsobu studia kteréhokoli zjevu — grafického způsobu. Graf ukazuje názorně průběh jedné veličiny v závislosti na druhé (funkční závislost). Pro sestrojování grafu není nutné uváděti žákům 5. třídy názvy: souřadnice, soustava souřadnic atd.

Postačí naučit **čtení, diskusi a konstrukci** grafu složeného z úseček narýsovaných v určitém měřítku na čtverečkovaném papíře. Lomená čára spojující horní krajní body svislých úseček ukazuje průběh změny zkoumané veličiny. Svislé úsečky nemusí se rýsovat, stačí vyznačit jejich horní krajní body, jimiž se vede graf. Na vodorovnou osu nanášejí se postupně hodnoty jedné veličiny, na svislou osu čísla odpovídající číselným hodnotám závislé veličiny.

Poznámky: 1. Měřítka ve vodorovném a svislém směru je možno volit navzájem různá, ježto vyšetřované veličiny nejsou obě téhož druhu.

2. Jestliže na vodorovné ose bereme menší intervaly (vzájemně bližší hodnoty dané veličiny), lomená čára na grafu více se přiblíží tvaru křivky. Na př. měříme-li každou hodinu teplotu vzduchu a naneseme na milimetrový (nebo čtverečkovaný) papír údaje na teploměru, dostaneme graf ve tvaru ostře lomené čáry; měříme-li každou půlhodinu, tu graf — lomená čára — bude se jeviti méně ostrý, bude plynulejší. Automatické zařízení zaznamenávající nepřetržitě teplotu vzduchu rýsuje více méně hladkou křivku.

3. Graf nejen že dává názorný obraz změny zkoumané veličiny, nýbrž dovoluje v některých případech výpočet (s dostatečnou přesností) některých neznámých hodnot zkoumané veličiny, ležících mezi dvěma známými hodnotami této veličiny (interpolace).

4. Užitečné je vyšetřovat (nebo sestrojit podle jízdního řádu) graf železničního provozu na některém dílu trati (na př. od města A, kde žáci žijí, do města B vzdáleného 100 km a zpět) a určit podle grafu, které vlaky se potkávají a v jaké vzdálenosti od A; v kolik hodin určitý vlak projíždí určitou stanicí atd.

§ 8. Počítání zpaměti. Racionální methody

1. Je obecně známo, že počítání zpaměti má pro vyučování matematice velmi velký praktický i obecně vzdělávací význam jak pro vypěstění racionálních početních návyků nezbytných v životě a pro další vyučování, tak i pro rozvoj chápavosti, kombinačních schopností žáků. Cviky v počítání zpaměti rozvíjejí rychlost orientace i paměť žáků, učí stálé pozornosti při výkonu práce, dávají žákům možnost projevit vlastní iniciativu.

Na obecné škole se věnuje počítání zpaměti dosti mnoho pozornosti, prakticky žák se tu seznamuje v každé hodině aritmetiky se způsoby pamětného počítání. Hlavním nedostatkem této práce (stejně i v 5. třídě) jeví se to, že počítání zpaměti se provádí formálně, stává se samostatným cílem ve věnovaných jemu 5 až 7 minutách vyučovací hodiny a velmi zřídka se nacvičovaných způsobů ústního počítání užívá při další práci v aritmetice, tím méně pak v jiných předmětech a v životě. Tak na př. žáci v hodině právě skončili pamětné cviky na procenta s obyčejnými i desetinnými zlomky: 20%, 25%, 5%, 4% atd.; potom přistoupili k řešení slovní úlohy, ve které bylo třeba najíti 25% ze 36,8. Místo toho, aby hbitě ústně provedli 36,8 : 4 = 9,2, dají se do písemného násobení 36,8 × 0,25 atd.

Je nezbytné, aby se procvičených obratů při počítání zpaměti užívalo při výpočtech, kde jen je to možné.

2. Je nutné pěstovat u žáků „bystrozrakost", dovednost, všímat si u daných číselných kombinací možnosti zjednodušení, zkrácení počtu, vtipných obratů při výpočtu jak ve školské práci tak i v životě. Proto učitel aritmetiky musí vytrvale a soustavně provádět příslušnou práci při procesu vyučování aritmetice. Jednou částí každé hodiny má býti počítání zpaměti; ústní racionální způsoby výpočtu mají provázeti každý výpočet v numerických příkladech i v úlohách slovních, neboť jakýsi díl práce vždycky se dá provésti zkráceným způsobem nebo zpaměti.

Nicméně po vší práci v 5. třídě způsoby výpočtu, které žáci ovládají, budou trochu primitivní a naivní; na to, aby žáci vycházející ze střední školy v plné míře ovládali racionální způsoby výpočtu, je nutné výcvik v racionálním a zejména ústním počítání v rozšířeném a prohloubeném tvaru vésti stále, kde jen je možné, ve všech třídách střední školy ve všech oddílech matematické látky.

3. V této methodice v každém oddílu počítání s celými čísly i zlomky, u procentových výpočtů a jinde uvádějí se vzory ústních cviků zde probíraného druhu. Sluší poukázat na to, že mezi způsoby ústních výpočtů námi doporučovanými nejsou umělé obraty (užívané specialisty počtáři), se kterými lze žáky seznámiti, přejí-li si toho, v práci mimo třídu.

Při výkonech s celými čísly probírají se hlavně tytéž způsoby výpočtu, jaké jsou žákům známy z látky obecné školy, ale na obecné škole se takové způsoby udávají obyčejně bez odůvodnění a správnost obdržených výsledků se potvrzuje bezprostředním výpočtem (písemným nebo jiným ústním). V 5. třídě žáci se seznamují se zákony sčítání a násobení, s pravidly pro přičítání součtů a rozdílů, s násobením a dělením součinem, se závislostí mezi danými čísly a výsledkem výkonu a j.

Těmito vlastnostmi se odůvodňují všecky uváděné způsoby ústního a racionálního výpočtu. Logickým rozborem takových racionálních výpočtů (hlavně s nevelikými čísly) stává se žákům názornou podstata a smysl matematických závislostí a výkonů.

V 5. třídě (ve srovnání s obecnou školou) rozšiřuje se pole číselných kombinací, s kterými mohou žáci operovat: ve výkonech s obyčejnými a desetinnými zlomky, v procentních výpočtech, při hledání dělitelů a násobků čísel. Při vyučování těmto oddílům, kde je to možné, sluší zaváděti a vysvětlovati žákům příklady na ústní i zjednodušené výpočty (v. příslušné §§ „methodiky“). Větší složitost cvičení ukládaných v 5. třídě jeví se také v tom, že při řešení jednoho příkladu mnohdy se užije ne jednoho, ale dvou nebo i více obratů, na př. i přemístění sčítanců i seskupení jich, i zaokrouhlení daných čísel i rozkladu na sčítance a j.

Učitel 5. třídy musí obraceti dostatečnou pozornost na racionalisaci počtářských návyků žactva při výkonech s celými čísly, neboť při výkonech se zlomky se užívá v podstatě týchž obratů.

4. Rozdíl mezi ústními a písemnými výpočty se někdy vidí pouze v tom, že prvé se provádějí bez zápisu. Rozdíl není pouze v tom: podstatný rozdíl je ten, že při ústním výpočtu se neužívá pravidel pro písemné počítání, pravidel, jež pramení z dekadické soustavy číselné a z místních hodnot cifer. Mnohdy, žádajíce od žáků vypočísti 325 — 170 zpaměti, vidíme, jak počítají na „myšleném papíře", takřka prstem po něm jezdíce:

$$\begin{array}{r} 325 \\ -\ 170 \\ \hline 155 \end{array}$$

I když nic nezapisují, přece v tomto případě postupují cestou písemného počítání. Způsob ústní: 325 — 100 — 70 nebo 325 — 200 + 30 a pod.

Veliký výchovný význam počítání zpaměti tkví zejména v tom, že při něm žák pracuje „s číslem" a ne „s ciframi"; musí se vmyslit do sestavy daných čísel, do jejich individuality, a potom užít té methody výpočtu, která v daném případě je nejracionálnější. Je nutné kombinovati v hodině písemná cvičení s ústními. Někdy se stává, že provádění ústních cvičení je pro žáky namáhavé, ale jestliže daná čísla zapíšeme a ulehčíme jim práci zrakovou představou, tu výpočet sám už lehko provedou ústně; výsledek rovněž lze zapsati. Takové výpočty se obyčejně nazývají „polopísemné" (název zavedený Gol'denbergem).

Velmi užitečné je prováděti ústní řešení slovních úloh s malými čísly za účelem tvoření zřetelných představ o funkční závislosti mezi veličinami vyskytujícími se v podmínkách úlohy a rozvoje důvtipu (v. kapitolu „Slovní úlohy").

§ 9. Písemná cvičení. Zápisy

1. O nejlepších methodách probírání jednotlivých otázek a vysvětlení theorie, jakož i o promyšleném výběru cvičení různých stupňů obtížnosti jedná se ve všech kapitolách této methodiky aritmetiky, a zde se nebudeme zdržovati u těchto otázek. Methodám pro řešení slovních úloh je věnována separátní kapitola methodiky. Velký

počet řešených cvičení a stálé opakování hrají důležitou úlohu při tvoření návyků a utvrzování vědomostí žactva v každém oddíle aritmetiky.

Řešení cvičení v hodinách aritmetiky pomáhá, jak bylo vyloženo výše v § 2, při výkladu jednotlivých bodů osnovy; dále se řešení cvičení uplatňuje při utvrzování probrané látky a při odstraňování nedostatků a bezradnosti žáků — v době opakování. Ač takové rozdělení je umělé, neboť ve většině případů cvičení, řešená s určitým cílem, mají nepřímo vliv zároveň v jiných směrech, přece jen kvalitnost výběru cvičení je závislá na stanoveném hlavním cíli a podle něho se určuje, jakou dobu jakým cvičením věnovati.

V každé kapitole „Sbírky úloh" z aritmetiky se vyskytují, přiměřeně k bodům osnovy, cvičení, která slouží jednak na vysvětlení, jednak na utvrzení látky, která se probírá. Z tohoto celkového počtu cvičení může učitel vybrat několik úloh početních i slovních, s jejichž řešením jsou spojeny určité potíže (na příklad u celých čísel: násobení čísel, jejichž některá cifra je nula, dělení v případech, kdy se vyskytne nula mezi ciframi podílu, u zlomků určení zlomku čísla a určení čísla ze známé velikosti jeho zlomku atd.) a úlohy toho druhu, u jakého byly u jednotlivých žáků shledány nevědomosti a nejistota. Tato cvičení může učitel ukládati žákům jako dodatečnou práci při poskytování pomoci opožděným. Rovněž je žádoucí předem vybrat řadu cvičení s určitými číselnými kombinacemi za tím účelem, aby je čas od času, když příslušná část učiva aritmetiky je už probrána, ukládal žákům k ústnímu i písemnému řešení s cílem opakování a utvrzení probrané látky. Takovým opakovacím cvičením ze zakončených oddílů učiva je možno soustavně věnovat, jak pověděno výše, 5 až 10 minut každé hodiny.

2. Písemné řešení složených početních úloh také má velký význam při vyučování aritmetice, neboť spojuje theorii s praxí, ulehčuje pochopení theoretické látky, tvoří nezbytné návyky, rozvíjí schopnost důsledně myslit, učí plánovitě, soustavně a zřetelně si uvědomovat smysl početních výkonů. Nezřídka žáci, ač umějí prováděti uspokojivě jednotlivé výkony, nedojdou ke správnému konečnému výsledku proto, že nedovedou soustředit pozornost na delší čas; chyby z nepozornosti jsou častým zjevem; při řešení složených početních úloh se

pěstuje soustředivost pozornosti, zodpovědnost za správnost celku práce i každé její části (žáci, když jim vyjde nesprávný výsledek, často se vymlouvají, že „postup byl správný“). Mnohdy řešení složeného příkladu se nedokončí vinou nepořádného a nedbalého zápisu, ve kterém žák sám se nevyzná.

Učitel má psáti na tabuli vzory zápisu, schema (soustavu) sledu výkonů při řešení slovních a složených početních úloh a vyžadovat od žáků, aby se v podstatě přidržovali jím udaných pokynů. Dobře uspořádaný zápis vůbec činí lehko přehledným celý pochod řešení slovní nebo početní úlohy, přispívá k naučení, neboť pomáhá paměti i představě svou názorností.

Dobře uspořádaný zápis ulehčuje učiteli práci při prohlížení sešitů a zároveň žáka vychovává, neboť ho učí soustavě a pořádku. Zřetelný, promyšlený zápis vyjadřující pochod úsudků má nemálo důležitý význam i pro hlubší a vyspělejší představu o probírané látce i pro rozvoj logického myšlení žáků; naopak nepořádný zápis často svědčí o myšlenkové nejasnosti a je pramenem chyb.

3. Ve všech kapitolách této „Methodiky aritmetiky“ se při probírání příslušných úprav a výkonů udávají vzory zápisu. Zde učiníme několik jednotlivých poznámek: učitel je povinen vyžadovat od žáků správné psaní cifer; musí naučit žáky, aby dbali správného užívání znamení „=“ a aby v případě pochybnosti se přesvědčovali, zdali čísla po obou stranách toho znamení jsou si rovná; musí žáky vésti k tomu, aby v případech, kdy nelze celý výraz umístiti na jediný řádek, přechod od řádky k řádce prováděli pouze v takovém místě, kde jsou znamení „=“, „—“ a „+“, při čemž je radno doporučovat, aby přerušení se dálo pokud možno řidčeji u znaků „+“ a „—“, tak aby na každém řádku byl výraz zakončeného významu; s týmž cílem je účelné při řešení početních i slovních úloh psáti každý nový krok na nový řádek, a ne do řádku vedle sebe, a pokud možno oddělovati jednotlivé sloupce svislými čarami. Odpověď je dobře vyznačit buďto podtržením nebo uzavřením do rámečku. Je třeba se vyhýbat nemotornému zápisu. Každé opisování, které není spojeno s vytyčením nové etapy práce, je zbytečné, proto jsou zbytečné i koncepty. Žáky musíme učit, aby si napřed pečlivě promýšleli, co chtějí zapsat, aby

nepotřebovali často opravovat a dělat škrty nesprávných zápisů v sešitě.

4. Příklad (Berezanskaja, Sbírka úloh, kap. V, č. 1471).

$$\frac{25{,}2 \,.\, 0{,}15 \,.\, 0{,}28}{1 - 0{,}172 : 0{,}2} : 21 + \frac{3{,}7 \,.\, 2{,}53}{37 \,.\, 0{,}253} + \frac{15 : 1{,}2 - 0{,}468 : 0{,}04}{0{,}048 : 0{,}015} = 1{,}61.$$

Poznámky: 1. Když diktuje příklad pro zápis na tabuli a do sešitu, učitel má dávati vzor čtení (diktování) číselných formulí, což je základem pro další práci, v níž budou formule s písmeny.

2. Nežli se přistoupí k výpočtu, je nutné:

a) ústně určiti pořádek provádění výkonů;

b) pozorovat daná čísla, nemají-li nějaké zvláštnosti, které dají možnost nejracionálněji postupovat.

1. Sčítanec. Nejprve je třeba vypočítati jmenovatele — možná že se dá krátit s čitatelem daného zlomku.

1. Polopísemně 0,172 : 0,2 = 1,72 : 2 = 0,86.
2. Polopísemně 1 — 0,86 = 0,14, což se dá krátit s číslem 0,28; tedy
3. 25,2 . 0,15 . 2 = 25,2 . 0,3 = 7,56
4. 7,56 : 21 = 0,36 (do řádky).

2. sčítanec. Žák musí rázem uvážiti, že výsledek = 1.

3. sčítanec. Všecky výkony je možno provést do řádky.

5. 15 : 1,2 = 150 : 12 = 12,5
6. 0,468 : 0,04 = 46,8 : 4 = 11,7
7. 12,5 — 11,7 = 0,8
8. 0,048 : 0,015 = 48 : 15 = 3,2
9. 0,8 : 3,2 = 8 : 32 = 0,25 (rázem je jasné, že 8 je $\frac{1}{4}$ ze 32.

Na konec:

10. 0,36 + 1 + 0,25 = 1,61.

Případy vyžadující zápisu do sloupce jsou probírány v příslušných kapitolách.

3. Všecky prováděné úpravy a výpočty musí žák provázeti slovními vysvětlivkami. Tím se docílí jasného chápání učiva, pěstuje se soustavnost myšlení a rozvíjí se matematická řeč žactva.

Je třeba si položit za úkol výcvik žáků v ústním vyjadřování jak v odpovědích na otázky, tak i v krátkých souvislých výkladech, aby se u nich vytvářela dovednost obsažně, logicky, zřetelně a stručně vyjadřovat svoje myšlenky.

4. Mnohdy žáci negramaticky vyslovují a píší pojmenování výkonů a jejich složek: „slogajemoje“ (spr. sl*a*gajemoje), „vyčetajemoje“, „vyčitatel’“ (spr. vyč*i*tajemoje), „množetel’“ (spr. množ*i*tel’), „množemoje“ (spr. množ*i*moje). Učitel má vypisovat na tabuli všecky zaváděné výrazy. Je užitečné vyvěsit ve třídě tabulku správných pojmenování výkonů, jejich složek a j.

§ 10. Čtení. Mluva žáků

1. Jedním z nejdůležitějších úkolů při vyučování matematice je vštípit žákům chuť ke čtení matematické knihy (k zabývání se matematikou) a naučit je číst matematickou knihu. V hodinách aritmetiky v 5. třídě učitel má o to pečovati. V kapitole „Slovní úlohy“ jsou podrobně vyloženy methody, jak učit žáky, aby s porozuměním četli text úloh ve sbírce; týchž method užíváme, abychom je naučili číst v učebnici: buďto učitel, když vysvětlí látku, vyzve žáka, aby nahlas přečetl příslušný text z učebnice a opravuje, kde je třeba, nebo vyzve ke čtení textu ještě nevysvětleného nebo se přesvědčí, jak žáci pochopili text z učebnice, který četli „pro sebe“ atd.

2. Nesluší omezovati žákovskou četbu na učebnici a sbírku úloh, je třeba jim doporučovat četbu populárních knih o aritmetice (v. o tom pokyny) a organisovat jejich čtení mimo třídu.

Poznámka. Učitel aritmetiky musí znáti učebnici a sbírku úloh z aritmetiky, které žáci užívají, ve všech podrobnostech.

3. Vyvíjení řeči, v daném případě matematické řeči žáků, jest jedním z úkolů matematického vzdělání. Žáky musíme učiti (toho nedocílíme naráz) správné a přesné mluvě (říci to, čeho je třeba, a nic zbytečného). Při tom tak jako ve všech jiných případech učitel musí býti žákům vzorem a pečlivě dbát vlastní řeči i řeči žáků: nedopustit nesprávný přízvuk, nesprávné pádové koncovky (zejména u číslovek), nesprávné výrazy („szadi nuli“, „vyčitatel’“ atd.), nesprávně tvořené věty atd.

Učitel rozvíjí a obohacuje řeč žáků, jestliže svou vlastní řečí dává vzor zřetelné, přesné, správné a zároveň ne jednotvárné mluvy ve formulacích, rčeních a ve sledech úsudků. To přispívá současně k jasnosti chápání a k rozvoji matematického myšlení žactva.

§ 11. Plán učitelovy práce

Nežli přistoupí k výkladu kterékoli partie osnovy aritmetiky, sestaví si učitel pracovní plán, který ho může vésti při splňování jeho úkolu. V plánu je třeba vytknouti dobu, stanovenou pro naučení jednotlivým bodům a zkoušení; v něm musí býti udány paragrafy učebnice, které budou probírány, a nezávazně — čísla příkladů a úloh ze sbírky, jež budou žáky řešeny ve třídě i doma. Tamtéž mohou býti uvedeny, jako doplněk k úlohám ze sbírky, úlohy aplikované a jiné, které učitel považuje za vhodné k řešení se žáky. V plánu mohou býti udány konkretní methody, jak bude probírána ta či ona otázka, na příklad, jakých názorných pomůcek bude při dané práci použito, nebo kdy dojde k samostatnému cvičení žáků v řešení úloh pod učitelovým dohledem. Hlavní požadavek je tento: plán učitelovy práce musí býti vodítkem pro vyučování, vystihujícím skutečné podmínky práce, musí býti zajištěna možnost jej provésti; v žádném případě sestavený plán nesmí se redukovat na formální vyplnění rubrik (zápis rubrik vůbec není povinný). Po skončení práce je třeba zapsat změny, ke kterým došlo při provádění plánu, byly-li nějaké; změny v čase, nebo v methodice vyučovací, nebo v počtu řešených cvičení atd.

§ 12. Příprava na hodinu

Existence dobře promyšleného plánu ulehčuje učitelovu přípravu na hodinu, která má často rozhodující význam pro jakost vyučování. Při přípravě na hodinu učitel rozváží, co a jak bylo probráno v předcházejícím vyučování, jaké obtíže se při práci vyskytly, jaká pozorování učinil jednak s jednotlivými žáky, jednak se třídou jako celkem. Naznačí si podle učebnice látku pro následující vyučování, vybere a připraví si praktická cvičení. Je žádoucí, aby učitel při přípravě na vyučování si prohlédl, jak je daná otázka vyložena i v jiných pramenech, mimo učebnici, a zejména aby si pročetl příslušnou kapitolu z „Methodiky aritmetiky". (Předpokládá se, že s celkovým pojetím vyučované partie v methodice aritmetiky učitel se obeznámil už dříve.)

Neobyčejně důležité je, aby si učitel sám prořešil ta cvičení a úlohy, jež si vyznačil k probírání se žactvem. Pouze za této podmínky bude s to vybrati nejpotřebnější cvičení, přiměřeně k cíli hodiny je rozebrat podle stupně obtížnosti, míti k disposici nezbytné odpovědi při jednotlivých částech výpočtu, přesně stanovit dobu potřebnou k jejich řešení atd. Uschoval-li si krátký plán z dřívějšího probírání této látky, má nyní tuto práci ušetřenu.

Učitel si má předem nachystat (bude-li jich třeba), ty učebné pomůcky, tabulky, kterých hodlá užíti ve vyučovací hodině. V důsledku přípravy učitel musí získati jasnou představu o obsahu, vzájemné souvislosti a přibližném trvání každé etapy práce v hodině; hlavní otázky, které hodlá se žáky rozbírati; východisko a postup usuzování nebo výkladu; závěry, ke kterým se má dojít; cvičení, která budou žáky řešena u tabule a samostatně; schema zápisů na tabuli a rovněž úlohu, kterou zadá žákům k práci doma.

Je záhodno včas si nachystat plán kontroly domácího cvičení; rovněž je třeba si rozvrhnout, kteří žáci při tom budou vyvoláni, na koho z nich je třeba v určitém čase obrátit pozornost atd.

Je velmi žádoucí, aby učitel si připravil krátký písemný přehled hodiny a do něho si zapisoval poznámky o změnách, došlo-li k nějakým průběhem hodiny, zejména případy nedostatku nebo nadbytku určené látky. Ponenáhlé sbírání zkušenosti zaručí a zlepší kvalitu jeho příští práce a naučí ho využíti úspěšně celé vyučovací hodiny.

§ 13. Vyučovací hodina

Vyučovací hodina je základem celého školního vyučování a na její jakosti závisí výsledek učení, prospěch žactva. Obsahově dobrá příprava na hodinu ještě nezaručuje, že hodina se plně povede. Výše jsme učinili několik poznámek rázu didaktického. Doplníme je.

1. Aby žáci mohli uvědoměle zaujmouti kladný postoj k práci, musí vždy důkladně vědět, jaká otázka je toho času na programu. Když přistupuje k probírání nové otázky, musí učitel jasně vysvětlit žákům, jakým věcem se budou učiti a jaké je jejich spojení s dřívější látkou.

2. Při vedení hodiny sluší užívati rozmanitých method a druhů práce podle toho, co má býti předmětem hodiny. Obyčejně schema

hodiny, jejímž obsahem je probírání nové látky, je asi takové: otázky z látky předcházející hodiny nebo prohlídka domácího cvičení (asi 5 až 10 minut), potom centrální část hodiny — vysvětlení nové látky a provedení ilustrativních příkladů (asi 30 minut); shrnutí látky a zadání domácího cvičení (asi 5 nebo 10 minut, doprovází-li se návodem nebo předběžným rozborem zadávaného textu). Je-li obsahem hodiny získání zručnosti pomocí cvičení, pak centrální částí hodiny budou numerické a slovní příklady řešené žáky u tabule a samostatně pod učitelovým dohledem.

Obsah některých aritmetických hodin se doplňuje rozborem didaktického materiálu (názorných pomůcek), prováděním grafických ilustrací atd. Vzory názorných pomůcek a ilustrací v kurse aritmetiky udáváme v příslušných kapitolách.

3. Methodika vedení vyučovací hodiny musí zajistit činnou účast žactva na práci. Ve školní praxi je zvláště rozšířena hodina vedená heuristickou methodou otázek a odpovědí. Užívá se jí při odvozování nového pravidla, při důkazech, při opakování a prohlubování probraného, při rozboru slovních úloh.

Aktivnosti dětského myšlení dosáhneme v důsledku správně promyšleného sledu otázek, vedoucích k určitému závěru, proto si učitel musí pečlivě připravit otázky, kterými bude objasňovat učebné thema, aby nic nezůstalo nevysvětleno, aby pozornost žáků byla obrácena ke každé podrobnosti, kterou mají znát.

V praxi se otázky mnohdy kladou nepodařeně, ježto nevedou žáky k přemýšlení, nýbrž pouze k tomu, aby řekli poslední slovo věty načaté učitelem. Také je třeba podotknouti, že leckdy při příliš rychlém střídání otázek někteří žáci nestačí si promyslet výsledek nebo odpověď uvedenou spolužákem, a potom mechanicky opisují s tabule.

Podle povahy thematu a podle stavu třídy otázky budou více nebo méně podrobné, nebo bude odpověď žádána od určitého žáka.

Mimo k vysvětlení slouží otázky (někdy i souvislý žákův výklad) také k tomu, aby se učitel přesvědčil, že žáci pochopili obecný výsledek a umějí ho prakticky aplikovat, udati samostatně příklad, užít při řešení cvičení atd.

Přednášení není v celku vhodné při vyučování aritmetice v nižších třídách střední školy. Je však užitečné, aby někdy žáci vyposlechli nedlouhý (sedmi- až desetiminutový) souvislý učitelův výklad o zavedení metrické soustavy měr nebo o jiných skutečnostech historického charakteru; také je žádoucí, aby učitel podal jako ukázku správného usuzování vzorný výklad rozboru a řešení složitější slovní úlohy a pod.

Proces usuzování a vysvětlování obyčejně je doprovázen zápisem na tabuli. Aby byla ve třídě tabule, dostatečně velká (nejlépe 4 m × × 1 m) a dobré jakosti, to je nezbytná podmínka práce v aritmetice. Úspěch hodiny závisí také na správném užívání třídní tabule. V jednotlivých případech je účelné, aby učitel sám prováděl zápis na tabuli a dával příklad správného postupu při tom. Učitel musí dbáti toho, aby veškeré zápisy na tabuli byly třídě viditelné průběhem zápisu, a ne až po zápise. Zápisy na tabuli musí býti dosti veliké, zřetelné, přesné a soustavné; tvary cifer musí býti správné. Zápis dokončené práce má se smazati s tabule, není-li ho pro další už třeba, ale zároveň není dobré s tím spěchat; je nutné umožnit jednotlivým žákům, kteří nestačili, aby práci přivedli ke konci.

5. Volání žáků k tabuli může se dít při zkoušení, při vysvětlování a utvrzování usuzovacího procesu a při utvrzování návyku v řešení cvičení. Žák u tabule má podrobně vysvětlovat celý zápis a všecky obdržené výsledky. Třída musí sledovat spolužákovu práci u tabule tak, aby každý byl připraven pokračovat ve vysvětlování (ve slovní úloze — sestavit a řešit další otázku; v početním cvičení — provésti další etapu práce).

Zvláštní pozornost, jak pověděno výše, má učitel věnovati svojí mluvě, která slouží žákům jako vzor ve smyslu logicky a stylisticky správné její výstavby a nezbytné výraznosti při vysvětlování. Žáky musíme naučit, aby souvisle vyložili podmínky úlohy, dávali úplné odpovědi na položené otázky a uváděli zřetelné a správné formulace definic a pravidel.

§ 14. Domácí práce. Sešit

Trvalých vědomostí a solidních návyků v matematice nemohou žáci dosíci pouhou prací ve třídě; je nutná konsolidace samostatnou domácí prací. Domácí práce doplňuje práci ve třídě.

Za písemnou domácí práci se obyčejně dává řešení slovních i početních úloh za účelem utvrzení vědomostí získaných ve třídě. Aby domácí práce byla úspěšná, je nezbytné ji vésti: při ukládání dávat krátká objasnění, na příklad, o čem je řeč v ukládaných paragrafech učebnice, jaká je uložená úloha, nebo ze kterého oddílu se žádá opakování atd. Když je to nutné, lze dávati pokyny o povaze řešení ukládané slovní úlohy; uloží-li se počtářský úkol, obsahující takové výpočty, které obyčejně dělají žákům potíže, ve kterých se vyskytují časté chyby, je účelné předem upozornit na správné řešení takového nebo obdobného úkolu. Takové chyby jsou praktickému učiteli zpravidla známé a jsou uvedeny v příslušných kapitolách této methodiky. Pouze po pečlivém provedení přípravné práce je možné uložiti žákům taký či onaký druh cvičení jako samostatnou práci (ať doma či ve škole). Za domácí práci mohou býti žákům ukládány také následující úkoly: sestavení schematu, na př. schematu výkonů přímých a nepřímých, schematu rozličných případů násobení a pod., narýsování diagramu podle daných údajů; výběr číselných dat pro úlohu, na příklad, určení rozměrů k výpočtu jakékoli plochy, zjištění početního stavu žáků ve třídě, ve škole; může býti uloženo jednotlivým žákům řešení kterékoli zajímavé úlohy atd. Pouze za té podmínky, že učitel v každé hodině kontroluje provedení domácí práce, budou žáci ji soustavně konat, udržovat sešit v pořádku, a učitel může jen, když si chyb všímá, včas zakročit k jejich nápravě.

Prohlídka domácího cvičení se děje začátkem hodiny, a nemá se na ni vynaložit více než 10 minut. Žák vyvolaný k tabuli je povinen předložit učiteli k prohlídce svůj sešit.

2. Při kontrole slovní úlohy uložené za domácí cvičení není dobré spokojiti se tím, aby žák udával řešení úlohy podle sešitu. Žák musí vyložit zpaměti obsah a plán řešení úlohy (jestliže si nezapamatoval číselné údaje, může nahlížeti do sbírky úloh). Každý žák, znaje tento učitelův požadavek, i když třeba úlohu neřešil samostatně, bude dbáti, aby se v ní vyznal, aby si zopakoval její podmínky a řešení, a tím právě se stále učí řešení slovních úloh. V případě, že žák řešení nemá nebo je nemá správné, je povinen v příští hodině předložit řešení téže úlohy a vyložit je. Týž požadavek je třeba klásti žákům

při opravování chyb v kontrolní práci (při řešení úloh slovních i počtářských).

3. Při kontrole řešení početní úlohy žádá se od žáků, aby podle sešitu stručně vylíčili sled prováděných výpočtů a udali odpověď. Učitel prochází třídou a podle sešitů se přesvědčuje, že žáci úkol provedli, a v případě, že při této zběžné prohlídce se objeví nesprávnosti nebo neracionální postup, dává ihned přiměřené pokyny. Na tabuli je nutné předvésti řešení těch počtářských i slovních úloh, které působily nesnáze většině žáků při jejich samostatné práci. V případě, že jsou značné nedostatky v domácích cvičeních jednotlivců, organisuje se dodatečné vysvětlování v rámci „práce se zpožděnými žáky". Je nutné vytýkati žákům také pravopisné chyby, kterých se dopustí. Když uvádí nové výrazy nebo výrazy pravopisně obtížné, má je učitel vypisovat na tabuli.

4. Aritmetický sešit každého žáka musí učitel bedlivě prohlédnout nejméně jednou do týdne, a při tom vyznačí všecky nesprávně provedené výpočty i nesprávně zapsané formulace a slova; tato učitel sám nahradí správnými. Žákovi je nutné vyznačiti všecky nedostatky v jeho práci, které potom musí v sešitě opravit; že se tak stane, o tom se učitel povinně musí přesvědčit. Požadavek přesného, zřetelného, matematicky správného zápisu v žákovských sešitech jest trvalý, soustavně užívaný učitelův prostředek při zápase o jakost práce v aritmetice. V této methodice jsou uváděny vzorné zápisy ve všech probíraných oddílech aritmetiky.

§.15. Zkoušení. Práce se zpožděnými žáky.

1. Při ukončení oddílu osnovy učitel musí shrnout látku, provésti přehled probraného, soustředit pozornost žáků na nejdůležitější body látky a bedlivě prozkoumat stupeň získaných vědomostí z daného oddílu osnovy ústními otázkami i kontrolní písemnou prací. Při tom je účelné dát žákům pro samostatné opakování seznam otázek s poukazy na paragrafy učebnice, na jichž základě je mohou zodpovídati. Vzory písemných kontrolních prací, vystihujících hlavní body látky, jsou námi uvedeny v této methodice na konci každého rozbíraného oddílu aritmetické osnovy. Tyto vzory nejsou závazné. Učitel nechť

prozkoumá, jaké základní vědomosti a dovednosti se dají ověřit jednotlivými otázkami zde udaných vzorů, a podle toho ať provede takové změny a doplňky, jakých vyžadují konkretní podmínky práce ve třídě, kterou vede.

2. Ústní odpověď žákova nemá býti pouze prostředkem kontroly jeho práce, nýbrž musí sloužit také k prohloubení vniknutí do otázky i u vyvolaného žáka i u celé třídy, která sleduje jeho odpověď, ježto při tom vyvolaný žák dostává dodatečné otázky na vyjasnění všech oddílů práce, opravují se vyskytnuvší se chyby v úsudku nebo v řeči atd.

Při písemném a ústním zkoušení se přihlíží nejen k získaným vědomostem, nýbrž bere se zřetel také na potíže, které se vyskytují u žáků v příslušné látce.

Zvláštní pozornost musí učitel věnovati žákovským chybám, ježto chyba, která se stane zvykem v aritmetice, často se projeví i při vyučování algebře a trigonometrii; takové jsou chyby ve výkonech s 0 a 1, v krácení sčítance v čitateli nebo jmenovateli zlomku (jako když $\frac{a+b}{a}$ žák zkrátí na $1 + b$) atd.

V „Methodice aritmetiky" při rozboru každého dílu osnovy se uvádějí typické, zkušenému pedagogu obyčejně známé aritmetické chyby žáků. Mladý učitel, rozbíraje žákovské práce, brzy nabude zkušenosti v této věci. Poznav obyčejné žákovské chyby, učitel musí jim předcházet, nedopustit chybu správnou vyučovací methodikou; a když chyba se objeví, musí se proti ní bojovati okamžitě, neboť čím později se začne, tím obtížnější bude ji vykořenit.

Chyby, které se vyskytly, vykoření se ukázkou správného řešení vhodných příkladů a objasněním podstaty probírané otázky.

3. V předrevoluční střední škole problém zpožděných žáků se redukoval jen na konstatování fakta žákova neúspěchu. Povinnost nápravy nedostatků byla především jenom věcí rodičů. V praxi naší školy problém zpožděných žáků je položen zcela jinak. Nařízení vedoucích orgánů lidové osvěty zřetelně a určitě kladou požadavek zodpovědnosti školy za jakost práce, požadavek organisace činné pomoci zpožděným.

Když se objeví, že jednotlivý žák nebo část žáků ve třídě má mezery vyžadující dodatečné práce pro jejich odstranění, tu se ve škole v takovém případě organisují porady nebo dodatečné lekce mimo vyučovací dobu. Ve většině případů lekce se zpožděnými vede sám jejich učitel. Prováděny býti musí podle pečlivě sestaveného individuálního plánu. Učitel může včas likvidovat konstatované nedostatky žáků jen v tom případě, že bude jasně znát chyby každého žáka, potřebujícího dodatečné vyučování. Učitel musí organisovat práci žáků, vysvětlit, co nepochopili a co si neosvojili, vyhledat vhodná cvičení na výcvik v návycích a všímat si pokroku každého jednotlivce mezi žáky majícími mezery ve vědomostech.

Méně plodné se jeví dodatečné vyučování tehdy, když vede práci někdo jiný než vyučující ve třídě. V těchto případech musí učitel matematiky ve třídě sestavit pracovní plán s konkretním soupisem mezer u jednotlivých žáků, vybrat pracovní látku (počtářské i slovní úlohy atd.) a stále poskytovat methodickou pomoc osobě vedoucí lekce s jedním nebo několika žáky.

V čas vyučování ve třídě musí učitel věnovati pozornost méně připraveným žákům. Je třeba je vyvolávat k odpovědím na otázky předkládané celé třídě, soustavně pozorovat, jak konají samostatnou práci ve škole a častěji než u druhých revidovat jejich domácí úkoly.

4. Uvedeme některá zkušeností ověřená opatření pro vyvarování a likvidaci neúspěchu v aritmetice v 5. třídě.

1. Přesný logický sled výkladu, konkretnost, zdůvodněnost činěných závěrů, pomalost při výkladu nových pojmů, kontrola stupně vědomostí u všech žáků ve třídě, přehledy probírané látky.

2. Řešení velikého počtu soustavně vybíraných a jak v methodách řešení, tak i v obsahu rozmanitých příkladů a úloh ke každému oddílu osnov; řešení cvičení praktického rázu.

3. Pěstování schopnosti abstrakce, analysy a synthesy, zobecňování; rozvíjení kombinatorických schopností žáků, uvědomělosti, samostatnosti a aktivity, přemýšlivého poměru k práci, důvěry ve vlastní sílu, stručnosti a přesnosti mluvy, správnosti vnější úpravy úkolů.

4. Tvorba návyku k samostatné práci u žáků, a zejména ku práci podle knihy. Plánovitost a ponenáhlost při této práci.

5. Správná organisace ukládání domácích úkolů (co do objemu i co do obsahu); pečlivá učitelova příprava na domácí cvičení; soustavná a pečlivá kontrola domácí práce v žákovských sešitech.

6. Užívání názorných pomůcek v aritmetické práci: tabulek, úseček, měřických nástrojů a pod.

7. Soustavné a plánovité opakování probraného učiva; rozmanitost method při opakování; opakování látky z minulých let; opětné vracení k zopakovaným částem učiva; zřetel na složitější partie látky.

8. Soustavná a plánovitá kontrola a evidence ústních i písemných odpovědí žactva. Rozmanité methody písemných prací a rozbor výsledků. Včasné zjišťování a individuální zřetel k těm žákům, kteří zameškali jednu nebo několik hodin, kteří mají mezery ve vědomostech z látky minulých let, u kterých se ukázaly jednotlivé nedostatky při ústních odpovědích, v sešitě, v kontrolní práci.

§ 16. Práce mimo třídu

1. Práce mimo třídu, jak známo, přispívá ke vzbuzení zájmu žáků o vyučování, zejména o vyučování aritmetice a slouží jako prostředek ke zvýšení matematické (aritmetické) vyspělosti žactva.

2. Zvláštní zájem jeví žáci o práci v matematickém kroužku, když se kladou a projednávají otázky z *historie aritmetiky*.

a) Ve všech kapitolách „Methodiky aritmetiky" v jednotlivých oddílech je stručně, v hrubých rysech, poukázáno na ty historické poznatky, s kterými může učitel žáky seznámiti jako se zvláštními thematy; podrobný výklad každé otázky se najde v literárních pramenech udaných na konci knihy. Jako taková themata mimořádné práce mohou sloužiti: „Míry a čítání v dávnověku", „Staroindický způsob násobení čísel" a mnoho jiných věcí v textu uvedených. Zejména zajímá žáky 5. třídy thema: „Rozličné soustavy číselné "(kap. II, § 2) v souvislosti s dějinami jejich vzniku, což značně prohlubuje jejich chápání této otázky.

b) Při řešení otázek historického charakteru žáci se seznamují s národní kulturou starých národů. Shledávají se s týmiž úlohami na určení zlomku čísla a určení čísla z velikosti jeho zlomku u Egypťanů, u Řeků (známá úloha

Metrodorova nebo náhrobní nápis na hrobu Diofantově[3]), seznamují se se zajímavými úlohami indických autorů, setkávají se u rozličných národů a rozličných dob s úlohami, jež jim dělávají nesnáze v hodinách aritmetiky: „na dělení v daném poměru", „na trojčlenku", „na nádržky", na užití zajímavé „methody inverse" atd.

c) V jedné nebo dvou schůzkách kroužku je možné seznámit žáky s činností prvního ruského pedagoga — methodika matematiky Leontije Filipoviče Magnického (1669 až 1739), autora učebnice „Arifmetika sireč' nauka čislitelnaja", vydané r. 1703.

On přijal jméno Magnickij na rozkaz Petra I., který rozprávěje s ním byl okouzlen jeho vědomostmi v oblasti matematických věd a nazval jej „magnetem". Magnickij byl profesorem a potom až do konce života ředitelem školy matematických a nautických věd, kterou založil Petr I. v Sucharevově věži v Moskvě.

Před „Aritmetikou" Magnického byly v Rusku takřka jen rukopisné knihy, a Magnickij užíval názvosloví rukopisné slověnoruské matematické literatury; jazyk své příručky hleděl přiblížit ruskému hovorovému jazyku. Veliký je význam „Aritmetiky" Magnického, ve které jsou jaksi shrnuty matematické znalosti v Rusku začátkem XVIII. století.

O své knize on praví

„Razum ves' sobran i čin —
Prirodno russkij, a ne nemčin",

těmi slovy chtěl vyjádřiti, že „prirodno-russkij" rozum jde vlastními cestami, odlišnými od západoevropských.[4])

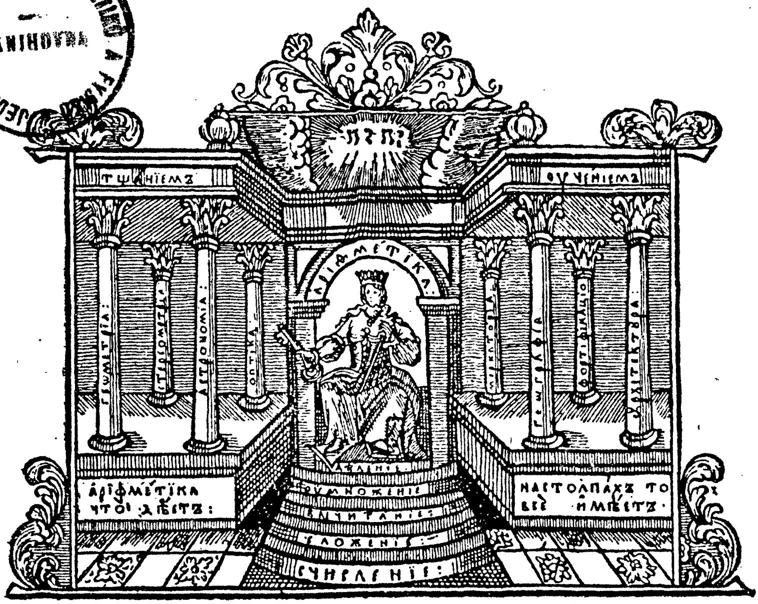
Magnickij byl v oboru matematiky samouk, a ve své „Aritmetice" velmi pečuje o to, jak žák reaguje na výklad: na začátku udává definice výkonů, potom vysvětluje na příkladech, jak se výkon provádí, dále předkládá k řešení několik příkladů, při čemž vybírá příklady s rostoucí obtížností, ježto čtenář v důsledku práce si objasňuje provádění výkonu a získává návyk. Magnickij užívá různých methodických způsobů: i pokynů v předmluvě, i veršované formy, i dvojí barvy (záhlaví a první písmena jsou červené barvy) atd.

Je možno ukázat žákům obraz, který se vyskytuje v „Aritmetice" Magnického. Obraz představuje chrám moudrosti, na trůně sedí sama moudrost s klíčem, kterým se otvírá bezpečné poznání světa (číslo). Jako stupně k chrámu slouží početní výkony. Magnickij odpovídá na otázku: „Co jest aritmetika?" tak, jak před ním nikdo neodpovídal: „Aritmetika neboli nauka o číslech jest umění ctné, nezištné a všem pochopitelné, nejvýš užitečné a nejvýš chvalitebné".

---

[3]) Sbornik istoričeskich zadač po elementarnoj matematike G. N. Popova, GTTI, 1932, Moskva, Leningrad.

[4]) Galanin D. D. „L. F. Magnickij i jego arifmetika". Moskva 1914. Galanin D. D. „Istorija metodičeskich idej v Rossii XVIII v." Moskva, „Nauka", 1915. „Matematika v škole", 1940, č. 5.



Obr. 1.

Z „Aritmetiky“ Magnického (324 str., 100 obr.) je možno seznámit žáky s kapitolou o numeraci čísel a zároveň vyjasnit otázku nekonečnosti číselné řady, možno ukázat příslušné příklady na násobení a dělení; zvláště zajímavé je prohlédnout **řešení slovních úloh** a porovnat methody, kterých užívá Magnickij, s methodami současnými, zejména zajímavou methodu „pravidla falešného neboli pochybného“.

d) Zajímavé je také seznámit žáky se životopisem znamenité ruské matematičky Žofie Vasiljevny Kovalevské (leden 1850 — únor 1891). Besedy pořádané každoročně 8. března v dívčí škole č. 43 v Moskvě mají výchovný význam nehledě na to, že práce S. V. Kovalevské není možné vysvětliti žákyním 5. nebo 6. třídy.[5])

V pramenech studia uvedených v dalším najde učitel zajímavý materiál, mnoho cvičení k rozvinutí zájmu žáků o znalost čísel a výkonů s čísly, na př. „O prvočíslech“, „Svět velkých čísel“, „Svět malých čísel“, „Počítání na prstech“, „Číselné pyramidy“, „Devítková zkouška“ a mnoho jiného.

Jednotlivé schůzky kroužku můžeme věnovat praxi v různých methodách počítání zpaměti, v práci se ščotami a v řešení rozmanitých úloh ze sbírek. Vhodné je přečíst Čechovovu povídku „Repetitor“.

[5]) O. Strajch, „S. Kovalevskaja“, Moskva 1935. S. V. Kovalevskaja, „Vospominanija“ Izd. Akad. nauk SSSR, 1945.

Vhodné je za příznivého počasí vésti kroužek mimo školu a prováděti nějaké úkoly rázu praktického, na př. zhotovit náčrt plánu podle doby pochodu a pod. (kap. I., § 4).

Konečně, při výkladu methodiky vyučování jednotlivým partiím jest námi poukazováno na ten didaktický materiál, kterého je vhodné užívat při vysvětlování theorie. Všecky pomůcky, kterých je možno využít při pedagogickém procesu v aritmetice (abakus, početní pravítka, Napierovy hůlky atd.), jsou nadmíru prosté a mohou býti zhotoveny žákovskou prací mimo třídu. Rovněž není obtížné sestavit nezbytné tabulky, diagramy, procentní kruh, zápisy řešení zajímavých slovních úloh. Všecky tyto pomůcky mají podle možnosti býti před očima žáků, aby je žák mohl pozorovat o přestávkách, a když získá zájem, aby předložil i svou vlastní konstrukci a jím samým sestavený diagram, jím nalezená řešení úloh, dal na program jím čtenou historickou úlohu nebo hříčku.

KAPITOLA II.

NUMERACE

§ 1. Úvod

„Pojem čísla a obrazce jsou vzaty výlučně ze skutečného světa. Deset prstů, na kterých lidé se naučili čítat, t. j. provádět prvou aritmetickou operaci, představují o sobě vše, co je libo, jenom ne produkt svobodného tvůrčího rozumu. K čítání je třeba mít nejen předměty, které se mají čítat, ale vládnout už schopností abstrahovat při pozorování těch předmětů od všech dalších jejich vlastností kromě počtu, a tato schopnost je výsledkem dlouhého historického vývoje a zkušenosti." (B. ENGELS, Anti-Dühring, vyd. z r. 1938, str. 32.)

Je nepochybné, že k pojmu čísla vedla pozorování různých souborů konkretních objektů, založená na praktické činnosti člověka. Lidstvo tak si navyklo základním pojmům a ustanovením, mezi něž patří i pojem čísla, že už dávno nevzpomíná na ty nejjednodušší a všední skutečnosti, pomocí kterých kdysi je sestavilo. Různé procesy mohly vésti člověka k objevu čísel, ale vzhledem k té mocné roli, jakou hraje proces čítání v nejelementárnějších hospodářských vztazích, se vší pravděpodobností z procesu čítání vznikl pojem přirozeného čísla, odrážejícího materiální dění po stránce kvantity. „Ryzí matematika má za svůj předmět prostorové tvary a kvantitativní vztahy ve skutečném světě."[1])

Číslo vystupuje zároveň jako číslo základní a jako číslo pořadové. Číslo základní — kardinální — odpovídá na otázku „kolik" a číslo pořadové — ordinální — odpovídá na otázku „kolikátý". Tyto dvě strany jednoho a téhož pojmu čísla jsou tak dalece navzájem spjaty, že často v procesu vyučování není možné je od sebe oddělit.

S příslušnými vědeckými theoriemi o čísle, založenými jednak na kvantitativním pojetí čísla (kolik — quotité) jednak na pořádkovém (číslo pořadové, „rang") učitel se může seznámit z literatury udané v seznamu.

Nejúplnější fundaci pojmu čísla dává theorie množin, podrobně rozvinutá Jiřím Cantorem v 80tých letech minulého století.

§ 2. Historické poznámky o čísle a čítání

Jak se má v pedagogické praxi rozšířit žákův obzor systematisací jeho vědomostí o číslech a o výkonech s nimi? Jak jest položit žákům hlavní otázky aritmetiky: otázku o čísle a procesu čítání a počítání, otázku o veličině a o procesu měření? Jak dát žákovi představu o souboru (množině), o pojmu „rovné",

---

[1]) B. ENGELS, „Anti-Dühring", 1938, str. 32.

„větší“ a „menší“? Jak vzbudit zájem žáků o tyto otázky při vyučování aritmetice?

Jedním z prostředků k tomu cíli je seznámit žáky s historickým procesem rozvíjení pojmu čísla a čítání. Učitel může pronésti krátký výklad ve třídě ve směru námi naznačeném, ponechávaje další rozvinutí sdělených skutečností pro práci v matematickém kroužku. Pomůcky pro učitele z historie matematiky jsou uvedeny v přiloženém seznamu literatury.

I. Číslo, čítání.

Prvý pojem čísla je nerozlučně spjat s pojmem množiny. Zprvu člověk bezprostředně pojímal množinu objektů, při čemž ji pojímal nejlépe tehdy, když objekty byly všecky téhož druhu, na příklad šišky, které seskupil na hromadu, stádo jím hnaných krav nebo ovcí, smečku psů nebo soubor jakýchkoli jiných navzájem podobných objektů.

Ve své bezprostřední praktické činnosti člověk postupně si osvojoval pojmy „rovné“, „větší“ a „menší“; viděl, jak se k množině objekt „přibírá“ a jak se zase naopak od množiny objekt „ubírá“. Pomalu, ponenáhlu se rozvíjel pojem „čísla“; ztraceny jsou stopy začátku tohoto procesu. První číselné pojmy byly „jeden“ a „mnoho“; potom se tvořila nová číselná představa „dva“. Ve většině případů pojem „dva“ se spojoval s konkretním párem předmětů; v čínské řeči výraz pro „dva“ je týž jako pro „uši“; u Tibeťanů týž jako pro dvojici ptačích křídel; u Indů slovo „dva“ je stejné jako slovo „oči“; jediný slovní výraz pro počet větší než dvě byl „kupa“.

Je nutné zdůrazniti žákům tu myšlenku, že u starodávných národů nebylo toho, co my nazýváme „nepojmenovaným (abstraktním) číslem“. S představou čísla je u nich vždy spojena představa nějakých určitých objektů. Tak cestovatel Perry[2]) vypravuje, že Eskymáci nepoznají ztrátu psa porovnáním počtu psů před ztrátou s počtem psů, kteří zbyli po ztrátě — oni poznají ztrátu psa jenom proto, že pozorujíce po pořádku zbylou smečku, postrádají známou figuru — psa s určitými znaky. Rozdělování a výměny u starodávného člověka se děly pomocí navzájem jednoznačného zobrazení; tak cestovatelé pozorující výměnný obchod, vypravují o jednom plemeni, jehož zástupce byl nadmíru pobouřen, když mu dávali na ráz 4 svazky tabákových listů za 2 ovce (při směnné ceně dvou svazků tabákových listů za jednu ovci); při výměně musili mu dát 2 svazky a vzít jednu ovci a potom teprve dát znova dva svazky tabákových listů a vzít druhou ovci. U téhož plemene byla pozorována výměna jalovice za 10 svazků tabákových listů, při čemž svazky se kladly po jednom na každý z 10 roztažených prstů tuzemce.

Aby se žákům ukázaly možné prvé způsoby čítání v dávnověku, je možné uvésti příklady způsobů čítání užívaných primitivními kmeny i v přítomnosti. Nejvhodnější přirozený názorný prostředek čítání tvoří prsty lidských rukou,

---

[2]) Akad. V. Steklov „Matematika i jejë značenije dlja čelovečestva“, Leningrad 1919.

a také prsty na nohách. A dávnověký člověk užíval těchto nástrojů. Citovaní námi autoři uvádějí příklady dodnes žijících málo vzdělaných národů, které místo slova „jeden“ užívají slova „prst“ a při tom pokaždé natáhnou prst, potom dva prsty na ruce atd. a přejdou k prstům u noh. Kořen slova „pět“ (pente) jazykovědci někdy spojují se sanskritskými a perskými slovy znamenajícími náš výraz „všech pět“ (prstů).

Filologická bádání dovolují souditi i o dalším stupni rozvoje procesu čítání. Tak, na příklad, Indové plemene Samuka, chtějí-li říci „šest“, praví „jeden z druhé ruky“[3]); když napočítají deset, praví „obě ruce ukončeny“; 20 — podle indického slovníku — „nohy dokončeny“ nebo „člověk“.

Zuluové v Jižní Africe po každé desítce tlesknou rukama. Bylo pozorováno u tuzemců v Jižní Africe, jak čítání provádělo několik lidí společně: první na prstech svých rukou čítal jednotky, druhý zaznamenával prsty svých rukou desítky, ke kterým docházel první atd.

Po mnohonásobném užívání prstů na rukou a na nohou jako nástroje čítání lidé utvořili si návyk seskupovat předměty po pěti, po deseti, po dvaceti, což se projevilo utvořením příslušných číselných soustav.

Stopy dvacítkové soustavy se zachovaly v jazyce mnohých národů; tak u Francouzů číslo 20 má svůj samostatný název „vingt“, číslo 93 se jmenuje „quatrevingt-treize“, což značí „čtyři dvacítky a třináct“. Vůbec základy skupin byly rozličné — byla na př. soustava trojková, vzniklá zřejmě z počtu kloubů na prstech; rozšířenější byla dvanáctková soustava, jejíž stopy se zachovaly u nás do dnešní doby v počítání na tucty a veletucty — kapslí, tužek, knoflíků a pod.

Zvláště rozšířena byla dvanáctková soustava u Římanů, patrně podle počtu měsíců v roce. Dvanáctiny jednotky Římané zvali uncemi, a tento název unce (latinský) dlouho se zachoval u lékárnických vah. Tyto dvanáctiny byly pojímány spíše jako pojmenovaná čísla než jako obyčejné zlomky:

$\frac{2}{12}$ rovno 2 uncím, $\frac{3}{12}$ rovno 3 uncím.

U Babyloňanů vedle desítkové soustavy byla v platnosti šedesátková soustava čítání, jejíž stopy se dodnes zachovaly při měření času (1 hod. = = 60 min., 1 min. = 60 sek.). Babyloňané čítali skupinami po 60. Číslo 60 mělo vlastní název „soss“, číslo 60 . 60 = 3600 se nazývalo „sar“.

II. Pomůcky čítání.

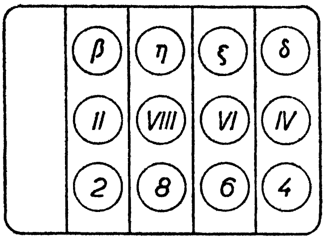
„Naše aritmetika je dítě instrumentální aritmetiky“ (prof. N. M. Bubnov). Prvními instrumenty čítání byly výše vzpomenuté prsty na rukou a nohou počtáře sama. Později se přešlo k jiným názorným pomůckám: mušlím, uzlům,

[3]) L. LÉVY-BROUILLE „Pervobytnoje myšlenije“, přel. z franc., 1930, str. 128 — „O ručnych ponjatijach“.

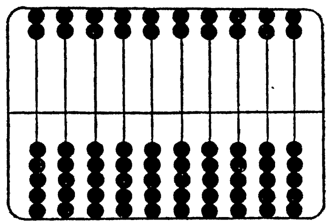
vrubům, váčkům zrníček a kaménkům, větším pro vyznačení jednotek vyššího řádu a menším pro prosté jednotky[4]) atd.

Kaménky u Římanů (latinsky „calculus", odtud slovo „kalkulace") staly se trvalým prostředkem čítání. Zdlouhavý byl proces přechodu skrze vypuštěná slova „kaménky" nebo jiná slova procesu čítání k abstraktnímu pojmu čísla.

Užívaje při vyučování desítkové soustavě nástroje abaku, učitel může vyprávěti žákům při schůzkách matematického kroužku o dávnosti užívání tohoto nástroje čítání,[5]) o změnách v jeho složení (užití apexů k vyznačení čísel na něm, zavedení abaku s vyznačením míst atd.). Tohoto jednoduchého a lehce přenosného nástroje čítání v době rozvoje obchodu, mořeplavectví, vynálezů v 15. století bylo velice užíváno v kupecké praxi ke všelikým výpočtům,



Obr. 2.



Obr. 3.

při čemž se abakus stavěl na lavici (německy bank) pro pohodlí počítajícího „bankéře". Ačkoli už v 9. století se v Evropě objevily arabské cifry, v 15. a 16. století v západní Evropě se počítalo převážně na abaku. Na obrazci je vyznačeno řeckými, římskými a arabskými číslicemi číslo 2864 (obr. 2).

Je vhodné povědět žákům o nástroji, rozšířeném do přítomné doby jako počítací pomůcka, totiž o našich ruských ščotách, jejichž předchůdcem je čínský „svanpan", který se z hrubého původního tvaru postupnými úpravami a zlepšeními přetvořil na dnešní svůj tvar[6]) (obr. 3).

Ruské obchodní ščoty jsou nadmíru jednoduché a mají veliký praktický význam, ježto dovolují velmi rychle provádět výkony jak s abstraktními tak s pojmenovanými čísly, zejména sčítání a odčítání. Žáci poznávají ruské ščoty v obecné škole; v dalších (zejména v 5. třídě) musí získati zručnost v užívání ščot.

V uváděných námi knihách o historii matematiky učitel najde a může užít při práci v kroužku mnoho rozmanitých originálních praktických method,

[4]) „Číslovky (Lévy-Brouille, str. 135) jeví se mysli člověka kmene Jorubů ve dvou významech současně: předně jako čísla, za druhé jako ty věci, které Jorubové bezprostředně čítají, t. j. kaury (mušle). Jiné předměty čítají Jorubové srovnáváním s týmž počtem kaur, neboť národ bez znalosti psaní a bez škol nemá žádnou představu abstraktního čísla."

[5]) Slovo „abakus" je řeckého původu: „prkno", „stůl".

[6]) Sedmikostečkové ščoty rozšířené v Číně a Japonsku.

kterých se chápaly všecky národy v rozličných obdobích při užívání názorných početních pomůcek. Dříve než jiní národové, Indové se osvobodili od pomoci předmětů při počítání a „ryze rozumové počítání“ se u nich široce ujalo.

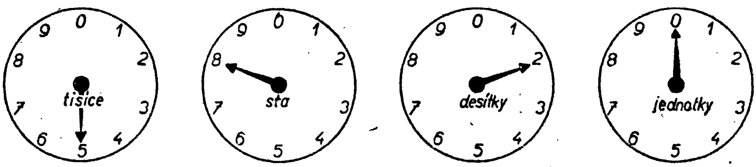
Na příklad, na schůzkách matematického kroužku jako se zajímavým příkladem na užití prstů jako pomůcky při počítání je užitečné žáky seznámit s následujícím známým způsobem násobení. Budiž dáno 6 . 8; na jedné ruce vztyčíme jeden prst, t. j. tolik, oč je prvý činitel větší než 5, na druhé ruce vztyčíme tři prsty z obdobného důvodu; číslo desítek v součinu je $1 + 3 = 4$ desítky, t. j. počet vztyčených prstů na obou rukou. Počet jednotek v součinu je $4 . 2 = 8$, kde 4 a 2 jsou počty sevřených prstů na rukou. Podobně součin 7 . 9 se skládá ze $2 + 4 = 6$ desítek a $3 . 1 = 3$ jednotek, t. j. $7 . 9 = 63$.

Žákům vyšších tříd může učitel uložit dokázat správnost uvedeného pravidla pomocí identity:

$$[(x - 5) + (y - 5)]\, 10 + [5 - (x - 5)] . [5 - (y - 5)] = xy,$$

kde x, y jsou daní činitelé, $(x - 5)$ a $(y - 5)$ počty vztyčených prstů na každé ruce; $5 - (x - 5)$, $5 - (y - 5)$ počty sevřených prstů, $x > 5$ a $y > 5$.

K otázce vývoje počítacích nástrojů je možno se ještě jednou vrátit v práci matematického kroužku později, když je ve třídě už skončeno probírání oddílu o desítkové numerační soustavě. Tehdy je možno položit otázku dalšího vývoje počítacích nástrojů až po naše dny. Za tímto cílem je účelné, aby se učitel seznámil s knihou N. J. Idelsona „Mechanizacija sčëta“ (GIZ, Moskva-Leningrad, r. 1930). V rozpravě je vhodné zdůraznit tu myšlenku, že hlavní určení a význam nástrojů, zejména našich ruských ščotů, je téměř mechanické provádění převodu 10 jednotek jednoho řádu na tvar jedné jednotky vyššího řádu (obr. 4). A sestrojením početního přístroje toho či onoho druhu řeší se úloha učinit tento hlavní moment počítání více automatickým, méně závislým na pozornosti počtáře.

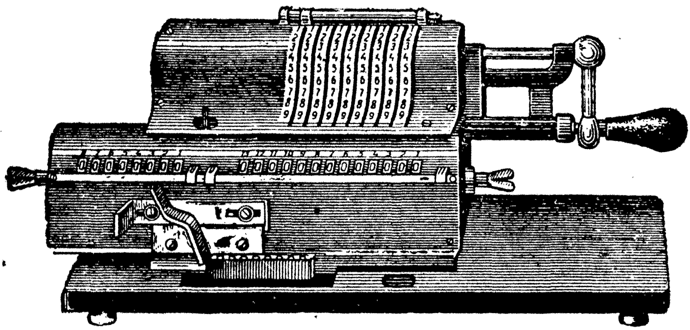


Obr. 4.

Výše uvedených početních zařízení užívá se v prvé řadě na výkony sčítání a odčítání; násobení a dělení jakož i sčítání a odčítání několika čísel vyžadují při těchto pomůckách větší ztráty času a provádějí se složitějšími nástroji. Jest však jedna prostá pomůcka pro mechanisaci násobení popsaná Napierem (1550—1617), objevitelem logaritmů, v jeho „počítání na hůlkách“. Princip Napierových hůlek je vzat z indického způsobu násobení a stal se základem sestrojení početního stroje pro násobení.

Žáky 5. třídy zajímá seznámit se při práci v kroužku s indickým způsobem násobení a s Napierovými hůlkami při násobení mnohociferných čísel a desetinných zlomků s větším počtem desetinných míst.

Je vhodné ukázat žákům mechanismus sčítacích strojů, kterých se u nás užívá u pokladen v obchodech, a složitější stroje pro násobení a dělení — u nás rozšířené arithmometry, s kterými je žádoucí žactvo prakticky seznámit.



Obr. 5.

Je potřeba poukázat žákům na to, že technika počítacích strojů zná značně větší pokroky, až po úplné automaty typu „Mercedes-Euklid", kde práce počtáře spočívá pouze v tom, že nařídí násobence a násobitele, dělence a dělitele, a potom veškerá další práce je obstarána strojem.

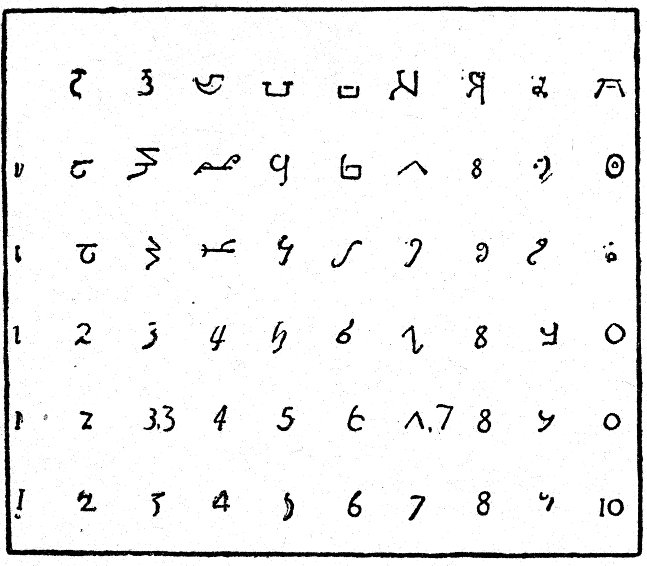
III. Psaní čísel.

Zásada posiční soustavy (místního významu cifer), která dávno už tu byla při početních přístrojích — abaku, ščotách — nepronikla rázem do písemného zápisu čísel. V pradávných dobách se užívalo různých způsobů zápisu čísel, počínaje čárkami a kroužky (jako u Číňanů již $2\frac{1}{2}$ tisíc let př. Kr.) atd. Hieroglyfické písmo Egypťanů a klínové písmo Babyloňanů bylo založeno na bezprostřední názornosti. Úplně vypisované číslovky značily čísla u Feničanů, a později už jen začáteční písmena číslovek značila čísla u jiných národů. Zvláště rozšířeno bylo užívání písmen v jejich abecedním pořádku u Řeků, Židů a Slovanů, neboť u nich písmena abecedy zároveň znamenala cifry. Při tom se ovšem musily vymýšlet doplňující značky, aby se nedělaly chyby ve čtení významu písmene v dané kombinaci písmen.

I v naší době se ještě užívá římských číslic k označování malých čísel na číselníku hodin, u stránek předmluvy v knize, u kapitol a pod. Je vhodné žákům vysvětlit, že ve tvaru římských cifer se jeví stopy čítání na prstech a že v římské soustavě není posiční systém cifer, nýbrž že se tu čísla zapisují ve tvaru součtu (nebo rozdílu) čísel vyjádřených jednotlivě ciframi:

$$\mathrm{MDXVII} = 1000 + 500 + 10 + 5 + 2 = 1517.$$

U nás užívané cifry se nesprávně nazývají arabské: otázka po jejich původu zůstává dodnes sporná: jedni považují za původce dnešních cifer Indy (Arabové pouze je přenesli do Evropy), jiní vidí ve tvaru našich cifer stopy převrácených řeckých písmen. Při praktickém užívání tvar cifer se postupně měnil, až nabyl dnešního vzhledu. Uvádíme tabulku (obr. 6).[7])



Sanskritské cifry z 2. stol. po Kr.

BOËTIUS, 11. století

Západoarabské číslice

Ze spisu vytištěného 1480.

Z početnice vydané 1483.

Ze spisu vydaného 1522.

Obr. 6.

V Rusku po prvé v „Aritmetice“, sepsané Magnickým (za panování Petra I.) byly zavedeny cifry nazývané arabskými, které postupně vytlačily slovanské značení cifer písmeny.

Je třeba povědět, že čítací pomůcky teprv bojem byly poraženy písemným zápisem. Boj mezi abakisty, přívrženci abaku, v podstatě římských způsobů čítání, a mezi algoritmiky, zastánci arabské učenosti, trvaly dosti dlouho.

Do 16. století užívalo se v evropských školách čítacích pomůcek a římské i písmenové numerace. Od 16. století pro málo gramotné se učilo jako dříve

[7]) Podle KEDŽORI, „Istorija elementarnoj matematiky,“ Oděsa 1917.

čítání za pomocí abaku, ale pokročilejší už pracovali s písemnou numerací v dekadické soustavě.

Algoritmem se ve středověku nazývala pravidla, podle kterých se prováděly jednotlivé početní výkony v dekadické soustavě číselné. Taková pravidla byla udána v 9. století arabským matematikem Alchuarizmi. V dnešní době se algoritmem rozumí jakýkoli aritmetický nebo algebraický proces, který se provádí na základě zcela určitého pravidla, jestliže postup výpočtu se těžko dá vyjádřit vzorcem.

Tak na příklad k určení největšího společného dělitele dvou čísel slouží tak zvaný Euklidův algoritmus, totiž postupné dělení.

Poznámky. 1. Výše vyložených historických údajů má učitel použít k tomu, aby žákům vysvětlil, jak se přesné matematické pojmy tvoří ve spojení s potřebami praxe, ve spojení se stále se rozvíjejícími výrobními procesy, s rozvojem techniky a přírodních věd.

2. V této příručce nepodáváme podrobný historický výklad o vývoji počítání; nemluvíme o tom, kdy a kým byly formulovány zákony výkonů atd. Odkazujíce na udané prameny o historii matematiky, klademe si pouze methodický úkol: ukázat vyučujícímu, v jakém směru může využít historických poznatků při své běžné práci se žáky, sdíleje některé historické poznatky s žáky ve vyučovací hodině a ponechávaje další práci s historickými methodami výpočtu a s početními pomůckami na schůzky matematického kroužku.

IV. Práce v kroužku (numerace).[8])

1. Při práci v kroužku je žádoucí dáti žactvu názornou představu o velkých číslech. Za tímto účelem je vhodné řešit obecně známé úlohy: jak velké doby vyžaduje čítání milionu předmětů, spotřebuje-li se 1 vteřina na každý předmět atd.

Objeví se, že čítá-li se bez ustání 10 hodin denně, je možné dokončit práci asi za 1 měsíc, neboť 30 dní po 10 hodinách dá 1 080 000 vteřin. Milion dní je více než 27 století, t. j. od počátku našeho letopočtu neuplynul ještě milion dní ($365 \cdot 27 \cdot 100 = 985\,500 < 1\,000\,000$) atd.

2. V době po opakování učiva o desítkové numeraci je vhodné při práci v kroužku provádět se žáky zápis jednoho a téhož čísla v různých soustavách. Na příklad, je-li číslo zapsáno v desítkové soustavě, žádá se jeho zápis v soustavě pětkové. Postup práce může býti tento: 1. vysvětlí se, kolika a jakých cifer potřebujeme (předpokládá se týž tvar cifer jako při běžné numeraci) na zápis čísel v pětkové soustavě; užívá se při tom 5 značek — cifer: 0, 1, 2, 3, 4; pět jednotek nižšího řádu tvoří jednotku vyššího řádu, 2. dá se za úkol neveliké číslo, třeba tři sta osmdesát devět jednotek, zapsat v pětkové soustavě.

---

[8]) Viz literaturu uvedenou pro žákovskou četbu.

Řešení: 389 : 5 pod. 77, zb. 4
77 : 5 pod. 15, zb. 2
15 : 5 pod. 3, zb. 0.

Vysvětlení: nejprve musíme najít, kolik pětek (po 5 jedn.) je v daném čísle — 77 pětek a zbudou 4 jedn., t. j. v daném čísle je 77 jedn. 2. řádu a 4 jedn. 1. řádu. Kolik jednotek 3. řádu je v 77 jedn. 2. řádu? Odp. 77 : 5, t. j. 15 jedn. 3. řádu a zbudou 2 jedn. 2. řádu. Dále se ukáže, že v 15 jedn. 3. řádu jsou 3 jedn. 4. řádu a žádné jedn. 3. řádu nezbudou. Jednotka 3. řádu obsahuje $5 \cdot 5 = 25$ neboli 5^2 prostých jednotek atd., t. j. v daném čísle jsou 4 jedn. 1. řádu, 2 jedn. 2. řádu a 3 jedn. 4. řádu neboli

$$389 = 3 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 4.$$

Pro kontrolu je užitečné, aby žák určil počet jednotek v čísle 3024 soustavy pětkové. Je jasné, že musí vyjít 389.

Theorie otázky. Při základu rovném 10 číslo může býti vyjádřeno tvarem jako

$$75\,689 = 7 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9.$$

Při základu rovném 5 číslo může býti vyjádřeno tvarem

$$N = b_0 5^n + b_1 5^{n-1} + b_2 5^{n-2} + \ldots + b_{n-1} \cdot 5 + b_n.$$

A výše uvedené číslo při základu 5 je rovné

$$75\,689 = 4 \cdot 5^6 + 4 \cdot 5^5 + 1 \cdot 5^4 + 0 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 4$$

a má zápis 4410224 (v pětkové soustavě).

75689 : 5 podíl 15137, zbytek 4
15137 : 5 podíl 3027, zbytek 2
3027 : 5 podíl 605, zbytek 2
605 : 5 podíl 121, zbytek 0
121 : 5 podíl 24, zbytek 1
24 : 5 podíl 4, zbytek 4.

S čísly zapsanými v jiné než desítkové soustavě je možno provádět tytéž výkony, jaké provádíme s čísly v naší soustavě. Ale, jak je vidět z níže uvedených příkladů, tato práce vyžaduje od nás rozumového úsilí, kdežto v naší soustavě pracujeme takřka automaticky.

Jsou dána dvě čísla v pětkové soustavě: 42315 a 30425.

Provedeme sčítání a odčítání majíce na paměti, že v daném případě už 5 jednotek nižšího řádu tvoří 1 jednotku vyšší:

$$\begin{array}{r} 4231 \\ +\,3042 \\ \hline 12323 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 4231 \\ -\,3042 \\ \hline 1134 \end{array}$$

Zkouška:

$$\begin{array}{r} 12323 \\ -\ 4231 \\ \hline 3042 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1134 \\ +\ 3042 \\ \hline 4231 \end{array}$$

Neprodlévajíce podrobněji u této otázky doporučujeme ukázat žákům v knize Ja. I. PEREL'MAN, „Zanimatel'naja arifmetika“ kapitolu IV, OGIZ, 1934.

Práce v kroužku (míry).

Je užitečné zavésti se žáky krátkou rozpravu o historii metrologie vůbec a *metrické soustavy měr zvláště.*

V krátké rozpravě[9]) učitel může žákům vyložit, že první jednotky míry byly vzaty člověkem z přírody; prvými nástroji na měření délek nepochybně byly části lidského těla, jak to naznačují názvy mnohých délkových měr: stopa, píď, loket a j. Je patrné, že takové způsoby měření nemohly býti přesné; jejich přesnost odpovídala potřebám doby. Je dobře uvésti žákům příklady[10]) libovůle v jednotkách míry, rozmanitosti měr užívaných při měření délek a vah a poukázat, že na konci 18. století, když „krok za krokem zároveň s rozkvětem buržoasie šel gigantický vzrůst vědy, obnovil se zájem o astronomii, mechaniku, fysiku, anatomii, fysiologii („Anti-Dühring“, str. 376), na celém světě se užívalo nejrozmanitějších měr. Větší požadavky na přesnost měření vynutily přechod k měření konstantním měřítkem, k vytvoření pevných, zákonem vymezených jednotek míry a jejich rozdělení na míry jemnější. Je třeba říci, že až do dnešní doby trvá boj za přesnost měřítka, za zdokonalení měřických nástrojů a způsobů měření, za zmenšení chyb při měření.

Dekretem z 21. dubna r. 1799 v době francouzské revoluce byla stanovena zákonem míra 1 metr a bylo zavedeno nové dělení měr.

Jedním z opatření majících velký kulturní význam bylo zavedení v SSSR po Velké říjnové revoluci metrické soustavy měr.

Před zavedením metrické soustavy měr sovětskou vládou, když se v Rusku užívalo měr s nejrozmanitější soustavou měnitelů, nesoulad mezi desítkovou soustavou číselnou a soustavou měr komplikoval aritmetické učivo ve škole a nutil k zavádění dalších kapitol o převodech a početních výkonech s pojmenovanými čísly.

2. V souvislosti s řešením „úloh o čase“ může učitel zainteresovat žáky historickým výkladem o měrách časových. Už v nejdávnějších dobách bylo pro

---

[9]) I. LOBKO, Iz istorii ustanovlenija metričeskich mer, „Matematika i fizika v srednej škole“ č. 1, 1937. A. M. VORONEC a G. N. POPOV „O merach i ščëte drevnosti (dlja učaščichsja), Moskva-Leningrad, GIZ, 1928.

[10]) U nás v Rusku, kde žila spousta národností, majících svoje obyčeje, užívalo se děsjatiny selské, statkářské, bachčevské, astrachanské a j., při čemž statkářská děsjatina byla téměř třikrát větší než astrachanská; rovněž rozmanitá byla délka sáhu, byl sáh máchavý, mořský, kosý a j.

člověka důležité, aby určil, byť jen přibližně, dobu denní a noční, aby ho nezastihla noc v pustém lese, aby nezmeškal dobu lovu atd. Závislost denní doby na výšce slunce ve dne a na výšce hvězd v noci a v souvislosti s tím hrubé rozdělení dne na části, to bylo známo ode dávna. Vznikalo zemědělství a postupně se stávalo přesnějším rozdělení dne na části, a již mnoho tisíciletí před naším letopočtem, zároveň s rozvojem astronomie, bylo známo rozdělení dne na hodiny; užívalo se slunečních hodin; bylo známo spojení sedmi dní v týden atd.

S mnoha zajímavými fakty, o kterých zde se nemůžeme šířiti, z dějin vývoje měření času a počítání let může učitel žáky seznámit v rozpravě s nimi při práci v kroužku a vysvětlit, jak lidé, jsouce velmi závislí na slunci a měsíci, viděli v nich božstva, stavěli jim chrámy, klaněli se jim, a jak toto náboženství se stalo pramenem vykořisťování jedné třídy druhou. Stanovení kalendáře shodného se slunečním rokem a s pohybem měsíce bylo věcí nadmíru obtížnou, neboť poměr doby oběhu země kolem slunce k době otočení země kolem její osy není vyjádřen celým číslem. Kalendář byl upraven zavedením tak zvaného Juliánského kalendáře se stanovením přestupného roku (starý styl).

Koncem 16. století kalendář se posunul už přibližně o deset dní a byl znovu vyrovnán zavedením tak zvaného Gregoriánského kalendáře (nový styl); 5. říjen r. 1582 byl přečíslován na 15. říjen a z počtu přestupných let byly vyloučeny ty roky, jejichž letopočet je násobek 100, ne však násobek 400, jako na př. roky 1900, 1700 nejsou roky přestupné.

Po Velké říjnové revoluci, 14. února 1918, byl u nás v SSSR zaveden kalendář nového stylu, napravující rozdíl 13 dní, který do té doby se utvořil od zavedení Gregoriánského kalendáře.[11])

Otázka přijetí nového stylu v prvých letech po Říjnové socialistické revoluci sloužila u nás jako aréna třídního zápasu. Zachování „starého stylu" bylo praporem, za kterým se držely odumírající třídy, usilující o zachování zbytků starého řádu, aby tímto způsobem rozsévaly nespokojenost v málo uvědomělých vrstvách obyvatelstva.

§ 3. Pokyny pro vedení hodiny; čítání, číslo, numerace

1. Cílem prvé hodiny je precisovat a systematisovat vědomosti žáků: a) o vzniku přirozené řady čísel čítáním oddělených (diskretních) objektů stanovením vzájemně jednoznačného vztahu mezi množinou daných předmětů a množinou přirozených čísel a b) o principech desítkové soustavy čísel.[12])

---

[11]) IDELSON, „Istorija kalendarja", OGIZ, Leningrad-Moskva.

[12]) Hodina může býti vedena tak, že po „úvodním proslovu" učitel přiměje žáky k odpovědím na jednotlivé kladené otázky. Tato práce nezabere mnoho času, a jak mnohokrát provedená zkušenost ukazuje, zajímá žactvo. V tomto § 3 a v následujícím § 4 učitel najde materiál pro zopakování této opakovací hodiny, ze kterého učitel vybere, co shledá potřebným.

Žáci ve většině případů chápou význam čítání a umějí čítat; je třeba stručně obnovit v jejich paměti podstatu procesu čítání, kterým se odpovídá na otázku, kolik je předmětů v daném souboru prvků (v dané množině).

Dojdou k závěru: ať kolikrátkoli a v jakémkoli pořádku opakujeme čítání předmětů jednoho souboru, pokaždé vyjde jako výsledek čítání jedno a totéž číslo.

2. Hlavní pojmy, které se s žáky rozbírají při učení o čísle, jsou „rovné", „větší", „menší"; pojmy ty jsou jim známé, ale není zbytečné věnovati nějaký čas tomu, aby se u nich utvořila představa o samém procesu srovnávání počtu prvků dvou konečných souborů (množin), o stanovení vzájemně jednoznačného odpovídání si mezi prvky daných množin a přejít ke srovnávání charakterisujících čísel (přirozených čísel).

Dvě čísla jsou si rovna, jestliže každé jednotce jednoho čísla lze přiřadit jednu příslušnou jednotku druhého čísla a obráceně. Číslo se jeví menším nebo větším podle toho, zda předchází druhému číslu či za ním následuje v tom sledu slov, kterých užíváme při čítání: „jeden, dva" atd.[13])

Je třeba obrátit pozornost na to, že při srovnávání čísel zanedbáváme to (abstrahujeme od toho), že jedno číslo charakterisuje soubor složený na příklad z knih (předmětů) a druhé charakterisuje na příklad soubor tužek. Při charakterisování souboru dvou, tří atd. předmětů abstrahujeme od zvláštností každého předmětu (prvku souboru, prvku množiny), mluvíme o abstraktních (= otvlečënnyj, u nás nepojmenovaných) číslech při odpovědi na otázku „kolik" nezávisle od toho, „jakých předmětů" (kvantitativní charakterisace množiny).

3. Když je zopakováno, že jako výsledek čítání oddělených předmětů dospíváme k pojmu přirozené řady čísel, ve které čísla jdou za sebou tak, že každé číslo je větší nežli každé předcházející a menší nežli každé následující, a že pouze číslo 1 nenásleduje za žádným jiným číslem,[14]) obrátíme pozornost žactva na to, že přirozená řada čísel je nekonečná. Postupné čítání dává nekonečnou řadu čísel. Dočítáme-li

[13]) Kiselëv, „Arifmetika", vyd. z r. 1938 a další.

[14]) Viz kap. I, § 2.

do libovolného čísla a potom řekneme „a ještě jeden", dostáváme nové číslo, pro které je pouze třeba stanovit název.

4. Jak bylo řečeno v úvodě, s ideou kardinálního čísla je nerozlučně spjata idea pořadového čísla. Je dobře zdůraznit tuto myšlenku u přirozené řady čísel; jestliže předměty souboru jsou umístěny ve známém pořádku, tu předmět, vyznačený při čítání slovem „jeden" bude předmětem prvním, předmět vyznačený slovem „dva" bude druhým atd. V přirozené řadě čísel každé číslo je určeno místem, jež zaujímá v této řadě.

Poznámka. Ve skutečnosti o souboru předmětů můžeme mluvit tehdy, když jich není méně než dva; ale a) „jeden" jako odpověď na otázku „kolik" považuje se také za číslo a umísťuje se do řady přirozených čísel; b) „nula" vlastně také dává odpověď na otázku „kolik", praví, že není žádný předmět, že v daném případě nemáme ani soubor. Při procesu rozšíření pojmu čísla zavádí se nula jako číslo, ale nulu neumísťujeme do řady přirozených čísel; jestliže ji umístíme do přirozené řady, tu nula musí předcházet číslu 1[15]) (viz axiomy na str. 18).

5. Když si žáci uvědomí čítání jakožto proces vedoucí k přirozené řadě číselné, zopakuje se obecnější způsob čítání, totiž čítání skupinami. Žáci mají míti z kursu obecné školy postačující znalosti o řádech a třídách.

Zde je třeba pouze připomenout žákům známé jednotky čítání a zdůraznit, že deset, sto, tisíc atd., jsou jednotky čítání. Tisíc dlužno pojímat i jako jednotku 4. řádu i jako jednotku II. třídy; tehdy prostá jednotka dostane pojmenování jednotka I. třídy. Tisíc jednotek každé třídy tvoří jednotku bezprostředně vyšší třídy; tak 1000 jednotek II. třídy tvoří novou jednotku III. třídy, zvanou „milion". 1000 jednotek III. třídy (třídy milionů) tvoří jednotku IV. třídy, zvanou „miliarda" nebo „bilion". 1000 jednotek IV. třídy (třídy bilionů) tvoří jednotku V. třídy „trilion" atd.[16])

Číslo 10 je **základ** desítkové soustavy číselné. Jednotkami čítání v desítkové soustavě číselné jsou různé mocniny tohoto základu: $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$ atd.

---

[15]) Po zavedení nuly možno brát zobrazení přirozené řady čísel na polopřímce OA řadou ekvidistantních (stejně vzdálených) bodů (směrem od O k 1, 2, 3 ...), kde $O1$ je jednotka měřítka a zobrazuje číslo 1; úsečky $O2$, $O3$ atd. zobrazují čísla 2, 3 atd.

[16]) 1000 trilionů je jeden kvadrilion; jednotky dalších tříd mají názvy kvintilion, sextilion, septilion, oktilion, nonilion, decilion atd. Každá třída v tomto systému se skládá ze 3 řádů. Dříve každá třída se skládala ze 6 řádů; stopy toho se jeví v tom, že bilion znamená 10^9 u nás (v SSSR) a ve Francii, ale 10^{12} v Anglii, Německu i jiných zemích.

$$57683 = 5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0;$$

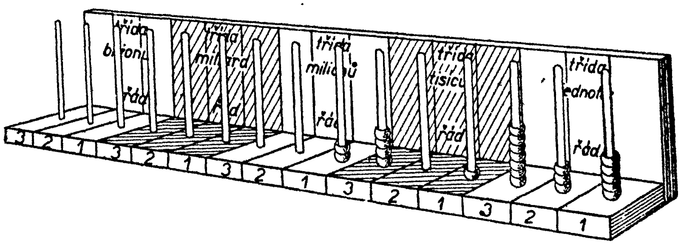
$$N = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1} 10 + a_n.$$

Pokyn. Další materiál k otázce „Numerace“ byl udán výše v § 2 „Práce v kroužku (numerace)“.

Žáci musí ocenit hlavní přednosti desítkové soustavy čísel — zdůrazňujeme je při vysvětlování pravidel provádění jednotlivých výkonů. Tyto přednosti záležejí 1. v tom, že počet znaků byl zmenšen a redukován na 10, čítajíc i nulu, 2. v tom, že význam každé cifry[17]) je určen jejím tvarem a jejím místem, její posicí (posiční soustava). Jeden z největších matematiků 18. a 19. stol., Laplace (1749—1827), takto se vyjadřuje o geniálnosti užívané desítkové soustavy: „Myšlenka vyjádřit každé číslo 9 znaky zavedením vedle významu podle tvaru ještě významu podle místa je tak jednoduchá, že právě pro tuto jednoduchost je obtížné pochopit, jak je obdivuhodná. Jak těžké bylo dospěti k takové methodě, vidíme jasně na příkladě největších geniů řecké učenosti, Archimedovi a Apolloniovi, jimž tato myšlenka zůstala utajena.“[18])

Místní význam cifer a užívání nuly k zápisu nevyskytujících se řádů dovoluje zapsat libovolné číslo stručně a jednoduše pomocí pouhých 10 znaků.

V učebnici aritmetiky se udává názorná tabulka řádů a tříd; je vhodné vyvěsit ji ve třídě. Také je vhodné mít ve funkci názorné pomůcky abakus (obr. 7), který může býti zhotoven ve škole.



Obr. 7.

Poznámky. 1. Žáci nezřídka si pletou pojmy „cifra“ a „číslo“. Tak když se žádalo určiti součet čísel 8956 a 91000, vyskytovaly se odpovědi 28 a 10,

---

17) Slova „cifra“ se u nás užívá ve významu značky sloužící k zápisu čísel. Původně slovo „nula“ (indicky „sunya“) znamenalo „prázdný“. Arabové přeložili toto slovo do svého jazyka „az-cifr“ a z toho vznikl termín „cifra“. Naše vyznačování nuly kroužkem vzniklo v souvislosti s prací na abaku, když přešli k odstranění přepážek mezi sloupci vyznačujícími řády. Bylo třeba vyznačit sloupec, ve kterém nebylo znaku a to prováděli značkou || nebo ⊔ nebo 0.

18) „My jsme v mimořádně šťastné situaci: disponujeme universálním jazykem, písemnou dekadickou numerací. H. Lebesgue, „Sur la mesure des grandeurs“.

t. j. v odpovědi se udával „součet cifer" každého z daných čísel (udaný příklad není osamocený).

2. Úkoly napsat největší a nejmenší dvojciferné, trojciferné atd. číslo, zapsat číslo ve tvaru součtu jednotek jednotlivých řádů, t. j. zapsat: 5632 = = 5000 + 600 + 30 + 2 rovněž působí žákům potíže.

3. Ačkoli žáci 5. třídy většinou dovedou porovnávat čísla, neumějí správně zapisovat nerovnosti.

Těchto nedostatků v práci musí si učitel všímat; zejména musí žákům vysvětlit význam slova „cifra" a ukázat na příkladech konvenční užívání slova „cifra" místo slova „číslo", když se mluví o „cifrách pětiletky", o „součtu cifer" atd.

Zaokrouhlování celých čísel. Na velkých číslech (v další látce na rozmanitých cvičeních s měrami) může učitel zopakovati se žáky a) vše, co znají o přesnosti, se kterou se udávají čísla, b) pravidla pro zaokrouhlování čísel.

Pokyn. Při čítání malého počtu předmětů číslo, které dostaneme jako výsledek čítání, bere se přesně; při čítání velkého počtu předmětů, na příklad, počtu obyvatel města, počtu zrn žita v 1 kg, těžby uhlí nebo nafty, výsledek se zaokrouhluje. Zaokrouhlení čísla záleží v tom, že několik nejnižších řádů v daném čísle nahradíme nulami, při čemž, jestliže první ze zanedbaných cifer je větší než 5, je třeba poslední z podržených cifer (přesněji číslo, jehož značkou je poslední podržená cifra) zvětšit o jedničku, čemuž se říká „vzít opravu". Zdůrazňujeme slovo „nahradíme nulami", neboť v praxi žáci, když se žádá zaokrouhlení čísla, někdy připisují nuly, někdy zase prostě vynechají nejnižší řády, nenahrazujíce je nulami. Nejméně se ve škole užívá pravidla „sudé cifry", které spočívá v následujícím: jestliže se odvrhuje toliko jediná cifra 5, tu poslední podržená cifra se nechává beze změny v případě, že je sudá a zvětšuje se o jednu, jestliže je lichá. Říditi se tímto pravidlem zvyšuje přesnost při složitých výpočtech, protože v tomto případě přibližně stejněkrát při zaokrouhlování čísla zvětšujeme jako zmenšujeme. Příklad: 237 485 t uhlí zaokrouhleno na desítky, na sta, na tisíce: 237 480 t; 237 500 t; 237 000 t.

V daném případě nula nebo nuly stojí na místě jednoho nebo několika nejnižších řádů čísla. Při provádění zaokrouhlování čísel se žáky je třeba zdůraznit, že v zápisech: 1 kg = 1000 g; kus látky měří 200 m; dodáno bylo 300 párů bot atd. daná čísla jsou přesná a nuly naznačují, že v čísle se nevyskytují jednotky, desítky nebo sta (nebyly nulami zaměněny jiné cifry).[19]

---

[19]) V. kap. X, § 22.

§ 4. Veličina. Měření veličin

Materiál k vedení vyučovací hodiny

Úloha měření veličin, toť jedna z úloh, které vznikly už na prvních stupních lidské kultury. Vedle čítání oddělených (diskretních) předmětů v nejranějším stupni naléhavá praktická potřeba vyvolala v život nejjednodušší způsoby měření spojitých veličin, nejprve těch nejběžnějších, jmenovitě: délky, obsahu, objemu, váhy, času ve spojení s nutností určit vzdálenost, provésti výměru pozemku, určit množství zrn potřebné na osev atd.

Theorie veličin může býti vyložena až po zobecnění pojmu čísla zavedením irracionálních čísel. Proto o ní nemůžeme pojednati s dostatečnou úplností v této práci. Vycházejíce z methodických úvah, podáváme některé body o veličinách v této kapitole a rozvíjíme úvahu dále v kapitole „O lomených číslech".

Při čítání soubor stejnorodých objektů charakterisuje se číslem, na příklad 24 bochníky, 24 stoly, 24 mince (dvacetikopejkové a desetikopejkové). Chceme-li nabýt představy o jednotlivém objektu souboru nebo poznat, nerozlišují-li se stejnorodé objekty svými vlastnostmi (na příklad, chceme-li poznat, mají-li bochníky stejnou váhu, jsou-li stoly stejně vysoké, stejně dlouhé atd.), je nutné v předmětech (nebo zjevech) přesněji určit to, co se dá kvantitativně vyjádřit (objem, hmotu, délku atd.).

Známé jsou definice veličiny udávané v kursech „Aritmetiky": „Veličinou se nazývá to, co se může zvětšovat nebo zmenšovat". „Vše to, co může býti rovné, větší nebo menší."[20]) Takové definice jsou příliš povšechné a nepostačují k utvoření pojmu matematické veličiny. Uvedeme definici veličiny, kterou podává J. Tannery ve spise „Leçons d'arithmétique théorique et pratique". „Veličina je věc nebo vlastnost, která může nabývati různých hodnot, při čemž však ta věc nebo ta vlastnost zůstává jednoho a téhož druhu". Helmholz („Sčët i izmerenie", ruský překlad Vasiľeva 1893) podává následující definici veličiny: „Objekty nebo atributy objektů, které při srovnávání s jim podobnými připouštějí rozlišování většího, rovného nebo menšího, nazývají se veličiny". Ve Velké sovětské encyklopedii prof. V. Kagan takto formuluje definici veličiny: „Veličina je vlastnost souboru objektů, vzhledem ke které jsou stanovena kriteria pro jejich srovnávání, t. j. znaky rovnosti nebo nerovnosti".

Ze všech definic vysvítá, že hlavní vlastností veličiny je její schopnost být srovnávána, být rovná, větší nebo menší, být dělena na části, a že především na tyto vlastnosti je soustředit matematické vyučování o veličinách. A k tomu cíli je třeba stanovit „kriteria srovnávání", jinými slovy způsoby měření a jednotky měření. Tak rozum, chrabrost člověka atd. nejsou matematické

[20]) Je třeba poznamenat, že slova „veličina" často se užívá ve smyslu určité velikosti, ve významu, jaký má veličina ve zvláštním případě: na př. 5 cm (délky), 3° (tepla). Je nutné vysvětlit žákům, že dráha není veličina, nýbrž délka dráhy, že kus kovu není veličina, nýbrž jeho váha atd.

veličiny, nemohou býti předmětem matematického výzkumu, protože u nich neexistují jednotky srovnávání a způsoby měření, nelze je vyjádřit **čísly**.

Euklidem v jeho „Základech" byly formulovány axiomy, které mají všeobecný význam při měření všech veličin; současná věda zavádí několik dalších podmínek.

Odkazujíce interesenty na literární prameny z theorie aritmetiky uvedené v našem seznamu, omezíme se na uvedení následujících axiomů:

1. Dvě veličiny jednotlivě rovné veličině třetí jsou rovny mezi sebou.

2. Jestliže k rovným veličinám přidáme rovné, dostaneme součty mezi sebou rovné; jestliže od rovných veličin ubereme rovné, dostaneme rovněž veličiny mezi sebou rovné.

Prvý Euklidův axiom můžeme pojímati takto: v případě, že není možné (nebo je obtížné) stanoviti přímo rovnost dvou veličin A a B, můžeme k tomu dospěti pomocí veličiny třetí. Rovněž druhý axiom se jeví jedním možným způsobem pro stanovení rovnosti dvou veličin.

Dvě veličiny mohou býti stejnorodé nebo různorodé. Stejnorodými nazýváme takové veličiny, které buďto jsou rovny mezi sebou, nebo se liší pouze velikostí. **Změřit veličinu** znamená ji porovnat se stejnorodou veličinou přijatou za jednotku míry, nebo jinými slovy, vyjádřit číslem její poměr ke stejnorodé veličině přijaté za jednotku míry. Porovnávat navzájem můžeme pouze stejnorodé veličiny.

Každý druh veličin má své vlastní methody měřicí, při čemž společné všem těm methodám je to, že při každé jde o proces mající za svůj cíl rozdělit měřenou spojitou veličinu na určité části, a určit počet těch částí (v. níže). U prostorové veličiny, rozměru, měřická methoda záleží v podstatě v přiložení (nebo vložení) jedné veličiny (měřítka) na druhou; tato methoda je založena na předpokladu, že tělesa můžeme přenésti s jednoho místa na druhé bez jejich deformace. K měření jiných veličin je třeba zvláštních přístrojů, na příklad vah k vážení, při čemž se předpokládá existence přesných vah a neproměnné hmoty.[21]) Také ve většině případů určení „poměru" (změření), zejména u fysikálních veličin, nemůže se provésti bezprostředně, je nutné se uchylovati k nepřímým methodám měření, jako na příklad při měření hustoty hmoty, intensity osvětlení; v geometrii se vykládá převod měření všech tří prostorových veličin — délky, obsahu a objemu — na měření délky. Pro každý druh veličin se zavádí jednotka měření, známá veličina stejnorodá s veličinou měřenou a nazývaná měrou (pojmenovaná veličina).

Rozmanitost veličin, které se vyskytují ve vědě a v praktické činnosti, a nutnost srovnávání veličin navzájem stejnorodých vede k problému zavedení velkého počtu speciálních jednotek míry. Ale ve skutečnosti tomu tak není: na možnost vyjádření všech jednotek míry pomocí jednotek míry tří základních

[21]) Je známo, že tyto předpoklady nejsou v úplném souhlasu se skutečností. Podrobněji v. Weber-Wellstein, „Enzyklopädie der Elementarmathematik".

veličin — délky, hmoty a času — poukázal už Gauss (1777—1855) v první polovině 19. století. Tato soustava měr (v ní všecky jednotky jsou odvozeny z těchto tří základních jednotek) nazývá se absolutní soustavou měr. V přítomnosti ve vědě se užívá soustavy „CGS", kde za jednotku délky je vzat centimetr, za jednotku hmoty gram a za jednotku času sekunda.

§ 5. Návod pro lekci; veličina, měření veličiny, míry[22])

1. Třebaže žáci už se učili měřit, je vhodné při shrnování otázky měření veličin provésti skutečné změření délky (rozměru) proto, aby se jim mohly položit následující otázky: jakou veličinu měříme (na příklad rozměr: délku či šířku třídy)? V čem spočívá proces měření? Učitel musí pečlivě objasnit žákům, že měření provádíme „měrou", jednotkou srovnání, která je stejnorodá s měřenou veličinou, na př. metrem. Proces měření tkví v tom, že spojitou veličinu — délku, myslíme si rozdělenu na části, dlouhé 1 m, a potom čítáme počet těch částí. Výsledek udává, kolik úseček délky 1 m (kolikrát 1 m) se vejde do délky místnosti. Obdržené číslo, na př. 4 (4 m) dohodneme se nazývati pojmenovaným číslem. Můžeme poukázat na to, že jestliže podél stěny místnosti si vyznačíme znaménky, kde končí přiložené metry, tu při spočítání znamének v libovolném pořádku dostáváme stále totéž číslo.

V řídkých případech délka nebo šířka místnosti bude obsahovati celý počet metrů. Tu je třeba pokračovat v procesu měření jemnějšími měrami, na příklad decimetry, a ukázat, že výsledkem měření je mnohojmenné číslo (přibližné číslo).

V dalším bude vysvětlen vznik lomeného čísla dělením jednotky míry na rovné díly a měřením veličiny pomocí takových dílů.

Tedy čísla mohou se obdržeti čítáním stejnorodých předmětů (ne jednotek míry), taková čísla se někdy nazývají „konkretní čísla". Dále se čísla obdrží, jak jsme viděli, jako výsledek měření spojitých veličin — to jsou tak zvaná „pojmenovaná čísla". Kromě toho dříve jsme vyložili pojem abstraktního čísla.

Poznámky. 1. Užíváme dvou termínů: „pojmenované" číslo a „konkretní". V pedagogické praxi slovu „pojmenované číslo" většinou se rozumí tak, že jsou v tom zahrnuta i „konkretní čísla" (Malinin a Burenin; Borel; Arženikov a j.).

Na tomto místě jsme těmito názvy chtěli pouze zdůraznit rozdíl mezi

[22]) Kiselëv, „Arifmetika", vyd. z r. 1938, §§ 106—114.

dvojím vznikem čísla — jako výsledku měření nebo jako výsledku čítání. Proces měření provádíme se spojitými veličinami, které mohou být větší, menší nebo rovné a mohou se dělit na části. Čítání provádíme u diskretních veličin, u nedělitelných individuí. Proces měření je složitější než proces čítání. Při čítání diskretních předmětů stačí je „sdružovat" do párů s členy přirozené řady. Při měření veličiny je nutné provésti dvojí proces: rozdělit, byť i jen v mysli, měřenou veličinu (objekt) na části (jednotky míry) a spočítat ty části.

Výkony početní se provádějí s abstraktními (nepojmenovanými) čísly. Pojmenování pouze udává jednotku, v níž se provádí čítání nebo měření. Je jasné, že k abstraktnímu číslu lze připojiti libovolné pojmenování, na příklad: $4 + 3 = 7$; 4, 3, 7 jsou abstraktní čísla, k nimž připojíme pojmenování (jednotky čítání nebo měření): jablka, kg, m atd.[23])

2. Pojem veličiny diskretní a veličiny spojité schopné neomezeného rozdělování můžeme žákům vysvětlit na příkladech: budiž dáno několik objektů, třeba stádo ovcí, tucet talířů, tu k danému souboru předmětů (objektů) můžeme připojit libovolný počet dalších objektů, budeme mít více ovcí, více talířů atd. Jestliže rozdělujeme stádo, rozdáváme talíře stolovníkům, tu posléze se daný soubor rozpadne na jednotlivé objekty a dále v dělení pokračovat už nelze.

Ale veličinu jako váhu masa, ovčí kůži, váhu porcelánu, ze kterého byly talíře vyrobeny, můžeme dále dělit, dostaneme pouze menší veličinu, stejnorodou s původní. Učiníme ještě jednu poznámku.

3. Žáci vědí, že jednotkou čítání (srovnávání) může býti také libovolná skupina jednotek — desítky, sta, tisíce atd. — které se stávají novými jednotkami čítání. Na příklad, jestliže žáků ve škole je 400, ale ve třídě 40, můžeme čítání provésti novou jednotkou čítání — „třídou" — a říci, že ve škole je 10 tříd. Velká čísla obyčejně čítáme v miliardách nebo v milionech jednotek atd. Jednotkou měření rovněž může býti libovolná skupina základních jednotek — metr rovný 100 cm, sud téhož objemu jako 40 věder atd. Jestliže žáci chápou možnost rozmanité volby jednotek, jimiž lze měřit jednu a touž veličinu, může to zabránit časté chybě v sešitech, kde žáci zapomínají v odpovědi udat pojmenování jednotky měření.

4. Později, když žáci už získali jasnou představu o veličině a o procesu měření, pochopili, že veličiny lze měřiti pouze veličinami s nimi stejnorodými, že **výsledek měření** může být *vyjádřen číslem* pojmenovaným jednojmenným nebo mnohojmenným, že veličiny lze měřit rozmanitými měrami více nebo méně hrubými, je vhodné ujasnit na příkladech, že v praxi se užívá k měření

[23]) Je třeba poznamenat, že jsou abstraktní čísla, ke kterým nelze připojit libovolné pojmenování. Při prvých čtyřech výkonech je tomu tak v těchto případech: 1. násobitel při násobení dvou čísel; 2. dělitel při dělení na daný počet částí; 3. podíl při dělení ve smyslu, kolikrát je obsaženo.

Tato čísla mohou mít jen jedno pojmenování: 1. kolikrát jest vzíti sčítance nebo jaký **díl** čísla jest vzíti; 2. na kolik **dílů** rozdělit: 3. kolikrát je jedno číslo obsaženo ve druhém neboli **jaký díl** druhého čísla tvoří atd.

přiměřených měr[24]) v každém jednotlivém případě. Tak na příklad rozměry při rýsování se udávají v milimetrech, rozměry při výrobě dílenských stolů a stoliček v centimetrech, výška a šířka místnosti v decimetrech, vzdálenosti na dráze a na vodě v kilometrech, délka hranice státu v tisících kilometrů, vzdálenosti planet v milionech kilometrů atd.; obsah pokoje se udává ve čtverečních metrech, obsah pole v arech a hektarech. Mezi jiným je zajímavé obrátit pozornost žactva na to, že vzdálenosti hvězd se měří na světelné roky, t. j. že za jednotku měření délky se tu bere dráha, kterou proletí světelný paprsek za jeden rok. Je třeba zopakovat se žáky míry délkové, váhy, míry plošné a prostorové, míry časové, zopakovat převod jedněch měr na druhé stejnorodé s danými, ačkoli při probírání celých čísel učitelovy možnosti v tomto směru jsou omezené. K této otázce je třeba se vrátit při výkonech s desetinnými zlomky, když převod měr na míry hrubší už není omezen podmínkami pro dělitelnost beze zbytku.

5. Je třeba obrátit pozornost na správný žákovský zápis pojmenování měr podle Všesvazové normy; příslušnou tabulku měr a vedle toho tabulku správných symbolů je vhodné vyvěsit ve třídě. Při řešení úloh se žáky je třeba poukazovat na obdrženou (docílenou) přesnost měření.

Při řešení úloh na výpočet objemu a váhy zde i později po probrání výkonů s desetinnými zlomky je velmi užitečné míti ve třídě asi takovouto tabulku:

Objem	Váha	Příklad (žáci uvedou sami)
cm^3	g	z maloobchodu
dm^3	kg	ze stavebnictví
m^3	t	z budovatelského díla

Při velkých rozměrech objem (lesa, uhlí atd.) se udává v tisících m^3 a váha v tisících tun.

6. Je vhodné, aby žáci provedli praktickou práci — vyměřili v terénu nějakou vzdálenost pomocí měřického pásma, na př. vzdálenost od domova do školy (při tom se vyznačí počáteční a koncový bod). Jako vždy bereme aritmetický průměr obdržených výsledků. Výsledky jednotlivých měření buďtež třeba: 1705 m, 1729 m, 1712 m a 1730 m. Aritmetický průměr je $(1700 + 1729 + 1712 + 1730) : 4 = 1700 + 19 = 1719$ (m). Počítá se odchylka jednotlivých výsledků měření od aritmetického průměru.

Spočítáme-li kroky (obyčejně čítáme dvojkroky) potřebné na určitou vzdálenost, můžeme vypočítat délku vlastního kroku (s přesností na 1 cm), kterou znát je nadmíru užitečné každému žáku. Tato práce se děje mimo vyučovací dobu.

[24]) O tom, jak se dochází k pojmu obsahu a k měrám plošným, bude řeč v dalším.

KAPITOLA III.

SČÍTÁNÍ

§ 1. Úvod

Ve většině učebnic oddíl o sčítání začíná definicí výkonu sčítání, při čemž velmi oblíbená je definice sčítání jako výkonu, pomocí kterého se najde součet daných čísel (V. Kjurzen a j.). Při takové definici sčítání udává se předem takovými či onakými slovy definice součtu jako čísla, které je složeno ze všech jednotek daných čísel, ačkoli někdy smysl pojmu součtu autoři neudávají — v tomto případě, v podstatě, nepodávají pak ani definici součtu. V jiných učebnicích a příručkách aritmetiky sčítání se definuje zase jako početní výkon, jímž se dochází k číslu obsahujícímu tolik jednotek, kolik jich je ve všech daných číslech dohromady (N. Izvol'skij, A. Malinin a K. Burenin, B. Fridman, Serret, Sacharov, Želen V. I. Vasil'ev, P. K. Šmulevič a j.). Tato definice se neliší podstatně od výše uvedených definic sčítání a součtu, ačkoli se podává v jiném tvaru. Značně řidčeji (K. N. Raševskij) se podává definice sčítání jako početního výkonu, kterým se k jednomu číslu připočítává tolik jednotek, kolik jich je v čísle druhém. Znova je možno položit otázku, zda slovo „připočítává se" není synonymem slova „připojuje se", „přidává se" a nečiní-li se tím v definici bludný kruh, jímž se definice stává bezcennou. „Matematičeskij vestnik" č. 1 z r. 1916 obsahuje článek N. Izvol'ského „Ob opredelenii složenija", kde se uvádějí různé definice sčítání, udávané v předrevolučních učebnicích aritmetiky a rovněž se uvádějí příslušné kritické poznámky pedagogů, vyjadřující pochybnost o možnosti a oprávněnosti udávaných definic sčítání v tom případě, že pojem sčítání se definuje pojmem „obsahovati všecka daná čísla", což vede pouze k záměně jednoho slova druhým a neodhaluje podstatu výkonu. Odkazujíce zájemce na uvedený článek, poznamenáváme zde pouze, že mnoho úvah vede autora posléze k závěru, že není účelné, aby se žáci učili definici sčítání. Známý pedagog I. Alexandrov v knize „Osnovanija arifmetiki soizmerimych čisel" určené pro vyšší třídy středních učilišť, začíná svůj kurs takto: „Pro sčítání není dobrých definic", ale dále připojuje: „Výkon tento je tak jednoduchý a obecně známý, že není třeba jej definovat". Dobře praví Poincaré: „Definovat sčítání tak, že řekneme, že znamená přidávání, znamená vůbec je nedefinovat. Vše, co se dá dělat, je začít řadou konkretních příkladů a potom říci: výkon, který tu provádíme, nazývá se sčítání". My máme za to, že postačí začít se žáky 5. třídy oddíl o sčítání tak, že obnovíme v paměti žáků sám proces sčítání, objasníme podstatu výkonu sčítání.

§ 2. Sčítání

Můžeme se žáky znovu rozebrat obě možné methody bezprostředního provádění výkonu sčítání.

Prvá methoda spočívá v tom, že oba soubory předmětů, které se mají sečíst, sjednotíme v jediný soubor; tentó nový soubor bude zahrnovat všecky předměty, které byly v prvním i ve druhém souboru. Je třeba žákům objasnit, že při tom se provádí pouze spojování předmětů obou souborů v jediný celek, ale početní výkon sčítání při tom nemáme do té doby, dokud neudáváme číselnou odpověď. Abychom dostali číselnou odpověď, je třeba provést čítání všech objektů obsažených v nově obdrženém souboru.

Druhá methoda: můžeme k předmětům prvého souboru (prvkům prvé množiny) postupně přidávat po jednom předmětu druhého souboru a tak dostat součet dvou daných souborů.

Zopakují se názvy: sčítanec, součet, a rovněž zápis $a + b = c$,[1]) kde místo a a b lze dát libovolná čísla s libovolným pojmenováním podle libovolně zvolených množin.

Je dobře ještě jednou zdůraznit, že při aritmetickém výkonu sčítání vždycky sčítáme nepojmenovaná čísla. Na pojmenování objektů souborů bere se zřetel pouze za účelem vhodného popisu obdrženého souboru (32 jablka nebo 32 tužky).

§ 3. Zákony sčítání

Když žákům objasníme podstatu sčítání, je třeba zopakovat zřejmé skutečnosti:

1. že místo toho, abychom k předmětům prvého souboru přidávali po jednom předměty druhého souboru, můžeme naopak k předmětům druhého souboru přidávat po jednom předměty prvého souboru — v obou případech se shrnou všecky předměty, dostane se jeden a týž součet;

2. že pojem „sčítání“ dá se rozšířit na libovolně mnoho čísel, a že v tomto případě sloučení příslušných souborů předmětů může se provésti *oběma* výše uvedenými způsoby: můžeme sloučit všecky

[1]) Značka + vznikla z posledního písmene latinského slova et (spojka „a“); značky „+“ a „—“ byly zavedeny v 15. století.

soubory na ráz a čítat výsledek; můžeme k prvnímu souboru připojit druhý, potom třetí, potom čtvrtý; můžeme nejprve (kterýmkoli z uvedených způsobů) sloučit druhý a třetí soubor, zvlášť sloučit prvý a čtvrtý soubor a posléze oba takto obdržené soubory znovu sloučit atd.

Jinými slovy, je třeba vyvodit vlastnosti součtu:

1. součet nezávisí na pořádku čísel, které máme sečíst:

$$a + b = b + a;$$

pravíme, že součet je nezávislý na pořádku daných čísel (sčítanců) — zákon komutativní (zákon záměnnosti);

2. při sčítání můžeme kterákoli dvě ze tří daných čísel nahradit číslem rovným jejich součtu:

$$a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c;$$

zákon asociativní (zákon sdružování).

Oba zákony se rozšiřují na případ více sčítanců[2])

$$a + b + c = a + c + b = b + c + a;$$
$$a + b + c = a + (b + c) = (a + c) + b.$$

Je třeba pročíst s žáky formulace příslušných zákonů uvedené v učebnici. Zápis prvého zákona písmeny je žádoucí; možnost zápisu druhého zákona písmeny závisí na připravenosti třídy.[3])

Poznámky. 1. Důvěra ve správnost výše uvedených zákonů byla výsledkem mnohonásobného praktického ověření příslušných rovností, a dále výsledkem rozšíření zákonitosti pozorované na řadě zvláštních případů na všecky možné případy s nimi stejnorodé. V kursech theoretické aritmetiky najde učitel důkaz obecné platnosti těchto zákonů methodou úplné indukce z n na $(n + 1)$.

Uvedeme zde základní zákony aritmetických výkonů, 5 zákonů, na kterých je založeno sčítání, a 6 zákonů, na kterých je založeno násobení.[4])

Pro sčítání	Pro násobení
1. $a + b = c$	1. $a \,.\, b = q$

Výsledek vždycky znamená zase číslo[5]) (výkon je vždy proveditelný).

[2]) Zobecnění zákona komutativního a asociativního.

[3]) Ponenáhlé zavádění písmenné symboliky učí vidět v písmenech čísla, číst a zapisovat výrazy s písmeny.

[4]) Na zákonech výkonů jsou založena praktická pravidla výkonů s přirozenými čísly, rovněž slouží jako základ pro theoretické zdůvodnění rozšíření pojmu čísla.

[5]) Přirozené číslo.

2. $a + b = c$ 2. $ab = q$

Výsledek je vždy jednoznačně určen.

3. $a + b + c = a + c + b$ atd. 3. $a . b . c = a . c . b = b . c . a$ atd.

Součet a součin vyhovují zákonu záměnnosti.

4. $(a + b) + c = a + (b + c)$ 4. $a . (b . c) = (ab)c = abc$

Součet a součin vyhovují zákonu sdružování.

5. Jestliže $b > c$, pak $(a + b) > (a + c)$ 5. Jestliže $b > c$, pak $ab > ac$

Součet a součin vyhovují zákonu monotonie.[6])

6. $(a + b) c = ac + bc$

Součin vyhovuje zákonu distributivnímu (vzhledem ke sčítání).

Všecky výpočty s celými čísly opírají se výhradně o těchto 11 zákonů a ještě o základní spoje sčítání a násobení, což se vysvětluje průběhem kursu. Pro učitele je nadmíru důležité pročíst si v námi uvedené práci F. Kleina kapitoly věnované otázkám aritmetiky.

2. Je třeba žákům vysvětlit, že mluvíme o sčítání čísel přirozené řady a že jestliže k danému číslu a přičteme číslo přirozené řady b (nulu sem nepočítáme), obdržíme číslo c větší nežli a; že číslo c stojí v přirozené řadě o b míst dále nežli a. Zdůraznění vyslovené skutečnosti je účelné pro další při vysvětlování případu, kdy součet bude menší než dané číslo, t. j. případu přičítání záporného čísla.

3. Je třeba, aby žáci užívali zákonů sčítání prakticky při počítání zpaměti, na příklad odpovídajíce na otázku, v jakém pořádku lze nejvýhodněji sečíst čísla

$500 + 800 + 500$; $800 + 500 + 200$; $60 + 70 + 80 + 40 + 30$ atd.

V posledním příkladě můžeme užít obou zákonů

$$(60 + 40) + (70 + 30) + 80 = 280.$$

§ 4. Početní pravidla sčítání. Úlohy, které se řeší sčítáním

Učitel připomene žákům následující:

1. Při vysvětlování podstaty sčítání bylo konstatováno, že sčítání je založeno na postupném přičítání jednotek v přirozené řadě, že

[6]) Monotone (franc.) monotonní, jednotvárný.

však provedení sčítání mnohociferných čísel methodou postupného přičítání jednotek by bylo nadmíru svízelné a vyžadovalo by velmi dlouhé doby, na příklad kdyby se mělo takto sčítati $4563 + 3271$; proto se udává pravidlo výkonu sčítání čísel, založené na tom, že

2. daná mnohociferná čísla můžeme si představovati složena z čísel jednotlivých řádů, jako

$$4563 = 4000 + 500 + 60 + 3; \quad 3271 = 3000 + 200 + 70 + 1,$$

3. pro sčítání platí zákon asociativní a komutativní a na nich je založeno pravidlo provádění tohoto výkonu, na příklad:

$$4563 + 3271 = (4000 + 3000) + (500 + 200) + (60 + 70) + (3 + 1),$$

neboli

(4 tisíce + 3 tisíce) + (5 set + 2 stě) + (6 des. + 7 des.) + (3 jedn. + + 1 jedn.);

$$\begin{array}{r} 4563 \\ +\ 3271 \\ \hline 7384. \end{array}$$

Závěry, které musí býti zřetelně shrnuty:

1. Význam pravidla sčítání mnohociferných čísel jako technického prostředku k provádění sčítání.

2. Význam desítkové numerace pro vypracování pravidla sčítání mnohociferných čísel.

3. Převedení procesu sčítání mnohociferných čísel na sčítání jednociferných čísel podle základních spojů sčítání.

Nepovažujeme za nutné, aby se při opakování v 5. třídě řešilo mnoho příkladů na sčítání mnohociferných čísel. Hlavní pozornost se musí věnovat tomu, aby žáci důkladně se poučili o podstatě sčítání a o zákonech sčítání.

Pokyny. 1. Existuje mnoho method sčítání čísel; kromě obyčejného způsobu Šochor-Trockij ve své „Methodice aritmetiky" považuje za nejúčelnější pro případ velkého počtu sčítanců následující způsob: odděleně sčítat jednotky každého řádu a zapisovat částečné součty; potom sečíst všecky částečné součty. V tomto případě je možno začít buďto od nejnižšího nebo od nejvyššího řádu; na příklad:

$$
\begin{array}{r|r}
4568 & 33000 \\
3719 & 2300 \\
2483 & 420 \\
+\ 1569 & \underline{45} \\
3085 & 35765 \\
7140 & \\
8069 & \\
5132 &
\end{array}
\quad \text{(výkon byl začat od nejvyššího řádu).}
$$

A skutečně v tomto případě: 1. práce probíhá nadmíru klidně — po sečtení jednotek jednoho řádu můžeme práci přerušit bez bázně, že zapomeneme „cifru", kterou při obyčejném způsobu je třeba si pamatovat; 2. při tomto početním postupu je snadná zkouška správnosti.

2. Někteří methodikové z dobrých důvodů navrhují začínat sčítání od nejvyššího řádu soudíce, že při takovém způsobu žáci neprovádějí sčítání mechanicky a proto nadělají méně chyb. Nepříjemnost v daném případě je jenom jedna; často se stane, že je třeba předem odhadnout následující cifry a celý pracovní postup je pro žáky namáhavý; na příklad v případě

$$
\begin{array}{r}
5989 \\
+\ 6897 \\
4979 \\
\hline
17865
\end{array}
$$

si musíme třikrát za sebou všímat následující části výpočtu.

Žáci musí chápat, proč je možné začínat sčítání i od nejnižšího řádu i od nejvyššího.

3. Je třeba žákům vyjasnit, že zápis sčítanců při písemném provádění sčítání mnohociferných čísel, který se vede tak, že se kladou jednotky pod jednotky, desítky pod desítky atd., neznamená nutnost, nýbrž pouze racionalisaci práce.

4. Je dobře cvičit žáky ve sčítání mnohociferných čísel na **ščotách** je třeba vytknout rozdíl postupu při provádění výkonu na ščotách ve srovnání s postupem při písemném sčítání.

5. Zkoušku správnosti sčítání můžeme prováděti dvojím způsobem:

1. buďto znovu provésti sčítání v témž pořádku, ale, jak ukazuje praxe, při tom je možné opakování učiněné chyby, takže nemůžeme důvěřovat správnosti výkonu sčítání ani tehdy, když dvakrát provedené sčítání dá jeden a týž součet;

2. nebo kontrolovat sčítání užitím komutativního zákona sčítání.

Je důležité, aby žák dovedl odůvodnit užívání té či oné methody zkoušky správnosti. Dávat speciální cvičení na zkoušky správnosti sčítání není vhodné, ale je třeba vytvořit u žáků návyk stálé sebekontroly při provádění výpočtů (rozmanitými způsoby). Není správné říkat, že žáci si musí navyknout, nezávisle na tom, bude-li zkouška provedena či ne, aby prováděli všecky výpočty velmi pečlivě a správně.

Úlohy řešené sčítáním.

Učitel může uložit žákům, aby sestavili jednoduchou úlohu (otázku), jejíž řešení vyžaduje provedení jediného výkonu sčítání. Ve většině případů to nedělá potíže a žáci kladou otázky vyžadující výkon sčítání:

1. v tom případě, že je třeba dané části sjednotit v jeden celek a

2. v tom případě, že se výkonu sčítání užívá na zvětšení daného čísla o určitý počet jednotek.

Učitel zdůrazní *obě otázky*, na které se odpovídá sčítáním.

V probíraných úlohách a vůbec v úlohách sloužících k objasnění theorie je třeba volit malé číselné údaje, nejraději dvojciferná nebo malá trojciferná čísla, pro řešení zpaměti.

KAPITOLA IV.

ODČÍTÁNÍ

§ 1. Úvod

S konkretními soubory můžeme prováděti dvě nejjednodušší operace: spojování souborů a obrácenou operaci — rozkládání souborů. Spojování souborů v nejjednodušší formě bylo probíráno výše.

Rozkladu souboru v nejjednodušším případě na dva nerovné soubory, ze kterých jeden je dán, odpovídá aritmetický výkon odčítání a v souvislosti s tím bylo by možné dát pro odčítání samostatnou definici. Avšak, jak bude ukázáno níže, ne všecky druhy otázek (úloh) řešených odčítáním spadají pod takovou definici, a pro odčítání se udává jiná definice vyplývající z nejobecnější vlastnosti odčítání, že je to obrácený výkon ke sčítání.

Je užitečné přimět žáky k pochopení správnosti a účelnosti definice odčítání jako obráceného výkonu ke sčítání.

Úlohy řešené odčítáním

Otázku po podstatě odčítání můžeme připravit rozborem nebo připomenutím tří úloh řešených odčítáním.

Úloha 1. „Do třídy se přineslo 37 učebnic a z nich bylo rozdáno první den 12 učebnic. Kolik učebnic zbylo k rozdání?“

Úloha 2. „V jedné třídě je 37 žáků, ve druhé je o 12 žáků méně. Kolik žáků je ve druhé třídě?“

Úloha 3. „Na jedné hromádce je 37 knih, na druhé je 12 knih. O kolik knih je na první hromádce více než na druhé?“

V posledním případě se hledá sčítanec, který je třeba přičíst k danému, aby vznikl daný součet. V předešlých případech se žádá najít sčítance, ke kterému je třeba přičíst sčítance daného, aby vznikl daný součet. Rozbor vede ke dvěma zápisům na tabuli:

$$37 = 25 + 12$$
$$37 = 12 + 25.$$

Z rozboru tří úloh vedoucích k výkonu odčítání jako výkonu obrácenému ke sčítání žáci poznávají definici odčítání (hledá se první nebo druhý sčítanec) a mohou ji formulovat. Ježto výsledek sčítání je nezávislý na pořádku sčítanců, můžeme výsledek odčítání v každém případě nazvati rozdílem.

§ 2. Vlastnosti odčítání

Položí se otázka, zda při odčítání platí zákon komutativní. Ve většině případů žáci ihned odpovědí: „Nikoli, vyměnit menšence a menšitele je nemožné". Učitel, zdůrazniv správnost odpovědi, musí záměrnými otázkami vysvětlit, že můžeme od celku (menšence) odečíst několik čísel, t. j. že můžeme provádět postupné odčítání a zapisovat $a - b - c - d$. Na číselných příkladech se objasní, že:

1. postupné odčítání má své místo jako postupné přičítání, že však postupné odčítání (v oboru kladných čísel) je možné pouze v případě, že menšitel je stále menší než ten menšenec, od kterého je odečítán; ačkoli žákům je zřejmé, že pro odčítání neplatí zákon komutativní, přece se mohou přesvědčit úvahou i zkouškou, že

2. při sledu odčítání je lhostejné, v jakém pořádku ubíráme části od celku, t. j. menšitele může mezi sebou zaměňovat, je-li jen splněna výše uvedená podmínka, která je velmi důležitá při kombinaci výkonů sčítání a odčítání.

Na příklad, v případě $A - b - c = A - c - b$ může provádět odčítání čísel v obojím pořádku:

$$159 - 18 - 29 = 159 - 29 - 18;$$

ale žáci nemohou provésti výkony (v oboru přirozených čísel), jestliže místo $159 + 68 - 170 - 12$ zapíší $159 - 170 - 12 + 68$ atd.

3. Pro postupné odčítání platí také zákon asociativní, neboť místo toho, abychom od menšence odčítali jednoho menšitele po druhém, můžeme na ráz odečísti součet menšitelů: $A - b - c - d = A - (b + c + d)$.

Takový zápis pomocí písmen je pro žáky 5. třídy předčasný, ale všecky vlastnosti musí žáci pochopiti, utvrditi si v mysli a často jich užívat a) při ústním počítání, b) při počítání na ščotách (bez doplňování), c) při písemném počítání.

Počet cvičení, řešených se žáky na odčítání, všeobecně nemá být velký, neboť příslušnou zručnost mají získat už na obecné škole. Ale zvláštní pozornost je třeba věnovat případu, že mezi ciframi menšence je jedna nebo několik nul:

$$\begin{array}{r} 6903 \\ -\ 4871 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6903 \\ -\ 4875 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6003 \\ -\ 4875 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6000 \\ -\ 4875 \end{array}$$

Poslední příklad se vhodně řeší methodou doplňování (viz níže).

Nula.

Zvláště je třeba žákům zdůraznit otázky sčítání a odčítání s pojmem nuly.[1])

1. Přičteme-li k číslu nulu, nebo přičteme-li číslo k nule, pak to číslo se nezmění: $a + 0 = 0 + a = a$; zejména $0 + 0 = 0$.

2. Rozdíl dvou sobě rovných čísel je nula — to je jasné a jednoduché podle zdravého rozumu, jakož i na základě definice odčítání jako výkonu obráceného ke sčítání (nula je jediné číslo, jehož přičtením se nezmění dané číslo). Je třeba se ptát mnoha žáků, proč $5 - 5 = 0$, $7 - 7 = 0$, $a - a = 0$, aby každý mohl dát odpověď na tuto otázku.

3. Na základě téže definice odčítání číslo se nemění, jestliže od něho odečteme nulu: $a - 0 = a$.[2])

Zavedení nuly je první rozšíření pojmu čísla, se kterým se žáci setkají. Nula je menší než libovolné přirozené číslo.

[1]) Číslo „0" bylo zavedeno až začátkem 17. století. O pojmu nuly viz ENGELS „Dialektika prirody", str. 210—212, vyd. z r. 1946.

[2]) Protože nula trvale přešla do vědomí žákova jako symbol, naznačující, že v daném čísle se nevyskytují jednotky toho nebo onoho řádu a stala se takto navyklým nástrojem písemné numerace, žák ovládající výkony s mnohocifernými čísly krok za krokem a ponenáhlu samotnou praxí aritmetických operací přivyká tomu, že nula se objevuje také jako výsledek výkonů, prováděných s přirozenými čísly a rovněž jako přímý objekt těchto výkonů. Potom učitel v příhodný okamžik řekne: „Ježto s nulou provádíme početní výkony stejně jednoduše a úspěšně jako s čísly, a všem pravidlům těchto výkonů nula vyhovuje stejně dobře jako čísla (vyjma dělení nulou — pozn. spis.), proto se dohodneme počítat nyní nulu mezi čísla, a této dohody se budeme stále držet. (A. JA. CHINČIN, Osnovnyje ponjatija i opredelenija v matematike). Učpedgiz, 1940.

Odčítání doplňováním.

Odčítání doplňováním není bodem osnovy aritmetiky v 5. třídě a může býti učiněno předmětem práce v kroužku. Sled cvičení:

1. Ústní odčítání velkých čísel: 13000 — 9000 = 4000; 47 000 — 8000 = = 47 tisíc — 8 tisíc = 39 tisíc. Zde je jasný význam početních spojů sčítání a odčítání.

2. Odčítání doplňováním na ščotách. Budiž žádáno od 739 rublů 63 kop. odečíst 496 rublů 65 kop.; položíme na ščoty 739 r., potom odečteme 400, t. j. na drátě, kde se odpočítávají sta, ubereme 4 kostečky. Dále je třeba odečíst 90 r., jednodušeji odečíst 100 r., t. j. odebrat 1 kostečku na drátě set a přičíst 10 r., t. j. přidat 1 kostečku na drátě desítek; dále odečteme 6 kosteček na drátě pro jednotky (nebo ubereme 1 desítku a přibereme 4 jednotky). Týmž způsobem odečteme 65 kop. tak, že ubereme 1 kostečku na drátě jednotek a přidáme 35 kop., t. j. 3 kostečky na drátě pro desetikopejky a 5 kop. na příslušném drátě.

Žáci se v praxi setkávají s doplňováním při odečítání, když berou drobné zpět v pokladně, na příklad na 10 rublů, mají-li platit 6 r. 70 kop.

3. Velmi užitečné cvičení dává doplňování libovolného čísla na jednotku vyššího řádu. To je velmi nutné pro budoucí počítání s logaritmy. Při tom je vhodné učit žáky, aby psali odpověď na ráz od levé strany k pravé.

Na příklad 100 000 — 56 783 = 43 217.

Všecky cifry menšitele se doplní na 9, jen poslední významná cifra na 10. Žákům obyčejně působí potíže odčítání doplňováním v tom případě, že menšitel nemá významnou cifru na konci. Na příklad: 100 000 — 56 780.

Proto při formulaci pravidla je třeba zdůraznit slova poslední **významná** cifra se doplní na 10.

Žáci mají potíže s takovými příklady odčítání jako:

$$\begin{array}{r} 4\,000\,000 \\ -\;898\,989 \\ \hline 3\,101\,011 \end{array}$$

ve kterých všecky řády menšence až na nejvyšší obsahují nuly. Jestliže učitel žáky navykne zejména v tomto případě užívat odečítání doplňováním a obdržený výsledek překontrolovat v mysli sčítáním, mohou býti tyto potíže žáků odstraněny.

4. Provádění písemného odečítání doplňováním:

Případ I.: $\begin{array}{r} 4568 \\ -\;2345 \\ \hline 2223 \end{array}$ *Případ II.*: $\begin{array}{r} 4523 \\ -\;2798 \\ \hline 1725 \end{array}$

Vysvětlení. Kolik musíme přičíst k 8, abychom dostali 13?

Odp.: 5. Zapíšeme v odpovědi cifru 5.

Kolik musíme přičíst k 9, abychom dostali 11? *Odp.:* 2 atd.

V tomto případě práce se ulehčí, děláme-li tečky nad ciframi menšence, kde je to třeba.

5. Uvedeme ještě tak zvanou rakouskou methodu odčítání, připomínající ten způsob, kterého se užívá při dávání drobných nazpět. Tato methoda je vhodná, když se od daného čísla odčítá řada čísel:

$$\begin{array}{r} 7931 \\ -\ 312 \\ -\ 1456 \\ -\ 298 \\ -\ 2315 \\ \hline 3550. \end{array}$$

Vysvětlení. 7931 je součet, u kterého známe 4 sčítance, hledá se 5. sčítanec (rozdíl).

Sečteme jednotky známých sčítanců: $5 + 8 + 6 + 2 = 21$; v součtu všech víme, že obsahuje 1 jednotku, takže na posledního sčítance zbývá 0 jednotek. Zapíšeme do odpovědi 0 jednotek. Sčítáním vzniklé 2 desítky sečteme s desítkami sčítanců a dostaneme $2 + 1 + 9 + 5 + 1 = 18$; jelikož v součtu jsou tři desítky, zbývá na posledního sčítance 5 desítek. Zapíšeme 5 atd.

§ 3. Závislost mezi odčítáním a sčítáním

Otázka poměru mezi sčítáním a odčítáním, o závislosti mezi čísly v těchto výkonech je nadmíru důležitá; je třeba ji mnohokrát klásti žákům při cvičeních v 5. třídě, přes to, že tato otázka se probírá i na obecné škole. Cvičení se mohou vésti v tomto pořádku:

1. Můžeme užít libovolné jednoduché úlohy na sčítání ze sbírky nebo sestavenou samým učitelem nebo žákem. Na příklad, budiž dána úloha: „V knihovně cizojazyčných knih bylo 3540 knih v anglické řeči a přivezli dalších 2140 knih. Kolik je celkem anglických knih v knihovně?“ Je třeba uložit žákům, aby sestavili obě možné úlohy obrácené k dané úloze.[3])

Z provedených řešení obdobných úloh dojde se k závěru, že každý sčítanec je roven součtu bez druhého sčítance: $a + b = c$; $c - a = b$; $c - b = a$.

[3]) Obrátit pozornost na obrácenou úlohu, vyjádřenou v zakrytém tvaru: „V knihovně byly anglické knihy, přivezli jich ještě 2140. Celkem bylo 5680 knih. Kolik bylo anglických knih v knihovně?“ (Žáci se snaží ji řešit sčítáním.)

2. Potom se téhož postupu užije na jednoduchou úlohu, jež se řeší výkonem odčítání: na příklad, „hledá se, kolik peněz zůstalo v pokladně, bylo-li tam původně 1685 rublů a vydalo-li se 890 rublů". Znovu se žádá, aby žáci sestavili obě možné úlohy obrácené[4]) a stanovili, že když $a - b = c$, potom $a = b + c$, $b = c - a$, t. j. určiti pravidlo, jak se najde menšenec, známe-li menšitele a rozdíl; jak se najde menšitel, známe-li menšence a rozdíl.

3. Podobná cvičení se provádějí s čísly, na příklad:

a) $365 + 894 = 1259$,

mají se zapsat oba obrácené výkony, nebo

b) $5893 - 2631 = 3262$,

zapsat tento vztah jiným způsobem ve tvaru sčítání i ve tvaru odčítání.

4. Řeší se číselné příklady, ve kterých se hledá neznámý sčítanec nebo neznámý menšitel nebo menšenec, jako

$$\begin{aligned} 1350 + {?} &= 3680; \\ {?} + 698 &= 1890; \\ 1250 + 1370 + {?} + 600 &= 5930; \\ {?} - 490 &= 4365; \\ 5230 - {?} &= 4365; \end{aligned}$$

přitom příklady mohou býti: a) zapsány symboly, t. j. ve tvaru výše udaném; nebo b) dány v podrobném slovním znění: které číslo musíme přičíst k číslu 1350, abychom dostali 3680?, ke kterému číslu musíme přičíst 698, abychom dostali 1890? Od kterého čísla musíme odečíst 490, abychom dostali 4365?, které číslo musíme odečíst od 5230, abychom dostali 4365?, nebo c) vyjádřeny pojmenováním čísel daných i výsledku při výkonech; na příklad: známe součet 3680 a jednoho sčítance 1350, hledáme druhého sčítance; známe menšence 5230 a rozdíl 4365, hledáme menšitele atd.

Učitel může každou úlohu ze sbírky tímto způsobem měnit, ukládaje ji ve všech uvedených tvarech.

5. Můžeme dát tři čísla 650, 490, 1140 a uložit žákům, aby samostatně sestavili libovolné slovní úlohy se dvěma z daných čísel, vy-

[4]) Obrácená úloha vyjádřená v zakrytém tvaru: „Když se vydalo 890 rublů, v pokladně zůstalo 795 rublů. Kolik peněz bylo v pokladně?"

žadující ke svému řešení výkonu sčítání nebo odčítání. Celkem mohou býti sestaveny 2 úlohy na sčítání a tři úlohy na odčítání.

6. Dobrým cvičením je zkouška správnosti řešení počtářských i slovních úloh, provedená na základě závislosti mezi složkami výkonu sčítání a odčítání, zejména zkouška sčítání odčítáním a zkouška odčítání 1. sčítáním a 2. odčítáním. V této souvislosti budí zájem cvičení, ve kterých se žádá určit neznámé cifry sčítanců (nebo menšence nebo menšitele při odčítání) provedeného už sčítání. Mezi jiným je žádoucí poukázat na to, že při zkoušce provedeného výkonu žák nepotřebuje znovu vypisovat čísla. Zkouška se má provésti „cestou zrakovou", podle zápisu provedeného výkonu.

Poznámka. V daném případě navrhujeme, aby se zkoušek správnosti užilo jako cvičení majících za cíl utvrditi u žáků návyk užívat závislosti mezi složkami výkonů.

Ale zkouška je důležitá také pro řešení slovních i početních úloh, ačkoli se jí vždy neodhalí chyba. Jedním ze vhodných způsobů chránících od hrubých chyb ve výsledku je způsob **zaokrouhleného určení** mezí, ve kterých musí býti obsažen výsledek výkonu. Tento způsob je zejména důležitý v dalším při počítání s lomenými čísly. V daném případě budiž na příklad v úloze $1638 + 975$ napsáno, že výsledek se rovná 3613. Může to být? Je jasné, že když první sčítanec je menší než 2000 a druhý menší než 1000, musí součet býti menší než 3000 a napsaný výsledek nemůže býti správný. Téhož úsudku můžeme užít při odčítání čísel. Je třeba žáky naučit provádění podobných zkoušek výkonu *zaokrouhlením* daných čísel.

§ 4. Změna součtu a rozdílu. Závorky

I. Změna součtu

Otázka po změně výsledku výkonu při změnách daných čísel má dvojí význam v naší škole; na těchto otázkách žáci:

1. učí se všímat si závislosti mezi veličinami a sledovat ji numericky,

2. učí se provádět výkony originálním způsobem vyžadujícím důvtipu, důmyslu.

Už na obecné škole žáci si všímali otázky po změně výsledku výkonu.

Přistupujíce k opakování otázky po změně součtu, musíme nejprve otázku vyjasnit na příkladech s konkretním obsahem, potom na číselných úlohách a dojít k závěrům: 1. o kvantitativní změně součtu: a) při zvětšení jednoho sčítance, b) při zmenšení jednoho sčítance; 2. o kvantitativní změně součtu: a) při zvětšení obou sčítanců, b) při zmenšení obou sčítanců, c) při zvětšení jednoho sčítance a zmenšení druhého.

Zřetelně musí býti vyjasněn fakt, že součet dvou sčítanců se nemění, jestliže k jednomu sčítanci přidáme určitý počet jednotek a od druhého sčítance ubereme týž počet jednotek. Při rozboru otázky není dobře hned měnit oba sčítance; je vhodné nejdříve sledovat změnu součtu při změně jednoho sčítance a potom při změně druhého sčítance.

Na vysvětlování otázky po změně součtu při změně sčítanců může učitel užít libovolné slovní úlohy na sčítání ze sbírky, změnit v podmínkách úlohy jedno z daných čísel a položit žákům příslušnou otázku po změně výsledku. K tomu není nutné hledat speciální úlohy; za kontrolu může pokaždé posloužit bezprostřední provedení výkonu sčítání. Počet cvičení závisí na připravenosti třídy.

Cvičení. Výše, při objasňování theorie, kladly se hlavně úlohy slovní a numerické. Výpočet součtu — výsledku — sloužil jako prostředek ke kontrole správnosti prováděných úsudků o povaze změny součtu. V dalším vyučování jako cvičení na užití theorie mohou sloužit slovní úlohy a příklady rázu theoretického:

1. výpočet součtu, totiž výpočet změněného součtu na základě součtu původního a potom na základě změn sčítanců;

2. určení změny, kterou je třeba provésti se sčítanci, aby došlo k předepsané změně součtu;

3. cvičení se zvláštními případy — ústní výpočty s několikacifernými čísly, založené na vyložených vlastnostech součtu, na příklad výpočet součtu v těch případech, že jedním sčítancem je číslo blízké jednotce vyššího řádu (97, 997, 998, 9997 atd.) nebo číslo blízké několika jednotkám vyššího řádu (497, 288, 1998 atd.). V těchto případech se užije zaokrouhlení sčítanců.

2. Změna rozdílu

Otázka po změně rozdílu při změně menšence a menšitele stejně jako otázka po změně součtu probírá se nejprve na konkretních slovních úlohách, potom na číselných příkladech.

Pokyny. 1. Probírá se zvlášť změna rozdílu při změně menšence a zvlášť změna při změně menšitele.

2. Ráz vysvětlování otázky musí se ještě více opírat o konkretní představy žáků o podstatě výkonu (odčítání), zejména při vysvětlování otázky po změně rozdílu při změně menšitele.

Při vysvětlování je třeba stále chápat menšence jako číslo, které udává, kolik bylo *celkem* jednotek; menšitele jako číslo, které udává, kolik jednotek bylo odňato; výsledek udává, kolik jednotek zbylo. Je třeba pečlivě a prostými slovy vysvětlit žákům, že když menšitel se zvětší na př. o 6 jednotek (prodáno 70 kg místo 64 kg mouky), ubíráme od menšence o 6 jednotek více. To znamená, že rozdíl bude o 6 jedn. menší, a obráceně, když se menšitel zmenší, ubíráme od menšence méně, a proto rozdíl bude větší. Poukazujeme na to, že F. I. Jegorov ve své „Metodice aritmetiky" navrhuje, aby se v tomto případě neříkalo „Při zmenšení menšitele o několik jednotek rozdíl se zvětší o týž počet jednotek", nýbrž aby se formulovalo zřetelně: „Jestliže se od menšitele ubere několik jednotek, musí se k rozdílu přidat týž počet jednotek".

3. Jako další obměnu daných úloh je třeba položit otázku po změně rozdílu v tom případě, že se změní i menšenec i menšitel přidáním nebo ubráním několika jednotek. Úsudek jest prováděti postupně: napřed vysvětlit, jak se změní výsledek při změně jedné složky, a potom vysvětlit, jak takto změněný výsledek znovu se změní při změně druhé složky.

4. Při sledování změny rozdílu je třeba věnovat zvláštní pozornost případu, že rozdíl zůstává beze změny při současném zvětšení (nebo současném zmenšení) menšence i menšitele o totéž číslo. Jako dobrá ilustrace tohoto případu poslouží úloha o srovnání stáří otcova a synova: v přítomnosti, před několika lety a po několika letech. Na příklad, nyní je otci 35 let a synovi 12 let — rozdíl mezi jejich věkem

je určitý (23 roky); před 5 lety a po 6 letech atd. věkový rozdíl byl a bude stále týž.

Ústní cvičení. Obdobně ke cvičením v ústním a polopísemném sčítání je třeba cvičit žáky v ústním a polopísemném podobném výpočtu rozdílu: 3576 — 999; 3577 — 1005 atd.

Úloha. Ve spořitelně bylo 3576 rublů a z nich se vydalo 996 rublů. Kolik peněz zůstalo ve spořitelně? Pokyn: Pokladník vydá 1000 rublů a dostane 4 rubly zpět.

V uvedených příkladech užíváme zaokrouhlení menšitele ke kratšímu provedení odčítání. K témuž cíli ve vhodných případech užijeme zase zaokrouhlení menšence. Na příklad: $4996 - 750 = 5000 - 750 - 4 = 4250 - 4 = 4246$.

3. Přičítání a odčítání součtu a rozdílu

Jak vychází z výše uvedených příkladů, otázky po přičtení a odečtení součtu těsně souvisejí s otázkami výpočtu na základě změny výsledku sčítání a odčítání při změně daných čísel; mohou se probírati při provádění týchž cvičení. Je však dobře klásti při tom nové otázky, jmenovitě:

Jak přičteme součet?

$$356 + 74 = 356 + (70 + 4) = 356 + 70 + 4.$$

Jak přičteme rozdíl?

$$356 + 97 = 356 + (100 - 3) = 356 + 100 - 3.$$

Jak odečteme součet?

$$356 - 105 = 356 - (100 + 5) = (356 - 100) - 5.$$

Jak odečteme rozdíl?

$$356 - 98 = 356 - (100 - 2) = (356 - 100) + 2.$$

Žáci ať samostatně sestavují příklady na případy, kdy je třeba přičítat a odčítat součty a rozdíly.

Poznámky: 1. Cvičení theoretického rázu, objasňující vlastnosti výkonu sčítání nebo odčítání, je účelné provádět v jedné vyučovací hodině paralelně jak na numerických příkladech, tak i na snadných slovních úlohách. Tytéž otázky je třeba klást i později při řešení úloh, ve kterých je třeba od daného čísla odečíst nebo k němu přičíst postupně dvě čísla. Tytéž otázky budou znovu rozbírány i při výkonech se zlomky.

2. Z uvedených příkladů následuje, že při ústním provádění sčítání a odčítání čísel užíváme a) zákonů sčítání, změny pořádku a seskupování daných čísel nejracionálnějšími způsoby (kap. III, § 3, odst. 3, str. 70), b) užíváme změny výsledku výkonu při změně čísel, se kterými se výkony provádějí, jmenovitě: zaokrouhlujeme na desítky, sta atd. jednoho nebo oba sčítance, menšence, menšitele; provedeme (zpaměti) výkony se zaokrouhlenými čísly, a potom změníme výsledek, jak je třeba (přičítání a odčítání součtu a rozdílu).

4. Závorky

1. Žáci už na obecné škole užívali závorek, i my jsme jich užívali ve výše uvedených příkladech. Po skončeném opakování obou výkonů prvního stupně (sčítání a odčítání) je vhodné zopakovat význam závorek, kterými naznačujeme pořádek výkonů. Výše bylo vysvětleno, že výkon sčítání $435 + 68 + 73$ může být proveden v libovolném pořádku a podobně při výkonu odčítání $435 - 68 - 73$; také současné výkony sčítání a odčítání můžeme provádět v libovolném pořádku za podmínky, že při změněném pořádku odčítání je vždy proveditelné. Je třeba žákům připomenout, v jakém pořádku se mají provádět výkony, jsou-li zapsány pomocí závorek, na příklad: $315 + (68 + 117) - (96 - 35)$ nebo $310 - [268 - (73 + 115)]$.

Nejprve provádíme výkony s čísly uzavřenými do okrouhlých závorek. Žák musí umět: 1. čísti výraz zapsaný pomocí závorek a udávat pořádek výkonů; 2. zapisovat podle diktátu výrazy, ve kterých musí užít závorek; 3. provádět několik výkonů v tom případě, že pořádek některých z nich je předepsán závorkami. Nejobtížnější pro žáky je druhá práce — zápis podle diktátu. Výše uvedená cvičení jest diktovati takto: „ke 315 připočteme“ (pausa, než žák napíše 315 +); učitel pokračuje: „součet čísel“ (žák musí zapsat přední část závorky); učitel pokračuje: „68 a 117“ (žák musí zapsat 68 + 117 a uzavřít závorku); učitel pokračuje: „potom odečteme (pausa) rozdíl čísel“ (žák zapíše značku minus a přední část závorky); učitel končí: „96 a 35“ (žák napíše 96 — 35 a uzavře závorku).

§ 5. Úlohy o čase

Výkony s pojmenovanými čísly v metrické soustavě měr nepůsobí zvláštních potíží. V 5. třídě se jim vyučuje především v souvislosti s desetinnými zlomky. Ale učitel může se žáky řešit při opakování několik úloh na sčítání a odčítání[5]) různých měr i tehdy, když se probírá sčítání a odčítání několikaciferných čísel. Při tom je vhodné vybírat úlohy tak, aby se v nich vyskytovala rozmanitá pojmenování měr; je třeba užívat měr délkových, plošných i prostorových, vah i měr časových.

Řešení „úloh o čase“ se připíná ke sčítání a odčítání měr časových. Potíže spojené s řešením těchto úloh spočívají v tom, že:

1. míry časové nejsou měrami desítkové soustavy; kromě toho, nemáme u nich stálého měnitele; tak jeden měsíc má 30 dní a druhý 31 den; jeden rok je přestupný a druhý obyčejný, a žáci musí stále řešit otázku, který rok nebo měsíc mají složit ze dní a obráceně, z kolika dní se skládá daný rok nebo měsíc;

2. v případě „úloh o čase“ některé údaje se uvádějí v kalendářním tvaru (odpovídá se na otázku kdy) a ne v aritmetickém tvaru (ve kterém se odpovídá na otázku kolik).

Aby se obyčejného způsobu mohlo užít při řešení tak zvaných „úloh o čase“ sčítáním a odčítáním mnohojmenných čísel, je třeba umět převádět kalendářní tvar na tvar aritmetický a obráceně; v tom se žáci cvičí zvlášť dříve nežli začnou řešit typické úlohy, na příklad:

1. Kolik dní a hodin uplynulo od začátku roku do 7 hodin ráno 15. března (v přestupném roce): *Odp.*: 31 d. + 29 d. + 14 d. + 7 hod.; 74 dni 7 hod.

2. Kolik let, měsíců a dní uplynulo od začátku našeho letopočtu do 18. března 1871?

[5]) Později na násobení a dělení pojmenovaných čísel.

Odp.: 1870 let 2 měs. 17 dní.

3. Jaké bylo datum, měsíc a rok v době, když uplynulo od začátku našeho letopočtu 1916 let 10 měs. 6 dní?

Odp.: 7. listopadu 1917.

První dvě cvičení slouží jako příklady na přechod od kalendářního tvaru na aritmetický, poslední cvičení je příkladem na přechod od aritmetického tvaru na kalendářní.

Obyčejně se probírají troje úlohy o čase:

1. žádá se určit časový interval mezi dvěma událostmi vyjádřenými v kalendářním tvaru;

2. žádá se určit v kalendářním tvaru dobu začátku události, je-li znám konec události (v kalendářním tvaru) a doba jejího trvání (v aritmetickém tvaru);

3. žádá se určit dobu konce události (v kalendářním tvaru), je-li znám začátek události (v kalendářním tvaru) a její trvání (v aritmetickém tvaru).

V „Methodice aritmetiky" F. I. Jegorova se doporučuje řešit úlohy o čase bez převodu kalendářního tvaru na aritmetický tvar a obráceně. Uvedeme dvě úlohy z methodiky aritmetiky F. I. Jegorova:

1. Chlapec začal chodit do školy 16. srpna 1896. Kdy dokončil školu, chodil-li 11 let 9 měs. 5 dní do školy?[6])

Řešení. Za 11 let bylo 16. srpna 1907; 1896 + 11 = 1907; za dalších 9 měs. bylo 16. května 1908 a ještě za 5 dní bylo 21. května téhož roku. Tudíž chlapec dokončil školu 21. května 1908.

2. Má se vypočítat velikost doby od 28. dubna 7 hod. 30 min. ráno do 23. září téhož roku 5 hod. ráno.[7])

---

[6]) Obyčejný způsob řešení:

od začátku našeho letopočtu uplynulo	1895 let 7 měs. 15 dní
	+ 11 let 9 měs. 5 dní
od začátku našeho letopočtu uplynulo	1907 let 4 měs. 20 dní

[7]) Neuvádíme ten text úlohy, který je v „Metodice aritmetiky" F. I. JEGOROVA, protože je zastaralý.

Řešení. Do 28. srpna 7 hod. 30 min. ráno uplynuly 8 — 4 = 4 plné měsíce; od 28. srpna do 1. září uplynuly ještě 31 — 27 = 4 dni; potom do 7 hod. 30 min. ráno dne 23. září uplynuly další 22 dni; ježto však konec doby byl 23. září už v 5 hod. ráno, musíme od posledního dne ubrat 2 hod. 30 min. Tudíž, hledaná velikost doby jest 4 měs. 4 dni + + 22 dni — 2 hod. 30 min. = 4 měs. 25 dní 21 hod. 30 min. nebo 147 dní 21 hod. 30 min. atd.

Způsob uváděný F. I. Jegorovem vyžaduje důvtipu a někdy obtížné práce od žáků. V těch nejjednodušších případech, které se probírají u nás ve škole a kterých je třeba v praktické činnosti, lze užívati tohoto způsobu (bez převodu kalendářního tvaru na aritmetický).

Je třeba žákům vysvětlit, jak se počítá časový interval mezi dvěma událostmi, jestliže první nastala před počátkem našeho letopočtu a druhá před tímto počátkem nebo po něm. To je užitečné při úlohách z dějin starověku.

§ 6. Příklady pro kontrolní práci

1. Určit součet čísel: 963 578; 20 305; 1073; 45 000.

2. Určit rozdíl čísel: 3 000 040 a 90 891.

3. Provésti dvěma způsoby zkoušku správnosti provedeného výkonu: 2005 — 983 = 1022.

4. Číslo 50 001 zmenšit o 39 000.

5. Odpovědět na otázku: „Do továrny, ve které pracovali dělníci i dělnice, bylo přijato dalších 70 dělnic, ale zároveň z továrny odešlo 10 dělníků. Oč se zvětšil celkový počet dělnictva v továrně?“

6. Řešit úlohu: Dva lidé měli rovné částky peněz, jeden z nich utratil 172 ruble, druhý 196 rublů. Kdo z nich měl na konec více peněz a oč? Proč?

7. Určit, kolik let, měsíců a dní uplynulo od Říjnové socialistické revoluce do dnešního dne.

KAPITOLA V.

NÁSOBENÍ

§ 1. Úvod

Při výkladu výkonu sčítání byly rozbírány nejjednodušší tvary spojování souborů:

1. spojení dvou navzájem nerovných nebo rovných souborů v jediný;

2. spojení několika daných souborů v jediný. Jako výsledek zobecnění a abstrakce od konkretních úloh jsme dostali pojem aritmetického výkonu sčítání. Zvláštní případ spojení několika souborů v jediný, když všecky dané soubory jsou si rovny, dává vznik novému aritmetickému výkonu, násobení. Násobení jest tedy zvláštní případ sčítání, ale zároveň násobení je osobitý výkon. Jeho osobitost jeví se v tom, že čísla při výkonu daná nejsou stejnorodá mezi sebou a s výsledkem výkonu, jak tomu je při sčítání (a při odčítání). Tak máme-li sjednotit soubory stejnorodých předmětů, z nichž každý obsahuje na př. dva nebo tři předměty, v jediný soubor, tu příslušný výkon místo

$$A = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n\text{-krát}}$$

píšeme ve tvaru $A = a \,.\, n$, který ukazuje společnou velikost a sobě rovných částí a počet částí n, vzatých k utvoření celku. V tomto případě pouze jedno z daných čísel odpovídá souboru stejnorodému s hledaným souborem; druhé dané číslo udávající, z kolika rovných částí se soubor skládá nebo kolikrát se opakuje daný soubor, je podstatně abstraktní (nepojmenované) číslo. Tudíž, čítání se jeví i základem násobení, ale v tomto případě nečítáme jednotky, nýbrž rovné skupiny jednotek. Na příklad, při výkonu $2 \,.\, 8 = 16$ máme čítání párů, a je třeba čítat 8 párů.

Obecné pokyny

Pořádek při opakování výkonu násobení a doplnění i rozšíření vědomostí žactva v celku je týž, jako jsme jej naznačili při rozbóru jiných výkonů. Rozdíl může spočívat pouze v tom, že při opakování násobení je vhodné ještě jednou zopakovat i nejjednodušší případy násobení, jako na příklad případ násobení jednociferných čísel a případ násobení čísly s první cifrou 1 a ostatními ciframi 0.

1. Vycházejíce od libovolné slovní úlohy na násobení, ve které se vyskytují malá čísla, obnovíme v paměti žáků podstatu výkonu násobení celých čísel jako sčítání sobě rovných sčítanců. Dojdeme k definici výkonu násobení celých čísel a připomeneme názvy daných čísel i výsledku. Zdůrazníme, že znalost t. zv. malé násobilky je základem pro výpočet součinu libovolných čísel.

2. V důsledku rozboru žáci musí pochopit:

a) že vzít číslo několikrát za sčítance znamená určit součet, jehož každý sčítanec je roven danému číslu. Zřetelné a pojmově jasné pochopení této věci je nadmíru důležité, jinak při přechodu k pojmu „vzít nějaké číslo několikrát za činitele" žáci pletou tyto dva pojmy, a když se žádá rozklad čísla na činitele, rozkládají na sčítance a obráceně;

b) že násobení čísel neprovádí se postupným sčítáním, nýbrž podle pravidel nového výkonu násobení; od výrazu „vzít nějaké číslo několikrát za sčítance" $3 + 3 + 3 + 3$ přecházíme k výrazu „násobit jedno číslo druhým".

3. Násobení mohou žáci zapisovati v obecné formě $a \,.\, b = q$[1]; při tom je vhodné při různých (jednociferných) hodnotách čísel a a b vypočíst q — číselnou hodnotu součinu.

4. Na otázku, je-li vždy možné provést násobení celým číslem, je odpověď, že je to vždy možné, neboť vždycky je možné sečíst několik rovných sčítanců.

5. Výkon s jednotkou. Mezi prováděnými cvičeními mají se vyskytovat případy: $1 \,.\, b = b$; $a \,.\, 1 = a$; $1 \,.\, 1 = 1$; případ $1 \,.\, b = b$ nevyvolává pochybnosti: $\underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{b\text{-krát}} = b$, nicméně je vhodné

[1]) Znaky výkonu násobení „×" a „." byly zavedeny v 17. stol. Znak „." byl zaveden slavným německým filosofem Leibnizem.

dávat žákům i takový příklad, aby v případě násobení čísla jedničkou a násobení jedničky číslem dávali správné odpovědi. Jak zkušenost ukazuje, nezřídka při násobení jedničkou žáci udávají odpověď 1. Žáci si musí osvojit, že při násobení jedničky libovolným číslem nebo čísla jedničkou součin je roven tomu číslu.

Případ: $a \,.\, 1$ vlastně nemá smysl, protože musíme mít alespoň dva sčítance, abychom vůbec mohli mluvit o výkonu sčítání. Ale i v tomto případě říkáme, že $a \,.\, 1 = a$.

6. Výkony s nulou. Mezi cvičeními má se vyskytovat případ násobení nuly číslem, t. j. $0 \,.\, b = 0$; $\underbrace{0 + 0 + 0 + \ldots + 0}_{n\text{-krát}} = 0$. Při násobení čísla nulou žáci často píší „totéž číslo" nebo říkají: „Násobenec se nemění".

Ačkoli v aritmetice se neužívá nuly jako násobitele, přece je užitečné již zde začít žáky přivykat myšlence, že je-li násobenec nebo násobitel roven nule, také součin je roven nule, jinak by v dalším kurse matematiky výkony s nulou působily vážné potíže při vyučování. Tedy: $a \,.\, 0 = 0$; $0 \,.\, a = 0$; $0 \,.\, 1 = 0$; $1 \,.\, 0 = 0$.

§ 2. Úlohy vedoucí na násobení

Řada úloh vyžaduje k svému řešení užití násobení.

Methodické rozvržení postupu při hodinách věnovaných úlohám vedoucím na násobení je totéž, jak bylo námi vyloženo v kapitole o úlohách vedoucích na sčítání (kap. III, § 4). Uvádíme, že první úlohou na násobení má býti úloha, která vyžaduje, aby dané číslo bylo položeno několikrát za sčítance. Druhá je úloha zvětšit dané číslo několikrát, při čemž a) v prvém znění se žádá nalézti číslo několikrát větší než dané číslo a potom b) zvětšit číslo několikrát. Při řešení podobné úlohy na násobení je vhodné mezi takové úlohy vsouvat úlohy na sčítání, ve kterých se žádá zvětšit číslo o několik jednotek, aby se žákům ještě jednou zdůraznil rozdíl mezi oběma typy úloh.

Práce se zakončí řešením různých numerických i slovních příkladů na sčítání, odčítání i násobení.

§ 3. Zákony násobení

Výkon násobení je založen na zákonu komutativním, asociativním a distributivním. Tyto zákony násobení nejsou samozřejmé, a v theoretických kursech aritmetiky, jak bylo uvedeno výše, provádějí se jejich důkazy. Je užitečné, aby se učitel seznámil s důkazy, které se dějí úplnou indukcí („Enzyklopädie der Elementarmathematik“ Weber-Wellstein a jinde). V kurse aritmetiky v 5. třídě zákony násobení mají se žákům vysvětlit na názorných příkladech a jevit se jako výsledek srovnání a zobecnění mnoha speciálních případů. Jest poukázati na jejich užití pro zjednodušení výpočtů.

I. Zákon komutativní

1. Často se v učebnicích aritmetiky doporučuje přesvědčit žáky o správnosti komutativního zákona násobení verifikací na číselných příkladech. My považujeme tento způsob za nejméně zdařilý, neboť verifikace ve dvou nebo třech příkladech nemůže vésti k přesvědčení, že rovnost nastane i ve všech ostatních případech.

K vysvětlení se může užít tří řádků teček po pěti tečkách v každém z nich:

```
. . . . .
. . . . .
. . . . .
```

Tento obrazec je možné považovat také za složený z 5 sloupců po třech objektech v každém z nich, pročež:

$$5 . 3 = 3 . 5.$$

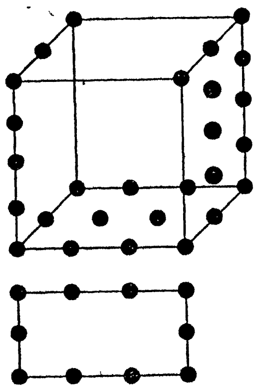
2. Otázka nezávislosti hodnoty součinu na pořádku činitelů může býti žákům objasněna při řešení nejjednodušší úlohy na násobení s konkretními daty. Může se udat komutativní zákon násobení pomocí písmen:

$$a . b = b . a.$$

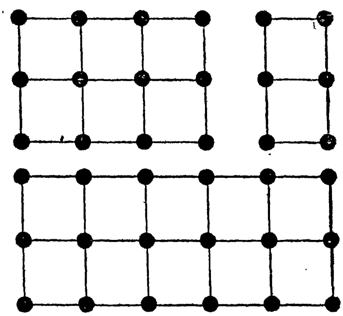
Se zřetelem na komutativní zákon násobení dáváme násobenci a násobiteli společný název „činitelé“.

II. Zákon asociativní

Stejně názorně jako komutativní zákon násobení můžeme vyložit i zákon asociativní. Na třech z jednoho vrcholu vycházejících hranách drátěného modelu (obr. 8) jsou po řadě 3, 4 a 5 teček. Počet teček můžeme vypočíst v různých pořádcích: $3 . 4 . 5 = (3 . 4) . 5 =$ $= 3 . (4 . 5)$ atd.



Obr. 8.



Obr. 9.

Úloha. Přadlena vyrobí za jeden pracovní den 8 m plátna. Kolik plátna vyrobí přadlena za 3 měsíce při 25 pracovních dnech v měsíci?

Řešení: 1) $8 . 25 . 3 = 600$ (m) nebo $(8 . 25) . 3 = 600$ (m): 2) $8 . (25 . 3) = 600$ m; v tomto případě se nejdříve určí, kolik dní pracovala přadlena za celé tři měsíce. Při prvém případu se nejdříve určí, kolik plátna bylo zhotoveno za měsíc. Komutativní zákon násobení při třech i více činitelích $a . b . c = b . a . c = c . a . b$ může být objasněn na témž příkladě.

III. Zákon distributivní

Existence zákona distributivního (vzhledem ke sčítání) je osobitá vlastnost násobení. Jako u prvých dvou zákonů, správnost tohoto zákona dá se dokázati úplnou indukcí. Žákům 5. třídy vysvětlí se distributivní zákon násobení na různých příkladech. Na obrazci 9 je umístěno po 4 kuličkách (objektech) ve třech řadách a ještě po dvou objektech rovněž ve třech řadách, neboli po (4 + 2) objektech ve 3 řadách. V obou případech počet objektů je týž:

$$4 \,.\, 3 + 2 \,.\, 3 = (4 + 2) \,.\, 3.$$

Úsudky v tomto případě nejsou obtížné: výsledek se nezmění, položíme-li několikrát za sčítance každou část místo abychom položili několikrát za sčítance celek. Jak zákonu distributivnímu, tak i asociativnímu zákonu násobení můžeme učit ve spojení s otázkami po změně součinu při změnách činitelů.

IV. Užití zákonů násobení

Praktické užití zákonů násobení je hlavním prostředkem k tomu, aby si je žáci trvale osvojili.

1. Zkouška správnosti násobení je žákům známa a chápou, že se dá provádět na základě komutativního zákona násobení. Tento způsob není vždy účelný v případě, že násobíme 2 čísla, z nichž jedno má značně více cifer než druhé.

2. Je třeba obrátit pozornost žáků na to, že komutativní zákon násobení zmenšuje počet součinů, které si musíme pamatovat v násobilce.

3. Hodně se má užívat komutativního zákona v tom případě, že násobenec obsahuje méně významných cifer než násobitel. Tak místo výpočtu součinu 27 . 4568 můžeme vypočísti 4568 . 27. Potom je možné dát žákům za úkol, aby vysvětlili, jak se na základě komutativního zákona dá vyložit násobení jednotkami vyššího řádu. Vskutku:

$$256 \,.\, 100 = \text{sto} \,.\, 256 = 256 \text{ set} = 25\,600.$$

Dále můžeme položit otázku: jak je možné dojít k témuž pravidlu na základě asociativního zákona, vyjdeme-li od fakta, že 100 = = 10 . 10 a známe-li pravidlo pro násobení deseti? Tedy:

$$256 \,.\, 100 = 256 \,.\, (10 \,.\, 10) = (256 \,.\, 10) \,.\, 10 = 2560 \,.\, 10 = 25\,600.$$

Stejně lehko mohou žáci vysvětlit pravidlo o násobení číslem, majícím mimo jedinou významnou cifru jen nuly, na základě asociativního zákona násobení, na příklad:

$$7 . 300 = 7 . (3 . 100) = (7 . 3) . 100 = 2100,$$

kde číslo vyjádřené jednou významnou cifrou a nulami se považuje za součin významné cifry s jednotkou vyššího řádu.

My zde vypočítáváme rozmanité otázky, které může učitel s žáky rozbírat za tím účelem, aby vnikli do podstaty procesu provádění výkonů. To jest hlavní úloha opakovacího kursu aritmetiky. Ale učitel může podle podmínek daných třídou zvolit jen některé z nich, vybrat ty či ony otázky. Pokračujeme v jejich výčtu.

4. Můžeme rozebrat se žáky, jak na základě asociativního zákona násobení bezprostřední násobení jedním číslem lze nahraditi postupným násobením dvěma čísly; na příklad

$$125 . 32 = 125 . (4 . 8) = (125 . 4) . 8 = 500 . 8 = 4000.$$

5. Je třeba vyložit, jak lze na základě distributivního zákona vysvětlit pravidlo pro násobení mnohociferného čísla jednociferným:

$$416 . 7 = (400 + 10 + 6) . 7 = (4 \text{ sta} + 1 \text{ des.} + 6 \text{ jedn.}) . 7 =$$
$$= 28 \text{ set} + 7 \text{ des.} + 42 \text{ jedn.} = 2800 + 70 + 42 = 2912.$$[2])

6. Vysvětlí se, jak na základě distributivního zákona násobení často můžeme provésti zpaměti násobení malých dvojciferných čísel

$$37 . 40 = (40 - 3) . 40 = 1480, \quad 57 . 60 = (60 - 3) . 60; \quad \begin{array}{r} 3600 \\ -\ 180 \\ \hline 3420 \end{array}$$

7. Někdy soustava daných čísel v příkladě je taková, že dovoluje užíti speciálních způsobů výpočtů založených na zákonech násobení; na příklad, má se vypočíst $369 . 3 + 369 . 7$; můžeme ihned počítat $369 . 10 = 3690$. Nebo $369 . 3 + 369 . 12$; můžeme rychle vypočíst $369 . 15$:

$$\begin{array}{r} 3690 \\ +\ 1845 \\ \hline 5535, \end{array} \quad \text{kde 1845 je polovina ze 3690.}$$

[2]) Tento případ a obdobné nejsou závazné pro žáky 5. třídy.

I. Různé případy násobení

Žáci se naučili na obecné škole násobit 2 čísla ve všech možných případech, také v případě násobení dvou několikaciferných čísel. Rozšíření pravidla násobení na čísla mající velký počet cifer nečiní potíže. Při opakování hlavním úkolem jest:

1. prohloubit u žáků porozumění procesu násobení a jeho zdůvodnění;

2. doplnit výcvik v násobení čísel v těch několika případech, které dělají žákům největší potíže.

1. Při sledování prvního z uvedených cílů je třeba se žáky probrati všecky případy násobení a zřetelně vyjasnit, že při provádění násobení v každém případě:

1) užívá se numerace čísel, schopnosti vyjádřit číslo ve tvaru součtu jednotek jednotlivých řádů;

2) užívá se násobilky, kterou proto musíme dokonale znát, protože každé násobení se převádí na násobení jednociferných čísel;

3) užívá se všech zákonů násobení k odvození příslušných pravidel pro násobení libovolných čísel; při tom jest zběžně znovu probrati žákům známé:

a) případy násobení dvou jednociferných čísel, dvojciferného čísla jednociferným; případ násobení libovolného čísla čísly 10, 100, 1000 atd. (zpaměti); případ násobení několikaciferného čísla jednociferným, při čemž se předkládá požadavek, ve všech těchto případech zapisovat celý výkon do jednoho řádku; při zápise výpočtu ať žáci napřed za znakem „=“ vyznačí (tečkami) počet míst potřebných pro součin, t. j. v případě 68 379 . 7 je třeba vyznačit 6 míst.

Takový odhad počtu cifer součinu je velice užitečný, neboť přispívá k tomu, aby žáci počítali uvědoměle a tím chrání před chybami vznikajícími z mechanické práce. Zde je také možno probrati případ násobení mnohojmenného čísla abstraktním číslem, na příklad:

$$3 \text{ ruble } 25 \text{ kop.} \,.\, 7 = (3 \text{ ruble} + 25 \text{ kop.}) \,.\, 7 =$$
$$= 21 \text{ rubl} + 1 \text{ rubl } 75 \text{ kop.} = 22 \text{ ruble } 75 \text{ kop.}$$

b) Potom se přejde k obecnému případu násobení dvou několikaciferných čísel. Při sestavení pravidla násobení v tomto případě je obzvláště nutné se zdržet; na příklad:

$376 \,.\, 415 = (300 + 70 + 6) \,.\, 415 = 300 \,.\, 415 + 70 \,.\, 415 + 6 \,.\, 415 =$
$= 300 \,.\, (400 + 10 + 5) + 70 \,.\, (400 + 10 + 5) + 6 \,.\, (400 + 10 + 5)$ atd.

Z toho pravidlo: počet jednotek každého řádu v násobenci znásobíme počtem jednotek každého řádu v násobiteli a obdržené součiny sečteme.

Poznámky. 1. Můžeme žádat, aby žáci vysvětlili násobení několikaciferných čísel přímo na základě pojmu násobení: znásobit číslo 376 číslem 415 znamená číslo 376 položit za sčítance 415krát a k tomu cíli můžeme 376 položit za sčítance nejprve 400krát, potom 10krát a posléze 5krát a obdržené součiny sečíst.

2. Na týchž příkladech můžeme určovat počet cifer součinu v jeho závislosti na počtu cifer činitelů: součin má $(m + n)$ nebo $(m + n - 1)$ cifer, kde m a n jsou počty cifer činitelů.

3. Methodikové nejsou jednotni v názoru, jak se má zapisovat násobení dvou několikaciferných čísel: jedni navrhují začínat od nejvyššího řádu, druzí od nejnižšího řádu; jedni navrhují psát činitele i součin do jednoho řádku, druzí píší činitele pod sebe, oddělujíce je od součinu vodorovnou čarou; jedni navrhují zapisovat nuly, které vzniknou při částečných součinech v desítkách, stech, tisících atd., druzí navrhují omezit se na správné zapisování cifer jednoho částečného součinu pod cifry druhého atd.

Nejběžnější jsou tyto zápisy:

$$\begin{array}{r} 457 \\ \times\ 325 \\ \hline 2285 \\ 914 \\ 1371 \\ \hline 148525 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 457 \\ \times\ 325 \\ \hline 2285 \\ 9140 \\ 137100 \\ \hline 148525 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 457 \,.\, 325 = 148525 \\ \hline 2285 \\ 9140 \\ 137100 \end{array}$$

My doporučujeme obecně přijatý prvý druh zápisu; nuly ve druhém zápise jsou zbytečné; ve třetím zápise je únavné přebíhání očí od násobence k násobiteli. Začínat násobení od nejvyššího řádu je v některých případech účelné, ježto je ihned patrné, pod kterými ciframi násobence má se zapsati součin.

2. Násobení na ščotách

Je užitečné prováděti násobení na ščotách, které je v podstatě založeno na sčítání rovných sčítanců; na příklad, máme 356 rublů

75 kop. násobiti čtyřmi. Za tím účelem se čtyřikrát odpočítá po 356 rublech 75 kop. Jakéhosi zkrácení tohoto zdlouhavého procesu dá se docílit kombinováním výpočtu na ščotách s výpočtem ústním. V daném případě můžeme na ščotách odpočítat nejprve 1200 rublů, pak 200 rublů, pak 24 ruble, pak 3 ruble.

3. Případ násobení, když jsou v činitelích nuly

Je třeba jako samostatný případ probírat nuly v násobiteli. Potíže žáků pramení z toho, že provádějí „násobení nulou" zapomínajíce, že při tom musí vždy vyjít nula a zapisují zbytečně celé řady nul, na př.:

$$\begin{array}{r} 5386 \\ \times\ 4002 \\ \hline 10772 \\ 0000 \\ 0000 \\ 21544 \\ \hline 21554772, \end{array}$$

což nikterak není nutné. Nebo zase neumísťují správně částečné součiny, neposunou správně zápis dalšího částečného součinu.

Na základě pojmu násobení musí žáci vědět, že v uvedeném příkladě je třeba 5386 násobit pouze čísly 4000 a 2. V tomto případě právě je vhodné začínat násobení od nejvyššího řádu:

$$\begin{array}{r} 5386 \\ \times\ 4002 \\ \hline 21544 \\ +\ 10772 \\ \hline 21554772 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5386 \\ \times\ 4002 \\ \hline 10772 \\ 21544 \\ \hline 21554772. \end{array}$$

Rovněž je vhodné vzít jako samostatný případ nuly na posledních místech jednoho nebo obou činitelů; ačkoli tento případ je pro žáky méně obtížný než předcházející, nicméně:

1. v zápisech je často nadbytek nul,

2. žáci nemají jistoty o tom, jak se má psát jeden činitel pod druhého. Uvedeme příklady správného zápisu:

```
  13700        137         13700
×   14     ×  1400     ×   14000
  ─────       ────        ─────
  548         548         548
 137         137         137
 ──────      ──────      ─────────
 191800      191800      191800000
```

To znamená: 1. poslední významnou cifru násobitele zapíšeme pod poslední významnou cifru násobence, 2. nuly zapíšeme až do konečného výsledku, ne do částečných součinů; proto jest považovati za neracionální zápisy jako:

```
1.     13700          2.      13700
     × 14000               ×     14
     ───────                 ──────
      54800       a           54800
     13700                   13700
     ─────────               ──────
     191800000               191800.
```

Při vysvětlování způsobu násobení v případě, že na posledních místech činitelů jsou nuly, je jednodušší užívat změny součinu při změnách činitelů. Proto se dříve probírají otázky po změně součinu, ale v opakovacím kurse nevznikají potíže, jestliže porovnáváme součiny, na příklad součin 36 . 42 se součiny 360 . 42, 36 . 420, 3600 . 4200 atd. a z toho vyvodíme, jak je třeba pozměnit součin vzhledem k tomu, že jsou nuly na posledních místech jednoho nebo druhého činitele nebo obou. Jestliže jsou nuly v obou činitelích, je třeba při vysvětlování zřetelně vytknout, jak se změnil součin tím, že jsme změnili násobence (nepřihlíželi jsme k nulám na jeho posledních místech), potom jaká změna součinu nastala tím, že jsme změnili násobitele; na to můžeme připsáním příslušného počtu nul zase odstranit v součinu nejprve tu chybu, která vznikla změnou násobence a potom tu chybu, která vznikla změnou násobitele.

Výše vyložený případ násobení, t. j. případ, kdy na posledních místech činitelů jsou nuly, může býti objasněn také na základě komutativního a asociativního zákona násobení.

Tak

$$4900 \,.\, 300 = (49 \,.\, 100) \,.\, (3 \,.\, 100) = 49 \,.\, 100 \,.\, 3 \,.\, 100 =$$
$$= (49 \,.\, 3) \,.\, (100 \,.\, 100) \doteq 1\,470\,000.$$

§ 5. Historické poznámky

Pro učitele je zajímavé seznámit se s historickou literaturou o otázkách násobení. Zejména je užitečná četba příslušné kapitoly Kedžoriovy knihy „Istorija matematiky". Pro žáky je možno užít výkladu o násobilce a o rozvoji způsobů násobení z knihy V. Belljustina „Kak postepenno došli ljudi do nastojaščej arifmetiki" a j. Je vhodné povědět žákům, že od okamžiku sestavení jim známé násobilky, nazývané pythagorskou tabulkou násobení, ve všech příručkách aritmetiky bylo psáno: „Hlavně a především je třeba dobře znát tabulku". Autoři starobylých ruských rukovětí říkají o násobilce, že ona „bol'šomu sčëtu razum pridajět", že ji musíme „v pamjati krepko deržati". V „Aritmetice" Magnického jsou verše věnované této otázce. Je možné žákům povědět, jak za starodávna se učilo násobilce výhradně memorováním, při čemž požadavky byly tak veliké, že žáci byli povinni znát zpaměti násobilku prvních 40 čísel, t. j. 360 součinů a mn. j. Dále je užitečné, aby žáci věděli, že ten způsob násobení, na který jsou navyklí, do dneška zdaleka není jediný užívaný způsob. Námi užívaný způsob se zdokonaloval průběhem dlouhé doby. Poznamenáme, že ve vývoji rozličných method provádění výkonů, zejména násobení, velikou roli hráli pedagogové; učitel může žákům vyložit, že mnohé z užívaných způsobů násobení se lišily těmi či oněmi přednostmi ve smyslu usnadnění výpočtů, vkusného zápisu, užití jich při počítání zpaměti atd. Některých způsobů se užívá ještě v přítomnosti, jako, na příklad, užívá se násobení, začínajícího výkon od nejvyššího řádu násobitele. Ale zároveň se vyskytovaly ovšem také velmi nedokonalé způsoby, zejména primitivní způsoby založené na sčítání, které nám ukazují, jak se historicky vyvíjel pojem výkonu násobení; takové methody postupného sčítání byly u Egypťanů: na příklad majíce násobit sedmnácti, oni našli sčítáním jeho dvojnásobek, ke kterému zase přičtli číslo jemu rovné a tak dostali čtyřnásobek atd.; tato převaha sčítání se projevuje i při zápisech násobení římskou numerací:

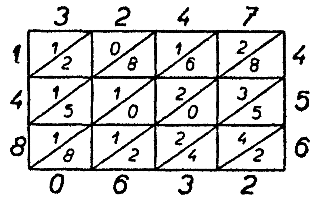
$$\mathrm{XXX} + \mathrm{XXX} + \mathrm{XXX} + \mathrm{XXX} = \mathrm{CXX} \text{ atd.}$$

Při práci v kroužku lze se žáky probírati rozličné methody pro hbité násobení čísel.[3])

Na obr. 10 je znázorněn starý indický způsob násobení mnohociferných čísel 3247 . 456.

Obdélník je rozdělen svislými úsečkami na čtyři sloupce (podle cifer násobence), nad jednotlivými sloupci jsou zapsány od leva do prava cifry

[3]) Martel, „Bystryj sčët". Překlad z fr., 1909.

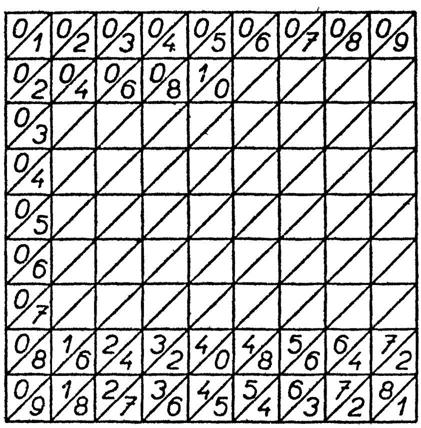


Obr. 10.

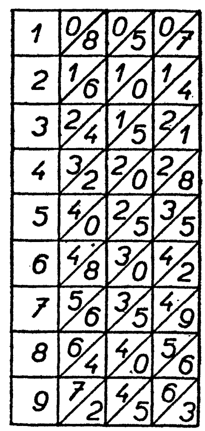
násobence; vodorovnými úsečkami je obdélník rozdělen na tři řádky (podle cifer násobitele) a za každým řádkem vpravo jsou zapsány shora dolů cifry násobitele. V každém ze vzniklých čtverců je vedena úhlopříčka.

Při násobení každé cifry násobence každou cifrou násobitele (v libovolném pořádku) zapisuje se součin do příslušného čtverce, při čemž desítky se zapíší nad úhlopříčku a jednotky pod ni. Na př. 4 . 5 = 20; 2 . 6 = 12 atd.[4])

Všecky obdržené součiny se sčítají (nejlépe začít od prava) tak, že se sčítají čísla zapsaná v pásu mezi dvěma čarami složenými z úhlopříček a součet



Obr. 11a.



Obr. 11b.

se zapíše pod pás. V našem případě se dostane: první cifra 2, druhá 3 (5 + 4 + + 4 = 13), třetí 6 (8 + 3 + 0 + 2 + 2 + 1 = 16) atd. Výsledek: 1 480 632.

K násobení mnohociferných čísel se užívá „Napierových hůlek“[5]), které se skládají z jednotlivých hůlek (dřevěných nebo lepenkových), jež obsahují

[4]) Píše se $^2/_0$; $^1/_2$.

[5]) John Napier, slavný objevitel logaritmů (1550—1617 ve Skotsku).

(obr. 11a) tabulku součinů všech čísel od 0 do 9 se všemi čísly od 1 do 9. V každém součinu jsou desítky (nahoře) odděleny šikmou čarou od jednotek (dole).

Při násobení, třeba 857 . 93 bereme hůlky tak, abychom dostali a potom sečetli součiny 857 . 90 + 857 . 3, t. j. osmou, pátou a sedmou hůlku. Je výhodné (v. obr. 11b) zleva přiložit hůlku očíslovanou 1, 2, 3, ..., 9.

Najdeme 857 . 90 = 857 . 9 . 10; sečtením čísel uzavřených mezi dvěma šikmými čarami (v našem případě v posledním řádku) dostaneme 7713 . 10 = = 77 130 a 857 . 3 = 2571 (sečtením čísel ve třetím řádku), celkem

$$\begin{array}{r} 77\,130 \\ +\ \ 2\,571 \\ \hline 79\,701. \end{array}$$

Musíme mít několik hůlek pro každou cifru; je toho třeba pro případ, že se v činitelích některé cifry opakují.

§ 6. Změna součinu

Pořadí otázek. Otázka po změně součinu působí žákům veliké potíže a je nutné velmi pečlivě hleděti k tomu, aby žáci se neomezovali na odříkávání pravidel a vyjmenovávání všech případů změny součinu, nýbrž aby dovedli udávati určité příklady a vysvětlovati, proč nastane ta či ona změna součinu.

Otázka po změně součinu při změně činitelů může býti předmětem úvahy ve dvou případech (ve spojení s asociativním a s distributivním zákonem násobení):

1. v případě, že každý činitel se změní o několik jednotek,
2. v případě, že každý činitel se změní několikrát.

Je obecně známo, jaké obtíže činí samy tyto pojmy — zvětšení o několik jednotek a několikrát — nejen žákům nižších tříd, nýbrž i ve třídách vyšších. Je pochopitelné, že sledování důsledků, které plynou z těchto pojmů, znamená pro žáky dvojí potíž. Proto otázka změny součinu způsobené změnou každého činitele o několik jednotek v naší školské literatuře aritmetické často se vůbec vynechává, ačkoli tato změna v podstatě není nic jiného než objasnění podstaty distributivního zákona násobení a přispívá k porozumění tomuto zákonu, a její porovnání s případem změny činitele několikrát má veliký význam pro vyjasnění procesu násobení samého.

Kterým případem máme začít rozbor otázky po změně součinu, prvým či druhým? My začneme rozbor druhým případem, tedy změnou součinu způsobenou změnami činitelů několikrát a doporučujeme začínat rozborem změny násobitele několikrát, a ne násobence. V různých učebnicích pozorujeme různý pořádek při probírání těchto otázek. Schema naší práce tedy bude:

$$\begin{array}{l}\text{Změna součinu}\\ \text{způsobená změnou}\end{array}\begin{cases}\text{několikrát} & \begin{array}{l}\text{násobitele}\\ \text{násobence}\\ \text{obou činitelů}\end{array}\\ \text{o několik jedn.} & \begin{array}{l}\text{násobitele}\\ \text{násobence}\\ \text{obou činitelů}\end{array}\end{cases}$$

Methoda práce je táž jako při vyučování o změně součtu a rozdílu způsobené změnou daných čísel, totiž: porovnávání výsledku obdrženého při původních hodnotách a při změněných.

Jako prostředek pro konkretisaci úsudků a obdržených závěrů slouží:

1. rozbor číselných úloh a příkladů;

2. využití podstaty násobení jakožto sčítání rovných sčítanců na převedení otázky změny součinu na otázku známou — změny součtu při změně sčítanců.

První případ. Změna součinu způsobená změnou násobitele.

Cvičení 1. Budiž úlohou při koupi 5 kg čaje po 6 rublech za kg určit cenu nákupu, nebo při dodávce 5 souborů knih po 6 v každém nalézt celkový počet dodaných knih nebo obecně budiž žádáno 6 násobit pěti a určit výsledek atd.

Úsudek. Je třeba znásobit 6 . 5, t. j. číslo 6 vzít 5krát za sčítance.

Jestliže místo násobitele 5 máme násobitele 10, t. j. bylo-li koupeno dvojnásobné množství čaje, totiž 10 kg, nebo dodáno dvakrát více knih, totiž 10 souborů knih, tu počet sčítanců bude dvakrát větší, t. j. máme 6 . 10 = 60, jinými slovy, i součin bude dvakrát větší než dříve.

Cvičení 2. Je užitečné sestavit písemně na tabuli různé příklady, jako

1) 85 . 3	3) 85 . 9	5) 85 . 15
2) 85 . 6	4) 85 . 12	

Učitel nemusí hledat speciální příklady na cvičení o změně součinu způsobené změnou jednoho nebo druhého činitele. Při řešení libovolné úlohy na násobení ze sbírky s libovolnými číselnými údaji může změnit údaje a zopakovat se žáky otázku po změně součinu a postupně dojít k úplnému utvrzení a pochopení podstaty otázky. Už teď po rozboru, jak se zvětší součin, zvětší-li se násobitel několikrát, je vhodné položit obrácenou otázku: co se stane se součinem, jestliže zmenšíme násobitele 2krát, 3krát atd.? S tímto cílem užijeme těch zápisů, které už máme na tabuli, srovnáme na př. případy 1. a 2., dojdeme k příslušnému závěru, potom srovnáváme 1. a 3, 1 a 4. atd. Žáci vidí, že mluvíme o zmenšení součinu pouze v těch případech, že násobitel byl zmenšen (celé číslo) krát.

Poznámka. Je dobře, když žák na učitelovu otázku: „Proč se součin zmenšil?" odpoví takto: „Protože jsme vzali méně sčítanců, na příklad v případě 4. bylo 12 sobě rovných sčítanců, a v případě 2. pouze 6, t. j. dvakrát méně." Jinými slovy, je dobře, jestliže žák chápe, že v rozbíraném případě máme rozmanité počty sčítanců, ale hodnota sčítanců je stále táž. V souhlase s tím je užitečné také pravidlo formulovat takto: jestliže zvětšíme nebo zmenšíme násobitele (bereme násobitele většího nebo menšího) několikrát, ale násobenec zůstane beze změny, také součin se zvětší nebo zmenší stejněkrát. Později můžeme přejít i k obyčejné krátké formulaci tohoto pravidla. Zároveň může žák vysvětlit v daném případě užití asociativního zákona násobení: $85 \cdot 6 = 85 \cdot (3 \cdot 2) = (85 \cdot 3) \cdot 2$.

Druhý případ. Jako druhý případ se rozbírá změna součinu způsobená změnou násobence. Tento případ je žákům méně jasný. V prvém případě chápou, že jestliže sčítanci jsou tíž, ale bylo jich vzato několikrát více, bude také součet stejněkrát větší. Zde máme před sebou případ, že se bere každý sčítanec větší než byl původně, a počet sčítanců zůstává týž. Je zřejmé, že součet bude větší, ale že bude stejněkrát větší, to není naráz docela jasné.

Budiž dáno původně: $7 \cdot 5 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$ (lehko sestavíme slovní text); jestliže vezmeme nového násobence $7 \cdot 2$, t. j. zdvojnásobíme násobence a chceme jej zase násobit pěti, tu $(7 \cdot 2) \cdot 5 = 7 \cdot 5 \cdot 2 = 35 \cdot 2 = 70$; obdržený výsledek je dvakrát větší než původní atd.

V zásadě je možno se přidržovat výše uvedeného pořádku při srovnávání obdržených součinů při násobenci zvětšeném nebo zmenšeném 2krát, 3krát atd. A v daném případě i při vysvětlování i při prvních formulacích není zbytečné výslovně uvádět, že taková změna součinu způsobená změnou násobence nastává za té podmínky, že násobitel zůstal nezměněn. Samozřejmě i při výkladu změny součinu způsobené zmenšením násobence probíráme pouze případ, že násobenec se zmenšil (celé číslo) krát.

Opakujeme znovu — vysvětlování můžeme založiti na znalostech žáků o změně součtu. Můžeme vycházet od známého jim zákona asociativního a obráceně; jestliže učitel tento zákon neprobíral se žáky, může jej probrat vycházeje od změny součinu, objasnit jeho podstatu a praktické využití.[6]) Jak bylo již řečeno, je možné tímto postupem zmenšit počet cvičení, zkrátit práci časově, ale ovšem na účet rozmanitosti rozbíraných otázek.

Změna obou činitelů

Třetí případ. 1. Vyjdeme od součinu 27 . 6 = 162. Jaký bude součin, jestliže vezmeme násobence dvakrát většího? Odpovědět bez výpočtu nového součinu.

Žák řekne: „Součin bude dvakrát větší", t. j. 324 neboli 54 . 6 = = 324. A jestliže nyní místo násobitele 6 vezmeme násobitele 18? Bez výpočtu žák řekne, že součin bude třikrát větší; a skutečně 54 . 18 = = 972.

Tento postup práce a obdržení výsledku obyčejně nevede k potížím. V řídkých případech žák mylně zvětší třikrát ne 324, nýbrž 162.

2. V případě, že se nežádá bezprostřední vyhledání součinu, nýbrž klade se pouze otázka po charakteru změny součinu vzniklé změnou obou činitelů, jsou potíže žáků značně větší. Budiž dáno 31 . 5. Otázka: co se stane se součinem, jestliže místo násobence 31 vezmeme násobence 62? Odpověď: zvětší se. Otázka: kolikrát? Odpověď: dvakrát. Otázka: a jestliže nyní ještě místo násobitele 5 vezmeme násobitele 15, co se stane se součinem? Odpověď zvětší se. Otázka: kolikrát? Odpověď: třikrát. Otázka: jak se tedy změní součin

[6]) Táž poznámka se aplikuje na užití asociativního zákona při výše rozbírané změně součinu způsobené změnou násobitele.

následkem obou těchto změn činitelů? Odpověď: zvětší se. A dále povětšině následuje odpověď „pětkrát". Tato odpověď je charakteristická. Ve většině případů žáci se domnívají, že při zvětšení násobence (jedno číslo) krát a zvětšení násobitele (druhé číslo) krát součin se znásobí součtem, a při zmenšení rozdílem. Proto je třeba se neklamat ve znalostech žáků, jestliže říkají, jako by usuzovali: „Jestliže násobitel se zvětší třikrát, zvětší se také součin třikrát; jestliže násobenec se zvětší dvakrát, zvětší se také součin dvakrát; celkem se součin zvětší ..." Se zvláštní pečlivostí musíme žákům vysvětlit, že v tomto případě součin se změní „tolikrát, kolik je jednotek v součinu obou čísel, z nichž prvé udává, kolikrát se zvětšil násobenec a druhé, kolikrát se zvětšil násobitel". A musíme velmi důkladně objasnit, který součin se zvětšil dvakrát a nesmíme připustit slova jako „celkem součin" nebo „následkem obou změn". K tomuto cíli je vhodné užít níže uvedených tří řádků netoliko pro shrnutí výsledků a vyvození pravidla, nýbrž i při stanovení změny výsledku způsobené změnami daných čísel v každém jednotlivém případě; tento přechod přes pomocný řádek je charakteristický i pro sám proces změny, ježto proces změny obou činitelů se neděje současně. Usuzovat můžeme na příklad takto: násobenec i násobitel se zvětší několikrát:

$$
\begin{aligned}
18 \,.\, 10 &= 180 \\
18 \,.\, 20 &= 360 \\
54 \,.\, 20 &= 1080.
\end{aligned}
$$

První řádek ukazuje, že násobenec je roven 18, násobitel 10. Jestliže místo násobitele 10 vezmeme násobitele 20, tu součin ve druhém řádku v porovnání se součinem z prvního řádku bude dvakrát větší (počet sčítanců bude větší).

Potom se můžeme otázat: ke kterému součinu dojdeme? *Odpověď*: 360. Otázka: jestliže místo násobence 18 vezmeme násobence třikrát většího při témž násobiteli, co můžeme v tomto případě říci o součinu? *Odpověď*: součin bude třikrát větší v porovnání se 360, t. j. bude 360 . 3 = 1080.

Při vysvětlování jsou nezbytná výše řečená slova: „v porovnání s tím součinem, který jsme dostali po zvětšení násobitele".

Na porovnávání zdola nahoru našich tří řádků založíme otázku po změně součinu při zmenšení násobence i násobitele (s omezením výše udaným) několikrát.

Potom můžeme přejít ke druhému případu změny součinu, k případu, že se jeden činitel několikrát zvětší a druhý zmenší. Budiž dáno 18 . 10; má se násobitel zvětšit 6krát a násobenec zmenšit 3krát.

Vzor:

$$18 \,.\, 10 = 180$$
$$18 \,.\, 60 = 1080$$
$$6 \,.\, 60 = 360.$$

Součin následkem obojí změny bude roven 360 a bude dvakrát větší než původní součin.

V případě sledování změny součinu při zvětšení obou činitelů, můžeme dát žákům pravidlo, ale v případě změny součinu způsobené zmenšením obou činitelů nebo jednoho z nich je třeba vyžadovat pouze postupné usuzování, jak jsme výše uvedli pomocí 3 řádků (bez formulování pravidla). Vskutku, mějme příklad:

$$18 \,.\, 10 = 180; \quad 18 \,.\, 20 = 360; \quad 6 \,.\, 20 = 120.$$

V tomto případě žák může dospět k výsledku, ale neznaje zlomky, nemůže říci, jak se změní součin následkem obojí změny činitelů. Učitel si musí velmi pečlivě připravit příklady na hodinu, aby nedával žákům příklady nepřiměřené stupni jejich vědomostí.

3. Udá se základní vlastnost součinu, totiž: součin se nezmění, jestliže zvětšíme jednoho činitele několikrát a zároveň zmenšíme druhého stejněkrát. Methodické vysvětlení této otázky děje se cestou stejných úsudků a zápisů jako výše, na příklad:

$$18 \,.\, 10 = 180; \quad 36 \,.\, 10 = 360; \quad 36 \,.\, 5 = 180 \text{ atd.}$$

Změna činitele o několik jednotek. Změna součinu při změně činitelů o několik jednotek probírá se výhradně jako cvičení a žádným pravidlům zde žáky neučíme. Ale snad vůbec nemá smyslu klásti takovou otázku žákům, když je vynechána ve mnoha učebnicích? My bychom považovali takové řešení za nesprávné, neboť tento druh změny součinu objasňuje podstatu distributivního zákona násobení, nezbytného zákona pro zdůvodňování všech pravidel násobení i pro praktické provádění násobení ve mnoha speciálních případech. Rozbor této otázky zase je vhodné začít změnou násobitele.

1. Mějme 14 . 5. Otázkami a odpověďmi se vyjasní, že jestliže hledáme 14 . 6, tu číslo 14 musíme vzít za sčítance ne 5krát, ale 6krát, tedy součin bude o 14 jednotek větší ve srovnání s původním součinem 14 . 5.

$$14 \,.\, 6 = 14 \,.\, (5 + 1) = 14 \,.\, 5 + 14 \,.\, 1.$$

Stejně se objasní, že při násobení 14 . 7 součin ve srovnání se součinem 14 . 5 bude větší o dvojnásobek násobence:

$$14 . 7 = 14 . (5 + 2) = 14 . 5 + 14 . 2.$$

Můžeme vést vysvětlování také zpětně: budiž dáno 14 . 8 = 112 a máme-li určit 14 . 7, t. j. vzít 14 o jednou méně ze sčítance, dostaneme 112 — 14 atd.

2. Budiž dáno 14 . 5 = 70. Jak se změní součin, jestliže vezmeme násobence menšího o několik jednotek?

Jestliže místo 14 vezmeme pouze 13 pětkrát za sčítance, dostaneme ve výsledku o 5 jednotek méně. Od výsledku 70 musíme odečíst 5 (ubrat 5krát po jednotce), neboli 13 . 5 = (14 — 1) . 5 = 70 — 5.

Máme-li vysvětlit, jaký bude výsledek násobení 11 . 5 ve srovnání s výsledkem při násobení 14 . 5, je jasné, že pokaždé budeme míti sčítance o 3 jedn. menšího a celkem bude o 15 jedn. méně. Vskutku

$$14 . 5 = 70; \quad 11 . 5 = 55; \quad 11 . 5 = (14 - 3) . 5 = 70 - 15.$$

Opakujeme, že nemáme učit žádným pravidlům o změně součinu při změně činitelů o několik jednotek.

Na těchto příkladech, jak bylo již uvedeno, můžeme zopakovat se žáky distributivní zákon násobení. Na těchto příkladech se otázkami a odpověďmi opakují pravidla násobení součtu a rozdílu číslem a násobení čísla součtem a rozdílem. Abychom dospěli k úplnému proniknutí podstaty otázky, musíme neustále užívat všech probíraných úsudků k výhodným (zkráceným) způsobům výpočtu součinu.

§ 7. Početní výhody při násobení

1. Násobení čísly 9, 99, 999 atd. 68 . 99 = 6800 — 68. Proč? 68 . 999 = = 68 000 — 68 = 67 932.

2. Násobení číslem blízkým jednotce vyššího řádu:

$$135 . 97 = 13\,500 - 135 . 3; \qquad \begin{array}{r} 13\,500 \\ -\ 405 \\ \hline 13\,095. \end{array}$$

3. Násobení pěti tak, že dělíme dvěma a násobíme deseti.

Násobení číslem 50 tak, že dělíme dvěma a násobíme stem. Násobení číslem 500 atd.

1308 . 5 = 6540 (odpověď se napíše naráz);
450 . 50 = 225 . 100 = 22 500 (odpověď se napíše naráz).

V těch případech, kdy nelze násobence dělit dvěma, nejprve násobíme číslem 10, 100, 1000 a potom dělíme dvěma:

$$3687 . 500 = 3\,687\,000 : 2 = 1\,843\,500.$$

4. Násobení číslem blízkým číslu 50:

$$134 \,.\, 48 = 134 \,.\, 50 - 134 \,.\, 2; \qquad \begin{array}{r} 6700 \\ -\ 268 \\ \hline 6432, \end{array}$$

$$986 \,.\, 48 = 493 \,.\, 100 - 986 \,.\, 2; \qquad \begin{array}{r} 49\,300 \\ -\ 1\,972 \\ \hline 47\,328. \end{array}$$

5. Násobení číslem 11:

$$5683 \,.\, 11 = 62\,513, \text{ neboť} \qquad \begin{array}{r} 56\,830 \\ +\ 5\,683 \\ \hline 62\,513, \end{array}$$

t. j. nejprve násobíme deseti (připsáním nuly) a potom přičteme násobence.

6. Násobení číslem 25:

$$3876 \,.\, 25 = 96\,900.$$

Nejprve dané číslo dělíme čtyřmi, je-li to možné, potom násobíme stem nebo to provedeme obráceně (což je vždy možné).

7. Násobení číslem $15 = 10 + 5$:

$$768 \,.\, 15 = 11\,520, \text{ neboť} \qquad \begin{array}{r} 7\,680 \\ +\ 3\,840 \\ \hline 11\,520 \end{array}$$

Při násobení patnácti počítáme druhého sčítance jako polovinu nalezeného součinu 768 . 10.

8. Jsou methody pro násobení čísly 75, 125, 225 atd. Udáváme pouze nejužívanější, ale učitel může zvýšit rozmanitost příkladů, dávaných žákům pro ústní a polopísemné počítání s výhodou, zejména při práci v kroužku, a tak vzbudit u žáků zájem a oživit vyučování.

§ 8. Příklady pro kontrolní práci

1. Najít součin čísel 597 . 8006; 7500 . 390.

2. Napsat číslo 205krát větší než 1003.

3. Provésti dvojím způsobem zkoušku správnosti provedeného výkonu

$$35 \,.\, 101 = 3535.$$

4. Provést násobení nejvýhodnějším způsobem (vysvětlit, kterých zákonů násobení se užije):

$$125 . 15 . 6 . 8.$$

5. Kolikrát méně bylo zaplaceno za tužky po druhé nežli po prvé, jestliže podruhé bylo koupeno 10krát méně tužek, ale cena tužky byla dvakrát vyšší (nižší)?

6. Za kolik hodin dožene cyklista, který ujede 15 km za hodinu, kamaráda, který ujede jen 12 km za hodinu, jestliže první vyjel o 2 hod. 30 min. dříve než druhý?

KAPITOLA VI.

DĚLENÍ. PROVÁDĚNÍ NĚKOLIKA VÝKONŮ

§ 1. Úvod

Dospěli jsme k výkonu násobení při postupném spojování (sčítání) souborů v tom případě, že všecky dané soubory jsou si rovny. K výkonu dělení dospějeme při postupném odčítání (rozkládání) v tom případě, že všecky odnímané soubory jsou si rovny.

Jsou tři možné tvary rozkladu souborů:

1. Na dvě nerovné části, při čemž jedna z těch částí je známa a druhou je třeba určit — to je výkon odčítání: $a - b$.

2. Obecnější případ, když se od daného souboru postupně odnímá několik nerovných částí a žádá se stanovení zbývající části — to je postupné odčítání: $a - b - c - d$.

3. Případ postupného odčítání, ve kterém všecky odnímané části jsou si rovny. Při tom se daný soubor rozkládá na několik rovných částí — to je proces dělení se zbytkem nebo beze zbytku.

Podobně jako odčítání definujeme dělení na základě jeho hlavní vlastnosti, t. j. dělení definujeme jako výkon obrácený k násobení.

§ 2. Úlohy vedoucí na dělení

Opakování a prohloubení otázek dělení se žáky můžeme začít rozborem dvou základních úloh vedoucích na dělení. Podle toho, co se žádá určit a co je dáno, rozeznáváme dva případy dělení: a) měření, b) rozdělování:

a) když je dán celek, který se má rozdělit, je známa velikost každé z rovných částí a máme určit, kolikrát je daná část obsažena v celku, máme případ, který se nazývá měření;

b) když je dán celek, který se má rozdělit, je znám počet rovných částí, na které se daný soubor má rozložit, a hledá se velikost každé z rovných částí, máme případ, který se nazývá rozdělování. V platnosti zůstává dříve učiněná poznámka, že k vyjasnění podstaty otázky je třeba vzít úlohy s jednoduchým zněním a s malými číselnými údaji.

Úloha 1. Má se rozdat 300 sešitů žákům tak, aby každý dostal po 5 sešitech. Kolik žáků má dostat sešity? (Případ tak zvaného „měření").

Řešení je jasné: bereme po 5 sešitech a po řadě je rozdáváme 300 seš. — 5 seš. — 5 seš., dokud nejsou rozdány všecky sešity; objeví se, že rozdávání je možno provést 60krát; 5 . 60 = 300. Na tomto příkladě žáci jasně poznávají:

1. že dělení je ve skutečnosti postupné odčítání rovných částí od daného celku;

2. že přímé provádění odčítání je nadmíru zdlouhavé, zejména jestliže se vezmou větší čísla, a že je nezbytné znát vhodný způsob (pravidlo) provádění podobného výkonu;

3. že mohou býti případy, ve kterých je dán takový počet sešitů na rozdělení mezi takový počet žáků, že provésti žádané rozdělení všech sešitů je vůbec nemožné; tak je-li žádáno rozdělit 93 sešity po 5 sešitech na každého žáka, zbudou 3 sešity, které nepostačí pro 19. žáka; jinými slovy, žáci dojdou k nutnosti zavedení dělení se zbytkem.

Poznámka. Užitečné je zeptat se, jaké mohou být zbytky při rozdělování sešitů po pěti. Odpověď: 1, 2, 3, 4 a žádný jiný počet.

Úloha 2. Má se rovnoměrně rozdělit 300 sešitů mezi 5 tříd. Kolik sešitů dostane každá třída? (Případ „rozdělování".)

Řešení: Jako při řešení prvé úlohy bereme po 5 sešitech, ale rozdáváme je po jednom do každé třídy; 300 seš. — 5 seš. — 5 seš. atd., až do té doby, kdy budou všecky sešity rozděleny do tříd. Ukazuje se, že můžeme 60krát provésti popsanou operaci rozdání jednoho sešitu každé třídě, tedy každá třída dostane 60 sešitů.

Rozdíl mezi operacemi v obou úlohách spočívá v tom, že v prvém případě se hledá násobitel a ve druhém násobenec. Z toho je patrné, proč po provedení výkonů dojdeme při stejných číselných údajích v úlohách ke stejnému výsledku, neboť pořádek činitelů je možné vyměnit, ježto výkon provádíme s nepojmenovanými čísly: 60 . 5 = = 300 a 5 . 60 = 300.

Po porovnání obou úloh žáci si uvědomí obecnou definici dělení jako výkonu obráceného k násobení. Zápis výkonu dělení je obecně: $a : b = q$ nebo $\frac{a}{b} = q$.

Poměr dvou čísel a, b je podíl q; $a = bq$.

Je třeba žáky cvičit v samostatném sestavování úloh na každý z rozbíraných případů.

Jak známo, řeší se dělením ještě některé úlohy.

Úloha 3. Zmenšit dané číslo několikrát. Na příklad, zmenšit 120 čtyřikrát.

Tato úloha ve své podstatě je úlohou na „rozdělování" (viz druhou z výše uvedených úloh) a žák musí umět vysvětlit, že „čtyřikrát zmenšit" znamená „rozdělit na čtyři rovné části a vzít jednu z těch částí".

Úloha 4. Poměrné srovnání dvou čísel, jinými slovy otázka, kolikrát je jedno číslo větší nebo menší než druhé číslo, řeší se dělením (ten případ, když odpověď lze vyjádřit celým číslem).

Budiž úlohou porovnat čísla 140 a 35. Můžeme dáti úloze konkretní obsah, kladouce otázky: kolikrát větší? kolikrát dražší? kolikrát těžší? kolikrát vyšší? kolikrát delší? Můžeme také klásti otázky: kolikrát menší? lehčí? lacinější? nižší? atd.

Ve své podstatě úloha porovnati dvě čísla na otázku, kolikrát je jedno větší než druhé, neboli tak zvané poměrné srovnání čísel, neliší se od výše rozebrané 1. úlohy „měření", neboť v daném případě také máme určit, kolikrát druhé číslo (menší) jest obsaženo v prvém (větším); $140 : 35 = 4$ (krát) a $35 . 4 = 140$, t. j. v tomto případě rovněž je dán celek a velikost každé části, t. j. i v tomto případě se žádá ze součinu a násobence určit násobitele.

Prvou otázku v této úloze můžeme položiti jinak, totiž — kolikrát je 35 menší než 140? Ale při odpovědi na tuto otázku (před zavedením zlomků) je třeba napřed určit, kolikrát je 140 větší než 35 a potom dát odpověď: „35 je 4krát menší než 140".

Užitečné je také provésti na úlohách přehled různých formulací všech případů zvětšování a zmenšování čísel, které se žákům vyskytnou při probírání čtyř výkonů s celými čísly.

1. formulace	2. formulace	Řeší se výkonem	Proces	Zápis
1. Najít číslo větší než dané číslo o určitý počet jednotek	Zvětšit dané číslo o určitý počet jednotek	Sčítáním	Přidávat nebo spojovat	$a + b$
2. Najít číslo menší než dané číslo o určitý počet jednotek	Zmenšit o určitý počet jednotek	Odčítáním	Ubírat	$a - b$
3. Najít číslo několikrát větší než dané číslo	Zvětšit dané číslo několikrát	Násobením	Vzít několikrát za sčítance	$a . b$
4. Najít číslo několikrát menší než dané číslo	Zmenšit dané číslo několikrát	Dělením	Rozklad, rozdělení na části (bere se jedna část)	$a : b$

Úlohy se mají vybírat z příslušných kapitol sbírky na sčítání, odčítání, násobení a dělení, při čemž můžeme napřed vzít skupinu případů 1. a 2., potom případů 3. a 4., potom jiné dvojice případů. Od skupiny případů 2. a 4. můžeme přejít ke srovnávání dvou čísel otázkami, oč je jedno číslo větší nebo menší než druhé a kolikrát je jedno číslo větší nebo menší než druhé.

Otázka	Řeší se výkonem	Termín	Zápis
5. Oč je jedno číslo větší než druhé	Odčítáním	Srovnávání čísel podle rozdílu	$a - b$
6. Kolikrát je jedno číslo větší než druhé	Dělením	Poměrné srovnávání čísel	$a : b$

Pro přípravu žáků na definici dělení jako obráceného výkonu k násobení berou se také úlohy abstraktního rázu: ze součinu a jednoho činitele určit druhého činitele (bude o nich řeč níže).

§ 3. Závislost mezi dělením a násobením

Objasnění tohoto bodu se provádí stejně jako objasnění obdobného bodu při vyučování o závislosti mezi výkony odčítání a sčítání (v. kap. IV).

Cvičení. 1. Po probrání libovolné úlohy s konkretním obsahem, vyžadující k svému řešení provedení výkonu násobení, na příklad: a) 130 . 7 = 910, uloží se žákům, aby samostatně sestavili 2 obrácené úlohy mající řešení: b) 910 : 130 = 7 a c) 910 : 7 = 130.

2. Vyjde se od libovolné úlohy, jejíž řešení vyžaduje provedení výkonu dělení, na příklad: 24 přadleny utkaly za 1 pracovní den 192 m látky. Kolik utkala každá přadlena? a) 192 : 24 = 8; mají se sestavit dvě úlohy s řešením: b) 192 : 8 = 24, c) 8 . 24 = 192.

Jestliže učitel vyšel od úlohy na „měření“, tu při sestavení úlohy c) se vymění místa činitelů.

3. Podle numerického příkladu zapsat 2 obrácené výkony, na př.: a) 130 . 125 = 16 250 nebo b) 16 250 : 130 = 125, zapsat ve 2 jiných tvarech atd.

4. Předložit žákům číselné příklady, ve kterých se žádá určení neznámého činitele nebo neznámého dělence nebo neznámého dělitele:

68 . ? = 612; ? . 95 = 950; 35 . 15 . ? = 5250; ? : 50 = 37;

1680 : ? = 42 atd., při čemž:

a) příklady mohou býti dány v napsaném tvaru nebo s písmenem x místo znaku „?“;

b) příklady mohou býti dány také v podrobném slovním znění: kterým číslem musíme znásobit 68, aby vyšlo 612? Které číslo musíme znásobit číslem 95, aby vyšlo 950? kterým číslem musíme znásobit součin 35 . 15, aby vyšlo 5250? které číslo musíme dělit číslem 50, aby vyšlo 37? kterým číslem musíme dělit 1680, aby vyšlo 42? atd.;

c) příklady mohou býti dány také pomocí pojmenování čísel vzhledem k výkonu: známe součin a násobence (nebo násobitele nebo jednoho činitele), hledáme druhého činitele; známe dělitele a podíl, hledáme dělence; známe dělence a podíl, hledáme dělitele.

5. Provádět zkoušku správnosti řešených příkladů a úloh slovních na základě závislosti mezi danými čísly a výsledkem při násobení a dělení, tedy zkoušku násobení dělením a zkoušku dělení násobením i dělením.

6. Můžeme dát čísla jako 2475, 225 ,11 a uložit sestavení libovolné slovní úlohy k těm číslům, která vyžaduje k svému řešení provésti násobení nebo dělení. V celku je možné sestavit 2 úlohy na násobení a 4 na dělení; ke každé úloze jsou dvě úlohy obrácené ve tvaru přímém nebo zakrytém.[1])

Učitel může při své běžné práci užívat všech nebo některých zde uvedených druhů cvičení. Při lepším stavu třídy můžeme provádět zápisy pomocí písmen:

1) $a \,.\, b = q$; 2) $q : b = a$: 3) $q : a = b$.

Můžeme také zapisovat

1) $a : b = p$; 2) $b \,.\, p = a$; 3) $a : p = b$;

při tom se nemají žáci učit písmenům zpaměti, mohou označit číslo libovolným písmenem abecedy. Potom pochopí také obráceně, že písmeno může znamenat libovolné číslo, že písmeno je obecné označení pro číslo. Otázka vzájemného poměru aritmetických výkonů, jejich počtu a klasifikace má historickou zajímavost: v 15. a 16. stol. „zdvojení“ a „půlení“ byly zvláštní výkony; „zvětšení několikrát“ a „zmenšení několikrát“ rovněž byly samostatné výkony.

„Nic, jak se zdá, nespočívá na tak pevném základě jako rozdíl mezi čtyřmi početními výkony, elementy veškeré matematiky. Nicméně hned na počátku násobení se jeví jako zkrácené sčítání, dělení jako zkrácené odčítání určitého počtu sobě rovných čísel a v jednom případě, když dělitel je zlomek, dělení se provádí jako násobení převrácenou hodnotou.“ (Engels, Dialektika přírody, 1946, str. 207.)

---

[1]) *Úlohy.* 1. Jeden pozemek má velikost 225 ha, druhý je 11krát větší. Určete velikost druhého pozemku.

2. Jeden pozemek má velikost 2475 ha, druhý 225 ha. Kolikrát je první pozemek větší než druhý?

3. Jeden pozemek velikosti 225 ha je 11krát menší (nebo větší) než druhý. Udejte velikost druhého pozemku (úloha je vyjádřena v zakrytém tvaru).

§ 4. Vlastnosti výkonu dělení

V témž pořádku, jak se se žáky probírají vlastnosti výkonu odčítání, můžeme probírat také otázku vlastností výkonu dělení. Především je třeba zopakovat se žáky formulaci tří zákonů násobení a položit otázku, které z těch zákonů platí také pro výkon obrácený k násobení, tedy pro dělení.

Komutativní vlastnost

Žákům nedělá potíže odpověď, že komutativní zákon neplatí pro dělení, neboť nelze dát dělence na místo dělitele a obráceně. Učitel položí otázku: „Jsou jiné výkony, pro které neplatí komutativní zákon?“ Ve většině případů následuje pohotová odpověď: „Odčítání“. Otázka: „Nevyskytl se nám takový případ odčítání, při kterém platí zákon komutativní?“ Odpověď na tuto otázku má býti: „V případě odčítání několika čísel můžeme změnit pořádek menšitelů“. Potom učitel vyloží žákům na číselném příkladě, že 1. můžeme číslo dělit postupně řadou čísel, 2. v tom případě můžeme mezi sebou vyměnit dělitele, na příklad dělení

$$76\,500 : 9 : 5 : 20 : 5$$

dá výsledek 17 při každém pořádku jednotlivých dělení.[4]) Zde sluší položit otázku, v jakém pořádku je výpočet nejvýhodnější, zdali v pořádku napsaném či v některém jiném. Jako odpověď ve většině případů slyšíme, že nejvýhodněji provedeme dělení v následujícím pořádku:

$$76\,500 : 5 : 20 : 5 : 9,$$

a nejčastěji žáci dodají, že nejsnáze dospějeme k výsledku, jestliže napřed znásobíme $5 . 20 = 100$ a potom dělíme $76\,500 : (5 . 20) : 5 : 9$, jinými slovy, žáci sami přijdou na to, že při dělení můžeme využít také zákona asociativního, jmenovitě: že dělení řadou čísel můžeme zaměnit za dělení jejich součinem. Tuto myšlenku musíme zdůraznit a řešit několik příkladů, na kterých se přesvědčují o významu obou ukázaných vlastností dělení pro hbité počítání, zejména pro počítání zpaměti.

---

[4]) Myslíme zde všude na dělení beze zbytku.

Na úlohách s konkretním obsahem můžeme dále žákům vyložit, že pro dělení platí také třetí (distributivní) vlastnost, t. j. dělení součtu několika sčítanců dá se nahraditi tím, že dělíme každého sčítance zvlášť daným dělitelem. Na příklad úloha: „Byly přineseny 2 balíky sešitů; v jednom bylo 100 kusů, ve druhém 200 kusů. Máme všecky sešity rozdat mezi 25 žáků. Jak to provedeme?“ Žáci obyčejně bez obtíží objasní řešení této úlohy:

$$100 : 25 + 200 : 25 = (100 + 200) : 25 = 300 : 25$$

a stejně při obdobných úlohách, ve kterých součet několika sčítanců se dělí číslem.

Obecný zápis všech tří vlastností:

1. $A : a : b : c = A : b : c : a = A : a : c : b$ atd.
2. $A : a : b : c = A : (b \cdot c \cdot a) = A : (ab) : c$ atd.
3. $(a + b + c) : m = a : m + b : m + c : m$.

Pouze třetí z těchto zápisů můžeme dát žákům 5. třídy. Zde vidí žáci ten zákon, na jehož základě se provádí dělení čísel.

Můžeme zde také probrat příklad dělení několikaciferného čísla jednociferným, na příklad

$$9360 : 3 = (9000 + 300 + 60) : 3$$

nebo

$$(9 \text{ tisíc} + 3 \text{ sta} + 6 \text{ des.}) : 3 = 3 \text{ tis.} + 1 \text{ sto} + 2 \text{ des.} =$$
$$= 3000 + 100 + 20 + 0 = 3120.$$

Nejprve vezmeme takový příklad, ve kterém počet jednotek každého řádu v dělenci je dělitelný daným dělitelem; potom se vezme libovolný příklad.

Uvedené zápisy se nemají provádět na tabuli; my jimi pouze naznačujeme pochod úsudků, které žáci mají provádět ústně.

Na podobných příkladech se znovu a znovu zdůrazňují základní skutečnosti:

a) že každý výkon se provádí na základě určitých zákonů;

b) že přednosti desítkové soustavy numerační mají ohromný význam při provádění každého výkonu;

c) že při provádění výkonu dělení (jak bylo už dříve uvedeno při provádění výkonu násobení) hraje velmi důležitou roli násobilka, podobně jako základní spoje sčítání při provádění sčítání a odčítání.

1. Na číselných příkladech můžeme žákům ukázat, že distributivní zákon platí také v případě, že dělíme (beze zbytku) rozdíl dvou čísel číslem třetím.

2. Na zákonech dělení součtu a součinu číslem jsou založeny identické úpravy v dalším studiu matematiky. Zde se žáci po prvé setkávají s těmito otázkami.[5])

§ 5. Dělení beze zbytku

Při opakování výkonu dělení vzhledem ke mnoha obtížím při odůvodňování a rovněž k technickým obtížím spojeným s prováděním dělení je radno prodlet při probírání poněkud většího počtu příkladů než při opakování ostatních výkonů s celými čísly. Celou tuto otázku je možné opakovat na příkladech s abstraktními čísly, neboť hlavní věcí v této práci je rozbor procesu provádění výkonu a výcvik v technické dokonalosti při provádění. Rozdělujeme celý proces techniky dělení na jednotlivé kroky (etapy) podle stupně obtížnosti a dáváme pokyny, jak postupným cvičením docílíme u žáků uvědomělé a trvalé zručnosti při provádění složitého procesu dělení několikaciferných čísel v těch třídách, ve kterých se to ukáže nutným.

I. Případ dělení jednociferných čísel připomíná se pouze proto, aby se zdůraznilo, že dělení je obrácený výkon k násobení, který se v daném případě provádí podle násobilky.

Totéž platí o případě dělení dvojciferného čísla jednociferným, jestliže podíl je jednociferný.

II. Připomene se výše uvedený případ dělení libovolného čísla číslem jednociferným. V tomto případě žáci musí provádět výpočet

[5]) Při výkonech se zlomky opětně se žákům ukáže, že krácení zlomku $\frac{ab}{ka}$ $\left(\text{nebo na číselném příkladě } \frac{3\,.\,12}{8} = \frac{3\,.\,3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}\right)$ se provádí na základě výše uvedené vlastnosti součinu a že nesprávnost krácení zlomku $\frac{a+b}{b}$ číslem b nebo zlomku $\frac{3+12}{8}$ číslem 4 plyne z příslušné vlastnosti součtu.

v jednom řádku. Tak na příklad i v obtížnějších příkladech má se dáti přednost zápisu:

$$68\,922 : 9 = 7658 \quad \text{před zápisem} \quad \begin{array}{l} 68\,922 : 9 = 7658, \\ \underline{59} \\ \;\;52 \\ \;\;\;72 \\ \;\;\;\;0 \end{array}$$

nemluvě vůbec o tom, že v takovém případě při provádění dělení nemají se vypisovat částečné součiny.

III. Je užitečné všímat si toho případu dělení několikaciferného čísla několikaciferným, ve kterém jako podíl vyjde jednociferné číslo, na příklad $852 : 213 = 4$; $1917 : 213 = 9$; protože $213 . 9 = 1917$; $213 . 4 = 852$. Tímto vysvětlením se utvrzuje definice: dělení je obrácený výkon k násobení.

Na příkladech je třeba ukázat, že má-li dělenec tolik cifer jako dělitel nebo je-li v dělenci o jednu cifru více, avšak první cifra dělence je menší než první cifra dělitele, pak podíl je jednociferné číslo.[6])

IV. Nežli se přejde k případu dělení libovolných několikaciferných čísel, je vhodné vzít několik příkladů na určení počtu cifer v podílu. Na příklad, jestliže dělíme šesticiferné číslo dvojciferným, bude podíl míti 4 nebo 5 cifer; při dělení pěticiferného čísla dvojciferným odpověď bude číslo čtyřciferné nebo trojciferné; při dělení šesticiferného čísla čtyřciferným můžeme dostat dvojciferné nebo trojciferné číslo atd. Obecně při dělení n-ciferného čísla m-ciferným jako podíl vyjde $(n - m)$-ciferné nebo $(n - m + 1)$-ciferné číslo. Vysvětlování se začne zjištěním, ze kterých řádů dělence se při dělení dostane první cifra podílu a potom se vyloží, jak se dostanou postupně následující cifry podílu.

V. Dále ještě, nežli se přejde k dělení libovolných několikaciferných čísel, je užitečné probírat případ dělení několikaciferného čísla dvojciferným číslem; při tom je třeba žákům připomenout, jak se

[6]) Abychom poznali, jaký podíl dostaneme, zda jednociferný či víceciferný, znásobíme ústně dělitele deseti a výsledek porovnáme s dělencem.

hledají cifry v podílu. Někdy se navrhují rozmanité methody pro ulehčení určování cifer podílu. V praxi se osvědčily následující methody:

1. Při dělení 7371 : 13 získáme první cifru podílu tak, že 73 dělíme zaokrouhleným dělitelem 10 (dělitele při zaokrouhlení zmenšíme, protože jeho jednotková cifra 3 je menší než 5).

2. Při dělení 10 206 : 18, ve kterém při určování první cifry podílu má se 102 dělit číslem 18, dělíme 102 : 20 a tak najdeme cifru 5 podílu (dělitele při zaokrouhlení zvětšíme, protože jeho jednotková cifra 8 je větší než 5 a číslo 18 je blíže číslu 20 nežli číslu 10).

3. V některých případech při vyloženém způsobu dojdeme k cifře podílu, která se liší od správné cifry. To nastane tehdy, jestliže druhá cifra dělitele je 5 nebo blízká číslu 5 (ať už zaokrouhlujeme dolů či nahoru), dále tehdy, jestliže v podílu za určovanou cifrou následuje cifra 9 a pod. Nicméně nenavrhujeme užívání nějaké jiné methody, než která byla výše udána (zájemce o jiné methody odkazujeme na příslušnou literaturu)[7]) a navrhujeme pouze, aby se v takových případech provedla kontrola odhadnuté cifry podílu. Na příklad v případě 475 : 85 i dělením 47 : 8 (zaokrouhleno dolů) i dělením 47 : 9 (zaokrouhleno nahoru) dostaneme pro podíl cifru 5; ale v případě jako 17 927 : 256 odhad 17 : 2 dá cifru 8, odhad 17 : 3 dá cifru 5 — tu zkoušíme, zda vyhovuje cifra 6 nebo 7.

4. Při uvedených methodách žáci úsudkem odhadují počet cifer podílu a tím kontrolují svou práci a řidčeji se dopustí často se vyskytující chyby — vynechání cifry v podílu, zejména když běží o cifru 0 uprostřed nebo na konci podílu. Způsobu uvedeného pro stanovení první cifry podílu užívá se ovšem také ke stanovení dalších cifer. Je třeba usilovat o to, aby se u žáků vypěstoval skoro mechanický návyk — ve velmi mnoha případech hned napsat správnou cifru podílu. K tomu poslouží ovšem v prvé řadě spolehlivé ovládání malé násobilky, kromě toho však neškodí cvičit žáky v násobilce dvojciferných čísel dvěma, třemi a pěti, jako třeba 26 . 5; 28 . 5; 35 . 5 atd. nebo cvičit jednotlivé případy součinů dvou dvojciferných čísel jako na příklad případy 16 . 16 = 256; 15 . 15 = 225; 14 . 14 = 196; 13 . 13 = 169 atd. Utvrzování takových případů násobení, a také obráceně dělení

[7]) Šochor-Trockij, „Metodika arifmetiki", Moskva-Leningrad, 1935.

jako 111 : 37; 136 : 8 atd. je věcí několika minut a provádí se v hodině při cvičení v počítání zpaměti.

VI. Obecný případ. Když si žáci všecky jednotlivé detaily výkonu dělení řádně uvědomili a osvojili, přejde se bez nesnází k odůvodnění pravidla postupného určování cifer podílu při dělení libovolných několikaciferných čísel a k utvrzení odpovídající zručnosti v provádění výkonu.

Počet cvičení v tomto opakovacím kurse závisí výhradně na připravenosti žáků z dřívějška. Mezi cvičení je účelné vsunout řešení několika příkladů na výkony s mnohojmennými čísly.

VII. Nesnadné případy dělení. 1. Zvláštní pozornost sluší věnovati těm případům dělení, ve kterých se vyskytuje jednou nebo několikrát cifra nula v podílu.

Učitel si sám sestaví takové příklady. Na př. chceme, aby vyšel podíl 7003, při kterémkoli děliteli, třeba při děliteli 256; učitel si nejdříve vypočte součin 7003 . 256, dostane 1 792 768 a uloží žákům provésti dělení 1 792 768 : 256 atd.

Při provádění dělení si všímáme předně toho, aby žáci předem určovali počet cifer podílu a na konec se přesvědčili, že jejich odpověď souhlasí s dříve provedeným určením; za druhé toho, aby žáci v případě, že se jim vyskytne okamžitý dělenec menší než dělitel, nezapoměli zapsat do podílu cifru 0 dříve, nežli připíší další cifru dělitele.

2. Rovněž zvláštní cvičení se ukládají také na případy, ve kterých se objeví nula na posledním místě podílu, na příklad 5960 : 4 = 1490. Aby se žákům neztratila nula v podíle, k tomu opět slouží 1. vypěstování návyku předběžného určování počtu cifer podílu; 2. kontrola možnosti obdrženého podílu, na příklad, v udaném příkladě odhad 5000 : 4 ukazuje, že podíl je větší než tisíc, což souhlasí s odpovědí. 3. pravidelné zapisování cifry podílu před každým „připsáním“ cifry z dělence.

Ježto zapomínání na cifru 0 v podílu souvisí s nedostatečnou pozorností, někteří autoři navrhují takový způsob zápisu při dělení, při kterém se podíl píše nad dělitele tak, že poslední cifra podílu mechanicky vyjde nad poslední cifrou dělence. Při dělení 12 992 : 32 = 406 udává se zápis

$$\begin{array}{r|l} 406 & \\ \hline 12\,992 & \\ \hline 192 & 32. \\ \hline 0 & \end{array}$$

V Anglii se dosud užívá takového zápisu dělení, že dělitel se píše na levo a podíl na pravo od dělence:

$$\begin{array}{r|r|l} 32 & 12\,992 & \\ \cline{2-2} & 192 & 406. \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

Těchto způsobů se u nás neužívá.

Nemá se dovolovat, aby při dělení beze zbytku žáci místo zbytku nula zapisovali čárečky.

3. Je třeba výslovně vytknout následující případy a žáky cvičit: 1. dělení číslem 1 a 2. dělení nuly číslem. Při dělení číslem 1 dělitel je abstraktní číslo, ale co to znamená rozdělit na př. 5 na jednu část? V tomto případě dělitele 1 chápeme jako násobitele, kterým je třeba znásobit podíl, aby vznikl dělenec. V případě „měření" smysl dělitele 1 je jasný.

V následujících dvou případech podíl se rovná dělenci:

$$a : 1 = a; \qquad 0 : a = 0;$$

v druhém případě za podmínky, že a se nerovná nule.

Je obecně známo, jaké potíže působí tyto případy žákům. I ve vyšších třídách, když se vyskytne dělení $2 : 1$, žáci nejednou píší podíl 1 a zbytek 1. Dělení jedničky číslem je v oboru celých čísel nemožné a probírá se v oddílu „Zlomky".

Případ dělení nulou je vyloučen vůbec.[8])

[8]) Nemožnost dělení nulou je důsledkem takové vlastnosti čísel, která zůstává zachována i při zobecňování na širší obory číselné. Jelikož zákaz dělení nulou jest universální, t. j. podržuje svoji platnost i při dalším rozšiřování pojmu čísla, musí býti vysloven a neustále připomínán v nejkategoričtějším tvaru. V celém průběhu vyučování matematice je nezbytné pečlivě vylučovat jakýkoli zápis, který by měl 0 ve jmenovateli. Tak když se mluví o tom, že rovnice $0 . x = 1$ nemá řešení, je nutné odůvodňovat tento závěr tím, že součin $0 . x$ je při každém x roven 0 a tudíž při žádném x nemůže býti roven 1. Nesmí se tedy usuzovat takto: „z rovnice $0 . x = 1$ plyne $x = \frac{1}{0}$ a ježto výraz $\frac{1}{0}$ nemá smyslu, daná rovnice nemá řešení"; při takovém usuzování napřed dělíme nulou a potom konstatujeme, že obdržený výraz nemá smyslu; kdežto náš

§ 6. Dělení se zbytkem

Jako dobrý přechod k případům dělení se zbytkem mohou posloužiti případy dělení, které jsme výše nerozbírali, totiž ty případy, kdy poslední cifra dělence, dělitele nebo obou je nula.

I. Poslední cifra dělence nebo několik posledních cifer je rovno nule, na příklad 37 800 : 42. Často žáci se vyjadřují takto: „Dělíme 378 set číslem 42, potom ve výsledku připíšeme dvě nuly“ [v podstatě se tu užívá vlastnosti násobení a dělení $a \,.\, 100 : b = (a : b) \,.\, 100$]. V daném případě tento postup je možný, ale jestliže žákům uložíme, aby podle jimi vyjádřeného pravidla provedli na příklad dělení 35 700 : 42, tu při dělení 357 : 42 musí říci, že je beze zbytku nemožné, a skutečně odpověď při dělení 35 700 : 42 je přesně 850:

$$
\begin{array}{l}
35700 : 42 = 850. \\
\underline{336} \\
\underline{210} \\
0
\end{array}
$$

Proto i zde i níže doporučujeme v udaném případě a v obdobných případech nezatrhovat žádné nuly a nepřenášet je do podílu do té doby, dokud není jistoty, že dělení významné části dělence významnou částí dělitele dá se provésti beze zbytku.

II. Dělení několikaciferného čísla čísly 10, 100, 1000, desítkami 20, 30, 40, ..., sty 200, 300, ... můžeme užívat především k tomu, aby žáci pohledem na dělitele na ráz poznali, zda je vůbec možno položit otázku dělení daného čísla (beze zbytku) takovým dělitelem či ne.

Na základě asociativní vlastnosti provádíme dělení podle vzoru $a : 30 = a : (10 \,.\, 3) = (a : 10) : 3$. Na příklad v případě 53 600 : 20 můžeme zkusit dělit, protože dělitel je násobek čísla 10, v případě 4783 : 30 ani nezkoušíme dělit, protože dělitel není násobek čísla 10.

Výrazu „násobek“ žáci zde ještě neužívají. Užitečné je procvičit několik příkladů, řešených zpaměti nebo polopísemně, na provádění uvedeného případu dělení, když dělení vychází beze zbytku, na příklad

úkol je naopak ten, naučit žáky, aby **nikdy ani nepodnikali pokus dělit nulou.** (A. Ja. Chinčin, „Osnovnyje ponjatija i opredelenija v matematike.)“

$$5400 : 30 = 5400 : 10 : 3 = 540 : 3 = 180,$$
$$6800 : 400 = 6800 : 100 : 4 = 68 : 4 = 17.$$

Před vyučováním znaků dělitelnosti nemá se takových příkladů dávat mnoho. Samozřejmě takové příklady je nutné velmi pečlivě probírat, a při jejich řešení přece jen nejlepší methodou, dávající nejmenší počet chyb, zůstává přímé dělení, jestliže není jistoty (což je případ řídký), že významná část dělence je násobek významné části dělitele. Znovu a znovu se to může žákům vykládat na příkladech jako je 7300 : 400.

Provedeme-li dělení přímo, vyjde odpověď 18 a zbytek 100; provedeme-li dělení tak, že dělíme nejprve stem a potom čtyřmi, vyjde sice správný podíl 18, ale zbytek vychází 1 (podrobněji o tom viz níže). Uvedeme, že 65% námi zkoumaných žáků 5. třídy udalo nesprávnou odpověď v případě dělení 5690 : 330.

Často se odůvodňuje oddělování téhož počtu nul v dělenci i v děliteli tou vlastností podílu, že se nemění, jestliže dělence i dělitele dělíme týmž číslem; my tuto otázku rozbíráme níže, ale, opakujeme, to lze dopustit pouze při jistotě, že významná část dělence je násobkem významné části dělitele. Proto není vhodné pěstovat u žáků návyk mechanického oddělování nul v zapsaném dělenci a děliteli. Toto myšlené odvrhování nul je užitečné pro orientační určování cifer podílu. Na příklad, žádá se 149 100 : 7100; určíme-li, kolik vyjde při dělení 1491 : 71, můžeme říci, že v odpovědi budou desítky a jednotky, a dokonce můžeme říci na příklad, že tam budou 2 desítky.

Po všech takových cvičeních žáci řeší příklady:

1. tvaru $8130 : 100 \doteq 81$, při čemž podíl a zbytek se píše na ráz,
   30 zb.

když se napřed (ústně) usoudilo, kolik set je v daném dělenci.

Řeší se úlohy přímým dělením:

$$\begin{array}{l} 53400 : 700 \doteq 76 \\ \underline{4900} \\ \;\;4400 \\ \;\;\underline{4200} \\ \;\;\;\;200 \text{ zb.} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 7210 : 30 \doteq 240 \\ \underline{121} \\ \;\;10 \text{ zb.} \end{array}$$

nebo s myšleným odvržením nul:

$$\begin{array}{l} 32500 : 2300 \doteq 14. \\ \underline{95} \\ 300 \text{ zb.} \end{array}$$

Uvedeme,[9]) že 1. někdy žáci oddělují zbytek od podílu desetinnou čárkou a v případě dělení

$$\begin{array}{l} 91234 : 76 = 1200 \\ \underline{76} \\ \underline{152} \\ 34 \text{ zb.} \end{array}$$

udávají nesprávnou odpověď 12,34, nebo 2. při dělení 54 600 : 3400 píší 546 : 34 s podílem 16 a zbytkem 2 místo zbytku 200.

Byly případy odpovědi „4790 : 330 děliti nelze“ a udaný příklad byl žáky přeškrtnut.

Ústní cvičení, které lze žákům předložit při provádění dělení libovolných několikaciferných čísel se zbytkem, může pozůstávat v následujícím: určit, jaký je největší možný počet cifer, který se může vyskytnout ve zbytku. Na příklad, žáci mají vědět, že v příkladě 689 356 : 472 zbytek může obsahovat sta, desítky a jednotky nebo pouze desítky a jednotky nebo pouze jednotky, ale nemůže obsahovat na př. tisíce atd. Podobně při dělení číslem 96 zbytek může obsahovat desítky a jednotky nebo pouze jednotky, ale nemůže obsahovat na příklad sta. Když zbytek chybně vyjde větší než dělitel, žáci obyčejně dělí dále. Jestliže si žák navykne na předběžné určování počtu cifer hledaného podílu, vyhne se této chybě.

Poznámky. 1. Užitečné je klásti žákům otázky: jaký bude celý podíl při dělení 7 : 12? jaký bude zbytek? Daleko ne ve všech případech dají žáci správnou odpověď, totiž že podíl bude 0 a zbytek 7.

2. Při dělení čísla a číslem b rozeznáváme dva případy:

a) $a : b = q$; $a = b \cdot q$, kde q je podíl;

[9]) Proto, aby si uvedené nesnáze žáků učitel všímal při své práci.

b) v případě, že zůstane zbytek $r < b$

$$a = bq + r \text{ nebo } a - r = bq.$$

3. Je třeba dávat cvičení na určení dělence, známe-li dělitele, podíl a zbytek. Úlohy můžeme zpestřit konkretním obsahem, na příklad: jaké číslo dá při dělení sedmi podíl 6 a zbytek 5? kolik sešitů se musí přinést do třídy, aby každý z přítomných žáků dostal po sedmi sešitech a aby ještě zbyly 3 sešity na skupinové lekce? atd.

4. Vyjmenovat zbytky, které mohou vzniknout při dělení číslem 9 nebo 7 nebo 13 atd.

5. Je známo, že při dělení 80 : 6 vyjde podíl 13 a zbytek 2. Kolik jednotek je třeba ubrat od dělence (80), aby při témž děliteli vyšel týž podíl, ale aby dělení vyšlo beze zbytku?

6. Určit dělence a napsat výraz pro dělence. Jak se vypočte dělenec, známe-li dělitele, podíl a zbytek, na př. v případech: a) dělitel roven 11, podíl 8, b) dělitel 11, podíl 8, zbytek 5. Přesvědčit se o správnosti výsledku.

Odpovědi: a) $88 = 11 \,.\, 8$; b) $93 = 11 \,.\, 8 + 5$ nebo $93 - 5 = 11 \,.\, 8$.

7. Z rozboru čtyř výkonů s přirozenými čísly je jasné, že provádění přímých výkonů (sčítání a násobení) s přirozenými čísly je vždycky možné a že výsledek výkonu je vždy přirozené číslo: provádění obrácených výkonů (odčítání a dělení) je v oboru přirozených čísel možné pouze za známých podmínek (odčítání $a - b$, jestliže $a > b$, dělení $a : b$, jestliže a je násobek b). V oboru přirozených čísel není čísla, které by dávalo výsledek v případech $5 - 5$; $5 - 7$; $5 : 7$ (v dalším se pojem čísla rozšiřuje zavedením nuly, čísel lomených, záporných ...).

8. Dělení nulou je vyloučeno.

§ 7. Změna podílu

Změna podílu při změně dělence a dělitele představuje jeden z nejsložitějších bodů aritmetické osnovy; již při rozboru změny součinu při současné změně dělence i dělitele bylo poukázáno na to, že je případ, ve kterém bez znalosti zlomků nemůže otázka býti vyřešena. To se vztahuje ještě větší měrou na otázku změny podílu při změně daných čísel. Otázka po změně podílu je spojena s otázkou, o jaký případ dělení běží — se zbytkem či beze zbytku.

Vzhledem k řečenému otázka změny podílu nemůže býti v 5. třídě v celém rozsahu probrána. Slovní úlohy na ilustraci těchto závislostí jsou rozmanité, na příklad, otázka změny pracovní výkonnosti při změně celkové výroby a témž počtu dělnictva, otázky po změně ceny za jednotku při změně celkové ceny určitého kvanta výrobku atd.

První otázka

Změna podílu způsobená zvětšením nebo zmenšením dělence několikrát.

Udáme, jako dříve, plán opakování, jestliže učitel je shledá nutným. Budiž podle číselných údajů slovní úlohy sestavena

Tabulka I.

1. 120 : 3 = 40	3. 480 : 3 = 160
2. 240 : 3 = 80	4. 960 : 3 = 320.

Tabulku můžeme prodloužit. Od žáků žádáme, aby srovnávali dělence, dělitele a podíly v případech 2. a 1., 3. a 1., 4. a 1. Žáci se často pokoušejí učinit závěr o dvoj-, čtyř-, osmi-násobném zvětšení podílu při příslušném zvětšení dělence. Rovněž při porovnávání napsaných řádků tabulky v obráceném pořádku (naznačit šipkou ukazující vzhůru) žák se pokouší učinit závěr o zmenšení podílu způsobeném zmenšením dělence několikrát. Je nutné říci, že taková vyvozování pravidla se udávají v učebnicích. Učitel má zaujmouti velmi zdrženlivé stanovisko k takovým ukvapeným úsudkům založeným na pozorování dvou nebo tří zvláštních případů: především, k rozboru případu zvětšení podílu způsobeného zvětšením dělence mohly býti pojaty do tabulky 1 také řádky 360 : 3, 600 : 3 atd. A skutečně, jestliže uložíme žákům, aby samostatně psali takové řádky, ve kterých by dělenec v každém následujícím řádku byl několikrát větší než dělenec v 1. řádku, napíší žáci obyčejně toto:

Tabulka 2.

1. 120 : 3 = 40	4. 480 : 3 = 160
2. 240 : 3 = 80	5. 600 : 3 = 200
3. 360 : 3 = 120	6. 720 : 3 = 240.

Takové tabulky nemůžeme užít k obrácené úvaze (zdola nahoru) o změně podílu při dělencích několikrát menších nežli původní dělenec. Neboť jak máme říci, neznáme-li lomená čísla, kolikrát nebo kterak se změnil podíl při přechodu od 6. k 5. atd.?

Vzhledem k uvedenému učitel musí sám diktovat čísla pro tabulku 1 nebo, jestliže si žáci napsali tabulku 2, tu pro srovnávání výsledků při zmenšení dělence několikrát musí se brát jen takové páry řádků, které ukazují změnu dělence (celé číslo)-krát a na to žáky upozornit, t. j. srovnávat řádek 6. se řádky 3. a 2.; potom 5. s 1. nebo 3. s 1. atd. Za druhé má učitel žákům předložit k rozboru i další tabulku 3, ve které každý následující dělenec také je 2krát, 4krát, 8krát větší než první, kde však nicméně nelze tvrdit, že by se podíl zvětšil (zmenšil) tolikrát, kolikrát se zvětší (zmenší) dělenec.

Tabulka 3.

		podíl	zbytek
1.	130 : 30	4	10
2.	260 : 30	8	20
3.	520 : 30	17	10
4.	1040 : 30	34	20 atd.

Tento rozbor vede k dohodě, že změna podílu způsobená změnou dělence bude zkoumána pouze v případě dělení beze zbytku.

Níže uvedená tabulka 4 ještě jednou ukazuje, jaká omezení jsou nevyhnutelná při odvozování pravidla změny podílu při změně dělence několikrát.

Tabulka 4.

1. 960 : 3 = 320
2. 480 : 3 = 160 (dělenec je dvakrát menší než 960)
3. 320 : 3; podíl 106 a zbytek 2
(dělenec je třikrát menší než 960).

Zde můžeme zabránit nesprávnému závěru, jestliže předem zkoumáme charakter dělení při jednotlivých hodnotách dělence, t. j. víme, zda v každém případě dělení vyjde beze zbytku či se zbytkem.

Tedy v učebnicích uváděné formulace pravidla pro změnu podílu způsobenou zvětšením a zmenšením dělence několikrát jsou správná pouze v těch případech, kdy daný dělenec se dá daným dělitelem dělit beze zbytku. Kromě toho máme v případě zmenšení dělence několikrát další omezení, že také pozměněný dělenec se dá dělit beze zbytku.

Proto by bylo správné udávat pravidlo v tomto znění:

1. jestliže dělenec se zvětší několikrát, také podíl se zvětší stejněkrát,

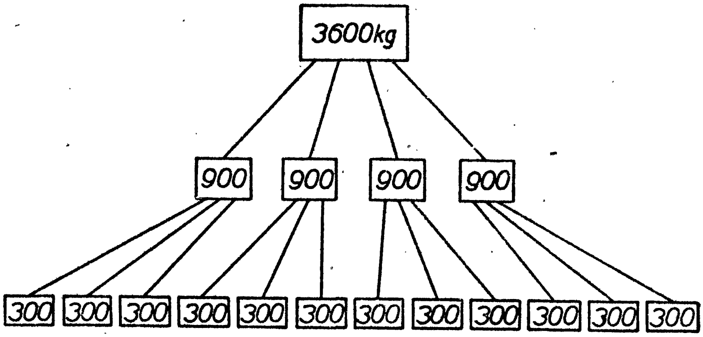
2. jestliže dělenec se zmenší několikrát, také podíl se zmenší stejněkrát v těch případech, ve kterých také pozměněného dělence můžeme dělit beze zbytku.

Druhá otázka

Změna podílu způsobená změnou dělitele rovněž vyžaduje téhož výše uvedeného omezení, že totiž dá-li se původní dělení provésti beze zbytku a platí-li totéž i pro dělení zvětšeným dělitelem, jest nový podíl tolikrát menší než původní podíl, kolikrát nový dělitel je větší než původní dělitel. Vysvětlení v případě „rozdělování" je prosté, totiž: jestliže počet částí, na které máme rozdělit dané číslo, zvětší se dvakrát, třikrát atd., bude každá část stejněkrát menší. Příklady takové závislosti dají úlohy slovní a také dělení sestavená v tabulky, jaké jsme tu měli výše; zkoumajíce tabulku v obráceném pořádku, můžeme uvažovat o změně podílu při zmenšení dělitele několikrát, ale v tomto posledním případě není nutné zavádět výše uvedené omezení, protože i tak je jasné, že jestliže se dělení dá provésti beze zbytku, třeba při děliteli 15, vyjde se stejným dělencem dělení beze zbytku i při děliteli 5 nebo 3.

F. Jegorov navrhuje pro objasnění změny podílu způsobené změnou dělitele řešit přiměřenou slovní úlohu a názorně ji ilustrovat.

Na příklad: 3600 jablek je rozděleno do 4 beden, a potom jablka z každé bedny jsou rozdělena do tří košů. V každém koši je třikrát méně jablek než v každé bedně (obr. 12).



Obr. 12.

Řešení: 3600 : 4

3600 : (4 . 3);

a obráceně, jestliže jablka z 12 košů přemístíme do 4 beden (třikrát zmenšíme dělitele), bude podíl — počet jablek — v každém případě v témž poměru menší.

Takovými příklady se ilustruje také pravidlo o dělení čísla součinem dvou (nebo několika) čísel a pravidlo o dělení podílem dvou čísel: $a : (b \,.\, c) = (a : b) : c$, $a : (b : c) = (a : b) \,.\, c$. Zde můžeme zopakovati vysvětlění některých zvláštních případů dělení, které jsme probírali výše, jako na př.

$$126\,000 : 3000 = 126\,000 : (3 \,.\, 1000) = (126\,000 : 1000) : 3 = 126 : 3 = 42$$ a pod.

Výběr úloh na ilustraci zkoumané závislosti je rovněž veliký: otázky rozdělování, jak uvedeno výše, dále změna pracovní výkonnosti při změně počtu hodin, nebo změna počtu pracovních dní při nezměněné celkové výrobě, otázky ceny zboží a pod.

Téhož druhu slovní úlohy mohou se probírati také při úlohách na „měření“, ale v tomto případě u výše uvedené úlohy o jablkách hledaná veličina, jejíž změna se sleduje, bude počet košů (beden, vagonů), do kterých se rozdělují objekty při zachování jejich celkového počtu, ale při změně kapacity táry; u druhé úlohy můžeme sledovat změnu pracovní doby při určitém rozsahu provedené práce a při různé pracovní výkonnosti atd.

Třetí otázka

Změna podílu při současné změně dělence i dělitele působí žákům zase ty potíže, o jakých jsme už mluvili při rozboru otázky po změně součinu. Není vhodné věnovat mnoho času této otázce. Před znalostí lomených čísel ani není možné úplné probrání.

Případ stálosti hodnoty podílu při současné změně dělence i dělitele probírá se v této souvislosti a užívá se ho k objasnění postupu při dělení: $462\,000 : 2200 = 4620 : 22 = 210$ (v případě dělení beze zbytku).

Čtvrtá otázka

Nenavrhujeme, aby se na tomto stupni probírala změna podílu při změně dělence a dělitele o určité číslo, je však užitečné prokázat, byť i jen na příkladech, že v tomto případě není žákům známé závislosti.

Na příklad $50 : 25 = 2$; $53 : 25 = (50 + 3) : 25$ dá týž podíl 2 a zbytek 3; $50 : 28$ dá podíl 1 a zbytek 22; $53 : 28$ rovněž podíl 1 a zbytek 25 atd.

Opakování čtyř výkonů s celými čísly se doprovází řešením numerických i slovních úloh.

Změna zbytku. Se žáky 5. třídy se neprohlubuje otázka po změně zbytku při změnách dělence a dělitele. Uvedeme nicméně tři možné případy. Budiž a dělenec, b dělitel, q podíl, r zbytek, tedy $a = bq + r$, kde $r < b$.

1. Dělence i dělitele znásobíme (nebo dělíme, je-li to možné beze zbytku) týmž číslem m; podle pravidla o násobení rozdílu $(a - bq) \cdot m = rm$ máme $am = (bm)\,q + rm$, t. j. podíl q se nemění a zbytek se zvětší (nebo zmenší) m-krát.

2. Dělence znásobíme (nebo dělíme) číslem m; užívajíce pravidla pro násobení součtu a součinu, máme: $am = (bq + r)\,m$; $am = b(qm) + rm$, t. j. podíl i zbytek se zvětší (zmenší) m-krát.

3. Dělitele znásobíme (dělíme) číslem m; tu jest $a = (bm)\dfrac{q}{m} + r$, t. j. podíl se zmenší (zvětší) m-krát a zbytek se nezmění.

Příklady:

	Dělenec	Dělitel	Podíl	Zbytek
1.	50	6	8	2
	100	12	8	4
	150	18	8	6
	200	24	8	8
2.	64	20	3	4
	128	20	6	8
	192	20	9	12
3.	60	7	8	4
	60	14	4	4
	60	28	2	4

§ 8. Pořádek výkonů při provádění několika výkonů. Závorky

Při provádění několika výkonů výsledek závisí na daných číslech a na pořádku výkonů. Aby se předešlo nedorozumění, můžeme uzavřít do malých závorek ta čísla, s kterými máme napřed provádět výkony, potom vyznačit většími závorkami ta čísla i ty dříve vzniklé výsledky, s kterými máme provádět další výkony atd. (kap. IV, § 4). Velký počet závorek není žádoucí; proto se zavádějí dohody (uváděné v učebnici aritmetiky), v jakém pořádku jest prováděti výkony při výraze zapsaném bez závorek.[10]) Této úmluvy učitel se musí držet při své práci.

Výkony sčítání a odčítání nazývají se výkony prvního stupně; výkony násobení a dělení nazývají se výkony druhého stupně.

1. Jestliže výraz, jehož hodnota se má počítat, je zapsán bez závorek a obsahuje pouze výkony téhož stupně, jest prováděti ty výkony v takovém pořádku, jak jsou za sebou zapsány.

2. Jestliže výraz, zapsaný bez závorek, obsahuje výkony různých stupňů, jest prováděti výkony vyššího stupně před výkony nižšího stupně. Na příklad $a \,.\, b + c$ znamená totéž jako $(a \,.\, b) + c$. Má-li se napřed počítat součet, je třeba vyznačit žádaný pořádek výkonů

[10]) Kiselëv, „Arifmetika“, vyd. z r. 1938, § 80, str. 46.

závorkou: $a \,.\, (b + c)$; rovněž $a \,.\, b + c \,.\, d$ znamená $(a \,.\, b) + (c \,.\, d)$ a jiný pořádek výkonů je požadován u výrazu $a \,.\, (b + c) \,.\, d$.

Je nutno říci, že uvedeného pořádku provádění výkonů ve výraze zapsaném bez závorek zdaleka se nedrželi všichni autoři učebnic a sbírek úloh z aritmetiky. To vneslo před zavedením stabilních učebnic mnoho nedorozumění do školní praxe, jejichž důsledky dodnes nejsou vymýceny. Mimo to, ve mnoha sbírkách úloh pro obecné školy píší se závorky v případě $(a \,.\, b) + (c \,.\, d)$, což rovněž vneslo nesoulad do vyučování.

Výše formulované podmínky o pořádku výkonů, přijaté v naší škole, jsou velmi účelné dohody dávající žákům jediné prosté pravidlo pro pořádek provádění výkonů všech tří stupňů.[11]) Je známo, že jednotliví autoři připouštěli jiný pořádek výkonů, dávajíce přední místo výkonu násobení, na příklad $a : b \,.\, c$ v číselném příkladě $16 : 4 \,.\, 2$ podle hořejší dohody 1. má znamenati 8 a ne 2. Zastánci jiné dohody (která dává odpověď 2,) vycházeli z úvahy, že při zápise písmeny $a : bc$ provádí se nejprve výkon násobení bc. Ale při zápise písmeny je to jasné, neboť zápis $a : bc = \frac{a}{bc}$ (zlomková čára zastupuje závorku) znamená dělení čísla a součinem bc, t. j. znamená $a : (b \,.\, c)$.[12])

Učitel musí se držet přijatých dohod proto, aby se nedopustil vznik věcných neshod mezi různými třídami; je nemožné, aby žáci různých tříd udávali pro jednu a touž úlohu různé odpovědi. Ve výše uvedeném číselném příkladě jest považovati za správnou odpověď 8.

Provedená zkouška ukázala, že v jednotlivých třídách a školách většina žáků při úloze napsat „k číslu 50 má se přičíst součin čísel 9 a 10“ psala $50 + (9 \,.\, 10)$ se závorkou. To není chyba, ale závorka není nutná. Příklad s celými čísly $320 + 64 : 8$ žáci většinou pojali ve smyslu $(320 + 64) : 8$ a udali odpověď 48 místo 328; příklad $4 \,.\, 17 - 8 : 4$ pojali jako $(4 \,.\, 17 - 8) : 4$ a udali odpověď 15 místo 66.

---

11) Tento pořádek výkonů byl přijat i v předrevolučních učebnicích algebry (Davydov, Malinin a Burenin) a také v učebnicích západní Evropy.

12) „Máme za to, že tato námitka je plodem nedorozumění. Neboť každému je jasné, že při dělení $6a^2b : 3ab$ dělíme jednočlen jednočlenem, t. j. součin součinem.

A když se klade otázka po číselné hodnotě výše uvedeného výrazu po dosazení třeba $a = 5$, $b = 4$, znamená to pouze, že se žádá najít při daném číselném významu písmen velikost dělence (600), dělitele (60) a potom provést žádané dělení. Tedy po dosazení $6a^2b : 3ab = (6 \,.\, 5^2 \,.\, 4) : (3 \,.\, 5 \,.\, 4) = 600 : 60 = 10.$“ (Matematika ve škole, 1941, č. 3.)

Příklad $(43 - 31) : 3 + 42 : 6$ žáci rovněž často řeší nesprávně, totiž jako $[(43 - 31) : 3 + 42] : 6$ atd. Táž chyba se opakovala při obdobných příkladech s desetinnými i obyčejnými zlomky. Jinými slovy, u žáků byl shledán nesprávný návyk, a prakticky výsledek jejich práce po probrání výkonů jak s celými tak i lomenými čísly stal se bezcenný.

Cvičení. Je nutné velmi pečlivě prováděti se žáky speciální cvičení.

1. Psát podle diktátu součet, rozdíl, součin a podíl na příklad čísel 45 a 80. Žáci si musí vštípit v mysl, že zápis $45 + 80$ (nebo $45 . 80$) znamená současně „výkon sčítání" (nebo výkon násobení) i výsledek výkonu, t. j. „součet" (nebo „součin").

2. Číst zápis výrazu obsahujícího dva výkony, na příklad $85 - 6 . 3$ čteme takto: „od čísla 85 odečteme součin čísel 6 a 3" nebo „6 násobíme třemi a vzniklý součin odečteme od 85". Potom číst zapsané výrazy se 3, 4 výkony atd., na příklad $36 : 2 + 4 . 7$; $80 - 7 . 3 + 6 . 4$ atd.

3. Výrazy téhož druhu psát podle diktátu v témž pořádku co do vzrůstání: a) počtu výkonů, b) velikosti čísel.

Čísti výraz je nutno pomalu, zřetelně, s uvedením všech jednotlivých výkonů v takovém pořádku, v jakém se výkony mají prováděti.

4. U napsaného výrazu vyložit, jaké výkony se mají provádět a v jakém pořádku.

Pro čitelnost práce a pro ulehčení příštích hodin algebry je užitečné psát značky „+" a „—" tak, aby se neslévaly se zapsanými čísly. Musí se psát trochu dál od cifer.

5. Jak bylo již řečeno, závorky naznačují, které výkony a s kterými čísly mají se nejdříve provádět. Na zapisování a čtení výrazů obsahujících závorky jsou nutná zvláštní cvičení; tedy je třeba dávat cvičení na případ, kdy se žádá: a) součet nebo rozdíl dvou čísel znásobit (nebo dělit) číslem a obráceně, číslo znásobit nebo dělit součtem (rozdílem) čísel:

$$(a \pm b) . c; \quad a . (b \pm c);$$

potom se přejde ke složitějším výrazům se dvěma závorkami, jako na příklad:

$$(a + b) . (c + d) \quad \text{nebo} \quad (a + b) . c + (m + n) . d \text{ atd.}$$

Čtou se zapsané výrazy: $(30 - 12) . 5 - 6 . 8$; $(420 + 130 : 11 + 24) . 15$ atd. První výraz se přečte: „Rozdíl čísel 30 a 12 máme znásobit pěti a od tohoto součinu odečíst součin čísel 6 a 8“.

Poznámky. 1. Zapisování prováděných výkonů se ve všech cvičeních musí díti důsledně a přesně, při čemž výkony, pro které je to možné, mají se prováděti ústně nebo polopísemně, na příklad:

$$(256 + 104) : 4 + 1800 : 75 = 90 + 24 = 114.$$

Zpaměti se provede $256 + 104 = 360$; $360 : 4 = 90$; do řádku se píše výpočet $1800 : 75 = 24$.

2. Veškerá uvedená cvičení mají se provádět nejprve při probírání výkonů s celými čísly, potom znovu s čísly lomenými (obyčejnými i desetinnými).

3. Závorky se píší proto, aby se naznačil žádaný pořádek výkonů a mění tedy pořádek, ve kterém by bylo provádět výkony, kdyby závorek nebylo. Tak na příklad: zdálo by se, že ve výraze $(a + b) + (c + d)$ jsou závorky zbytečné, ale přece tu jsou. V tomto případě závorka se píše proto, aby se vyznačil určitý způsob výpočtu. Rovněž v případě $a + (b + c + d) = (a + b + c) + d$ atd. závorky se píší proto, aby se vyjádřil určitý zákon.

V tomto případě my zase uvádíme příklady s písmeny, ale žákům se mají dávat číselné příklady.

4. Užitečné je provést cvičení na porovnávání výrazů, ve kterých se vyskytují táž čísla a výrazy se liší pouze pořádkem výkonů:

$$38 - 3 . 4 + 10 = 36; \quad (38 - 3) . 4 + 10 = 150;$$
$$(38 - 3) . (4 + 10) = 490.$$

5. Ve výraze se mohou vyskytovat různé tvary závorek: okrouhlé, lomené a složené. Mezi jiným je třeba dbáti na to, aby žáci psali složené závorky graficky správně. V takových případech se provádějí nejdříve výkony naznačené vnitřními závorkami, na příklad, má-li se provést:

$$3568 - \{987 - [412 - (105 + 220)]\} = 2668;$$

nejdříve se provede sčítání 105 + 220 = 325,

potom 412 — 325 = 87,

dále 987 — 87 = 900,

posléze 3568 — 900 = 2668.

Je užitečné nadiktovat žákům výraz podobný zde uvedenému a žádat, aby sami bez návodu psali závorky. Ve většině případů napíší: 3568 — (987 — (412 — (105 + 220). Na takovém příkladě se žáci přesvědčí o účelnosti zavedení různých typů závorek pro lepší jasnost zápisu.

6. Lepší třídy mohou zapisovat výrazy s písmeny, čísti je a potom počítat jejich číselnou hodnotu při předepsaných číselných významech písmen. Pořádek cvičení jako dříve: $a \pm b$; $a \,.\, b$; $a : b$; $a + b \,.\, c$; $a \pm b : c$; $a \,.\, b \pm c$; $a\,(b \pm d)$; $(a \pm b)\,c \pm m : n$ atd.

Aby se předešlo nedorozumění, opakujeme, že veškerá uvedená cvičení s několika výkony a zejména cvičení se závorkami nejsou zvláštním bodem programu, nýbrž jsou součástí každého oddílu při výkonech s celými a lomenými čísly, jak je to patrné ze sbírky úloh.

§ 9. Příklady pro kontrolní práci

Cvičení. 1. Určiti podíl při dělení

811 512 : 312.

2. Provésti dvojí zkoušku správnosti provedeného výkonu:

3865 : 37 = 105.

3. Číslo 21 210 zmenšit 202krát.

4. Číslo 7830 dělit číslem 340 a udat zbytek.

5. Provésti dělení (se zbytkem)

81 225 : 58.

6. Provésti naznačené výkony:

400 + 25 . (36 — 16); 30 . 40 — 1000 : 8;

1 000 000 — 3002 . 215.

7. *Slovní úloha* na všecky čtyři výkony.

Otázky:

1. Při dělení číslem 25 vyšel podíl 10 a zbytek 10. Určete dělence.

2. Udejte názvy daných čísel a výsledku při každém početním výkonu.

3. Které za čtyř výkonů jsou navzájem obrácené? Co se rozumí vzájemnou obráceností dvou výkonů?

4. Co vyjde po zaokrouhlení

376 895 t přesně na tisíce tun?
456 249 t přesně na tisíce tun?
72 555 t přesně na tisíce tun?
37 555 t přesně na tisíce tun?

5. Jak se zapíše věta: součet (rozdíl) čísel 35 a 25 má se znásobit (dělit) pěti? Které číslo vyjde?

6. Vypočíst nejvýhodnějším způsobem (objasnit, na základě které vlastnosti součinu):

$$125 \cdot 27 : 25.$$

7. Na převoz 25 600 t uhlí se počítalo s určitým počtem vlaků jednoho typu (podle počtu vagonů), ale potom bylo dodáno dvakrát méně vlaků se čtyrnásobným počtem vagonů u každého. Jaké množství uhlí je možno převézti za těchto podmínek?

Pokyn. U každého oddílu jsme udali příklady pro kontrolní práci: jimi nejsou vyčerpány všecky otázky, kterým se učí v daném oddílu. Je užitečné, aby učitel provedl analysu toho, na jaké vědomosti a dovednosti se bere zřetel v uvedených zde kontrolních otázkách a aby sám sestavoval obdobné otázky. Dovolí-li to čas, je užitečné klást doplňující a jiné otázky, na které my jsme zde nevzali zřetel.

KAPITOLA VII.

VLASTNOSTI ČÍSEL. DĚLITELNOST ČÍSEL

§ 1. Úvod. Historické poznámky. Práce mimo třídu

U nás se na střední škole věnuje málo pozornosti tomu, aby žáci chápali složení čísla, vlastnosti celých čísel. Toho příčinou je z části to, že kurs aritmetiky končí 5. třídou a učitel matematiky v dalším kurse při číselných výpočtech vyskytujících se v řešení algebraických a geometrických úloh obyčejně nevede žáky k tomu, aby užívali vlastností čísel a nepovzbuzuje žáky, aby si těch vlastností všímali. Tak třeba při řešení úlohy vyžadující dosazení do výrazu $\sqrt{a^2 - b^2}$, v numerickém případě $\sqrt{32{,}5^2 - 16{,}5^2}$ žáci raději umocňují trojciferná čísla na druhou a potom určují druhou odmocninu trojciferného čísla 784, místo aby rozložili rozdíl čtverců na činitele a pod odmocnítkem psali $\sqrt{49 \,.\, 16} = 7 \,.\, 4 = 28$. Při tom jsme se nezmínili o tom, že žáci neužijí pravidla pro výpočet druhé mocniny čísla, které končí cifrou 5, ačkoli to pravidlo v algebře probírali.

Poznání vlastností čísel má ohromný význam pro rozvoj žáků. Učitel aritmetiky má si pozorně všímat otázek spojených s vlastnostmi a složením čísel, ježto na obecné škole se tomu věnuje malá pozornost, a má při celém dalším vyučování matematice pečlivě pokračovat v této práci a prohlubovat ji.

Otázky spojené s analysou vlastností celých čísel, jejich dělitelností, se všemožnými číselnými kombinacemi, stále vzbuzovaly pozornost matematiků a hrály velkou roli ve všech etapách lidských vědomostí. Pravda, jsou s nimi spojeny všeliké číselné pověry, ale zároveň se také na jejich základě vyvinuly mnohé vědecké soustavy.

V naší škole otázky dělitelnosti čísel, určení nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele kladou se s praktickým zaměřením, mají za cíl dát žákům znalosti nezbytné pro výkony s lomenými čísly. Naše zpracování této kapitoly má za cíl obrátit pozornost učitele na velkou důležitost toho, aby se u žáků vzbudil zájem o vniknutí do vlastností čísel. Materiálu vyloženého v této kapitole učitel může užít tehdy, když to shledá potřebným, i ve speciálních hodinách při opakování a probírání celých čísel i při vyučování o úpravách zlomků i při opakování celého kursu aritmetiky atd. Ale ovšem, při hodinách matematiky se učiteli podaří přidat jako doplnění obvyklé látky jen málo, jen několik příkladů, jaké uvádíme níže u příslušných bodů vykládané theorie.

Práce v kroužku

Učitel musí přenésti práci také do lekcí v kroužku, které, jak víme ze zkušenosti, velice žáky zajímají (viz o tom ještě v § 11, kap. VII.). Mnoho látky o studiu čísel se najde v matematických chrestomatiích a knížkách zcela přístupných 12 a 13letým žákům.

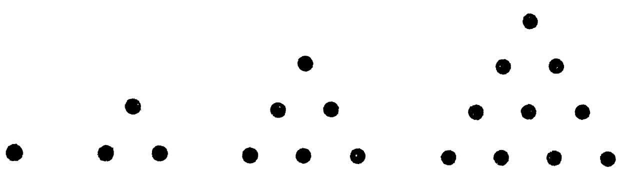
1. Je třeba rozbírati takovéto otázky se žáky netolikò při vyučování aritmetice, nýbrž i později, když znalost algebraické symboliky a identických úprav může žákům dát schopnost, aby theoreticky odůvodnili mnohá pravidla numerických výkonů, způsoby uhádnutí myšlených čísel nebo výsledků výpočtu a mnoho jiných početních hříček. Na příklad pravidlo pro rychlý výpočet druhé mocniny čísla končícího pětkou $(10a + 5)^2 = a(a + 1) . 100 + 25$, podle něhož $75^2 = 7 . 8 . 100 + 25 = 5625$, $95^2 = 9 . 10 . 100 + 25 = 9025$ atd.

Zejména žáky zajímají všeliké číselné vztahy. Na př. jak lze napsat číslo 100 pomocí devíti cifer a znaků výkonů:

$$100 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 . 9 \text{ a pod.}$$

Vlastnosti čísel, která ve starověku nazývali „dokonalá“, jež se rovnají součtu všech svých dělitelů (mimo sebe sama), jako: $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 7 + 14$; 496; 8128 a j., nebo čísel „spřízněných“, u kterých součet dělitelů jednoho čísla je roven druhému a obráceně. Taková jsou na př. čísla 220 a 284 (součet dělitelů čísla 220 je $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$, součet dělitelů čísla 284 je $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$) a j.

Zajímavá jsou trojúhelníková čísla (obr. 13) a ostatní figurální čísla.[1])



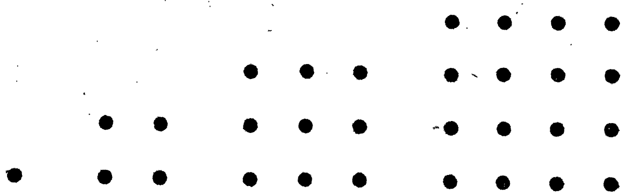
Obr. 13.

Trojúhelníková čísla jsou 1, 3, 6, 10 atd.

$$1;\; 1 + 2 = 3;\; 1 + 2 + 3 = 6;\; 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \text{ atd.}$$

n-té trojúhelníkové číslo je součet n prvních čísel přirozené řady $\left(\text{součet členů aritmetické posloupnosti } s_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$.

[1]) „Figurální čísla vzbuzují zájem z historického hlediska, ježto se vyskytují v jedné z prvních vět aditivní theorie čísel týkající se rozkladu čísla na sčítance určitého typu, kterou udal už Fermat a po prvé dokázal Cauchy r. 1815.“ (I. V. ARNOLD, „Teorija čisel“, 1939, str. 123.)



Obr. 14.

Čtvercová čísla jsou 1, 4, 9, 16 (obr. 14) — úplné čtverce čísel:

$1^2 = 1;\ 2^2 = 4 = 1 + 3;\ 3^2 = 9 = 1 + 3 + 5 + 7$ atd.

Zajímavé vztahy:

$1 \cdot 9 + 2 = 11$	$12\,345\,679 \cdot 9 = 111\,111\,111$
$12 \cdot 9 + 3 = 111$	$12\,345\,679 \cdot 18 = 222\,222\,222$
$123 \cdot 9 + 4 = 1111$	$12\,345\,679 \cdot 27 = 333\,333\,333$
$12345 \cdot 9 + 5 = 11111$	

nebo vztahy mezi čtverci některých čísel při obrácení pořádku cifer:

$12^2 = 144$	$13^2 = 169$	$102^2 = 10\,404$	$103^2 = 10\,609$
$21^2 = 441$	$31^2 = 961$	$201^2 = 40\,401$	$301^2 = 90\,601$
$112^2 = 12\,544$	$113^2 = 12\,769$	$122^3 = 14\,884$	
$211^2 = 44\,521$	$311^2 = 96\,721$	$221^2 = 48\,841$	

Čtverce čísel, jejichž každá cifra je rovna jedné:

$$11^2 = 121 = \frac{22 \cdot 22}{1 + 2 + 1}$$

$$111^2 = 12321 = \frac{333 \cdot 333}{1 + 2 + 3 + 2 + 1}$$

$$1111^2 = 1234321 = \frac{4444 \cdot 4444}{1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1}.$$

Součty lichých čísel:

$1 = 1^2$	$1 = 1^3$
$1 + 3 = 2^2$	$3 + 5 = 2^3$
$1 + 3 + 5 = 3^2$	$7 + 9 + 11 = 3^3$
$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$	$13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$ atd.

Žáky zajímá struktura dávno známých t. zv. „magických čtverců“, ve kterých součty jednotlivých řádků, sloupců a diagonál jsou si rovny.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Obr. 15.

Je možné žákům udati podobné příklady se 16, 25, 36, 49, 64, 81 čtverci.

2. Užitečné je žáky informovat o vynikajících počtářích, zejména o tom, jak veliký matematik Gauss znamenitě ovládal počítání zpaměti (on dovedl udati vlastnosti každého jednotlivého čísla až do 2000) a obrátit pozornost žáků na to, že soustavnou a ovšem velikou a vytrvalou prací může každý žák dospěti k tomu, aby na základě znalosti číselné soustavy a několika obratů se naučil hbitě počítat, hbitě násobit zpaměti trojciferná čísla atd.

Jak bylo výše připomenuto, vlastnosti čísel hrály velikou úlohu ve vývoji pověr. Tak na příklad Chaldejci spojovali čísla s přírodními zjevy. Kombinacemi čísel, jejich rozkladem na činitele, na sčítance, na součty čtverců a pod. vysvětlovali přírodní zjevy a rozšířili mezi lidem všeliké číselné pověry a zaklínání.

Vliv chaldejské číselné mystiky se projevil i u starých Řeků a Římanů; oni měli rovněž posvátná čísla, na příklad 3 a 7. Od Římanů přešel také předsudek o „nešťastném čísle“ 13. V Řecku v Pythagorově škole (500 let př. Kr.) učenci, kteří se zabývali naukou o číslech a studiem vlastností čísel i pozorováním přírody, si povšimli, že přírodní zákony se dají vyjádřit čísly; tak, na příklad, číselným poměrem se vyjadřují délky strun, dávající harmonický akord, pohyb nebeských těles je podroben číselným zákonům. Pythagorejci znali aritmetický, geometrický a harmonický střed atd., snažili se vyjádřiti čísly všecky zjevy hmotného i duševního světa.[2])

3. Řecký um dokázal překonat číselnou mystiku a došel k vědeckému studiu čísel. Slavný Eukleides v 7., 8. a 9. kapitole svých „Základů“ vyložil vše, co tehdy bylo známo z nauky o číslech (v geometrickém tvaru). Zde se vyskytuje také známý Euklidův algoritmus pro určení největšího společného

[2]) Učitel matematiky může ke všem těmto otázkám užít literatury uvedené v seznamu. Pro žáky lze k tomu cíli užít těchto knih: IGNAT'JEV „V carstve smekalki,“ díl I. a II., dále chrestomatie LJAMINA: „Arifmetika“, sv. I., PERELMAN „Zanimatel'naja arifmetika.“

dělitele dvou čísel postupným dělením. Zde je rovněž podán důkaz existence nekonečně mnoha prvočísel. Vyložíme krátce tento důkaz.

Dejme tomu, že čísla 1, 2, 3, ..., p vyčerpávají všecka známá prvočísla. Utvoříme-li nové číslo $1 . 2 . 3 \ldots . p + 1 > p$, tu toto nové číslo není násobkem žádného z čísel 1, 2, 3, ..., p (protože druhý sčítanec 1 není takovým násobkem); proto toto nové číslo buďto samo je prvočíslem nebo je násobkem prvočísla většího nežli p. V jednom i druhém případě existuje prvočíslo, které je větší než p, což se právě mělo dokázat.

Pro $p = 2, 3, 5, 7, 11$ obdržíme tato nová prvočísla: $1 . 2 + 1 = 3$; $1 . 2 . 3 + 1 = 7$; $1 . 2 . 3 . 5 + 1 = 31$; $1 . 2 . 3 . 5 . 7 + 1 = 211$; $1 . 2 . 3 \times \times 5 . 7 . 11 + 1 = 2311$; pro $p = 13$ dostaneme složené číslo $30\,031 = 59 . 509$, jehož prvočinitelé jsou prvočísla větší než 13.[3])

4. Úloha určení prvočísel, stanovení zákona prvočísel dosud není řešena. První pokus určit prvočísla máme ve známém „Eratosthenovu sítu“ (kolem r. 250 př. Kr.); v přirozené řadě čísel škrtáme čísla dělitelná dvěma (mimo číslo 2 samo), třemi, pěti atd.[4]) Do 17. století výběr prvočísel se děl zkusmo, ačkoli některé znaky prvočísel byly známy již ve starověku.

Uvedeme, že sestavení malých tabulek prvočísel, jakož i „Eratosthenovo síto“, je užitečné probírat, aby pozornost žáků se upoutala na otázku (multiplikativního) složení čísel. Znalost složení čísel vede žáky k pochopení zákonitých posloupností číselných, počínaje geometrickou posloupností.

První tabulky prvočísel byly vytištěny v 17. století (do 1 000 000). Existují tabulky prvočísel do 10 000 000 (od 6 do 9 milionů je sestavil Dase v 19. stol.); poslední tabulky prvočísel od Lehmera jdou po 10 006 721).

Z tabulek poznáváme, že rozložení prvočísel v přirozené řadě číselné je nepravidelné.

V prvním milionu je 78 499 prvočísel,
v pátém milionu je 63 369 prvočísel,
v desátém milionu je 62 760 prvočísel;

z toho může vzniknout nesprávná představa, jakoby počet prvočísel, byť velmi veliký, přece byl konečný (viz větu Euklidovu).

Ve skutečnosti v různých rozmezích se vyskytují stejně velké intervaly (na příklad jestliže pozorujeme jednotlivá sta přirozených čísel), ve kterých se vyskytuje střídavě tu poměrně mnoho, tu zase poměrně málo prvočísel.

5. Originální nové ideje zavedl do nauky o číslech „otec algebry a aritme-

[3]) $2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17 + 1 = 510\,511 = 19 . 97 . 277$; $2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17 . 19 + 1 = 9\,699\,691 = 347 . 27\,953$ atd.

[4]) Eratosthenes psal čísla na destičku pokrytou voskem a ježto propichoval dírky u násobků dvou, tří, čtyř atd., destička se podobala sítu.

tiky" Diofant[5]) z Alexandrijské školy: u něho vidíme začátky označování čísel písmeny, on mluví o čtvercích a krychlích čísel, on udává číselná řešení rovnic, zejména neurčitých rovnic stupně prvního až čtvrtého a řešení nerovností v oboru racionálních čísel.

Uvedeme v obecném tvaru nejjednodušší z úloh řešených Diofantem (u Diofanta máme určité numerické údaje), abychom obrátili pozornost učitele matematiky na historický význam a důležitost tak zvaných abstraktních úloh našich sbírek pro rozvoj žákovského chápání číselných kombinací.

1. Jsou dána dvě čísla; které číslo je třeba přičíst k menšímu a odečíst od většího, abychom dostali určitý poměr součtu a rozdílu?

2. Rozdělit čtverec čísla na součet dvou čtverců. To je Pythagorská úloha, jejíž názorné vyjádření je dáno egyptským pravoúhlým trojúhelníkem.

Studium vlastností čísel, které mělo tak velký význam ve škole Pythagorově a Eukleidově a které bylo tolik a tak skvěle doplněno Diofantem, jehož práce jsou počátkem theorie čísel, nalezlo opravdivé pokračování až o 12 století po Diofantovi ve Francii.

Ve výše uvedené druhé Diofantově úloze znamenitý francouzský právník Fermat (17. stol.) vyslovil domněnku, jež se stala proslulou, že totiž pouze druhá mocnina může býti součtem dvou mocnin s týmž mocnitelem (velká věta Fermatova).[6])

Práce Fermatovy (1601—1665), ve kterých dále pokračoval Euler (1707 až 1783) a zejména Gauss (1777 — 1855) dali vznik nové vědě „theorii čísel", zkoumající vlastnosti celých čísel. Ruští učenci 19. století P. L. Čebyšev, A. N. Korkin, E. J. Zolotarev, G. F. Voronoj vykonali mnoho pro rozvoj „theorie čísel" a současní sovětští učenci — akademik I. M. Vinogradov a j. — učinili skvělé objevy v tomto oboru.

---

[5]) Řecký matematik, který žil asi ve II. a III. stol. našeho letopočtu. Jeho následovnicí a komentátorkou byla nadaná žena Gipatia (její komentář je ztracen), kterou rozsápala tlupa křesťanských fanatiků — egyptských mnichů — na ulicích Alexandrie r. 415. Po její smrti a po zničení alexandrijské knihovny učenci této školy opustili Alexandrii a založili matematickou školu v Athénách, která byla zavržena císařským dekretem zakazujícím „pohanské učení".

[6]) Že rovnice $x^n + y^n = z^n$, kde $n > 2$, je v celých číslech neřešitelná, to není ve vší obecnosti dodnes ještě dokázáno, ačkoli pro jednotlivé částečné případy správnost této věty byla mnoha vynikajícími matematiky dokázána. Je třeba poznamenat, že ty částečné důkazy byly provedeny methodami, které Fermat sám rozhodně nemohl znát. On však napsal na okraj listu Diofantovy „Aritmetiky", kde tento mluví o rozkladu $a^2 = x^2 + y^2$, následující slova: „Naproti tomu nikdy není možné rozložit úplnou krychli na součet dvou krychlí, čtvrtou mocninu na součet dvou čtvrtých mocnin a kteroukoli jinou mocninu na součet dvou mocnin s týmž mocnitelem (různým od 2). Já jsem našel v pravdě podivuhodný důkaz této věty, zde však je na ten důkaz příliš málo místa."

§ 2. Z theorie látky ve spojení s její methodikou

1. Jsou-li a a b dvě přirozená čísla, při čemž je $a > b$, tu dělením čísla a číslem b dojdeme k rovnosti $a = bq + r$, kde q je podíl a r zbytek. Tato rovnost vyjadřuje jednu z nejdůležitějších vlastností celých čísel, totiž: ke dvěma přirozeným číslům a a b $(a > b)$ lze udati číslo q tak, že obecně platí $a > bq$, $a < b(q + 1)$; ve zvláštním případě $r = 0$ jest $a = bq$.

V tomto posledním případě pravíme, že 1. číslo a je dělitelné číslem b nebo 2. číslo a je násobek čísla b nebo 3. číslo b je dělitel čísla a. Otázka po dělitelích čísla je takto převedena na otázku rozkladu čísla na činitele ($135 : 45 = 3$; $135 : 3 = 45$; $135 = 3.45$) $a = bq$; $a : b = q$; $a : q = b$, t. j. součin je násobek každého z obou činitelů.

V první hodině při objasnění pojmů „dělitel", „násobek" i v další práci je nezbytné navykat žáky na všecky tři výše uvedené formulace. Obyčejně žáci se omezují na užívání jediného výrazu „je dělitelné", na př. 135 je dělitelné čtyřicetipěti, kdežto výraz „násobek" (135 je násobek čísla 45) a „dělitel čísla" (45 je dělitel čísla 135), jak zkušenost ukazuje, nejsou běžné v řeči žáků naší střední školy.

Poznámka. V této příručce nemůžeme uvádět všecky věty o dělitelnosti čísel, jejich užití a důkazy; uvádíme pouze obsah těch vět, které jsou nezbytné za účelem vybudování soustavného, methodicky propracovaného školního kursu dané látky. Příslušný theoretický základ najde učitel matematiky v každém kurse theoretické aritmetiky.

2. Z definice dělitele a násobku plynou hlavní pravidla dělitelnosti čísel:

1. jestliže $N = a \,.\, b \,.\, c \,.\, \ldots \,.\, m$, pak N je násobek každého z čísel $a, b, c, \ldots, m$;

2. jestliže číslo a je násobek čísla b a číslo b je násobek čísla c, pak číslo a je násobek čísla c;

3. jestliže čísla a a b jsou dva násobky čísla c, pak také součet a rozdíl prvých dvou čísel je násobek čísla c; $a = mc$; $b = nc$; $a \pm b = (m \pm n)\,c$; pravidlo 3. je správné pro jakýkoli počet sčítanců, a proto

4. jestliže číslo a je násobek čísla b, pak také každý násobek čísla a je násobkem čísla b : $ka = k \,.\, m \,.\, b$; obráceně

5. jestliže součet dvou čísel i první sčítanec jsou násobky čísla c, pak také druhý sčítanec je násobek čísla c.

Tato hlavní pravidla jsou ve své podstatě žákům známa jako asociativní a distributivní zákon násobení a jejich důsledky. V hodině je třeba je se žáky zopakovat a řešit cvičení tohoto tvaru:

a) $4 \,.\, 5 \,.\, 7 = 140$; kterými čísly je dělitelné (násobkem kterých čísel je) číslo 140? která čísla jsou děliteli čísla 140? Odpověď: 4, 5, 7, 20, 28, 35. Čemu se rovná podíl v každém příslušném dělení? Odpověď: 35, 28, 20, 7, 5, 4;

b) Úloha. Je dáno 120 rublů ve třicetirublových bankovkách. Je možné stejnou částku přesně vyplatit pětirublovými bankovkami? třírublovými? Proč?

c) Proč je možné bez provedení dělení říci, že součet $500 + 1200$ dá se dělit beze zbytku číslem 100? čemu se rovná podíl?

d) Jestliže 140 je násobek čísla 35 (dělitelné číslem 35), jaká čísla musí také býti násobky čísla 35? Kolik jich je?

e) Proč je možné bez provedení dělení říci, že součet $500 + 350$ nedá se dělit beze zbytku číslem 100?

Poznámky. 1. Součin několika činitelů může být nějakým číslem dělitelný i tehdy, jestliže žádný činitel není tím číslem dělitelný, na příklad: 18 je dělitelné devíti, jestliže však rozložíme $18 = 3 \,.\, 6$, tu ani 3 ani 6 není dělitelné devíti; také můžeme mít 200 rublů v papírových penězích a nemít 10 dvacetirublových bankovek atd.

Proto výše uvedený první znak dělitelnosti je postačující, není však nutný.

2. Rovněž třetí výše uvedené pravidlo dává postačující, ale ne nutný znak dělitelnosti, na příklad součet dvou lichých čísel je dělitelný dvěma, ačkoli žádný sčítanec není dělitelný dvěma. Je možné koupit sešity (celé číslo sešitů) v ceně po 5 kop. za sešit tak, že dva žáci dají dohromady všecky své peníze, i když žádný z obou žáků nemá celkem peníze v hodnotě celého čísla sešitů, neboť $27 + 23 = 50$ a pod.

Totéž je vhodné vyložit žákům také v případě několika sčítanců: $27 + 43 + 21 + 54 + 25 = 180$.

Jinými slovy: z toho, že ani a ani b není násobek c, neplyne, že by $a \pm b$ nebo ab nemohl být násobek c.

Příklad nutného a postačujícího znaku dělitelnosti dává věta, které se také užívá při odvozování znaků dělitelnosti: **jestliže jeden ze dvou** (nebo několika) **sčítanců je násobek určitého čísla, pak aby součet byl násobek toho čísla, je nutné a stačí, aby také druhý sčítanec** (nebo součet ostatních sčítanců) **byl násobek téhož čísla.** Největší praktický význam mají nutné a postačující znaky dělitelnosti, jako obecně užívané znaky dělitelnosti čísly 2, 3, 4, 5, ...

Uvedeme, na příklad, že nutný a postačující znak dělitelnosti stem jest, aby poslední dvě cifry čísla byly rovny nule; aby jedna z těch cifer byla rovna nule, to je podmínka nutná, ne však postačující; aby poslední tři cifry byly rovny nule, to je podmínka postačující, ne však nutná.

§ 3. Obecný znak dělitelnosti čísel

Buďtež $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ cifry čísla N, tedy

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + \ldots + a_1 10 + a_0,$$

buďtež dále $r_1, r_2, \ldots, r_n$ zbytky při dělení mocnin deseti zvoleným dělitelem d:

$$\begin{aligned} 10^n &= \text{násobek } d + r_n, \\ 10^{n-1} &= \text{násobek } d + r_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 10 &= \text{násobek } d + r_1. \end{aligned}$$

Potom $N =$ násobek $d + (a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \ldots + a_1 r_1 + a_0)$; zavedeme-li označení R pro zbytek, máme $N =$ násobek $d + R$. Aby číslo N dalo se dělit beze zbytku (bylo dělitelné) číslem d, k tomu je nutné a stačí, aby číslo R, t. j. součet součinů jednotlivých cifer[7]) daného čísla se zbytky vzniklými při dělení příslušných mocnin deseti číslem d, bylo dělitelné číslem d. Částečné případy tohoto obecného znaku máme v obyčejných formulacích znaků dělitelnosti, které se probírají ve škole:

[7]) Cifrou se tu míní jednociferné číslo.

1. Budiž $d = 2$; při dělení libovolné mocniny deseti zbytky $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_n = 0$ a $R = a_0$, t. j. dvěma je dělitelné číslo, jestliže poslední cifra je dělitelná dvěma.

2. Budiž $d = 3$; v tomto případě zbytky při dělení libovolné mocniny deseti $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_n = 1$ a $R = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0$. Dostáváme obecně známý znak dělitelnosti třemi.

3. Budiž $d = 4$; při dělení mocniny deseti s mocnitelem větším než 1 zbytek je roven 0, tedy $R = a_1 r_1 + a_0$; z toho plyne pravidlo: jestliže poslední dvě cifry čísla N dávají číslo dělitelné čtyřmi, také N samo je dělitelné čtyřmi atd.

4. Vycházejíce z obecného znaku, odvodíme znak dělitelnosti jedenácti (viz dále § 11 „Práce mimo třídu").

10 při dělení jedenácti dá zbytek $r_1 = 10$
10^2 při dělení jedenácti dá zbytek $r_2 = 1$
10^3 při dělení jedenácti dá zbytek $r_3 = 10$
10^4 při dělení jedenácti dá zbytek $r_4 = 1$ atd.

Tudíž:

$$R = a_0 + a_1 \,.\, 10 + a_2 + a_3 \,.\, 10 + \ldots$$

neboli

$$R = a_0 + 11a_1 - a_1 + a_2 + 11a_3 - a_3 + \ldots,$$
$$R = \text{násobek } 11 + a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots,$$
$$R = \text{násobek } 11 + (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots),$$

což můžeme také psát:

$$R = \text{násobek } 11 - [(a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) - (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots)].$$

Poslední dva výrazy ukazují, že číslo je dělitelné jedenácti, jestliže rozdíl mezi součtem cifer[8]) na sudých místech a na lichých místech je dělitelný jedenácti. Vyložíme, jak lze výše vyloženého (v § 3) užít v hodinách aritmetiky při vyvozování pravidel dělitelnosti.

§ 4. Znak dělitelnosti dvěma a pěti

Obyčejně žáci 5. třídy vědí, která čísla se jmenují „sudá", t. j. jsou násobky dvou. Hodinu můžeme vésti v tomto pořádku: dát

[8]) Zase se míní cifrou jednociferné číslo.

žákům po řadě jmenovat několik čísel dělitelných dvěma a zapsat je na tabuli do sloupce. Potom říci a rovněž zapsat do sloupce několik čísel nedělitelných dvěma.

Otázky. Kterou cifru musíme v číslech druhého sloupce změnit, aby pozměněná čísla byla dělitelná dvěma? Kterou cifru musíme změnit v číslech prvního sloupce, aby pozměněná čísla nebyla dělitelná dvěma? Můžeme dosáhnout téhož cíle změnou cifry desítek? set?

Kterou cifrou musí číslo končit, aby jistě bylo dělitelné dvěma? Odpověď: 2, 4, 6, 8, 0. Otázka: aby nebylo dělitelné dvěma? Odpověď: 1, 3, 5, 7, 9. Otázka: jak se jmenuje číslo, jehož poslední cifra má některou hodnotu z první odpovědi? ze druhé odpovědi? Můžeme bez provedení dělení rozhodnout, zda dělení daného čísla dvěma vyjde beze zbytku? Je číslo 3568 dělitelné dvěma či není? (říci bez provedení dělení). Jak to poznáme? Proč? Žáci mohou udat jednu nebo druhou z následujících odpovědí: 1. to číslo obsahuje 356 desítek; protože 1 desítka je násobek dvou, také 356 desítek je násobek dvou; mimo to dané číslo obsahuje 8 jednotek a ty také můžeme dělit dvěma beze zbytku; proto celkové číslo 3568 lze dělit dvěma beze zbytku; 2. tisíce, sta, desítky obsažené v daném čísle dají se dělit dvěma beze zbytku, a rovněž 8 jednotek obsažených v daném čísle.

Druhé vysvětlení plyne z obecného znaku dělitelnosti vyloženého výše; ale první vysvětlení je jednodušší a obyčejně se ho užívá pro odvození znaku dělitelnosti čísla dvěma nebo pěti; při něm se číslo rozkládá jen na dva sčítance

$N = a \cdot 10 + b$ a další usuzování je stejné.

Vysvětlení znaku dělitelnosti pěti provádí se obdobně jako vysvětlení znaku dělitelnosti dvěma a probírá se bezprostředně za tímto. Při vysvětlení vyjdeme z toho, že každá desítka dá se dělit i pěti:

$$10 = 2 \cdot 5.$$ [9])

Poznámky. 1. Žákům se poznamená, že na př. $25 : 2 = 12\frac{1}{2}$ znamená, že 25 můžeme dělit dvěma, t. j. rozdělit na dva stejné díly,

[9]) Obyčejně se ve škole znaky dělitelnosti probírají v jiném pořádku: dvěma, čtyřmi, pěti. My považujeme za užitečné, aby si žáci osvojili tu myšlenku, že znakem dělitelnosti dvěma nebo pěti je **dělitelnost počtu** (prostých) **jednotek dvěma nebo pěti** atd.

ale ne na dva stejné díly složené z celých jednotek (žáci někdy řeknou, že 25 dělit dvěma je nemožné).

2. Užitečné je žáky upozornit (neuvedou-li ten znak sami), že čísla 4682, 6084 atd., t. j. čísla s ciframi vesměs sudými, jsou dělitelná dvěma. (Proč?) Je třeba poznamenat, že je to znak správný, ale jenom znak postačující, ne znak nutný.

§ 5. Znaky dělitelnosti čísly 4, 25, 8, 125

Otázka: kdy můžeme u napsaného čísla na ráz říci, že není dělitelné čtyřmi? Odpověď: je-li to číslo liché. Vyjasní se na příkladech.

Cvičení. Probírá se dělitelnost dvojciferných čísel čtyřmi.

1. *Otázka*: je znak sudosti čísla postačující, aby číslo bylo dělitelné čtyřmi? Žáci píší na tabuli příklady, ze kterých je patrné, že to není znak postačující (70; 22; 54; 46; 18 atd.). Učitel dbá, aby se na tabuli objevila čísla se všemi možnými sudými ciframi jednotek, jak uvedeno výše.

2. *Otázka*: která čísla složená pouze z desítek jsou dělitelná čtyřmi?

Odpověď: 20, 40, 80, t. j. sudý počet desítek je dělitelný čtyřmi.

3. Napsat čísla končící cifrou 4 a dělitelná čtyřmi; potom končící cifrou 8 a dělitelná čtyřmi. Je jasné, že to budou čísla mající sudou cifru desítek (jednotky 4 a 8 jsou dělitelné čtyřmi). Po objasnění tohoto znaku žáci mají hbitě psát dvojciferná čísla končící cifrou 4 nebo 8 a dělitelná čtyřmi; na příklad 44, 68, 24, 84 atd.

4. Napsat čísla končící cifrou 2, potom 6 a dělitelná čtyřmi.

Je jasné, že počet desítek takového čísla musí být lichý:

$$32 = 20 + 10 + 2.$$

(10 při dělení čtyřmi dá zbytek 2.)

$$72 = 60 + 10 + 2,$$
$$56 = 40 + 10 + 6.$$

A tak žáci a) z tvaru dvojciferného čísla poznají, je-li dělitelné čtyřmi; b) píší dvojciferná čísla dělitelná čtyřmi.

5. Potom v témž pořadí se probere, která dvojciferná čísla jsou dělitelná číslem 25.

6. *Otázka*: která řádová jednotka je dělitelná čtyřmi?

Ukáže se, že sto je dělitelné čísly 4 i 25 ($100 = 4 \cdot 25$), že tisíc atd. zase je číslo dělitelné čísly 4 i 25.

Vyvození znaku dělitelnosti čísly 4 a 25. Znovu lze dát žákům dvoje vysvětlení. Proč na příklad číslo 543 716 je dělitelné čtyřmi, ale ne číslem 25? Dá se první vysvětlení: sta, desítky i jednotky tisíc (II. třídy) a sta I. třídy zajisté jsou čísla dělitelná čtyřmi; proto podmínkou dělitelnosti celkového čísla čtyřmi nebo dvacetipěti bude dělitelnost čísla složeného z posledních dvou cifer. Nebo se dá druhé vysvětlení: 5437 set je číslo dělitelné čtyřmi i dvacetipěti; další usuzování vede k témuž znaku. Druhé vysvětlení obyčejně se udává v učebnici ve tvaru (ne pro žáka)

$$N = a \cdot 100 + (b \cdot 10 + c).$$

Uvedeme, že na základě výše provedeného rozboru můžeme dospět i k jinému znaku dělitelnosti čtyřmi: ježto z každé desítky při dělení čtyřmi zbudou dvě nerozdělené jednotky, „čtyřmi je dělitelné číslo, jestliže dvojnásobný počet desítek zvětšený o počet jednotek dá číslo dělitelné čtyřmi“.

Znaky dělitelnosti osmi (a číslem 125) nemají praktický význam, jelikož je jednodušší rozhodnout o dělitelnosti osmi přímým dělením nežli užitím obecného znaku. Objasnit znak můžeme na základě toho, že $1000 = 8 \cdot 125$ a číslo

$$N = a \cdot 1000 + (b \cdot 100 + c \cdot 10 + d).$$

Obecný znak. Když se ve škole proberou hlavní uvedené znaky dělitelnosti, je dobré rozebrat se žáky methodu, pomocí které odvodili ty znaky; k tomu může na tabuli být třeba takový zápis:

Pro znak dělitelnosti čísly 2 a 5	$3658 = 3650 + 8$.
Pro znak dělitelnosti čísly 4 a 25:	$3658 = 3600 + 58$.
Pro znak dělitelnosti čísly 8 a 125:	$3658 = 3000 + 658$, t. j.

1. dané číslo jsme považovali za součet dvou sčítanců, při čemž první sčítanec vždy byl určitě dělitelný příslušným z čísel 2, 4, 8, 5, 25, 125;

2. jestliže při tom druhý sčítanec byl dělitelný tím číslem 2, 4, 8, 25, 125, byl také součet dělitelný tím číslem;

3. jestliže při tom druhý sčítanec nebyl dělitelným tím číslem (2, 4 atd.), nebyl ani součet jím dělitelný.

Znak dělitelnosti deseti. Výše jsme neuvedli znak dělitelnosti deseti a mocninou deseti, protože tato otázka se probírá v kapitole o dělení. Vyjdeme-li od obecné theorie znaků dělitelnosti, můžeme dojít k témuž znaku dělitelnosti čísla číslem 10^m, totiž že číslo končí m nulami. Není zbytečné znovu to prokázat žákům na příkladech.

§ 6. Znak dělitelnosti devíti a třemi

Jako jinde, řešíme i tu nejprve několik předběžných cvičení.

Cvičení. 1. Která čísla složená z desítek jsou dělitelná třemi? ze set? z tisíců? Odpověď: 30, 60, 90, 300, 600, 900, 3000, 6000, 9000 atd. Která z nich jsou dělitelná devíti?

2. Která jednociferná čísla určitě jsou dělitelná třemi? Odpověď: 3, 6, 9. Která dvojciferná čísla určitě jsou dělitelná třemi? Odpověď: 33, 36, 39, 63, 66, 69, 93, 96, 99. Která z nich jsou dělitelná devíti?

3. Píší se čísla 53, 62, 79 atd., která nejsou dělitelná třemi; u těchto čísel jedna cifra znamená číslo dělitelné třemi a druhá cifra ne. Obdobně pro číslo 9 píšeme 95, 49 atd.

4. Která dvojciferná čísla jsou dělitelná devíti (podle násobilky)? Jsou mezi nimi čísla nedělitelná třemi?

5. Mohou být čísla dělitelná devíti, ale ne třemi? Obráceně?

6. Jaký zbytek při dělení devíti dají jednotky vyšších řádů? při dělení třemi?

$$10 = 9 + 1; \quad 100 = 99 + 1; \quad 1000 = 999 + 1,$$

při čemž 9, 99, 999, ... jsou čísla dělitelná třemi i devíti.

7. Položí se otázka, je-li číslo 7524 dělitelné třemi:

$$7524 = 7000 + 500 + 20 + 4.$$

Vysvětlení. První sčítanec je 7000; 6000 lze beze zbytku dělit třemi, zbude 1000 = 999 + 1, t. j. zůstane 1 nerozdělená jednotka; 300 lze beze zbytku dělit třemi, zbudou 2 stě nerozdělené, z každého sta po dělení třemi zbude jedna jednotka, celkem zbudou 2 jednotky; z 20 zbudou 2 jednotky; ze 4 jednotek po dělení třemi zbude 1 jednotka. Jestliže všecky ty zbytky dohromady dají číslo, které lze beze zbytku dělit třemi, bude i dané číslo dělitelné třemi. Ježto číslo 6 (t. j. 1 + 2 + 2 + 1 = 6) je dělitelné třemi, je také 7524 dělitelné třemi.

V tomto cvičení ještě se neudává pravidlo, znak dělitelnosti třemi. Obdobné cvičení má se provésti i s číslem 9. Při odvození pravidla je nejlépe začít případem dělitelnosti devíti.

8. Je číslo 7524 dělitelné devíti? 7524 = 7000 + 500 + 20 + 4. Z každého tisíce zbude po dělení 1 jednotka; celkem z tisíců zbude 7 jednotek; ze set zbude dalších 5 jednotek atd., tedy celkem zbývá 7 + 5 + 2 + 4 = 18 jednotek, které lze dělit devíti beze zbytku, takže také 7524 dá se dělit devíti beze zbytku. Z toho plyne znak dělitelnosti devíti.

9. Potom je možné vysvětlit a obvyklým způsobem formulovat znak dělitelnosti třemi.

Poznámky. 1. Nesmí se litovat času potřebného na takové úsudky, jaké byly naznačeny v bodě 5 a není radno příliš brzo přecházet k formulaci znaku dělitelnosti třemi. Pouze na cvičeních podobných těm, jež jsme uvedli, žák se opravdu učí odůvodňovat svoje závěry, vmýšlet se do dělitelnosti čísel a do číselných vztahů.

2. Žák nemá užívat pravidla, jestliže má třeba odpovědět na otázku, zda číslo 36 093 je dělitelné třemi (zvláštní případ). On vidí, že ve všech řádech jsou čísla dělitelná třemi. Rovněž tak je třeba, aby na ráz usoudil bez užití pravidla, že číslo 360 793 není dělitelné třemi.

3. Při určování, zdali na příklad číslo 345 681 je dělitelné třemi, není nutné sčítat všecky cifry. Je jasné, že k trojkám nebo šestkám nemusíme přihlížet při počítání součtu cifer; je vhodné také hned ubrat 4 + 5 jako součet dělitelný třemi atd.

4. Rovněž tak je dobře bez počítání součtu cifer na ráz rozhodnout o dělitelnosti devíti čísel 910 827, 910 826 atd.

5. Zdůraznit, že číslo dělitelné devíti vždy je také dělitelné třemi.

6. Žákům vysvětlit rčení „součet cifer" a rozebrat, co se tím přesně míní (cifry sčítat nemůžeme, jenom čísla); v podrobném přesném vyjádření to rčení znamená: „součet všech čísel, která znamenají jednotlivé cifry daného čísla, jsou-li ty cifry psány každá pro sebe".

7. Můžeme položit otázku: má se probírání znaků dělitelnosti spojovat s praktickým užitím znaků při krácení zlomků? Je sice účelné provésti při tom několik příkladů na krácení zlomků, ale látka o dělitelnosti celých čísel má svůj samostatný význam.

8. Výše jsme uvedli pro znak dělitelnosti čtyřmi vedle obyčejné formulace poněkud jinou formulaci. Rámec této knihy nedovoluje dále rozbírati otázku o znacích dělitelnosti a uvádět ještě některé jiné formulace uvedených znaků dělitelnosti.[10])

Užitečná doplňující cvičení

1. Samostatně udávat dvojciferná čísla dělitelná čísly 4, 25, 9 a pod.

2. V napsaných číslech změnit některé cifry (prostřední nebo poslední cifru) tak, aby pozměněné číslo bylo dělitelné číslem 4, 5, 9, 25 atd.

3. Udávat trojciferná nebo čtyrciferná čísla dělitelná zároveň třemi a pěti (tedy patnácti), čtyřmi a třemi (dvanácti), devíti a pěti (čtyřicetipěti) atd., dále čísla dělitelná třemi, ale ne pěti a pod.

§ 7. Prvočísla a čísla složená

Theorii prvočísel nemůžeme vykládat žákům 5. třídy; příslušná pravidla se žákům udávají bez důkazu a této práci se věnuje velmi málo času.

Ukážeme jeden možný postup při probírání této látky.

[10]) Učitelé uvádějí často jiné formulace, ke kterým dospěli samostatně. Doporučujeme článek prof. I. I. Čistjakova „O nekotorych priznakach delimosti", kde je uveden obecný způsob, jak dospěti ke znakům dělitelnosti, který udal N. V. Bugajev: „Matematičeskij sbornik", kap. VIII, 1877, „Matematičeskoje obrazovanije", 1915.

1. Na základě žákům známých znaků dělitelnosti zkoumáme některá čísla, na příklad: 19, 26, 37, 41, 94, 125, 141 atd., určíme, kterými čísly jsou jednotlivá čísla dělitelná a dojdeme k definici prvočísla a složeného čísla.

Číslo 1 nepočítáme ani mezi prvočísla ani mezi čísla složená. Prvočíslo má pouze dva dělitele: 1 a sebe samo.

2. Žákům se nedokazuje existence nekonečně mnoha prvočísel (Eukleidův důkaz byl uveden výše), ale provádějí se následující cvičení:

Napsat všecka prvočísla v oboru do sta: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97; nebo vypsat všecka prvočísla mezi dvěma zvolenými dvojcifernými čísly. Ta čísla najdeme zkusmo: můžeme dělit všecka čísla do sta prvočísly menšími než je zkoumané číslo.[11])

Pokyn. Zde můžeme uvésti „Eratosthenovo síto" jako názorný způsob hledání prvočísel: v přirozené řadě čísel škrtneme čísla dělitelná dvěma (mimo číslo 2), třemi (mimo číslo 3), pěti atd. Takto odstraňujeme postupně složená čísla a zbývající nepřeškrtnutá čísla jsou hledaná prvočísla.[12]) Je třeba žáky zvykat na užívání tabulky prvočísel uvedené v učebnici a ve sbírce úloh z aritmetiky.

Při masovém zkoumání byly žákům položeny následující otázky: „napište všecka prvočísla od 20 do 60", od „30 do 60", „podtrhněte z čísel 21, 87, 53, 81, 67, 143 ta, která jsou prvočísly", potom táž otázka s čísly 43, 65, 38, 79, 93, 231. Ukázalo se, že ve většině případů žáci považují čísla 39, 49, 51, 57 za prvočísla, že nepoznají, že 47, 59, 31 jsou prvočísla, že podtrhávají 87, 81, 143, jako by to byla prvočísla, dokonce čísla 21 a 93, 231; rovněž většina žáků nepodtrhla 53, 67, 43, 79, nepoznala, že to jsou prvočísla.

Mimo to je nemálo jednotlivých případů, kdy žák píše prostě čísla lichá, žádáme-li, aby psal prvočísla. Všecky tyto chyby naznačují, že se těmto otázkám při vyučování nevěnuje dosti pozornosti.

3. Hledají se zkoumáním jednotlivých čísel trojciferná prvočísla (na příklad od 100 do 150) a při tom se pozornost žáků obrací na to,

---

[11]) Účelné je rozebrat se žáky tabulku prvočísel, která je v učebnici a ve sbírce.

[12]) „Dvojčata" mezi prvočísly jsou páry prvočísel, která se liší o 2. Taková dvojčata jsou: 3, 5; 5, 7; 11, 13; 17, 19; 29, 31; 101, 103 atd.

že existují troj-, čtyř- i víceciferná prvočísla,[13]) na příklad 269, 431, 563, 641, 877, 2311 a jiná.

Můžeme dojít k prvočíslům, jestliže k součinu několika malých prvočísel přičteme jedničku podle vzorce $2 \,.\, 3 \ldots\ldots p + 1$ až po $p = 11$ včetně. Takto vzniknou prvočísla:

$$2 \,.\, 3 \,.\, 5 + 1 = 31,$$
$$2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 + 1 = 211,$$
$$2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11 + 1 = 2311.$$

Je vhodné poukázat na to, že úloha, zdali mnohociferné číslo je prvočíslo nebo číslo složené, je obtížná, když dané číslo nemá dělitele 2, 3, 5 atd. Vskutku, o sedmiciferných číslech 1 375 968 nebo 4 568 795 můžeme říci okamžitě, že to jsou čísla složená; ale jak tomu je u trojciferného čísla 481? je to prvočíslo nebo číslo složené? (dělitelé jsou 13 a 37) nebo 779? (dělitelé 19 a 41) nebo u čísla 2431? (dělitelé 11, 13, 17) nebo 5561? (dělitelé 67 a 83).

Pokyny. 1. Učitel sestaví taková cvičení, jestliže znásobí zvolená prvočísla a potom předloží obrácenou úlohu rozložit získané číslo na činitele.

2. Aby rozhodli, zdali dané číslo je prvočíslo nebo číslo složené, žáci, jak bylo už řečeno, postupují zkusmo, t. j. dělí dané číslo postupně menšími prvočísly; při tom a) dělení provádějí jenom, jestliže dané číslo je liché, protože sudé číslo (mimo 2) nemůže být prvočíslem, b) dělit je třeba pouze prvočísly, neboť jestliže číslo je dělitelné třeba sedmi, není prvočíslem, a jestliže není sedmi dělitelné, nemůže být dělitelné žádným z čísel 14, 21, 28, 35 atd., c) zkoumání dělením stačí provádět pouze potud, pokud nevychází podíl menší než dělitel. Na příklad, máme rozhodnout, je-li prvočíslem číslo 139. Ono není dělitelné čísly 2, 3, 5; dělíme sedmi a zjistíme, že dělení nevyjde beze zbytku; při dělení jedenácti máme podíl 12, ale zase je tu zbytek; dělení třinácti je také se zbytkem, ale podíl je už menší než 13 (podíl je 10, zbytek 9). Zřejmě není třeba zkoumati dále: 139 je prvočíslo.[14])

[13]) Někdy žáci si myslí, že mnohociferné číslo musí být součinem menších čísel.

[14]) Číslo je prvočíslem, není-li dělitelné žádným z těch prvočísel, jejichž druhé mocniny nejsou větší než to číslo.

3. Logický rozbor znaků dělitelnosti složeným číslem není přístupný žákům toho věku. Zkoumáme pouze jednotlivé případy, jako, na příklad, znak dělitelnosti čísly $6 = 2 . 3$, $15 = 3 . 5$ (někdy také $14 = 2 . 7$). Při vysvětlování vycházíme z toho, že jestliže číslo, na příklad 114, je dělitelné dvěma i třemi, je dělitelné součinem $2 . 3$; jestliže číslo 225 je dělitelné třemi i pěti, je dělitelné součinem $3 . 5$. Je třeba poukázat na to, že jestliže číslo je dělitelné na příklad šesti i třemi, nikterak nemusí býti dělitelné součinem 18, jak ukazují čísla 12, 24 atd.; číslem 18 jsou dělitelná ta čísla, která jsou dělitelná dvěma a devíti: 2 a 9 jsou nesoudělní činitelé součinu 18.[15])

Dvanácti jsou dělitelná ta čísla, která jsou dělitelná třemi i čtyřmi; číslem 24 ta, která jsou dělitelná čísly 3 a 8 atd.

Věta: **Jestliže součin dvou čísel a a b je dělitelný třetím číslem c a číslo b je nesoudělné s c, pak číslo a je dělitelné číslem c.**

Důsledek: jestliže číslo a je dělitelné zároveň číslem b i číslem c, při čemž b a c jsou čísla nesoudělná, pak a je dělitelné součinem bc.

§ 8. Rozklad čísel na prvočinitele

Cvičení. 1. Na příkladech se vyjasní, co znamená rozložit číslo na činitele (uvést je na tvar součinu) a na sčítance. Příklady: $6 = 2 . 3$; $9 = 3 . 3$; $10 = 2 . 5$, a také $6 = 2 + 2 + 2$; $9 = 3 + 3 + 3$; $10 = 2 + 3 + 5 = 3 + 3 + 4$ atd. Pojem „uvést na tvar součinu" se porovnává s pojmem „uvést na tvar součtu". To je velmi důležitá práce, neboť obyčejně žáci si neuvědomují dosti jasně rozdíl, což se ukazuje později při probírání algebry. Ukazuje se, že prvočísla i čísla složená můžeme rozmanitými způsoby rozkládat na sčítance, na příklad: $7 = 3 + 4$, $12 = 9 + 3 = 10 + 2$ atd., ale na činitele různé od 1 i od daného čísla (t. j. vylučuje se třeba rozklad $7 = 1 . 7$) můžeme rozkládat pouze čísla složená.

2. Provádí se rozklady na činitele, na příklad: $24 = 6 . 4$, zde oba činitelé jsou čísla složená; v jiných příkladech bude jeden činitel prvočíslem a druhý číslem složeným, jinde zase každý činitel bude prvočíslem.

[15]) Viz KISELËV, „Arifmetika", vyd. z r. 1938, §§ 87 až 89.

Potom ti činitelé, kteří jsou čísly složenými, rozkládají se dále a dostaneme 24 = 2 . 3 . 2 . 2.

Stejně rozkládáme i trojciferná a víceciferná čísla.

Pokyny. 1. Nejprve se provádějí ústní cvičení v rozkladu dvojciferných čísel na činitele (podle násobilky) i některých trojciferných čísel: 18, 24, 28, 32, 36 atd., 110, 124, 250 atd.

3. Žádá se rozložit na činitele 720 = 360 . 2 = 36 . 10 . 2 = ...

Rozkládajíce jedno a totéž číslo rozmanitými způsoby na činitele (zde je třeba co možná nejvíce podněcovat iniciativu žáků), žáci docházejí k závěru, že každé číslo se dá pouze jediným způsobem rozložit na prvočinitele (až na pořádek, který může být různý). Na tento výsledek je třeba obrátit pozornost žáků, ačkoli důkaz se neprobírá v 5. třídě.[16])

Průběhem takových cvičení učitel navyká žáky užívat slov: „36 je násobek devíti, čtyř“ atd., „9, 4 atd. jsou dělitelé čísla 36“ atd.

Dělitel. Násobek

Nové je zde pro žáky to, že se ve skutečnosti dělení 36:9, 36:4 neprovádí, ale pouze se konstatuje možnost dělení (beze zbytku). Čísla 9, 4 atd. se jmenují děliteli čísla 36 jako při skutečném dělení. Jasně se zdůrazní, že udat dělitele čísla 36 znamená udat ta čísla, kterými můžeme beze zbytku dělit číslo 36; a udat násobek čtyř znamená udat číslo, které můžeme beze zbytku dělit čtyřmi (udat dělence).

Otázky. 1. Máme 36 = 2 . 2 . 3 . 3. Mají se najít všichni dělitelé čísla 36. Obyčejně všichni žáci odpovědí: 2, 4, 3, 6, potom jenom někteří doplní: 9, 12 a 18 (máme-li součin pěti nebo šesti činitelů, není nutné požadovat úplný výčet všech dělitelů daného čísla). Užitečné je zapisovat 36 = 2 . 18; 36 = 9 . 4; 36 = 3 . 12.

Při tom se žáci přesvědčují, že mezi přesnými děliteli čísla 36 jsou i prvočísla i čísla složená, a že složení dělitelé se dají rozložit na takové prvočinitele, kteří se vyskytují v rozkladu čísla 36 a na žádné jiné; dále, že jestliže při rozkladu 36 se prvočinitel 3 objevuje dvakrát, nemůže se 3 objevit více než dvakrát při rozkladu přesného dělitele čísla

[16]) Kiselëv, „Arifmetika“, vyd. z r. 1937, § 93.

36. Objasnění takových věcí je nadmíru důležité pro vyhledávání společných dělitelů čísel a věnuje se tomu několik příkladů.

2. Jsou dána čísla 5, 6. Hledat násobky pěti, šesti.

Odpověď: 5, 10, 15 atd.; 6, 12, 18 atd. Konstatuje se, že je nekonečně mnoho násobků daného čísla.

3. Jak máme nazvat číslo 8 vzhledem k číslu 8 — dělitelem nebo násobkem? *Odpověď*: každé je i dělitelem i násobkem druhého.

4. Je dáno 20 = 2 . 2 . 5. Čemu se rovná nejmenší dělitel čísla 20? největší? čemu se rovná nejmenší dělitel každého z čísel 7, 8, 25. 160; kteréhokoli čísla? čemu se rovná jeho největší dělitel? čemu se rovná nejmenší násobek každého z těchto čísel? libovolného čísla? můžeme najít největší násobek kteréhokoli čísla?

Tyto otázky jsou často žákům nejasné. Objasnění pojmů: nejmenší a největší dělitel nebo násobek je velice důležité, aby žák s porozuměním věci vyhledával největšího společného dělitele a nejmenší společný násobek a aby si nepletl ty dva pojmy.

5. Ze kterých prvočinitelů se skládá číslo s první cifrou 1 a ostatními ciframi vesměs 0? Při rozbírání této úlohy může učitel, shledá-li to nutným, zavésti také pojem mocnitele, a potom znovu zapsat několik už na tabuli napsaných příkladů (proto má na tabuli zůstat nesmazaný zápis několika rozkladů na prvočinitele) s užitím mocnitelů. My shledáváme nutným varovat učitele matematiky před nadšením pro užívání mocnitelů při rozkladech čísel na prvočinitele. Především se tu zavádí nový pojem mocnitele a tím se zavádí řeč na určitý nový početní výkon, který nemá nic společného s probíranou látkou o určování dělitelů a násobků čísla, zavádí se nový pojem odvracející pozornost žáků, pojem, který sám zase vyžaduje, aby byl vyložen se vší pečlivostí, jinak se nedojde k pochopení toho, co je právě na programu — rozkladu na činitele — jestliže žáci, jak se často stane, zápis 3^2 omylem přečtou jako 3 . 2 a zápis 2^3 jako 2 . 3. Proto my v naší praxi při začátku probírání rozkladu na činitele, určování společných dělitelů a příbuzné látky nezavádíme označení pomocí mocnitelů.[17])

[17]) Mocnitel — přirozené číslo větší než 1 — udává počet navzájem rovných činitelů součinu: $3^2 = 3 . 3$, to znamená: součin dvou činitelů rovných 3; mocnitel neznačí, kolikrát máme číslo znásobit samo sebou (na př. $3^2 = 3 . 3$ — násobíme jenom jednou).

Způsob zápisu

6. Jako poslední bod v uvedených cvičeních na rozklad čísla na prvočinitele můžeme položit otázku o provedení výcviku v určitém způsobu provádění výpočtů.

Průběhem předešlých cvičení žáci mohli zapisovat:

$$180 = 2 \,.\, 90 = 2 \,.\, 2 \,.\, 45 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 15 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5,$$

nebo

$$180 = 18 \,.\, 10 = 2 \,.\, 9 \,.\, 10 = 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5;$$
$$240 = 24 \,.\, 10 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5.$$

Takovým způsobem se mohou provádět také rozklady na činitele u čtyrciferných a kterýchkoli čísel, ale v těch případech je lépe rozklad psát pro přehlednost do sloupce:

3240	10	$3240 = 10 \,.\, 4 \,.\, 9 \,.\, 9 = 2 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3$
324	4	nebo při velmi dobrém stavu třídy $2^3 \,.\, 3^4 \,.\, 5$
81	9	
	9	

Někteří methodikové dávají přednost soustavnému vyhledávání prvočinitelů 2, 3, 5, 7 atd. po pořádku, tedy:

1260	2	V tomto případě zápis do sloupce je někdy velmi dlouhý.
630	2	a zvláštního důvodu pro takový zápis není.
315	3	
105	3	
35	5	
7	7	
1		

§ 9. Společný dělitel čísel. Největší společný dělitel

Nežli se přejde k vyhledávání největšího společného dělitele čísel. je nutné se přesvědčit, že celá třída chápe, co je to společný dělitel čísel, že čísla mohou mít několik společných dělitelů a že mezi nimi je jeden nejmenší společný dělitel a jeden největší společný dělitel.

Buďtež dána čísla 120, 180, 210. Položí se otázka o prvočinitelích každého z těch čísel:

$120 = 2 . 2 . 2 . 3 . 5$; $180 = 2 . 2 . 3 . 3 . 5$; $210 = 2 . 3 . 5 . 7$.

V zápise se podtrhnou prvočísla 2, 3, 5, která jsou společnými děliteli daných čísel.

Otázka: jaký je nejmenší společný dělitel našich čísel? V daném případě žáci mohou odpovědět: „číslo 2“. To je správné. Nemá se namítat, že jak výše bylo řečeno, každé číslo má dělitele 1, že tedy 1 je nejmenší společný dělitel všech čísel. Potom žáci udávají několik složených dělitelů každého z daných čísel a vybírají z nich společné dělitele všech tří čísel: 6, 10, 15, 30. Který z nich je největší společný dělitel? Jak se k němu dospěje? Když žáci prodělají několik podobných cvičení, pochopí definici největšího společného dělitele, která je v učebnici, a pochopí způsob jeho vyhledávání.

V dalším při vyhledávání největšího společného dělitele čísel (nejprve dvou, potom tří a více čísel)

$$\begin{array}{l} 180 = 2 . 2 . 3 . 3 . 5 \\ 540 = 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 5 \\ 630 = 2 . 3 . 3 . 5 . 7 \\ \hline \text{Nsd}^{18)}\ 2 . 3 . 3 . 5 = 90 \end{array}$$

vysvětlíme (a přesvědčíme se), že podíly, které dostaneme, dělíme-li daná čísla jejich největším společným dělitelem, jsou čísla nesoudělná.

V některých případech žáci znajíce vlastnosti čísel mohou na ráz udat (zpaměti) největšího společného dělitele čísel. Na příklad největší společný dělitel tří čísel 300, 500, 700, je číslo 100; největší společný dělitel čísel 150, 300, 450 je číslo 150. Zejména je vhodné tomu žáky naučit v tom případě, že jedno z daných čísel je jejich největším společným dělitelem, jako ve druhém z uvedených příkladů.

Na příkladech se vysvětlí, že 1. největší společný dělitel několika čísel nemůže být větší nežli nejmenší dané číslo, 2. že každý společný dělitel čísel je dělitelem jejich Nsd.

[18]) Nsd: zkratka pro největšího společného dělitele.

Nesoudělná čísla

Na příkladech se dojde k tomu, že mohou být dvě čísla, která nemají jiného společného dělitele nežli 1, tedy čísla, jejichž Nsd je roven 1. Podá se definice dvou nesoudělných čísel. Při tom se na příkladech pečlivě vyloží, že dvě nesoudělná čísla[19]) nemusí být prvočísla; na příklad čísla 25 a 12 jsou nesoudělná, ale každé z nich je číslo složené. Určování Nsd nemá pro školu praktický význam; zřídka se ho užívá při krácení zlomků, nicméně později při krácení zlomků je třeba poukázat na to, že postupné dělení čitatele i jmenovatele jednotlivými společnými prvočiniteli vyžaduje mnoho času, že je lepší krátit libovolnými společnými činiteli, a že můžeme na ráz dělit největším společným dělitelem čitatele a jmenovatele zlomku, je-li snadné jej určit, a tím po zkrácení dospět na ráz ke zlomku, jehož čitatel a jmenovatel jsou čísla nemající jiného společného dělitele nežli 1 (zlomek v základním tvaru), t. j. čísla nesoudělná.

§ 10. Společný násobek čísel. Nejmenší společný násobek

Provedení výše uvedených předběžných cvičení na osvojení pojmů a výrazů „násobek" a „dělitel", pečlivost při probírání každého z uvedených cvičení může zabránit matení pojmů „násobek", dělitel", „nejmenší společný násobek", „největší společný dělitel", které se v přítomnosti pozoruje při revisi kontrolních prací.

Cvičení. Začne se řešením příkladů v těch případech, kdy se žádá určit nsn[20]) 1. nesoudělných čísel, 2. čísel, z nichž jedno je dělitelné všemi ostatními.

1. Jsou dána dvě čísla 5 a 7. Které číslo je dělitelné i pěti i sedmi (je násobkem i pěti i sedmi)? Takové číslo se jmenuje společný násobek čísel 5 a 7. Jsou ještě jiná čísla dělitelná i pěti i sedmi? Udat některá z nich.

[19]) Nesoudělná čísla se v mnoha jazycích, také v ruštině, nazývají relativní prvočísla (vzaimno prostyje čisla). Výrazu „nesoudělná čísla" se někdy užívá u více než dvou čísel, na př. 3, 5, 6; lépe je říkat přesněji „čísla, jejichž největší společný dělitel je roven 1". O více než dvou nesoudělných číslech se někdy mluví v tom smyslu, že každá dvě z nich jsou nesoudělná, na př. 3, 8, 25 nebo 7, 8, 15 atd.

[20]) „nsn" — zkratka pro nejmenší společný násobek.

2. Jsou dána dvě čísla 3 a 4. Napsat násobky každého z nich:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ...

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, ...

Vybrat z nich společné násobky obou čísel 3 a 4. Udat jiné násobky obou čísel 3 a 4 mimo 12 a 24. Který ze všech udaných společných násobků je nejmenší společný násobek? Kolik můžeme udat společných násobků těch dvou čísel? Kolik můžeme udat nejmenších společných násobků?

3. Které číslo bude společným násobkem čísel 6, 12, 36? Které bude nejmenším společným násobkem?

4. Který bude nejmenší společný násobek čísel 7 a 3? 9 a 8? atd. Jmenovat také jiná čísla, která jsou násobky obou čísel 7 a 3, 9 a 8. Jak se najde nsn v tomto případě? v předešlém případě? ve cvičení 3?

5. Jmenovat několik společných násobků čísel 2, 3, 4; jmenovat nejmenší společný násobek těchto čísel. Proč stačí v tomto případě najít nsn čísel 3 a 4? (Protože číslo dělitelné čtyřmi musí býti také dělitelné dvěma.) Proč si neklademe úlohu najít největší společný násobek těch čísel?

Poznámka. Je účelné začít úlohu nalézti nsn speciálním případem výše vyloženým. Ježto však je nebezpečí, že žáci znajíce tento případ, budou methody pro něj platné užívat i na případ dvou soudělných čísel, t. j. budou udávat společný násobek místo nsn, musí učitel pečlivě vyjasnit na příkladech, třeba se dvěma dvojcifernými soudělnými čísly, že jejich součin nebude jejich nsn, a že užívání kteréhokoli společného násobku čísel místo nsn je neracionální, ježto činí výpočet značně složitějším.

6. Methoda nalezení nejmenšího společného násobku čísel rozkladem na prvočinitele vysvětlí se žákům na příkladech následujícím způsobem. Máme najít číslo, které je násobkem čísla 72 i čísla 108, t. j. máme najít číslo, jehož rozklad obsahuje všecky prvočinitele obou čísel 72 i 108. Takovým číslem bude arci součin 72 . 108 daných čísel. My však chceme najít nsn, proto rozložíme daná čísla na prvočinitele:

$$
\begin{array}{rl}
72 = & 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \\
108 = & 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \\
\hline
\text{nsn} & 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 216.
\end{array}
$$

Číslo 216 je dělitelné číslem 72, protože obsahuje všecky prvočinitele tohoto čísla; z téže příčiny je 216 dělitelné číslem 108. Je výhodné vzít napřed všecky prvočinitele čísla 108 a přidat další prvočinitele čísla 72 (není důvodu, proč bychom násobili všemi prvočiniteli čísla 72).

Uvedenou methodou se žákům vysvětlí na mnoha příkladech následující: aby číslo bylo společným násobkem dvou (nebo více) čísel, k tomu je nutné a stačí, aby ono číslo obsahovalo všecky prvočinitele všech daných čísel, při čemž se musí přihlížet také k opakování činitelů; jestliže prvočinitel 2 se vyskytne u jednoho z daných čísel třikrát, musí se také u společného násobku vyskytnout aspoň třikrát.

Ve výše uvedeném případě můžeme prověřit, že číslo 216 bude nejmenším společným násobkem čísel 108 a 72, jestliže v jeho rozkladu na prvočinitele vypustíme jednoho činitele (jinak nemůžeme žáky přesvědčit, že právě toto číslo bude nejmenším společným násobkem).

Je však užitečné položit zde následující otázku: dělíme-li nalezený nejmenší společný násobek 216 jedním z daných čísel, třeba číslem 72, jaký bude podíl při tomto dělení? A žáci si navykají odpovídat na tuto otázku netoliko dělením, nýbrž také porovnáním rozkladů čísel 72 a 216 (72 musíme násobit zbývajícím prvočinitelem 3[21]), abychom dostali 216; 216 musíme dělit třemi, abychom dostali 72). Toto cvičení také ulehčuje práci při uvádění zlomků na společného jmenovatele.

7. Obecné pravidlo pro nalezení nejmenšího společného násobku dvou (a také více než dvou) čísel se udává ve znění jako v učebnici. Velmi důležité je navykat žáky, aby psali napřed prvočinitele toho čísla, které jich má nejvíce, na příklad:

$$
\begin{array}{rlcl}
 & & & \text{Zbývající prvočinitelé} \\
210 = & 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 & & 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \\
360 = & 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 & & 7 \\
140 = & 2 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 7 & & 2 \,.\, 3 \,.\, 2 \\
315 = & 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 & & 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \\
\hline
\text{nsn} & 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 = 2520. & &
\end{array}
$$

[21]) V obecném případě může být několik zbývajících prvočinitelů.

K prvočinitelům čísla 360 bylo třeba připojit jenom jednoho dalšího prvočinitele 7 a lehko se dal počítat nsn ve tvaru 360 . 7 = 2520.

Určování zbývajících prvočinitelů je užitečné cvičení, ale není nutné prováděti je pokaždé při hledání nsn čísel.

Je užitečné seznámit žáky s jiným způsobem zápisu při vyhledávání nsn:

210	360	140	315	2
105	180	70	315	2
105	90	35	315	2
105	45	35	315	3
35	15	35	105	3
35	5	35	35	5
7	1	7	7	7
1	1	1	1	

nsn $2^3 . 3^2 . 5 . 7 = 2520$.

8. V učebnicích aritmetiky se obyčejně udávají tři případy při vyhledávání nsn:

a) daná čísla jsou nesoudělná (nsn se určí jako jejich součin);

b) jedno z daných čísel je násobek ostatních (to číslo samo je nsn);

c) obecný případ.

První dva případy jsme probírali výše, ale je nutné je znovu zopakovat na základě obecného pravidla pro určení nsn. Jinak si může žák utvořit nesprávnou představu, že běží o samostatné případy a nikoli jen o takové případy zvláštní, ve kterých se rychleji dojde k výsledku.

9. My jsme neprobírali hlavní otázku z theorie dělitelnosti — Euklidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele čísel, protože tato otázka se v 5. třídě neprobírá.[22])

Krátce věc vysvětlíme.

Euklidův algoritmus pro stanovení Nsd dvou čísel „postupným dělením“.

Vyhledání Nsd dvou čísel A a B ($A > B$; A a B přirozená čísla) zakládá se na vyšetření rovnosti

[22]) Neprobírali jsme také určování nsn čísel pomocí jejich Nsd. V každém kurse theoretické aritmetiky se najde výklad o těchto otázkách. Bohužel v dalších ročnících při algebře na střední škole otázka dělitelnosti čísel (mnohočlenů) se neprohlubuje.

$$A = B \,.\, q + r,$$

kde q je podíl při dělení $A : B$ a r je zbytek při tomto dělení; $r < B$.

1. Jestliže $r = 0$, pak B je Nsd čísel A a B, t. j. v případě, že jedno z daných čísel je dělitelem druhého, je prvé číslo Nsd.

2. Jestliže $r \neq 0$, tu protože $B > r$, platí rovnost

$$B = r \,.\, q_1 + r_1, \; r_1 < r.$$

Vyhledání Nsd čísel A a B můžeme převésti na vyhledání Nsd čísel B a r; a dále, ježto $r > r_1$

$$\begin{aligned} r &= r_1 q_2 + r_2, & r_2 &< r_1 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3, & r_3 &< r_2 \text{ atd.} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n. \end{aligned}$$

Přirozená čísla $B > r > r_1 > r_2 > \ldots > r_{n-1} > r_n$ stále klesají, proto nutně se dospěje k případu $r_n = 0$; to bude znamenat, že číslo r_{n-2} je dělitelné číslem r_{n-1} beze zbytku; r_{n-1} bude největší společný dělitel čísel r_{n-2} a r_{n-1}, čísel r_{n-3} a r_{n-2} atd., čísel r_2 a r_1, čísel r_1 a r, r a B i daných čísel A a B.

Při tom mohou nastat případy: 1. když $r_{n-1} = 1$, tu čísla A a B jsou nesoudělná, 2. když $r_{n-1} \neq 1$.

Příklady. 1. Najít největšího společného dělitele čísel 35, 29; $35 = 29 \,.\, 1 + 6$; $29 = 6 \,.\, 4 + 5$; $6 = 5 \,.\, 1 + 1$; $5 = 1 \,.\, 5 + 0$. Čísla 35 a 29 jsou nesoudělná.

2. Najít největšího společného dělitele čísel 216 a 126.

$$\begin{aligned} 216 &= 126 \,.\, 1 + 90 & 216 &= 18 \,.\, 7 + 18 \,.\, 5 = 18 \,.\, 12 \\ 126 &= 90 \,.\, 1 + 36 & 126 &= 18 \,.\, 5 + 18 \,.\, 2 = 18 \,.\, 7 \\ 90 &= 36 \,.\, 2 + 18 & 90 &= 18 \,.\, 4 + 18 = 18 \,.\, 5 \\ 36 &= 18 \,.\, 2 + 0 & 36 &= 18 \,.\, 2. \end{aligned}$$

Největší společný dělitel čísel 216 a 126 je roven číslu 18.

Tento způsob určování největšího společného dělitele dvou čísel se nazývá postupné dělení. Zápis se provádí obyčejně takto:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & & & 216 & : & 126 \\ \cline{5-7} & & 126 & : & 90 & & 1 \\ \cline{3-5} 90 & : & 36 & & 1 & & \\ \cline{1-3} 36 : 18 & & 2 & & & & \\ \hline 0 \quad 2 & & & & & & \end{array}$$

	1	1	2	2
216	126	90	36	18
90	36	18	0	

Pravidla. Abychom našli Nsd dvou čísel „postupným dělením", dělíme větší dané číslo menším. Je-li zbytek roven nule, bude menší číslo hledaným Nsd. Jestliže zbytek při dělení většího čísla menším není roven nule, dělíme menší číslo prvním zbytkem, potom dělíme první zbytek druhým, druhý třetím atd., dokud nedojdeme ke zbytku rovnému nule. Potom poslední dělitel (t. j. poslední zbytek různý od nuly) bude Nsd daných čísel.

Zvláště jest při tom zdůraznit tu myšlenku, že methoda postupného dělení dává možnost určit největšího společného dělitele dvou nebo několika čísel bez rozkládání na prvočinitele.

Při určování Nsd tří nebo více čísel „postupným dělením" najdeme nejprvé Nsd dvou daných čísel, potom najdeme Nsd nalezeného čísla a třetího daného čísla atd.

Poznámky. 1. Podíly při dělení dvou daných čísel jejich největším společným dělitelem jsou čísla nesoudě ná: podíly při dělení tří nebo více daných čísel jejich Nsd nemusí býti čísla (po dvou) nesoudělná. K tomuto faktu snadno dojdeme na příkladech a snadno jej vysvětlíme.

2. Vlastnosti Nsd se neprobírají na střední škole (rovněž tak základní věty o dělitelnosti § 2), ale je snadné všímati si jich na zvláštních případech probíraných mimo třídu se žáky (i z vyšších tříd), kteří se zajímají o tyto otázky, na př.: 1. číslo, které je dělitelem všech daných čísel, je také dělitelem jejich Nsd a obráceně každý dělitel Nsd daných čísel je společným dělitelem všech daných čísel, 2. jestliže daná čísla znásobíme týmž (přirozeným) číslem, pak se také Nsd znásobí tím číslem, a jestliže všecka daná čísla dělíme některým jejich společným dělitelem, musíme také Nsd dělit týmž číslem.

Na základě poslední vlastnosti můžeme zjednodušit práci při určování Nsd (užívá se stále při určování Nsd dvou mnohočlenů); na př. Nsd čísel 56 000 a 84 000 rovná se Nsd čísel 56 a 84 násobenému tisícem, t. j. rovná se 28 000.

3. Methoda určení nsn dvou čísel pomocí jejich Nsd: „nsn dvou čísel rovná se jejich součinu dělenému jejich Nsd".[23])

Vskutku nsn dvou daných čísel dostaneme, jestliže jedno z daných čísel A znásobíme zbývajícími prvočiniteli druhého čísla B, t. j. jestliže A znásobíme

[23]) Důkaz se najde v každém kurse „Teoretické aritmetiky".

číslem $\frac{B}{D}$, kde D je Nsd čísel A a B; $M = \frac{A \cdot B}{D}$. Na př. nejmenší společný násobek čísel 35 a 50 je roven $\frac{35 \cdot 50}{5} = 350$, kde 5 je jejich Nsd.

Poznámka. Podíly při dělení nsn dvou čísel těmito čísly jsou čísla nesoudělná.

§ 11. Práce mimo třídu. Slovní úlohy

V § 1 této kapitoly byly dány pokyny k vedení aritmetické práce mimo třídu ve spojení s rozbíranou látkou. Mimo to:

1. Jest užitečné provádět cvičení na určování zbytku při dělení devíti. *Otázky*: je číslo 35 687 dělitelné devíti? proč ne? jaký se dostane zbytek?

Pokyn: 35 687 = 30 000 + 5000 + 600 + 80 + 7. Sečteme-li zbytky při dělení jednotlivých řádů devíti, dostaneme, jak je nám známo, číslo 3 + 5 + + 6 + 8 + 7 = 29. Číslo 35 687 by bylo dělitelné devíti, kdyby součet těchto zbytků (součet cifer) byl dělitelný devíti; ale 29 není dělitelné devíti, zbudou 2 nerozdělené jednotky, to znamená, že zbytek při dělení 35 687 : 9 rovněž je roven 2.

Čemu se rovná zbytek při dělení 5 738 102 : 9? Zbytek je roven 8.[24]) Přemýšliví žáci mohou si všimnouti, že jestliže součet cifer čísla je několikaciferné číslo, tu při usuzování o dělitelnosti devíti nebo při určování zbytku při dělení devíti můžeme vypočíst druhý součet cifer, potom třetí atd., až dospějeme k jednocifernému součtu cifer, který udává zbytek při dělení původního čísla devíti (nevylučujíc případ zbytku 0).

2. Uvedených vlastností čísla 9 bylo nejednou užito jak k theoretickým a praktickým závěrům tak i k sestavení všelikých zajímavých úloh na uhodnutí myšleného čísla atd.[25])

Na vlastnosti zbytku při dělení devíti vyložené v odstavci 1 je založena zkouška aritmetických výkonů pomocí čísla 9 (7, 11) dříve velmi rozšířená, nyní málo užívaná. Odkazujíce na příslušnou literaturu[26]) (samostatné odvození není také pro učitele obtížné) uvedeme devitkovou zkoušku násobení několikaciferných čísel:

---

[24]) Pravíme: „Číslo a součet jeho cifer dávají týž zbytek při dělení devíti (nebo číslo a součet jeho cifer jsou shodné podle modulu 9)“.

[25]) Příklady se najdou v knížkách Ingat'jeva a Ljamina doporučených výše za žákovskou četbu.

[26]) Najde se ve francouzských kursech aritmetiky od Bertranda a Serreta, které byly přeloženy do ruštiny, a v ruských kursech aritmetiky od Malinina a Burenina, Kjurzena a jiných.

Násobenec	Násobitel	Součin	
526 438	42 217	22 224 633 046	
28	16	34	součet cifer
10	$\boxed{7}$	$\boxed{7}$	druhý součet cifer
$\boxed{1}$			třetí součet cifer.

Součin 1 . 7 = 7. Chyba se neobjevila. Nicméně není zaručeno, že násobení bylo provedeno správně: při násobení mohla být učiněna chyba dělitelná devíti. Tato devítková zkouška je velmi jednoduchá, ale jak jsme už řekli výše, žádná zkouška neposkytuje plnou záruku za správnost provedeného výkonu (obyčejně se devítková zkouška provádí poněkud složitěji než jak je zde naznačeno).

Vysvětlení.

$$N_1N_2 = (9q_1 + r_1)(9q_2 + r_2) = \text{násobek } 9 + r_1r_2,\text{[27]}$$

t. j. zbytek při dělení devíti součinu dvou čísel je roven zbytku při dělení devíti součinu zbytků, které dostaneme při dělení obou daných čísel devíti.

V případě dělení se zbytkem, na př. 56 879 : 325, podíl 175, zbytek 4: 56 879 = 325 . 175 + 4. Zbytky při dělení devíti pravé a levé strany této rovnosti mají buďto si býti rovny nebo se mohou od sebe lišit o násobek devíti.

$$56\,879 = \text{nás. } 9 + 8$$
$$325 \,.\, 175 + 4 = \text{nás. } 9 + (1 \,.\, 4 + 4) = \text{nás. } 9 + 8.$$

3. V osnovách střední školy se nemluví o znacích dělitelnosti čísly 7, 11, 13, 37, ani o devítkové zkoušce atd., ale při práci v kroužku může učitel probírat se žáky tyto otázky opíraje se o příslušnou literaturu. Výše bylo námi uvedeno odůvodnění znaku dělitelnosti jedenácti. Avšak 1001 = 7 . 11 . 13; proto můžeme udat společný znak dělitelnosti kterýmkoli z těchto tří čísel, totiž: rozložíme číslo na skupiny od pravé strany k levé, dávajíce tři cifry do jedné skupiny; sečteme čísla v sudých skupinách, sečteme čísla v lichých skupinách a odečteme jeden součet od druhého.

Jestliže jako rozdíl vyjde nula nebo číslo dělitelné sedmi nebo jedenácti nebo třinácti, je také dané číslo dělitelné sedmi, jedenácti nebo třinácti. Na příklad podle tohoto znaku snadno zjistíme i o velmi velikém čísle 14 583 206 331 100, že je dělitelné jedenácti, protože

$$\begin{array}{r} 14 \\ +\ 206 \\ 100 \\ \hline 320 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 583 \\ +\ 331 \\ \hline 914 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 914 \\ -\ 320 \\ \hline 594 \end{array}$$

594 je dělitelné jedenácti. Dané číslo není dělitelné ani sedmi ani třinácti.

[27]) $N_1N_2 \equiv r_1r_2$ (mod. 9); součin dvou čísel je shodný podle modulu 9 (dává týž zbytek při dělení devíti) se součinem zbytků vzniklých při dělení těch čísel devíti.

Slovní úlohy

Je velmi užitečné ukázat žákům, jak se dá užít vyhledávání nsn k řešení slovních úloh. Na obecné škole se neřeší takové úlohy. V 5. třídě se obyčejně pouze utvrzuje výcvik ve vyhledávání nsn a nevěnuje se žádný čas řešení slovních úloh. Takové úlohy můžeme řešit se žáky mimo vyučovací dobu; mnohé z nich se řeší zpaměti a vyžadují pouze nevelikého důvtipu žáků. Na příklad:

Úloha 1 (sbírka úloh, kap. III, č. 538): „Ze dvou spojených ozubených kol jedno má 28 a druhé 16 zubů. Před začátkem pohybu byly vyznačeny křídou dva do sebe zapadající zuby těch kol. Po kolika otáčkách prvního i druhého kola spojí se znovu obě značky?"

Řešení: nsn čísel 28 a 16 je roven $28 . 4 = 112$; spojení značek nastane, když první kolo provede $112 : 28 = 4$ (otáčky) a druhé kolo $112 : 16 = 7$ (otáček).

Úloha 2 (č. 539): 4 koně objíždějí kruhovou dráhu. První kůň oběhne dráhu za 20 minut, druhý za 15 minut, třetí za 12 minut a čtvrtý za 10 minut. Jestliže vyjedou zároveň z téhož začátečního místa, po kolika minutách projdou opět zároveň všichni týmž místem? Kolik kruhů objede za tu dobu každý kůň?"

Řešení: nsn daných čísel je 60; za 60 minut se setkají všichni koně opět na výchozím místě. Tedy první kůň provede 3 objížďky, druhý 4, třetí 5 a čtvrtý 6.

Úloha 3 (č. 540): „Podél cesty jsou počínajíc místem A umístěny sloupy ve vzdálenosti 45 m. Tyto sloupy bylo rozhodnuto přemístit tak, aby, počínajíc zase sloupem v místě A vzdálenosti sloupů byly 60 m. Jak daleko od bodu A je nejbližší sloup, který je možné ponechat na jeho místě?"

Řešení: nsn čísel 45 a 60 jest 180.

Odpověď: ve vzdálenosti 180 m.

§ 12. Příklady cvičení pro kontrolní práci

1. Vypsat jednociferné, dvojciferné dělitele čísel jako 64, 96 a jiných.

2. Rozložit číslo na prvočinitele.

3. Najít číslo, jehož prvočinitelé jsou dáni.

4. Najít společné dělitele čísel.

5. Napsat čísla dělitelná daným číslem a danými čísly, na příklad čísly 7 a 9, 5 a 6, 6 a 8 a pod.

6. Určit největšího společného dělitele tří trojciferných čísel.

7. Určit nejmenší společný násobek tří trojciferných čísel.

8. Řešit slovní úlohu.

Vzory otázek na prověření znalosti látky.

1. Udat definici pojmu a uvést příklady: prvočíslo, složené číslo, dělitel, násobek, nesoudělná čísla, společný dělitel, společný násobek, největší společný dělitel, nejmenší společný násobek.

2. Formulovat znak dělitelnosti číslem 2, 3, 4, 5, 9, 25.

3. Rozložit číslo na prvočinitele a určit číslo ze známých jeho prvočinitelů.

Poznámka. Poněvadž věta, na které je založena methoda vyhledávání největšího společného dělitele postupným dělením, obyčejně je žákům neznámá, může tato methoda být žákům vyložena při práci v kroužku.

KAPITOLA VIII.

ZLOMKY

§ 1. Pořádek probírání látky

Nauka o zlomcích, jak známo, působí při vyučování veliké potíže vzhledem k těm nezbytným abstrakcím, které je nutné zde ponejprv zavést do kursu aritmetiky. Zároveň však trvalé osvojení nauky o zlomcích má podstatný význam pro naši střední školu. To je základ matematického vzdělání; celá další látka se opírá o žákovskou znalost zlomků.

Spornou otázkou methodiky zlomků jest otázka pořadí při vyučování o zlomcích, obyčejných i desetinných: zdali desetinným zlomkům, jako zvláštnímu případu obyčejných zlomků, má se vyučovat až po obyčejných zlomcích či zda učení o desetinných zlomcích má se naopak umístit před učení o obyčejných zlomcích. Tradiční škola, jak známo, věrná zásadě abstraktně deduktivní methody vyučování matematice řešila tuto otázku jednoduše: desetinné zlomky se probíraly za obyčejnými, t. j. nejprve se vykládala theorie zlomků a potom užití theorie na desetinné zlomky. Ale praktikové se tohoto systému nedrželi vždycky důsledně; tak pravidlo násobení a dělení desetinných zlomků se odvozovalo často ne na základě příslušných pravidel výkonů s obyčejnými zlomky, nýbrž na základě změny součinu způsobené změnou činitelů. Na tento směr ve vyučování zlomkům v předrevoluční škole mělo nepochybně vliv velice stručné probírání desetinných zlomků v nejrozšířenějších učebnicích elementární matematiky ze 17. a 18. stol., ve kterých takové omezení bylo plně oprávněné vzhledem k tomu, že té doby ještě nepronikla dekadická soustava měr a proto výpočty s desetinnými čísly měly nepatrný praktický význam. Naproti tomu v západoevropských osnovách zastánců reformy ve vyučování matematice stojících za meranským programem nauka o desetinných zlomcích předcházela před naukou o obyčejných zlomcích, a kromě toho desetinným zlomkům se vyučovalo v přímé souvislosti s probíráním čísel celých a ne se zlomky.[1]) (Vý-

[1]) „Sbornik programm i instrukcij po prepodavaniju matematiki v Zapadnoj Jevrope", pod redakcí prof. D. M. Šincova. 1914.

raz „desetinné číslo" místo „desetinný zlomek" vyskytuje se v aritmetických příručkách z 18. stol.) Tento reformní směr pronikal stále více do školní praxe v západní Evropě i u nás před Velkou říjnovou revolucí i po ní. Nemálo bylo hlasů volajících po redukci času věnovaného obyčejným zlomkům; někdy byly vyslovovány také radikálnější návrhy — odstranit nauku o obyčejných zlomcích z osnovy střední školy a podržet pouze zlomky s nejčastěji se vyskytujícími jmenovateli: 2, 4, 8, 3, 5, 6, 9, 10, 100.

Jaké pak důvody udávají zastánci toho, aby se napřed učilo o desetinných zlomcích? V první řadě to, že výkony s desetinnými zlomky jsou jednodušší nežli stejné výkony s obyčejnými zlomky; potom to, že výkony s desetinnými zlomky se provádějí obdobně jako výkony s celými čísly a že desetinné zlomky představují přirozené rozšíření desítkové numerace a že proto je účelné sblížit desetinné zlomky s celými čísly. Při tom zastánci tohoto pořadí kursu neupírají logické závady takové soustavy; na příklad nepopírají, že v případě násobení a dělení zlomků se užívá zákona o změně výsledku na výkon pojmově nevysvětlený, ale mají za to, že pedagogické přednosti takového postupu mluví pro jeho zavedení.[2])

Mezi zastánce názoru, že kurs obyčejných zlomků se má krajně omezit nebo úplně odstranit, patří ti, kteří vidí jediný cíl vyučování aritmetice (a vůbec matematice) v úzce praktické úloze naučit ve škole jen těm znalostem, kterých mohou žáci bezprostředně využít v praktickém životě. Z toho názoru docházejí k závěru, že nauce o obyčejných zlomcích se má věnovat jenom tolik času, kolik je nutno, aby žáci získali nejzákladnější představy a mohli jich v jednotlivých případech užívat ke zkrácení výpočtů. S těmito názory souvisí také protesty učitelstva proti umělým příkladům se složitými jmenovateli, jaké se často objevovaly ve sbírkách úloh v oddíle o obyčejných zlomcích. V Americe takové zjednodušené kursy zlomků se vyskytují v učebnicích určených pro obecné školy.

My považujeme za nesprávné začínat probírání zlomků desetinnými zlomky i z historických i z vědeckých důvodů a tvrdíme, že

[2]) Neuvádíme zde další důvody zastánců toho, aby se napřed vyučovalo o desetinných zlomcích. Zájemce o tuto otázku odkazujeme na knihu: „Pedagogika matematiki", Mroček a Filipovič. 1910.

předchozí úplné probrání desetinných zlomků bylo by možné jenom tak, že by se při vysvětlování podstaty násobení a dělení desetinným zlomkem udávaly příslušné definice a důvody nezávisle od nauky o obyčejných zlomcích, že by se na příklad násobení desetinným zlomkem definovalo jako opakované sčítání vhodných desetinných částí násobence atd. Ale stěží je možné shledávat účelným: 1. přenášení všech obtíží, které jsou spojeny s pojmem násobení a dělení zlomkem, do kursu desetinných zlomků a z toho pramenící zvýšení těch potíží, jelikož násobení a dělení obyčejným zlomkem je snáze pochopitelné, 2. stěží je možné shledávat účelným dvojí rozbor jedné a téže otázky, totiž násobení a dělení desetinným zlomkem — případ zvláštní, a potom obyčejným zlomkem — případ obecný.

Poznámka. Je třeba se také zmínit o tom, že ve školní praxi se vyskytovalo takové uspořádání kursu, při kterém se násobení a dělení desetinných čísel probíralo v 5. třídě zároveň s týmiž výkony u obyčejných zlomků a jako jejich zvláštní případ, avšak sčítání a odčítání desetinných zlomků se probíralo odděleně od obyčejných zlomků podle obdoby s výkony s celými čísly.

V naší sovětské škole nařízení CK VKS(b) „O škole“ přetalo všecky zjednodušovací pokusy při probírání aritmetiky a položilo požadavek vychovat plně vzdělané budovatele socialismu, ovládající základy věd. V souhlase s tím se v osnově aritmetiky pro střední školu zavádí systematický kurs (jehož strukturu budeme podrobně rozbírati) obyčejných i desetinných zlomků, při čemž se na desetinné zlomky nazírá jako na zvláštní případ obyčejných zlomků.

Učitel, když se žáky 5. třídy přistupuje k probírání oddílu „Obyčejné zlomky“, nejprve si ověří znalosti o zlomcích, které si žáci přinesli z obecné školy, a na tomto základě buduje systematický kurs.

§ 2. Historické poznámky. Práce mimo třídu

Jako při opakování numerace celých čísel i při budování kursu zlomků je vhodné sdělit žákům historické poznatky o zlomcích (tytéž literární prameny). Je zajímavé uvést žákům shody i rozdíly mezi jednotlivými centry ve vývoji nauky o zlomcích, jak se rozvíjela u Egypťanů, Babyloňanů, Římanů a Indů. Žáci vědí, že babylonští matematikové užívali šedesátkové číselné soustavy, při čemž, což je obzvláště důležité, užívali místních hodnot cifer na rozdíl na příklad od Egypťanů. Místní význam cifer byl Babyloňany přenesen také na cifry stojící na pravo od základních jednotek, t. j. oni zapisovali zlomky v šedesátkové soustavě právě tak, jako my to dnes činíme v soustavě desítkové.

Zlomek $\frac{1}{2}$ zapisovali jako zlomek s čitatelem 30 a jmenovatelem 60; zlomek $\frac{1}{3}$ ve tvaru zlomku s čitatelem 20; zlomek $\frac{7}{90}$ zapisovali ve tvaru $\frac{4}{60} + \frac{40}{60^2}$ (žáci mohou ověřit rovnost). Zajímavé je uvésti příklad zápisu zlomku podle babylonských matematiků

$$10\frac{4}{60} \begin{smallmatrix}<\\<\end{smallmatrix} \frac{11}{60^3} + \frac{32}{60^4},^{3)}$$

kde mezi sčítanci $\frac{4}{60}$ a $\frac{11}{60^3}$ se objevuje značka $\begin{smallmatrix}<\\<\end{smallmatrix}$, která zřejmě poukazuje na to, že schází zlomek se jmenovatelem 60^2, t. j. hraje roli naší nuly.

Toto zavedení posiční soustavy zápisu zlomků silně usnadnilo Babyloňanům počítání s nimi, zejména sčítání a odčítání, při vyhledávání společného jmenovatele. Všecky čtyři výkony se zlomky byly známé babylonským matematikům a šedesátkové zlomky Babyloňanů prokázaly nesmírné služby při vědeckých výpočtech řeckých astronomů, arabských a středověkých učenců:

$$\left[\text{úhel } a^0\, b'\, c'' \text{ znamená } \left(a + \frac{b}{60} + \frac{c}{60^2}\right)\right];$$

v 16. stol. ustoupily šedesátkové zlomky desetinným, lépe odpovídajícím požadavkům praxe se zřetelem na desítkovou soustavu numerace.

Také je vhodné seznámit žáky s originálními methodami počítání se zlomky, které se vytvořily u **Egypťanů** v nejdávnější minulosti. Způsoby provádění všech 4 početních výkonů jsou vyloženy ve staroegyptském rukopise Ahmesově a v tak zvaném Rhindském papyru (byl rozluštěn v poslední čtvrtině 19. stol. a nyní se nachází v britském museu). Originalita egyptského počítání se zlomky tkví v tom, že s výjimkou dvou zlomků $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{3}$ Egypťané převáděli všecky ostatní zlomky na tak zvané kmenné zlomky, jejichž čitatel je roven jedné. Zlomky značili Egypťané tak, že napsali jmenovatele a nad něj dali znak zlomku neboli tečku. Ve všech případech, když by měl vzniknout zlomek s čitatelem různým od jedné, vyjádřili ten zlomek jako součet kmenných zlomků. Tak:

$\frac{2}{5}$ Egypťané brali jako součet zlomků $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{15}$, které psali vedle sebe neužívajíce znaku sčítání; zlomek $\frac{2}{13}$ psali: $\frac{1}{8}\ \frac{1}{52}\ \frac{1}{104}$; zlomek $\frac{5}{6}$ psali: $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ atd.

Podobná cvičení v rozkladu zlomků na sčítance, při čemž každý sčítanec je zlomek s čitatelem rovným jedné, jsou velmi užitečná a můžeme je s velkým úspěchem provádět v matematickém kroužku (níže jsou uvedeny nejjednodušší příklady). Pro usnadnění výpočtu sestavili egyptští učenci tabulky takového rozkladu zlomků tvaru $\frac{2}{2n+1}$, t. j. zlomků s čitatelem 2 a s lichými jmeno-

3) V dnešních symbolech.

vateli od 3 po 99, tedy od $n = 1$ po $n = 49$ a uváděli každý zlomek nejprve na tvar součtu zlomků s čitateli 2 a 1 a potom, užívajíce zmíněné tabulky, převedli každý zlomek na tvar součtu kmenných zlomků. Uvedeme příklad užití tabulky, užívajíce dnešního označování cifer a dnes obvyklých značek: závorek, $+$ a $=$.

Příklad:

$$\frac{5}{9} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{18}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{18}\right) = \frac{1}{9} + \frac{2}{6} + \frac{2}{18} =$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}.$$ [4])

Egyptská početní methoda velmi se rozšířila mezi Řeky a později mezi Araby. Ve středověku byly na ní založeny obchodní výpočty v Italii a v jiných zemích. Je zajímavé sledovat tyto dávné snahy vyjádřit zlomky jednak pomocí zlomků s čitatelem 1 (Egypťané), jednak pomocí zlomků se jmenovateli zvolenými podle určitého zákona (Babyloňané). U Babyloňanů každý zlomek se uváděl na tvar:

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{60} + \frac{b}{60^2} + \frac{c}{60^3} + \ldots; \text{ u Egypťanů: } \frac{m}{n} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \ldots.$$

Jednoduchost egyptského zapisování zlomků je pouze zdánlivá. Zacházení se zlomky je značně jednodušší při babylonském zapisování, protože se takto snáze provádějí početní výkony. Provádění výkonů se zlomky je při egyptském způsobu zapisování náramně pracné, když stojíme před úkolem uvedení na společného jmenovatele. Proto také babylonská soustava vytlačila egyptskou. Předností egyptského způsobu je to, že kterýkoli zlomek vždy lze uvésti na žádaný tvar. Při babylonském způsobu vyjadřování zlomků jsou pří ady, že zlomek se nedá vyjádřit ve tvaru konečného součtu zlomků, jako na př. zlomek:

$$\frac{2}{7} = \frac{17}{60} + \frac{8}{60^2} + \frac{34}{60^3} + \frac{17}{60^4} + \frac{8}{60^5} + \ldots,$$ [5])

kde 17, 8, 34 je perioda. V tomto případě je možné zapsat babylonským způsobem přibližnou hodnotu daného zlomku, jak tomu je i s dnešními desetinnými zlomky, jejichž předchůdci jsou babylonské zlomky.

Posléze v krátkých historických poznámkách při výkladu o vzniku zlomků je vhodné upozornit na to, že Římané užívali dvanáctkových zlomků. Vycházejíce od potřeby praxe Římané dávali přednost dvanáctkovým zlomkům, protože se jimi dají vhodně vyjádřit zlomky se jmenovateli 2, 3, 4, 6 často se vyskytující v praxi. Zajímavé je poznamenat, že římští pedagogové měli zajímavý methodický způsob při učení zlomkům, užívajíce jako konkretních příkladů vah, délek, peněz atd. Římský „as“, starobylá měděná mince vážící 1 libru, dělil se

---

[4]) Rozklad zlomku na součet zlomků není jednoznačný.

[5]) $\frac{2}{7} = \frac{\frac{2}{7} \cdot 60}{60} = \frac{17\frac{1}{7}}{60} = \frac{17}{60} + \frac{\frac{1}{7} \cdot 60}{60^2} = \frac{17}{60} + \frac{8\frac{4}{7}}{60^2} + \ldots$

na 12 uncí. Abstraktní zlomek $\frac{11}{12}$ nazývali „as bez unce", $\frac{6}{12}$ polovinou, $\frac{4}{12}$ třetinou, $\frac{3}{12}$ čtvrtinou atd., t. j. každý římský zlomek měl svůj pevný název. Sčítat i odčítat takové zlomky nebylo obtížné a v římských školách bylo hlavním úkolem vyučování aritmetice sčítání a odčítání zlomků. Postupem doby zlomky asu ztrácely svůj konkretní význam[6]) a začalo se jich užívat jako názvů pro abstraktní zlomky. Při provádění násobení a dělení jak ve vědeckých, tak i v praktických, zejména zemědělských, výpočtech užívali tabulek, bez nichž byly výpočty nadmíru složité a pracné.

Můžeme uvést žákům ještě čtvrté rodiště zlomků a početních method se zlomky, totiž **Indii.** Je třeba poznamenat, že indický způsob zapisování zlomků byl skoro takový jako náš; chyběla jim pouze zlomková čára; na př. $\frac{3}{7}$ psali $\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{7}$, $4\frac{3}{5}$ psali $\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{5}}$. Čtyři výkony prováděli podle pravidel dosti blízkých našim pravidlům. Jak známo, role Arabů v historii národů byla ta, že se stali prostředníky při seznamování Západu s methodami různých starověkých národů. Stopy všech uvedených pramenů jsou patrné u nejstarších spisovatelů, kteří byli vzorem pozdějším autorům, jako na příklad Stevinovi koncem 16. stol. v jeho kurse aritmetiky a jiným.

Jest zdůrazniti, že ještě v učebnicích z 18. stol., vykládajících nauku o celých a lomených číslech, uvádějí se ponejvíce pravidla, kterým se žáci učili nazpamět a kterých mechanicky užívali. Teprve až na sklonku 18. stol. se klade požadavek odůvodňování pravidel a pouček platných pro celá čísla při jejich užívání na počítání se zlomky a až začátkem 19. stol. proniká tento požadavek do vyučování aritmetice.

§ 3. Od theorie látky k vyučovací methodice

1. V současné vědě veškerá zobecnění pojmu čísla se opírají výhradně o základní pojem celých (kladných) čísel. Nová čísla se zavádějí proto, aby se došlo k určitému žádanému cíli, na příklad aby se staly proveditelné obrácené výkony v tom případě, že jsou neproveditelné v tom oboru, z něhož jsou vzata daná čísla: v případě, který teď probíráme, běží o nemožnost vyjádření výsledku dělení jednoho čísla a druhým číslem b v oboru přirozených čísel v tom případě, že čísla a a b jsou různá od nuly a že a není součtem sčítanců vesměs rovných b. Jsou různé vědecké theorie zlomků. Nejrozšířenější je theorie dvojic. Lomené číslo se definuje jako dvojice složená ze dvou celých čísel a a b $[a, b]$ daných v určitém pořádku. Ukládá se

[6]) F. KEDŽORI v „Istor. elem. mat." uvádí z Horatia rozhovor mezi učitelem a žákem. „Necht Albinův syn mi poví, kolik zbude, jestliže od 5 uncí ($\frac{5}{12}$) ubereme 1 unci ($\frac{1}{12}$)." *Žák*: „$\frac{1}{3}$". *Učitel*: „Výborně, ty dokážeš si chránit svůj majetek".

podmínka, že druhá složka b není rovna nule. Za známý se považuje pouze soubor celých čísel a početní výkony s nimi. Definuje se pojem rovnosti, pojmy větší a menší, pojem součtu a součinu dvou zlomků; zbývající výkony se zavádějí obvyklými definicemi. Takto definované výkony v rozšířeném číselném oboru musí vyhovovati týmž základním zákonům, které platí pro výkony s celými čísly. V tom spočívá tak zvaný princip permanence základních zákonů.[7])

$$[a, b] \text{ neboli } \frac{a}{b}.$$

Definice I. $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, jestliže $ab' = a'b$.

Důsledky: 1. Jestliže $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ a $\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$, pak $\frac{a}{b} = \frac{a''}{b''}$ (vlastnost transivity).[8])

2. $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$, $m \neq 0$ (základní vlastnost zlomku).

Definice II. $\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'}$, jestliže $ab' > a'b$.

Důsledky: 1. $\frac{a}{b} > \frac{a'}{b}$, jestliže $a > a'$.

2. $\frac{a}{b} > \frac{a}{b'}$, jestliže $b < b'$.

3. Jestliže $\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'}$ a $\frac{a'}{b'} > \frac{a''}{b''}$, pak $\frac{a}{b} > \frac{a''}{b''}$ (vlastnost transitivity).

Definice III. $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b} = \frac{a + a'}{b}$ (všecky zlomky můžeme uvésti na týž b na základě hlavní vlastnosti).

Pravidlo odčítání: $\frac{a}{b} - \frac{a'}{b} = \frac{a - a'}{b}$ při $a > a'$.

---

[7]) Viz S. P. VINOGRADOV, „Povtoritelnyj kurs algebry". I. V. Arnol'd, „Teorija čisel". Moskva 1939, kap. 1. „Teoretičeskaja arifmetika", Moskva 1938 a j.

[8]) Transitivita: jestliže $[a, b] = [a', b']$ a $[a', b'] = [a'', b'']$, pak $[a, b] = [a'', b'']$.
Vlastnost reflexivnosti: $[a, b] = [a, b]$.
Vlastnost symetrie: jestliže $[a, b] = [a', b']$, pak $[a', b'] = [a, b]$.

Definice IV. $\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$.

Pravidlo dělení: $\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{ab'}{ba'}$ při $a' \neq 0$.

Definice V. $\frac{a}{1} = a$.

Důsledky. 1. $\frac{a}{b} \cdot b = a$; 2. $\frac{1}{1} = 1$; 3. $\frac{a}{b} : 1 = \frac{a}{b}$.

2. Formálně logický výklad theorie (i když se to děje s konkretními ilustracemi) lomených čísel hodí se pouze pro dospělé žáky vyšších tříd ve tvaru přehledu, doplnění a systematisace dříve získaných vědomostí.

Ve známých Leçons d'arithmétique théorique et pratique, J. Tannery udává abstraktní definici zlomku jako dvojice celých čísel, ale definice výkonů s lomenými čísly a jejich smysl se objasňuje na konkretních příkladech s užitím konkretní představy o zlomku, o zavedených definicích a pravidlech a poukazuje se na to, že základní zákony výkonů, jejichž pravdivost pro celá čísla je nepochybná, rozšiřuje se i na lomená čísla.

3. Při výkladu kursu aritmetiky v 5. třídě vzhledem k věku a matematické připravenosti žáků vycházíme od konkretního objasnění zlomku, vysvětlujeme na konkretních příkladech účelnost zaváděných definic a žáci jen postupně dospívají k abstraktní představě zlomku.

Konkretní objasnění lomeného čísla: zlomek $\frac{a}{b}$ je b-tá část čísla a nebo a b-tých částí jednotky; $\frac{a}{bn}$ je n-tá část čísla $\frac{a}{b}$; znásobit $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n}$ znamená najít n-tou část čísla $\frac{a}{b}$; znásobit $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}$ je totéž jako najít m n-tých částí čísla $\frac{a}{b}$.[9])

[9]) Obrazem čísla $\frac{a}{b}$ na číselné ose je bod vzdálený od počátku o a b-tých částí jednotky měřítka (nebo úsečka). Celá čísla se jeví ze začátku jako protiklad čísel lomených, později vystupují jako zvláštní případ $\left(\frac{a}{1} = a\right)$.

4. Počáteční názornou představu o jednom dílu jednotky a o několika dílech (o zlomku) získávají žáci na obecné škole. Když se žáci poprvé seznamují se zlomky, vychází se od názorné představy dílu a zlomku, objasňují se nejjednodušší změny tvaru zlomku a výkony s díly. V 5. třídě v systematickém kursu aritmetiky se podstatně mění názorné představy, kterými se objasňují zlomky a výkony s nimi. Všecka obecná pravidla a důkazy se rozbírají a vyvozují na základě žákům známých vlastností výkonů s celými čísly, znaků dělitelnosti, rozkladů čísel na prvočinitele atd.

Vyučování o úpravách zlomků a o výkonech se zlomky (kap. VIII a IX) se doprovází retrospektivním přehledem příslušných oddílů theorie celých čísel.

§ 4. Zavedení lomeného čísla

1. Při analyse čísla jako výsledku čítání diskretních (nedělitelných) předmětů neboli výsledků čítání prvků souboru (množiny) bylo konstatováno, že dělení v mezích oboru celých čísel není vždy proveditelné. Tato nemožnost provedení operace dělení má svůj důvod v nedělitelnosti předmětů čítání. Žáci vědí, že nelze na příklad rozdělit rovnoměrně 3 jablka mezi čtyři děti tak, aby nebyl porušen objekt — jablko (individuum) — jako předmět čítání. Rovnoměrně lze rozdělit ne jablka, ale hmotu jablek; můžeme rozdělit rovnoměrně 3 pytle ovsa mezi 4 koně; 3 l vody (objem) přelít do 4 nádob tak, aby ve všech nádobách bylo rovnoměrně vody a pod. Ve všech těchto případech se ztrácí původní objekt čítání, původní jednotka čítání — jablko, pytel, litr — a místo něho se objevuje nová jednotka čítání — čtvrtina. $\left(\frac{1}{n} \cdot n = 1\right.$; nová jednotka $n$krát opakovaná dává původní jednotku$\left.\right)$.

Tímto způsobem se rozšiřuje pojem čísla jako jednotky čítání na základě téhož procesu čítání diskretních předmětů a operace čítání stává se přesně proveditelnou. Ale v podobných případech provedení dělení vyžaduje „lomení“ původního předmětu, na příklad rozkrájení jablka, rozstříhání listu papíru, které není vždy možné v oboru konkretních (pojmenovaných) čísel (nelze na př. rozdělit 3 péra nebo šípy mezi 4 chlapce a pod.)[10]), je však vždy možné v oboru abstraktních (nepojmenovaných) čísel. Takto se rozšiřuje pojem operace dělení zavedením pojmu rozdělení jednotky na části, rozšiřuje se pojem čísla zavedením lomeného čísla — nejprve jednoho dílu a potom souboru dílů (několika dílů) jednotky.[11])

Ačkoli to, co bylo řečeno, je žákům známo z aritmetiky na obecné škole, není neúčelné krátce zopakovati otázku zavedení lomeného čísla.

2. Zavedením lomených čísel vzniká otázka, jak s nimi prováděti výkony známé v dřívějším oboru celých čísel. V kapitole o celých číslech byly výkony s celými čísly vyloženy pomocí čítání. Z téhož hlediska můžeme vyložit také výkony s lomenými čísly s již uvedenou výjimkou násobení a dělení zlomkem. Případy

$$4\tfrac{1}{2} + 3\tfrac{3}{4};\ 5\tfrac{1}{2} \,.\, 3;\ 3 : 4;\ 5\tfrac{1}{2} : 3,\ 7 : 3$$

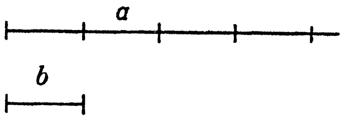
mají smysl, ač je třeba tyto výkony s lomenými čísly řádně definovati. Výklad je ve všech těchto případech naprosto jasný, ale úloha $7 \,.\, 4\tfrac{1}{3}$, t. j. číslo 7 vzít $4\tfrac{1}{3}$krát za sčítance, nebo úloha $7 : 4\tfrac{1}{3}$, t. j. rozdělit 7 na $4\tfrac{1}{3}$ stejných částí — tyto úlohy nemají z dosavadního hlediska vůbec žádný smysl a nemohou při tomto stanovisku vůbec vzniknout. Východiskem při těchto výkonech je druhý známý proces vedoucí k pojmu čísla, totiž proces měření (kolikrát je co obsaženo). Výsledek měření v převážné většině případů nedá se vyjádřit celým číslem (to bylo se žáky již probíráno, viz kap. II, § 4). Z toho vzniká nutnost rozšířit pojem čísla a vedle probraných čísel celých zavést nová čísla — lomená, která dávají možnost vyjádřit výsledek měření veličin úplně přesně nebo aspoň s dostatečným stupněm přesnosti.

[10]) Leda že rozdělení 3 per nebo 3 šípů mezi 4 účastníky provedeme formou dočasného užívání.

[11]) „Zlomkem nazýváme jeden díl nebo určitý počet dílů jednotky". KISELËV „Arifmetika", vyd. z r. 1938, § 116.

§ 5. Vznik lomeného čísla při měření[12]

Můžeme pokračovat v pokuse naznačeném v § 5 kap. II; budiž dána úsečka a; abychom změřili její délku, zvolíme za jednotku některou pevnou veličinu téhož druhu (metr, centimetr) a postupně nanášíme od počátečního bodu úsečky a úsečky zvoleué velikosti b jednu vedle druhé (obr. 16).



Obr. 16.

Přitom se může stát, že: 1. délku b můžeme nanést na úsečku a (celé číslo)-krát, na příklad čtyřikrát, a je-li jednotkou 1 cm, pravíme, že délka úsečky je rovná 4 cm a výsledek měření veličiny je číslo celé, 2. nanášejíce na úsečku a od jejího počátečního bodu úsečky b, dostaneme, že koncový bod úsečky a leží mezi čtyřnásobkem úsečky b; délka úsečky a je potom přibližně vyjádřena číslem 4, které je však poněkud příliš malé, nebo číslem 5, které zase je poněkud příliš velké. V tomto případě můžeme délkovou jednotku rozdělit (lomit) na nějaký počet stejných částí, třeba na 10, na n částí, a potom určit, kolikrát je jedna taková část obsažena v úsečce a. Přitom se může stát, že: 1. délka rovná $\frac{1}{10}$ úsečky b je obsažena přesně (celé číslo)-krát v úsečce a, na příklad 43krát; tu pravíme, že úsečka a obsahuje 43 desetiny neboli že výsledkem měření je lomené číslo $\frac{43}{10}$. Poznamenáme, že v tomto případě vznik zlomků při měření veličin tkví ve změně jednotky, v našem případě jednotky délky. Tak jestliže zvolíme za jednotku délky desetinu centimetru, délka úsečky je vyjádřena číslem 43 nových jednotek (desetin centimetru).

2. Při postupném nanášení úseček rovných $\frac{1}{10}$ úsečky b na úsečku délky a od jejího počátečního bodu nedospějeme ke koncovému bodu,

[12]) „... že zavedení racionálních a reálných čísel na základě pojmu měření nikterak není méně vědecké nežli na příklad zavedení racionálních čísel ve tvaru dvojic. Pro školu zavedení na základě měření má nepochybné výhody." Z předmluvy redaktora A. N. Kolmogorova ke knize H. Lebesguea „Ob izmerenii veličin".

nýbrž ten koncový bod leží mezi 43 a 44 desetinami úsečky *b*. Tudíž zlomky $\frac{43}{10}$ a $\frac{44}{10}$ budou přibližné hodnoty zdola a shora pro úsečku *a*. Pokračujeme-li v lomení jednotky *b* na velmi veliký počet částí, ježto každá část bude velmi malá, můžeme učinit chybu, která vznikne přijetím přibližné hodnoty veličiny, tolik malou, že ta chyba nebude míti praktického významu, nedá se rozeznat našimi měřickými pomůckami.[13])

Už v kapitole o veličinách bylo řečeno, že bez udání jednotky míry číslo, které se objeví jako výsledek měření, nedává představu o dané veličině. Říkáme, že výsledek měření je poměr jedné veličiny k veličině druhé zvolené za jednotku; a poměrem veličin *a* a *b*, který píšeme $\frac{a}{b}$, kde *a* a *b* jsou veličiny téhož druhu, nazýváme celé nebo lomené číslo, které je výsledkem měření veličiny *a*, jestliže zvolíme *b* za jednotku. Výsledek měření veličiny v každém případě nazýváme číslem. Při jedné volbě jednotky výsledek měření je vyjádřen jedním číslem (celým nebo lomeným), při jiné volbě jednotky jiným číslem:

1. jestliže měřená veličina je násobek veličiny zvolené za jednotku, pak číslo, které je výsledkem měření, je číslo celé;

2. jestliže měřená veličina je násobek nějaké známé části jednotky, pak číslo, které je výsledkem měření, nazývá se číslem lomeným neboli zlomkem; zlomek obdržíme tehdy, jestliže rozdělíme jednotku na nějaký počet rovných částí a vezmeme jednu nebo několik těchto částí.

Jestliže výsledkem měření je číslo celé, pak toto číslo udává, kolikrát je jednotka obsažena v měřené veličině; jestliže výsledkem měření je číslo lomené, pak toto číslo udává, jaká část jednotky a kolikrát je obsažena v měřené veličině.

Jestliže výsledek měření je číslo skládající se z čísla celého a zlomku (číslo smíšené), pak toto číslo udává, kolik jednotek a kolik ještě a jakých částí jednotek je obsaženo v měřené veličině. Tudíž, dělíme-li jednotku čítání a dělíme-li jednotku měření, vedou oba procesy k rozšíření pojmu čísla, k zavedení lomených čísel. V soustavě všech lomených čísel jest obsažena jako částečný případ soustava

[13]) Otázku nesouměřitelných veličin a iracionálních čísel nebudeme probírati.

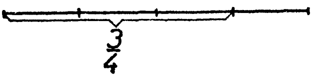
zlomků se jmenovatelem rovným jedné neboli soustava všech celých čísel.

§ 6. Vznik lomeného čísla při dělení

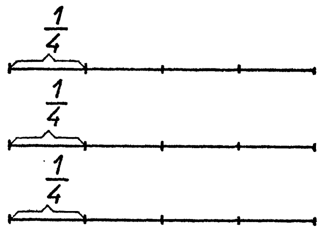
Přejdeme-li k vysvětlování pojmu zlomku, jak vzniká dělením jednoho čísla druhým, je zase vhodné užít úsečky jako názorné ilustrace:

1. žáci mají představu o zlomku jako o součtu dílů jedné a téže jednotky; v obr. 17 je znázorněn zlomek $\frac{3}{4}$;

2. v obr. 18 je znázorněn vznik téhož zlomku rozdělením tří rovných jednotek na 4 rovné části, při čemž je z každé jednotky vzata pouze jediná část;

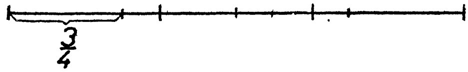


Obr. 17.



Obr. 18.

3. můžeme ještě jinak tři dělit čtyřmi, na příklad rozdělit 3 úsečky na 4 rovné části: první úsečku rozdělíme na poloviny, od druhých dvou oddělíme po $\frac{1}{4}$ a každou oddělenou čtvrtinu připojíme k jedné z obou polovin; můžeme postupovat i jinak: 2 úsečky rozdělíme na poloviny a třetí na čtvrtiny, které pak připojíme k polovinám. Rovněž můžeme rozličnými způsoby přesypat 3 pytlíky cukru do 4 menších pytlíků, přelít vodu ze tří lahví do 4 menších lahví. Když se takto vysvětlí možnost rozličných způsobů dělení tří na 4 rovné části, přejde se ještě k jednomu způsobu, který je právě cílem hodiny, totiž ke čtvrtému způsobu, při kterém spojíme 3 jednotky v jediný celek, který potom dělíme na 4 rovné části (obr. 19). Každá část bude obsahovat $\frac{3}{4}$ jednotky.



Obr. 19.

Potom se žáci cvičí v dělení 5 : 6, 8 : 9, 7 : 12 atd.; je třeba vésti žáky k tomu, aby pochopili, že na př. zlomek $\frac{5}{6}$ lze chápat jako šestinu pěti jednotek považovaných za jeden celek atd. Nepravý zlomek, na příklad $\frac{13}{5}$, mohou si žáci také názorně představit:

1. složený ze všech pětin jedné jednotky, dále ze všech pětin druhé jednotky a ještě ze tří pětin třetí jednotky;

2. jako součet pětin, z nichž každá je vzata z jiné ze 13 jednotek a

3. jako pětinu ze 13 jednotek považovaných za jediný celek.

Poslední představa je ovšem obtížnější. Ale význam takové představy zlomku je velice důležitý; proto je nutné se žáky provést uvedená cvičení, ke kterým se dá užít libovolný obyčejný zlomek.

Postupně žáci se seznamují s myšlenkou, že při dělení jednoho celého čísla druhým i v tom případě, že dělení nevyjde beze zbytku, můžeme udat přesný výsledek, který zase je vyjádřen lomeným číslem:

$$7 : 9 = \frac{7}{9}; \quad 11 : 6 = \frac{11}{6} \text{ atd.}$$

§ 7. Čtení a psaní zlomků

Při hodinách aritmetiky se má kromě výrazu „zlomek" užívat také výrazu „lomené číslo", protože žáci často chápou slovo číslo pouze ve významu celého čísla. Je třeba se žáky zopakovat také zapisování zlomků a dbát na to, aby psali zlomkovou čáru vodorovně, aby psali rovnítko ve výši zlomkové čáry a aby cifry celých čísel byly asi dvakrát tak veliké jako cifry ve zlomcích; je třeba zopakovat užívané názvy: díl, část, členy zlomku — čitatel a jmenovatel (co vyjadřují), pravý a nepravý zlomek (srovnáním s jednotkou) a smíšené číslo. Je třeba od žáků požadovat zřetelné čtení zlomků s důrazem na jmenovateli, který stanoví, z jakých dílů se číslo skládá a zřetelné psaní čtených zlomků. Při hodinách o zlomcích je účelné užívat jako didaktické pomůcky kruhů rozdělených na výseče, obdélníků rozdělených na části atd. Znázorňování zlomků úsečkami má tu vadu, že jednotlivé části úsečky se vzhledem neliší od celé úsečky, při užívání úseček ke znázornění zlomků se má vyznačovat zvolená jednotka. Čím konkretnější představy budou u žáků spojeny s pojmem zlomku, tím úspěšněji půjde další práce. K tomu cíli slouží rozmanitá cvičení. Podle stavu třídy některá z námi uvedených cvičení mohou se ukázat zbytečnými a pak není třeba je dělat. Je však užitečné otázkami (ústními) se přesvědčovat, že žáci vědí, že

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{m} = 50\,\mathrm{cm},\quad \tfrac{1}{5}\,\mathrm{kg} = 200\,\mathrm{g},\quad \tfrac{1}{4}\,\mathrm{t} = 250\,\mathrm{kg}$$

a obráceně. Vhodné je také zapisovat proces lomení

$$1 = \tfrac{3}{3} = \tfrac{6}{6} = \tfrac{12}{12} \text{ atd.},$$

rovněž

$$4 = \tfrac{8}{2} = \tfrac{12}{3} = \tfrac{16}{4} \text{ atd.};\quad 5 = \tfrac{10}{2} = \tfrac{15}{3} = \tfrac{20}{4} \text{ atd.}$$

Zdůrazní se, že jednotku a každé celé číslo můžeme napsat jako zlomek s libovolným jmenovatelem.

Užitečné je dávat cvičení na vyjádření podílu při dělení celých čísel

$$3 : 5 = \tfrac{3}{5};\quad 15 : 7 = \tfrac{15}{7};\quad 11 : 13 = \tfrac{11}{13};\quad 27 : 14 = \tfrac{27}{14} \text{ atd.}$$

§ 8. Rovnost a nerovnost lomených čísel

Následující etapou práce je rozbor otázky o rovnosti a nerovnosti zlomků.

Nutnou předběžnou přípravou k tomu je srovnávání zlomků. To je velmi důležité k tomu, aby si žáci osvojili základní vlastnost zlomků.

Dvě lomená čísla jsou si rovna, jestliže vyjadřují dvě veličiny mezi sebou rovné (při téže volbě jednotky); ze dvou nerovných lomených čísel je to větší, které vzniklo měřením větší veličiny (zase při téže volbě jednotky). Žáci chápou, že zlomky $\tfrac{3}{5}$ a $\tfrac{2}{5}$ nebo $\tfrac{7}{10}$ a $\tfrac{8}{10}$ nemohou vyjadřovat oba touž veličinu a nemají potíže, když u dvou zlomků se stejnými jmenovateli mají odpovědět na otázku, který je větší. Méně se jim věc daří při srovnávání „hrubších a jemnějších dílů", t. j. zlomků s nestejnými jmenovateli a stejnými nebo nestejnými čitateli, na příklad:

$$\tfrac{2}{5},\ \tfrac{2}{7} \text{ a } \tfrac{2}{9};\quad \tfrac{3}{4} \text{ a } \tfrac{4}{5} \text{ atd.}$$

Tuto otázku je třeba ještě jednou rozebrat užitím názorných pomůcek,[14]) dokud žáci ještě nedovedou převádět zlomky na společného jmenovatele. (Užívá se představy o zlomku jako souboru rovných dílů jednotky.)

Při srovnávání zlomků jsou užitečná cvičení v doplňování zlomku na jednotku, na polovinu, nebo v doplňování smíšeného čísla na nejbližší číslo celé.

Cvičení. 1. Jsou dány zlomky $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$. Který z těch zlomků je největší? Kolik se v každém případě nedostává do jednotky?

2. Jsou dána čísla: $2\frac{5}{6}$; $2\frac{4}{5}$; $2\frac{8}{9}$. Kolik musíme přidat, chceme-li každé z daných čísel zaokrouhlit na nejbližší číslo celé? Které z daných čísel je největší?

3. Kolik musíme přidat, máme-li zaokrouhlit následující smíšená čísla vždy na nejbližší číslo celé?

$$7\frac{8}{9};\ 7\frac{11}{12};\ 11\frac{13}{14};\ 8\frac{5}{7};\ 4\frac{7}{9};\ 10\frac{8}{11}?$$

Udat nejbližší celá čísla ke každému z těchto smíšených čísel.

Podobná cvičení provádíme obyčejně **ústně**, ale někdy zapisujeme proto, aby zrakový vjem upevnil získané představy.

§ 9. Převod smíšeného čísla na nepravý zlomek a obráceně

Obrátíme se k otázce převádění smíšeného čísla na nepravý zlomek a obráceně oddělení celé části od nepravého zlomku. Ve většině případů provádění takových změn tvaru nepůsobí žákům potíže, je však velmi důležité, aby žáci pokud možno doprovázeli všecky prováděné změny tvaru usuzováním o tom, jak je každá jednotka i lomená část čísla složena z dílů jednotky. Při tom se žáci upozorňují, že ty úsudky jsou obdobné úsudkům při převádění hrubších měr na jemnější a obráceně.

Příklady: 1. Uvésti $7\frac{2}{9}$ na tvar nepravého zlomku. V jednotce je obsaženo 9 devítin, v 7 jednotkách 63 devítiny; mimo to máme ještě dvě devítiny, tedy celkem (9 . 7 + 2) devítiny neboli $\frac{65}{9}$; píšeme:

$$7\frac{2}{9} = \frac{9 \cdot 7 + 2}{9} = \frac{65}{9}.$$

---

[14]) Někdy se srovnávání zlomků se stejnými čitateli nebo jmenovateli provádí na tom základě, že zlomek se považuje za podíl při dělení dvou čísel celých (dělenci nebo dělitelé jsou si rovni). Tento způsob není v daném případě logicky správný, neboť změnu podílu při změně dělence nebo dělitele znají žáci dosud pouze v tom případě, že podíl je číslo celé.

2. Od $\frac{58}{9}$ oddělit celé číslo, t. j. určit, kolik je v nepravém zlomku $\frac{58}{9}$ obsaženo celých jednotek a kolik ještě devítin netvořících celou jednotku. Vysvětlení: v jedné jednotce je 9 devítin, tedy v 58 devítitinách je tolik celých jednotek, kolikrát je 9 obsaženo v 58, t. j. 6 celých jednotek a zbývají 4 devítiny; $\frac{58}{9} = 6 + \frac{4}{9} = 6\frac{4}{9}$; 3. $\frac{58}{9}$ je přesný podíl při dělení 58 : 9.

Pravidla těchto změn tvaru formulují žáci neobratně a ne vždy přesně. Tak obyčejně u pravidla pro uvedení smíšeného čísla na nepravý zlomek žáci vynechají slova „a zapsat týž jmenovatel" a pod. Je účelné věnovat každou hodinu 5 až 7 minut na ústní cvičení a odpovědi na otázky o vzniku toho či onoho zlomku, o významu výrazů čitatel a jmenovatel, o ústním převodu smíšeného čísla na nepravý zlomek a obráceně s podrobným vysvětlováním.

Poznámky. 1. Při oddělení celého čísla od nepravého zlomku se žákům vysvětluje, jak vzniká zlomek při dělení se zbytkem.

Výše byl dán zlomek $\frac{58}{9}$, t. j. mělo se provésti dělení 58 : 9. V tomto případě žáci se někdy pokoušejí vedle cifry 6 psáti v podílu cifru 0 a zřídka při takovém zapisování dělení udají správnou odpověď $6\frac{4}{9}$, kdežto úloha $\frac{58}{9} = 6\frac{4}{9}$ jim nedělá potíže. Většina žáků, které jsme v této otázce zkoumali, v tom případě, že bylo užito znaku: pro dělení, připisovala cifru 0 k podílu 6 a při ústním dotazování až na jediného žáka všichni dali správnou odpověď. Proto je vhodné prováděti cvičení na oddělení celého čísla od zlomku jako $\frac{19}{5}$; $\frac{27}{4}$; $\frac{15}{7}$; $\frac{135}{16}$ a pod. ve tvaru dělení se znakem:.

2. Ve vyšších třídách žáci někdy mají potíže při zapisování dělení se zbytkem: $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$; $\frac{a-r}{b} = q$; obyčejně umějí zapsat, že $a = bq + r$, kde a, b jsou daná čísla, q podíl a r zbytek. Na příklad při dělení 10 : 7 můžeme závislost mezi danými čísly zapsati takto:

$$10 = 7 \,.\, 1 + 3;$$
$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7};$$
$$\frac{10-3}{7} = 1.$$

§ 10. Zvětšení a zmenšení zlomku

Při probírání této otázky se opíráme o představy, které mají žáci o hrubších a jemnějších dílech a o větším nebo menším jejich počtu.[15])

Provádí se srovnávání zlomků: nejprve se stejnými jmenovateli, potom se stejnými čitateli a na konec libovolných zlomků, jako v případě stanovení rovnosti a nerovnosti zlomků. Ale v daném případě se nespokojujeme se zjištěním, který zlomek je větší nebo menší, jako dříve, nýbrž hledáme i kvantitativní výsledek srovnání. Na příklad kolikrát je $\frac{8}{9}$ větší než $\frac{4}{9}$ (8 devítin větší než 4 devítiny)? Z jakých dílů se skládá první zlomek? druhý zlomek? Jaký závěr můžeme učinit při srovnávání jedněch a druhých dílů? Co můžeme říci o počtu rovných dílů v obou zlomcích? A konečně, kolikrát je zlomek $\frac{8}{9}$ větší než zlomek $\frac{4}{9}$? Je užitečné znova poukázat na obdobu s pojmenovanými čísly a ilustrovat věc názorně. Jestliže srovnáváme zlomky $\frac{2}{15}$ a $\frac{2}{3}$, tu při vysvětlování, který zlomek je větší a kolikrát, k výše uvedeným otázkám se připojují otázky: proč je patnáctina menší než třetina? kolik patnáctin je obsaženo v jednotce? kolik třetin je obsaženo v jednotce? kolikrát je $\frac{1}{15}$ menší než $\frac{1}{3}$? kolikrát jsou $\frac{2}{3}$ obsaženy ve 2 jednotkách? ve 4 jednotkách? jak se změní velikost zlomku, jestliže vymažeme jmenovatele? a pod.

Naznačíme vhodný pořádek cvičení.

Žádáme, aby žáci psali zlomky několikrát větší nebo menší než daný zlomek, neboli, jak se dohodneme říkat, aby zvětšili nebo zmenšili daný zlomek (celé číslo)-krát. Při tom se užívá znaku násobení (.) a dělení (:). Většina cvičení se provádí ústně.

a) Napřed se žádá zvětšení zlomku několikrát v takovém případě, že zvětšení zlomku dá se provésti pouze změnou (znásobením) čitatele a ne změnou jmenovatele, t. j. nemají se zprvu brát příklady, které po změně čitatele připouštějí krácení; na příklad, můžeme žádat zvětšení zlomku $\frac{5}{7}$ libovolněkrát, jenom ne 7krát, 14krát atd.

b) Potom se přejde ke zmenšení zlomku v případě dělení čitatele celým číslem, při čemž na tomto stupni musíme příklad zvolit tak, aby byl čitatel dělitelný daným číslem. Toto omezení může být

[15]) Viz také ještě o násobení a dělení zlomku celým číslem v kap. IX, § 4.

později opuštěno, když si žáci ujasní, že výkon dělení je vždycky možný, že rozdělit na n částí je totéž jako násobit číslem $\frac{1}{n}$, na př. $\frac{6}{7}$ dvakrát nebo třikrát zmenšit.

c) Potom se přejde k otázce zmenšení zlomku několikrát pomocí změny (zvětšení) jmenovatele, při čemž ve zvoleném příkladě čitatel zlomku má býti nesoudělný s číslem udávajícím, kolikrát se má zlomek zmenšit, na př. zlomek $\frac{1}{3}$ můžeme dvakrát zmenšit tím, že vezmeme díly dvakrát menší.

d) Na konec se obrátíme k nejtěžšímu případu zvětšení zlomku několikrát pomocí dělení jmenovatele příslušným číslem, na př. $\frac{3}{8}$ můžeme zvětšit dvakrát berouce díly dvakrát hrubší než jsou díly v daném čísle a ponechávajíce týž počet dílů: $\frac{3}{4}$.

e) Posléze přejdeme k případu zvětšení a zmenšení zlomku libovolněkrát (s možnostmi krácení zlomku).

Poznámky. 1. Upozorňujeme ještě jednou, že v daném stadiu práce probíráme jen zvětšení a zmenšení zlomku (celé číslo)-krát. Neprobíráme tu případ, kdy se má zlomek jednak 5krát zvětšit a potom ještě zase 6krát zmenšit, t. j. kdy se má zlomek násobit zlomkem $\frac{5}{6}$.

2. Často se při objasňování povahy změny zlomku způsobené změnou čitatele a jmenovatele užívá vět o změně podílu při příslušných změnách dělence a dělitele. Tento způsob je možný pouze s výslovnou výhradou, že se v daném případě přenáší na zlomky bez důkazu vlastnost podílu, která byla odvozena pouze pro ten případ, že podíl je číslo celé.

3. V témž oddílu „Zvětšení a zmenšení zlomku“ můžeme za účelem srovnání přidat cvičení na změnu zlomku (nebo celého nebo smíšeného čísla) zvětšením o daný zlomek nebo zmenšením o daný zlomek (nebo o celé nebo smíšené číslo), při čemž pro jednoduchost jest bráti pouze zlomky se stejnými jmenovateli.

Je vhodné vyvěsit ve třídě tabulky, na příklad tabulku udávající zlomky, za kterými následuje zlomek větší nebo menší než předcházející dvakrát nebo třikrát:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{54}$ atd.; $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{5}{54}$ atd.; $\frac{1}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{8}{15}$ atd.

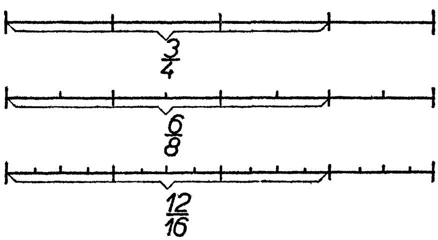
§ 11. Základní vlastnost zlomku

Základní vlastnost zlomku obyčejně také se vyvozuje z konkretní představy o zlomku (dělení jednotky na různý počet rovných částí nebo měření téže veličiny různými díly míry). Řidčeji se objasnění vede na základě vlastnosti podílu, že se nemění při zvětšení dělence a dělitele stejněkrát. Žáci mohou názorně ověřit, že:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16} \text{ a obráceně } \frac{12}{16} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ atd.}$$

Tato idea je ve své podstatě žákům naprosto nová, a zejména nová je myšlenka, že dva rovné zlomky mohou se vyskytovat v různých tvarech. Proto je užitečné, aby žáci vysvětlovali:

1. napsané zlomky jsou si rovny, protože tam, kde jsou díly dvakrát nebo čtyřikrát menší, je těch dílů dvakrát (čtyřikrát) více.



Obr. 20.

2. vysvětlení lze podati na základě toho, co žáci dříve poznali, že totiž zlomek $\frac{3}{4}$ se zvětšil dvakrát zdvojnásobením čitatele a potom se zase zmenšil dvakrát zdvojnásobením jmenovatele. V důsledku toho zlomek sice změnil tvar, ale podržel svoji velikost atd.

Cvičení se mohou ukládat žákům v různých tvarech: 1. udá se zlomek, na př. $\frac{2}{3}$ a číslo, kterým se má násobit čitatel a jmenovatel toho zlomku, na př. číslo 8, a potom se ukládá, aby žáci vysvětlili, proč nový zlomek se rovná danému;

2. udá se zlomek, jehož čitatel i jmenovatel se má násobit týmž číslem, na příklad udá se zlomek $\frac{2}{3}$ a druhý zlomek, na př. $\frac{16}{24}$, na který se má uvésti původní tvar zlomku; ukládá se provést změnu tvaru a formulovat slovy proces té změny.

Pečlivě se rozebere otázka, jakými jemnějšími díly se dají vyjádřit třetiny, pětiny atd. a dojde se k závěru, že taková změna tvaru je možná pouze v tom případě, že nový jmenovatel je násobek daného jmenovatele. Otázky:

a) je možno vyjádřit zlomek $\frac{3}{8}$ ve tvaru $\frac{?}{24}$, t. j. je možno jej převést na čtyřiadvacetiny?

b) jakého jmenovatele musí míti ty zlomky, kterými je možno vyjádřit osminy, na příklad $\frac{3}{8}$?

c) žádá se udat několik takových zlomků, kterými je možno vyjádřit $\frac{3}{8}$ atd.

§ 12. Krácení zlomku

Po pečlivě prováděných názorných rozborech utvoří se závěr o tom, že daný zlomek lze vyjádřit pomocí hrubších dílů jenom tehdy, jestliže čitatel a jmenovatel mají společného dělitele. Příslušná změna tvaru se nazývá krácení zlomků. Na základě příkladů se stanoví, že krácení zlomku je zjednodušení jeho tvaru: $\frac{18}{24} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Zdůrazní se užitečnost zavedeného zjednodušení, jestliže na př. zlomek $\frac{87}{116}$ se uvede na tvar $\frac{3}{4}$ atd. Žáci se upozorní na to, že v tomto případě se provádí pouhá změna tvaru, a ne početní výkon, že při krácení zlomku ani při uvádění na jiného jmenovatele zlomek se ani nezvětší ani nezmenší. Obyčejně však žáci říkají: „Zkrátit zlomek znamená jej zmenšit".

Dostatečná praxe v krácení zlomků je nezbytná. Při práci se žáci přesvědčují o tom, jaký význam má znalost vlastností čísel, znaků dělitelnosti a rozkladu čísel na činitele.[16]) Práce má vést k tomu, aby žáci dovedli nejen postupně krátit zlomky, nýbrž také provést krácení cestou dělení čitatele i jmenovatele jejich největším společným dělitelem. Musí se dbát na to, aby žáci prováděli krácení do konce, t. j. aby jako výsledek dostali nezkratitelný zlomek. Časté jsou případy, kdy žáci při krácení udávají jako výsledek zkratitelné zlomky:

$$\frac{66}{154} = \frac{33}{77} \text{ (a dál?)}; \ \frac{195}{273} = \frac{65}{91}; \ \frac{210}{294} = \frac{35}{49}; \ \frac{144}{234} = \frac{72}{117} \text{ atd.}$$

[16]) Zde je na místě zopakovat tyto otázky a také určování Nsd a nsn.

Zhusta i v jednoduchých případech ponechávají odpověď ve tvaru jako $\frac{4}{2}$, $\frac{3}{6}$ a pod.

Zvláštní pozornost jest věnovati krácení zlomků s trojciferným čitatelem a jmenovatelem, ježto tato cvičení dělají žákům velké potíže.

§ 13. Uvádění zlomků na společného jmenovatele

Když si žáci jasně osvojili základní poznatek, že zlomek může změnit svůj tvar beze změny velikosti a naučili se zlomky uvádět na určitý možný tvar, t. j. vyjadřovat je se jmenovatelem větším nebo menším než daný jmenovatel, dávají se žákům příklady a úlohy na srovnávání zlomků. Je třeba dávat příklady (složitější případy) na sčítání a odčítání zlomků, na kterých se objasní nutnost vyjadřování několika zlomků v týchž dílech neboli, jak se tomu říká, převádění zlomků na společného (na téhož) jmenovatele. Na několika speciálních příkladech žáci docházejí k poznatku:

1. že společný jmenovatel je násobek těch čísel, která jsou jmenovateli všech daných zlomků;

2. že k zamezení dlouhých výpočtů je třeba volit za společného jmenovatele nejmenší společný násobek jmenovatelů: je třeba nechat žáky se přesvědčit o tom tím, že ukládáme, aby brali za společné jmenovatele různé násobky nejmenšího společného jmenovatele;

3. že všecky tři případy probírané u nejmenšího společného násobku čísel se vyskytují při určování společného jmenovatele, a je třeba pokaždé užít vhodného způsobu určení nejmenšího společného násobku.

Cvičení můžeme vybírat v této sestavě:

1. Podle počtu zlomků uváděných na společného jmenovatele: dva zlomky, tři zlomky atd.

2. Podle methody určování nsn:

a) jeden ze jmenovatelů je násobek čísel, která jsou jmenovateli ostatních zlomků, na příklad:

$$\frac{3}{8};\ \frac{5}{32};\ \frac{7}{64};\quad \text{nebo}\quad \frac{5}{12};\ \frac{4}{9};\ \frac{1}{108};$$

b) všichni jmenovatelé jsou čísla nesoudělná, na příklad:

$$\tfrac{4}{5};\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{3}{11} \quad \text{nebo} \quad \tfrac{3}{4};\ \tfrac{5}{7};\ \tfrac{8}{9};$$

c) obecný případ uvádění zlomků na společného jmenovatele:

$$\tfrac{3}{5};\ \tfrac{9}{16};\ \tfrac{1}{30};\ \tfrac{7}{40};$$

$$\begin{array}{ll} 5 = 1 \,.\, 5 & 30 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \\ 16 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 & 40 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 5 \\ \hline \text{nsn} \quad 2^4 \,.\, 3 \,.\, 5 = 240 \text{ nebo} & 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 240. \end{array}$$

Společným jmenovatelem bude 240.

Žákům se kladou otázky: kterého jmenovatele má první zlomek? kterým číslem musíme násobit 5, t. j. jaký bude doplňující činitel, abychom dospěli k žádanému jmenovateli 240? co musíme tedy udělat s čitatelem zlomku, aby velikost zlomku se nezměnila? atd. pro každý zlomek. Chyba, které se zde žáci dopouštějí, spočívá v tom, že praví: „Musíme násobit čitatele" nebo „Musíme násobit zlomek". Ani jedno ani druhé není správné. Je nutné trvat na tom, aby žáci říkali: „Musíme násobit čitatele i jmenovatele zlomku doplňujícím činitelem".

Je vhodné cvičit žáky v ústním určování **společného** jmenovatele, jestliže společný jmenovatel nepřevyšuje 100 a v ústním řešení cvičení tvaru a) a b).

§ 14. Vzory otázek pro kontrolní práci

1. Jakou část metru tvoří 17 cm? jakou část hodiny tvoří 31 min.? jakou část q tvoří 102 kg?

2. Vypsat z následujících zlomků zlomky nepravé (nebo pravé):

$$\tfrac{13}{4};\ \tfrac{7}{15};\ \tfrac{18}{18};\ \tfrac{48}{33};$$

nebo dopsat čitatele nebo jmenovatele tak, aby v následujících případech vznikl zlomek nepravý (nebo pravý):

$$\frac{15}{?};\ \frac{?}{13};\ \frac{11}{?};\ \frac{?}{31}.$$ [17]

3. Napsat znak rovnosti nebo nerovnosti (větší nebo menší) mezi čísly:

$$\tfrac{3}{7} \text{ a } \tfrac{21}{7};\ \tfrac{11}{14} \text{ a } \tfrac{15}{14};\ \tfrac{63}{45} \text{ a } 1\tfrac{7}{8};\ \tfrac{4}{13} \text{ a } \tfrac{7}{13};\ \tfrac{15}{7} \text{ a } \tfrac{15}{11}.$$

[17]) Místo značky „?" můžeme užít písmene „x".

4. Napsat ve tvaru smíšeného čísla:

$$\frac{32}{9};\ \frac{156}{25};\ \frac{312}{7}.$$

5. Uvést na tvar nepravého zlomku:

$$3\tfrac{2}{7};\ 15\tfrac{5}{9}.$$

6. Doplnit vynechaného čitatele nebo jmenovatele:

$$9 = \frac{?}{11};\ 1 = \frac{?}{27};\ \frac{?}{13} = 8.$$

7. Napsat číslo třikrát větší než $\frac{2}{7}$; $\frac{2}{9}$; $1\frac{3}{5}$ a číslo 5krát menší než $\frac{8}{5}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{10}{11}$; $10\frac{1}{2}$.

8. Kolikrát je $\frac{1}{3}$ větší než $\frac{1}{27}$? $\frac{1}{16}$ menší než $\frac{1}{4}$? $2\frac{1}{5}$ větší než $\frac{1}{5}$? $3\frac{3}{4}$ větší než $\frac{3}{4}$ a pod. 7 větší než $\frac{2}{7}$? 5 větší než $\frac{1}{3}$? $\frac{5}{7}$ menší než 5?

9. Zkrátit zlomky:

$$\frac{63}{99};\ \frac{70}{175};\ \frac{288}{468}.$$

10. Uvésti na společného jmenovatele:

$$\frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5}.\quad \frac{5}{12};\ \frac{11}{72};\ \frac{25}{144}.\quad \frac{1}{180};\ \frac{1}{135};\ \frac{1}{108}.$$

KAPITOLA IX.

POČETNÍ VÝKONY S OBYČEJNÝMI ZLOMKY

§ 1. Sčítání a odčítání lomených a smíšených čísel. Ústní výpočty

Sčítání zlomků se stejnými jmenovateli

Sčítání nejjednodušších zlomků se stejnými jmenovateli je známo žákům 5. třídy z kursu obecné školy. Nicméně rozbor otázky sčítání zlomků začínáme případy sčítání celého čísla a zlomku, sčítání zlomků se stejnými jmenovateli (udávajíce konkretní výklad prováděné operace), aby se ještě jednou zdůraznila podstata sčítání jako rozšířeného čítání a aby se vysvětlila nutnost při sčítání zlomků s různými jmenovateli nahradit je zlomky jim rovnými, majícími jednoho a téhož jmenovatele. K tomu cíli zprvu užíváme obdoby mezi zlomky a pojmenovanými čísly. Tak na příklad počítáme $\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$ jako 5 devítin + 2 devítiny = 7 devítin podle obdoby se sčítáním pojmenovaných čísel 5 m + 2 m = 7 m. Při tom čtouce příklad klademe důraz ne na pojmenování zlomků, nýbrž na jejich počet. Tento způsob chrání žáky od chyby, která se vyskytuje při sčítání zlomků, že totiž sčítají jejich jmenovatele.

Sčítání zlomků s různými jmenovateli

Nezdržujíce se u prvé otázky přejdeme ke sčítání zlomků s různými jmenovateli. Na základě předchozího obracíme pozornost žáků na to, že nelze shrnovat dohromady zlomky s různými jmenovateli jako nelze spojovat jednotky různých pojmenování.

Při sčítání $\frac{5}{9} + \frac{1}{3}$ vyjádříme oba sčítance ve tvaru devítin a sečtením 5 devítin + 3 devítiny = 8 devítin dostaneme $\frac{5}{9} + \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$. Tato věc nepůsobí žákům potíže.

Práci shrneme poukazem na to, že proces sčítání lomených čísel stejně jako u celých čísel pozůstává v tom, že daná čísla sjednocujeme v jediné číslo — součet, zahrnující v sobě všecky jednotky a všecky díly jednotky ze všech sčítanců (nebo k jednomu číslu přidáváme všecky jednotky a všecky díly z ostatních čísel) (sčítanců, kap. III, § 2).

Rozdíl od sčítání celých čísel je ten, že se přičítají (sjednocují) také díly jednotky; součet může být i číslo celé i lomené (smíšené).

Odčítání zlomků

Definice odčítání a také pořádek vysvětlování odčítání zlomků se stejnými a různými jmenovateli je týž jako při probírání příslušných případů sčítání. Odčítání zlomků nemá v sobě pro žáky nové logické potíže.

Je třeba pečlivě dbáti toho, aby žáci při sčítání a odčítání zlomků skutečně operovali s pojmy součtu a rozdílu a nedovolovat, alespoň v prvých hodinách látce věnovaných, aby se mluvilo mechanicky o uvedení na společného jmenovatele. Později žáci mají znát a zřetelně formulovat definice a pravidla sčítání a odčítání zlomků i smíšených čísel, řešit cvičení na sčítání a odčítání lomených i smíšených čísel se složitějšími jmenovateli než v obecné škole.

Zápis. Je třeba naučit žáky, aby zachovávali předem stanovený způsob zápisu.

Vzor zápisu sčítání a odčítání lomených a smíšených čísel:

1. $\frac{11}{36}^{\overset{2}{\smile}} + \frac{7}{24}^{\overset{3}{\smile}} + \frac{5}{12}^{\overset{6}{\smile}} = \frac{22 + 21 + 30}{72} = \frac{73}{72} = 1\frac{1}{72}$;

2. $4\frac{7}{15}^{\overset{3}{\smile}} + 1\frac{11}{45} + 8\frac{4}{9}^{\overset{5}{\smile}} = 13\frac{21 + 11 + 20}{45} = 13\frac{52}{45} = 14\frac{7}{45}$[1];

3. $35\frac{9}{64}^{\overset{9}{\smile}} + 18\frac{1}{48}^{\overset{12}{\smile}} + 10\frac{5}{36}^{\overset{16}{\smile}} = 63\frac{81 + 12 + 80}{576} = 63\frac{173}{576}$;

$$64 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2$$
$$48 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3$$
$$36 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3$$
$$\text{nsn} \quad 2^6 \,.\, 3^2 = 576;$$

4. $5\frac{4}{9}^{\overset{4}{\smile}} - 1\frac{11}{12}^{\overset{3}{\smile}} = 4\frac{16 - 33}{36} = 3\frac{52 - 33}{36} = 3\frac{19}{36}$.

---

[1]) Doplňujícího činitele lze vynechávat, lze jej umísťovat na levo místo na pravo. Někdy se sčítají zvlášť čísla celá a zvlášť zlomky a zapisuje se takto:

$$4\tfrac{7}{15} + 1\tfrac{11}{45} + 8\tfrac{4}{9} = 14\tfrac{7}{45}; \quad 4 + 1 + 8 = 13;$$
$$\frac{7}{15} + \frac{11}{45} + \frac{4}{9} = \frac{21 + 11 + 20}{45} = \frac{52}{45} = 1\frac{7}{45}.$$

Zejména se věnuje pozornost logicky správnému užívání znaku rovnosti. Časté jsou případy takovýchto nesprávných zápisů:

$$4\tfrac{2}{9} + 3\tfrac{5}{12} = 4 + 3 = 7\frac{8 + 15}{36} = \frac{23}{36} = 7\tfrac{23}{36};$$

$$2\tfrac{4}{9} + 5\tfrac{7}{12} = \frac{16 + 21}{36} = \frac{37}{36} = 1\tfrac{1}{36}.$$

Abychom zamezili chybné vynechání celé části, jak se vyskytlo v posledním z uvedených příkladů, je užitečné vésti žáky k ověřování obdrženého výsledku zaokrouhlováním daných čísel.

Poznámky. 1. Odpověď při výsledku se zlomky se udává vždycky v normálním tvaru, t. j. zlomek se zkrátí a celá část se oddělí od nepravého zlomku. Zlomek vyskytující se v odpovědi má býti pravý a nezkratitelný.

2. Při sčítání a odčítání zlomků máme vésti žáky k tomu, aby pokud možno určovali společného jmenovatele úsudkem a neuchylovali se bez nutnosti k obecné methodě, na př. v případě

$$\tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{5}{16};\ \tfrac{7}{18} + \tfrac{5}{9} + \tfrac{1}{27} \text{ a pod.}$$

3. Vysvětlí se neúčelnost převádění smíšených čísel na nepravé zlomky při sčítání a odčítání. S tímto cílem se rozebere ve třídě několik příkladů jasně prokazujících uvedenou skutečnost; na příklad

$$39\tfrac{7}{24} + 67\tfrac{11}{12};\ 5689\tfrac{9}{10} - 316\tfrac{1}{5} \text{ a pod.}$$

Výzkum ukázal, že ještě dosud celé třídy užívají při sčítání a odčítání smíšených čísel převádění na nepravé zlomky.

Rozvržení cvičení

Při výběru příkladů na sčítání a odčítání zlomků:

1. zavádíme určité pořadí do výběru zlomků se jmenovateli zprvu v jednodušších kombinacích, později stále složitějších (jmenovatelé 2, 4, 8, 16, 5, 10, 15 a j.).

2. promyslíme si soustavný postup ve výběru cvičení na sčítání a odčítání lomených a smíšených čísel; tak na příklad probíráme: sčítání a odčítání celého čísla (nebo celých čísel) a lomeného čísla a obrácené sčítání lomeného čísla a celého (nebo celých):

$$4 + \tfrac{2}{3};\ 7 - \tfrac{4}{5};\ \tfrac{4}{5} + \tfrac{2}{3} + 7 \text{ atd.};$$

sčítání a odčítání smíšeného čísla a celého, celého a smíšeného; sčítání lomených čísel a smíšeného čísla; sčítání několika lomených čísel; odčítání lomených a smíšených čísel bez rozdělení jednotky z menšence; odčítání lomených a smíšených čísel s rozdělením jednotky z menšence; současné sčítání a odčítání lomených a smíšených čísel.

V příkladech posledního druhu máme se varovat příkladů jako:

$$4\tfrac{5}{7} - 6\tfrac{2}{3} + 3\tfrac{1}{2},$$

kde nastává případ odčítání většího čísla od menšího. Ačkoli žáci mohou na základě vlastností součtu provést nejprve sčítání a potom odčítání a tak dospět k výsledku, přece správnost takové úpravy nebude u žáků odůvodnitelná na tom stupni matematických vědomostí, který mají před zavedením relativních čísel, a proto nebude dosaženo pojmově uvědomělého vztahu žáků k užitému způsobu úpravy.

3. Průběhem cvičení na sčítání a odčítání lomených a smíšených čísel žáci se neustále cvičí ve vyhledávání nejmenšího společného násobku jmenovatelů daných lomených čísel. Je třeba vybírat úlohy ze sbírek tak, aby žáci získali dostatečný výcvik ve všech třech případech určování nsn (kap. VII, § 10) a aby úsudkem vyhledali takový způsob, který vede nejrychleji k cíli. Musíme mít na paměti, že teprve při provádění výkonů sčítání a odčítání lomených čísel žáci užívají prakticky dovednosti ve vyhledávání nsn čísel a tím utvrzují dříve získané znalosti a návyky jak co se týče určování nejmenšího násobku čísel, tak co se týče určování doplňujících činitelů při uvádění zlomků na společného jmenovatele, čímž se u žáků prohlubuje chápání vlastností čísel.

V praxi není vhodné úplně skončit jednu skupinu naznačených cvičení a potom stejně probrat druhou. Vhodnější je střídat cvičení.

Doplňující pokyny

1. Při řešení příkladu, ve kterém se má sečíst několik zlomků, sečteme první dva zlomky, k součtu přičteme třetí zlomek atd., což může vésti ke zjednodušení v tom případě, když po sečtení části sčítanců vyjde celé číslo nebo smíšené číslo obsahující zlomek s vhodnějším jmenovatelem a pod. Při užívání této methody můžeme také měnit pořádek sčítanců, jestliže byla ve třídě už vysvětlena správnost komutativního a asociativního zákona pro lomená čísla.

Příklad: $\frac{28}{57} + 5\frac{1}{114} + 3\frac{1}{64} = 8\frac{33}{64}$.

Řešení: $\frac{28}{57} + 5\frac{1}{114} = 5\frac{56+1}{114} = 5\frac{57}{114} = 5\frac{1}{2}$;

$5\frac{1}{2} + 3\frac{1}{64} = 8\frac{33}{64}$.

Samo sebou se rozumí, že v příkladě jako:

$$15\tfrac{1}{2} + 35\tfrac{3}{4} + 17\tfrac{1}{8} + 38\tfrac{2}{3} + 29\tfrac{1}{9} + 10\tfrac{5}{18}$$

je výhodnější nejprve spojit sčítance, jejichž lomená část má za jmenovatele čísla 2, 4, 8, potom ty sčítance, jejichž lomená část má za jmenovatele 3, 9, 18. Tyto dva výkony se dají provésti ústně, načež zbývá pouze sečíst dvě smíšená čísla:

$$68\tfrac{3}{8} + 79\tfrac{1}{18}.$$

2. Všecky výše uvedené pokyny jsme podali zároveň pro oba výkony sčítání a odčítání, ale ve třídě ovšem probíráme napřed otázky sčítání a potom odčítání a na konec řešíme takové příklady obsahující zároveň sčítání i odčítání, ve kterých se vyskytují závorky.

3. Jak se má dospět k vysvětlení pravidla sčítání a potom odčítání lomených čísel? má se vyjít z číselného příkladu nebo ze slovní úlohy? Výše jsme věnovali hlavní pozornost soustavnosti ve výběru cvičení. Považujeme za základní úlohu tohoto oddílu to, aby žáci si pojmově jasně uvědomili pravidla sčítání a odčítání lomených a smíšených čísel a aby získali trvalý nácvik v provádění těchto výkonů. Pokud se týče slovních úloh řešených sčítáním a odčítáním, není v jejich obsahu nic nového ve srovnání s úlohami, které se řeší týmiž výkony s čísly celými. Proto učitel může stejným právem zvolit na vyjasnění theorie i číselný příklad i kteroukoli z jednoduchých (základních) slovních úloh.

4. Řešení rozmanitých slovních úloh s několika výkony sčítání a odčítání se střídá s řešením číselných příkladů.

Obyčejně učitel snadno si vybere příklady a cvičení. Největší nesnáze působí učiteli výběr příkladů na sčítání a odčítání takových zlomků, které dají jako součet nebo rozdíl jednoduché (zkratitelné) výsledky. Doporučujeme učiteli článek M. Gornštejna v časopise „Fizika, matematika v trudovoj škole“ č. 3, 1930, kde jsou praktické pokyny k této otázce.

Ústní cvičení

1. Je třeba vésti žáky k tomu, aby v těch případech, kdy je možné provésti výpočet ústně, skutečně také ústně počítali. Proto se žáci cvičí v ústním sčítání, a potom také odčítání, nejjednodušších zlomků. Taková cvičení je užitečné provádět v každé hodině s ponenáhlým zvyšováním obtížnosti jak při probírání výkonů sčítání a odčítání, tak i při probírání ostatních výkonů. Ústních výpočtů se má užívat také při písemném řešení složitých příkladů (viz kap. I) a při řešení slovních úloh. Je dobře ponechávat žákům samým, aby rozhodovali, jakému způsobu — zda ústnímu či písemnému provedení výkonu — má se při té či oné úloze dáti přednost, a v důsledku toho se má u žáků vytvořit trvalý návyk sčítat a potom i odčítat ústně lomená čísla v těch případech, kdy ve jmenovatelích sčítanců nebo menšence a menšitele jsou poloviny, čtvrtiny, osminy a šestnáctiny nebo pětiny a desetiny nebo šestiny a dvanáctiny a pod.

2. Při požadavku ústního provádění výkonů ve složitějších případech je vhodné danou úlohu zapsat na tabuli, neboli, jak se říká, pracovat polopísemně; na př. v případech

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{15} + \frac{1}{30};\ \frac{9}{40} - \frac{11}{80} + \frac{7}{20} \text{ a pod.}$$

úloha se napíše na tabuli a výpočet se provádí ústně.

3. V případě sčítání celého čísla s lomeným nebo smíšeným číslem sčítání se provádí ústně, rovněž v případě odčítání zlomku nebo smíšeného čísla od celého čísla nebo odčítání celého čísla od smíšeného.

Na příklad:

1. $9 + 6\frac{4}{5}$;	4. $46\frac{2}{3} + 19$;	7. $14 - 5\frac{3}{8}$;
2. $45 + 17\frac{4}{9}$;	5. $19 + 31\frac{16}{19}$;	8. $100 - 49\frac{5}{21}$;
3. $3\frac{2}{7} + 25$;	6. $52\frac{3}{4} - 17$;	9. $90 - 40\frac{3}{7}$ a pod.

Speciální methody

Ve mnoha případech sčítání a odčítání zlomků se pro zrychlení a ulehčení práce užívá rozmanitých speciálních method. Budiž úlohou vypočíst

$$11\frac{7}{18} - 8\frac{23}{24}.$$

Obtížnost daného příkladu, která tkví v tom, že lomená část menšence je menší než lomená část menšitele, dá se obejít.

Řešení:

a) $11\frac{7}{18} - 8\frac{23}{24} = 2\frac{1}{24} + \frac{7}{18} = 2\frac{3+28}{72} = 2\frac{31}{72}$,

protože

$$11 - 8\tfrac{23}{24} = 2\tfrac{1}{24} \text{ nebo}$$

b) týž příklad můžeme řešit také druhou methodou:

$$11\tfrac{7}{18} - 8\tfrac{23}{24} = 2\tfrac{7}{18} + \tfrac{1}{24} = 2\tfrac{28+3}{72} = 2\tfrac{31}{72},$$

protože

$$11\tfrac{7}{18} - 9 = 2\tfrac{7}{18}.$$

Zprvu učíme žáky užívat takových method na příkladech s malými čísly, na příklad:

(*ústně*):
$$1\tfrac{7}{8} + 1\tfrac{7}{8} = 4 - \tfrac{2}{8} = 3\tfrac{3}{4};$$
$$1\tfrac{1}{4} + \tfrac{7}{8} = 2\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} = 2\tfrac{1}{8}.$$

Zejména přesvědčivé jsou příklady typu:

$$3\tfrac{1}{6} - 2\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{3}; \quad 10\tfrac{1}{2} - 9\tfrac{7}{8} = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{8};$$
$$3\tfrac{1}{3} - 2\tfrac{5}{6} = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2}.$$

Řešení v těchto příkladech je založeno na zaokrouhlení zlomku do nejbližšího celého čísla.

Vlastnosti součtu a rozdílu zlomků

Při probírání výkonů sčítání a odčítání obyčejných a později též desetinných zlomků jakož i při probírání násobení a dělení zlomků musíme stále poukazovat ve třídě na to, že pro lomená čísla zůstávají zachovány všecky zákony a vlastnosti výkonů, jež platí pro čísla celá. A pokaždé je třeba předkládat cvičení a otázky založené na příslušné theorii.[2]) Tak v daném případě je třeba ukládat cvičení na odůvodnění platnosti komutativního a asociativního zákona sčítání u lomených

[2]) Opakuje se všecko, co žáci znají o sčítání celých čísel, o vlastnostech součtu a jejich důsledcích, o změně součtu způsobené změnou sčítanců, o zkoušce správnosti sčítání atd. Obdobné opakování se děje při probírání všech operací se zlomky (obyčejnými i desetinnými).

čísel; na pochopení sčítání a odčítání jako výkonů navzájem obrácených; na sledování změny součtu a rozdílu způsobené změnou daných čísel; na vysvětlení důsledků vlastností výkonů, jmenovitě: máme-li k součtu přidat libovolné číslo (nebo je ubrat), stačí je přidat k jednomu ze sčítanců (nebo je ubrat); máme-li k jakémukoli číslu přidat součet (nebo ubrat), můžeme přidávat postupně jednotlivé sčítance (nebo je ubírat). Plán práce je týž, jaký jsme doporučovali v kap. III a v kap. IV pro celá čísla. Jaký čas se má věnovat této práci a do jakých podrobností je třeba jít, to závisí na tom, jak třída zvládla tyto otázky při jich probírání u výkonů s celými čísly.

Poukážeme na to, že pokud se týče sčítání lomeného čísla s nulou ($a + 0 = a$; $0 + a = a$) a odčítání nuly ($a - 0 = a$) zůstávají v platnosti tytéž závěry jako u čísel celých: číslo zůstane beze změny.

Mimo to, jak bylo uvedeno výše v příslušné kapitole výkonů s celými čísly, učitel může vyjít od libovolné jednoduché úlohy slovní, měnit v ní velikost daných čísel a sledovat, jak se bude měnit výsledek, což se potom kontroluje na základě závislosti mezi danými čísly a výsledkem výkonu.

§ 2. Práce mimo třídu

1. Při cvičení ve výpočtech zpaměti, při vyhledávání společného jmenovatele, při sčítání a odčítání zlomků jsou užitečná cvičení toho druhu, jaká prováděli egyptští matematikové (viz kap. IX, § 2), jmenovitě: vyjádření zlomků ve tvaru součtu různých dílů jednotky se vzrůstajícími jmenovateli. Žáci si navykli nazírat na zlomek jako na součet **rovných** dílů jednotky (se stejnými jmenovateli); v daném případě se jim dávají cvičení rozšiřující jejich obzor — vyjádřit zlomek jako součet **různých** dílů jednotky; na příklad, mohou býti na rozklad dány jednoduché příklady z Rhindského papyru:

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}; \quad \tfrac{2}{9} = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{18}; \quad \tfrac{2}{13} = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{52} + \tfrac{1}{104};$$

v kap. VIII, § 2 byl uveden rozklad pro $\frac{5}{9}$ a pod.

a) Budiž úkolem vyjádřit ve tvaru součtu různých dílů zlomek $\frac{5}{9}$; rozklad začneme srovnáváním daného zlomku s $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{9} = \frac{1}{2} + ?$ (neznámé číslo určíme odčítáním).

Odpověď: $\frac{5}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}$.

Žáci mohou sečtením ověřit správnost obdrženého výsledku.

b) Je zajímavé si všimnout, že $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. Z toho plyne řešení úlohy: „Jak rozdělit 7 pomerančů mezi 12 dětí“.

Odpověď: 4 pomeranče rozdělíme na 3 rovné části;
3 pomeranče rozdělíme na 4 rovné části.

Každé dítě dostane po jednom z obou druhů částí pomeranče.

c) Úloha: rozdělit 7 bochníků mezi 8 pracovníků rovným dílem řeší se staroegyptsky takto:

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} =$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

Odpověď: 4 bochníky rozdělíme na poloviny,
2 bochníky rozdělíme na čtvrtiny,
1 bochník rozdělíme na osminy.

Každý pracovník dostane $\frac{7}{8}$ bochníku.

Je zajímavé, že jeden a týž zlomek tvaru $\frac{2}{2n+1}$ rozkládali Egypťané na zlomky s čitateli rovnými jedné různými způsoby.

2. Je vhodné obrátit pozornost žáků na povahu změny zlomku při změně čitatele i jmenovatele o týž počet jednotek. Žáci se kloní k názoru, soudíc podle většiny obdržených odpovědí, že v tomto případě jako v případě zvětšení obou členů zlomku stejněkrát, velikost zlomku se nemění. Je užitečné sledovat tuto otázku a shrnout výsledky v tabulku.

I. Přidáme-li k oběma členům pravého zlomku totéž číslo, zlomek se zvětší a zůstane pravým.

a) Zvětšení čitatele a jmenovatele zlomku o 1:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \frac{6}{7} \ldots$$

b) Zvětšení čitatele a jmenovatele zlomku o 3:

$$\frac{1}{2} < \frac{4}{5} < \frac{7}{8} < \frac{10}{11} < \frac{13}{14} \ldots$$

II. Přidáme-li k oběma členům nepravého zlomku totéž číslo, zlomek se zmenší, ale zůstane nepravým (nerozbíráme případ zlomku rovného jednotce).

c) Přidání jednotky k oběma členům zlomku:

$$\frac{2}{1} > \frac{3}{2} > \frac{4}{3} > \frac{5}{4} > \frac{6}{5} \ldots$$

d) Přidání čísla 3 k oběma členům zlomku:

$$\frac{2}{1} > \frac{5}{4} > \frac{8}{7} > \frac{11}{10} \ldots$$

Zde je zajímavé položit na příklad tuto otázku: kdy je jednotlivcova výplata vyšší — jestliže 8 lidí dostane 27 rublů nebo jestliže přiberou ještě dva soudruhy a dostanou ještě 2 rubly?

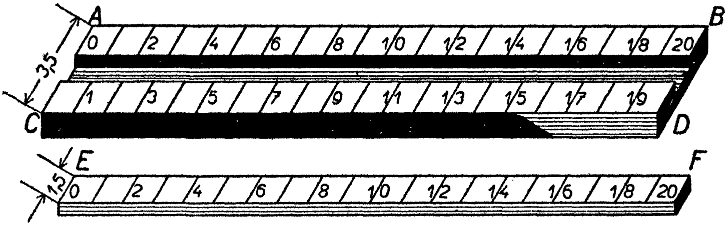
Odpověď: $\frac{27}{8} > \frac{29}{10}$; ale $\frac{7}{8} < \frac{9}{10}$. V prvním případě je nevýhodné zvětšit počet lidí; ve druhém, kdy výplata každého je menší než rubl, je to výhodné.

Obecný případ změny zlomku při změně obou členů o totéž číslo:

$$\frac{a \pm n}{b \pm n} - 1 = \frac{a - b}{b \pm n}.$$

Názorná pomůcka

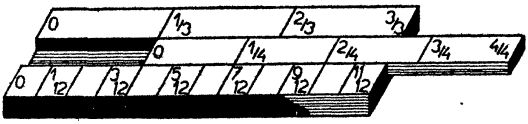
Jako pomůcka k názorné představě součtu a rozdílu zlomků mohou posloužit 2 pravítka (může se jich užít také jako názorné pomůcky při sčítání a odčítání celých čísel) zobrazená na obr. 21.[3])



Obr. 21.

Pokyny pro konstrukci pravítka (konstrukci provedou žáci). Pro jednotlivé žáky: na karton rozměrů 30 cm × 3,5 cm (obr. 21) se přiklíží nahoře i dole kartonové pásy *AB* a *CD* rozměrů 30 cm × 1 cm. Do mezery *CA* se zastrčí kartonový pás *EF* rozměrů 30 cm × 1,5 cm. Na pásy *AB*, *CD*, a *EF* se nalepí milimetrový papír, na kterém je naneseno dělení (jednotky nebo díly jednotky).

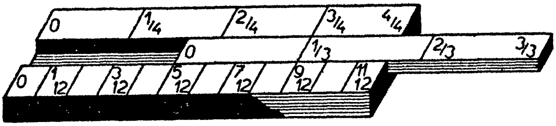
Pro demonstrování ve třídě zhotoví se totéž pravítko ze dřeva v délce 1 až 1,5 m a šířce 25 až 30 cm.



Obr. 22.

[3]) Cvičení s takovými pravítky připravují na užívání logaritmického pravítka.

Na obr. 22 je znázorněno sčítání zlomků $\frac{1}{3}$ (vyznačeno na horní nepohyblivé stupnici, rozdělené na 3 rovné části) a $\frac{1}{4}$ (vyznačeno na pohyblivém pravítku); odpověď $\frac{7}{12}$ je udána na dolní nepohyblivé stupnici, rozdělené na 12 rovných částí. Na obr. 23 je znázorněno



Obr. 23.

odčítání $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$. Každý žák může zhotovit kartonová pravítka na individuálně volený případ, na př. pravítko znázorňující součet a rozdíl pětin a osmin, čtvrtin a desetin a pod. Měřítko se nanese na čtverečkovaný nebo milimetrový papír.

§ 3. Příklady pro kontrolní práci

Kontrolní práce na sčítání a odčítání zlomků, jako obyčejně, nemůže být příliš obšírná; proto je nutné ku přezkoumání kontrolní prací vybrat jen základní znalosti a dovednosti žactva.

1. Provedení výkonů:

$$3\tfrac{4}{5} + 7\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = ?; \quad \tfrac{7}{15} + 8\tfrac{1}{24} + 3\tfrac{13}{40} = ?;$$

$$15 - 9\tfrac{7}{8} = ?; \quad 4\tfrac{5}{48} - \tfrac{7}{12} = ?; \quad \tfrac{5}{30} - \tfrac{8}{45} = ?;$$

$$9\tfrac{1}{15} + 7\tfrac{3}{20} - 11\tfrac{19}{30} = ?; \quad (5\tfrac{3}{4} - 2\tfrac{7}{8}) + (13\tfrac{1}{6} - 9\tfrac{5}{12}) = ?$$

2. Odpovědi na otázky:

1. Oč je $\frac{5}{9}$ menší než $1\frac{1}{3}$?

2. Známe součet dvou sčítanců $1\frac{8}{9}$ a jednoho sčítance $1\frac{1}{3}$; určit druhého sčítance; nebo: kolik musíme přičíst k číslu $1\frac{1}{3}$, abychom dostali $1\frac{8}{9}$?

3. Rozdíl dvou čísel je $\frac{1}{3}$; větší z obou čísel je $\frac{5}{9}$, určit menší číslo; nebo: rozdíl dvou čísel je $\frac{1}{3}$, menšenec je $\frac{5}{9}$; určit menšitele.

4. Provésti dvěma způsoby zkoušku správnosti odčítání: $1\frac{3}{7} - \frac{9}{14} = \frac{11}{14}$.

5. K jednomu ze sčítanců bylo přičteno $\frac{2}{3}$, od druhého bylo odečteno $\frac{1}{6}$. Jak se změnil součet?

6. Učeň provede práci za 3 hodiny, zkušený dělník ji provede za 2 hodiny. Jakou část práce vykonají oba za hodinu, budou-li pracovat společně?

§ 4. Násobení lomeného čísla celým číslem

Theorie otázky

1. Výkon násobení lomeného čísla celým se definuje stejně jako výkon násobení celého čísla celým, t. j. jako sčítání rovných sčítanců (v konečném počtu):

$$\frac{a}{b} \cdot n = \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots + \frac{a}{b}}_{n \text{ sčítanců}} =$$

$$= \frac{a + a + a + \ldots + a}{b} = \frac{a \cdot n}{b}.$$

Z toho následuje, že výkon násobení zlomku celým číslem je jednoznačně možný při libovolné lomené hodnotě násobence a libovolné celé hodnotě násobitele.

Přitom se ponechávají názvy: $\frac{a}{b}$ násobenec, n násobitel; $\frac{a}{b} \cdot n$ součin; ponechává se také znak násobení (který se má umísťovat ve výši zlomkové čáry). Pravidlo pro násobení zlomku celým číslem se vysloví ve třídě. Jako při násobení celých čísel, dohodneme se řídit se tímto pravidlem v případě, že násobitel je roven 1 nebo 0 a podle toho pravidla součin $\frac{a}{b} \cdot 1$ bude roven násobenci a druhý součin bude roven 0 (viz kap. V, § 2).

Poznámka. Provedení výkonu lze zjednodušit v tom případě, že násobitel (celé číslo) má společného dělitele se jmenovatelem zlomku vyjadřujícího násobence. Budiž úloha $\frac{a}{b} \cdot n$, při čemž $n = mk$, $b = rk$; potom $\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a}{rk} \cdot mk = \frac{a \cdot m \cdot k}{r \cdot k} = \frac{a \cdot m}{r}$.

Důsledek 1. V případě, že jmenovatel zlomku vyjadřujícího násobence je násobkem daného násobitele, tedy

$$b = k \, . \, n, \text{ jest } \frac{a}{b} \, . \, n = \frac{a}{k \, . \, n} \, . \, n = \frac{a \, . \, n}{k \, . \, n} = \frac{a}{k},$$

t. j. při násobení zlomku celým číslem můžeme, místo abychom čitatele násobili celým číslem, dělit jmenovatele celým číslem; užívat této methody je vhodné v případě, že dělení jmenovatele celým číslem vychází beze zbytku.

Důsledek 2. Ve speciálním případě, že násobitelem je jmenovatel zlomku vyjadřujícího násobence, je součin zlomku s jeho jmenovatelem roven čitateli toho zlomku:

$$\frac{a}{b} \, . \, b = \frac{a}{1} = a.$$

Jestliže zlomek $\frac{a}{b}$ považujeme za výsledek měření nějaké dané veličiny, tu součin tohoto zlomku s celým číslem n bude odpovídat veličině n-krát větší než je veličina daná (nebo jinak: která vznikne zvětšením dané veličiny n-krát).

Definice. Čtení. Zápis

Ve vyučovací praxi, jak ukazuje výzkum práce v matematice, případ násobení zlomku celým číslem buďto se vynechává nebo se probírá velice zběžně s hlediska otázky „zvětšení zlomku několikrát" žákům již známé. Ale aby žáci mohli v dalším jasně si uvědomit a pochopit nový smysl násobení zlomkem, je nezbytné: 1. předem zopakovat ve třídě všecko to, co je žákům známo o výkonu násobení, a mimoto 2. dát jim nácvik v překonání těch potíží, které jsou spojeny s technikou provádění výkonu násobení (krácení a zjednodušení). Proto je užitečné řešit ve třídě několik příkladů i slovních úloh na všecky případy násobení zlomku celým číslem.

a) Na příkladě se zopakuje definice násobení celých čísel: $3 \, . \, 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$; toho se potom užije k násobení zlomku celým číslem v nejjednodušším případě; na příklad:

$$\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3 + 3 + 3 + 3 + 3}{4} = \frac{3 \, . \, 5}{4}.$$

Žáci se cvičí ve čtení zápisu $\frac{3}{4} \cdot 5$ různými způsoby:

„pětkrát $\frac{3}{4}$", nebo „$\frac{3}{4}$ vzato pětkrát", nebo „zlomek $\frac{3}{4}$ násobíme pěti", nebo „$\frac{3}{4}$ vzato pětkrát za sčítance", nebo „udat součet pěti zlomků rovných $\frac{3}{4}$", nebo „určit součin zlomku $\frac{3}{4}$ a pěti" atd.

b) Potom se přejde k rozboru takových případů násobení smíšeného čísla celým číslem, ve kterých se snadno naráz vypočte odpověď, jako: $3\frac{1}{2} \,.\, 4$. Z definice násobení celým číslem máme:

$$3\tfrac{1}{2} + 3\tfrac{1}{2} + 3\tfrac{1}{2} + 3\tfrac{1}{2} = 3 + \tfrac{1}{2} + 3 + \tfrac{1}{2} + 3 + \tfrac{1}{2} + 3 + \tfrac{1}{2} =$$
$$= 3 + 3 + 3 + 3 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} =$$
$$= 3 \,.\, 4 + \tfrac{1}{2} \,.\, 4 = 12 + 2 = 14.$$[4])

Nebo v případech, kdy vyloučení celého čísla a někdy i krácení zlomků nevyžaduje vedlejších výpočtů, jako v příkladech:

$$3\tfrac{1}{2} \,.\, 5 = 3 \,.\, 5 + \tfrac{1}{2} \,.\, 5 = 15 + 2\tfrac{1}{2} = 17\tfrac{1}{2},$$
$$3\tfrac{1}{4} \,.\, 12 = 3 \,.\, 12 + \tfrac{1}{4} \,.\, 12 = 36 + 3 = 39.$$

c) Potom se přejde k obecnému případu násobení (viz níže), když při provádění násobení je třeba krátit, na př.:

$$\frac{5}{8} \cdot 12 = \frac{5 \,.\, 12}{8} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}.$$

Poznámky. 1. I po vyvození obecného pravidla násobení zlomků a smíšených čísel mohou žáci při násobení smíšeného čísla číslem celým stanovit zvlášť součin celé části násobence a zvlášť součin lomené části s daným násobitelem; to je účelné jak pro zkrácení práce, tak i pro pěstování důvtipu žáků a dovednosti řešit otázky v jednotlivých speciálních případech.

2. Ve všech uvedených příkladech srovnáváme obdržený součin s násobencem a poukazujeme na to, že při násobení celým číslem (s vyloučením násobitele 1) obdržený součin je vždy větší než násobenec (viz kap. VIII, § 9).

Zjednodušení

Na druhé straně je nutné, aby žáci získali dostatečný nácvik v těch zjednodušeních při provádění výkonu násobení, která byla

[4]) Na těchto příkladech můžeme ukázat, že v případě násobení smíšeného čísla číslem celým zůstává správným distributivní zákon násobení vzhledem ke sčítání.

uvedena v předešlém odstavci (theorie otázky) v poznámce i v obou důsledcích, t. j. žáci musí řešit příklady typu:

$$1.\quad \frac{5}{14} \cdot 21 = \frac{5 \cdot \overset{3}{21}}{\underset{2}{14}} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2},$$

při čemž odpověď vždycky se udává v normálním tvaru;

$$2.\quad \frac{5}{7} \cdot 7 = 5;$$

$$3.\quad \frac{5}{21} \cdot 7 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

Cvičíce žáky v dělení čitatele i jmenovatele jejich největším společným dělitelem, musíme vyžadovat, aby získali trvalý nácvik nejen v provádění podobných úprav, nýbrž také v chápání smyslu těch úprav, jmenovitě: žáci musí pochopit, že v zápise $\frac{5 \cdot 21}{14}$ součin 5 . 21 je čitatel vyjádřený celým číslem a 14 je jmenovatel rovněž vyjádřený celým číslem. Žákům je známo, že velikost zlomku se nemění, jestliže dělíme čitatele i jmenovatele týmž celým číslem, v našem případě číslem 7. Musíme ještě žáky upozornit na to, že čitatelem je v našem případě součin 5 . 21 a že čitatele můžeme sedmkrát zmenšit tím, že jednoho činitele sedmkrát zmenšíme. Rozbor této otázky je velmi důležitý; v kapitole o násobení celých čísel byly uvedeny žákovské chyby při dělení a násobení součinu libovolným číslem a nesmíme pominout ani jednu příležitost k utvrzení příslušných pravidel rozborem a opakováním jejich podstaty.

§ 5. Dělení celým číslem

(Určování dílu čísla.)

Otázku dělení celým číslem (určení dílu čísla) je třeba zopakovati ve třídě dříve, než se přejde k probírání otázky násobení a dělení zlomkem (§ 6 a § 7).[5])

Je třeba poukázat na to, že definice dělení zůstává táž jako při dělení celých čísel.

[5]) Úlohu určit zlomek (část) čísla a úlohu obrácenou jest řešit značně dříve, než otázku násobení a dělení zlomkem, neboť tato je zobecněním, jež není lehké si osvojit (viz § 7, str. 216).

Dělení celého čísla celým číslem

Zprvu je třeba se zastavit i u případu dělení celého čísla celým číslem, jestliže výsledek nelze přesně vyjádřit celým číslem, třeba že taková cvičení se konala při vysvětlování pojmu lomeného čísla. Výše, v kap. VIII, § 6, bylo již uvedeno, že žáci jen pomalu si zvykají na myšlenku, že dělení 9 : 7 nebo 7 : 9 lze provésti přesně, jestliže vyjadřujeme odpověď lomeným číslem $\frac{9}{7}$ nebo $\frac{7}{9}$, t. j. jen pomalu si osvojují rozšíření pojmu čísla, zobecnění pojmu čísla na čísla lomená (stejně je tomu také později při zavedení pojmu záporného čísla).

Abychom ulehčili žákům pochopení této otázky, učíme žáky, aby užívali definice dělení jako výkonu obráceného k násobení; vskutku $9 : 7 = \frac{9}{7}$ a $\frac{9}{7} \cdot 7 = 9$ (přesně); i v případě 20 : 4, kde 20 je násobek čísla 4, můžeme odpověď vyjádřit zlomkem

$$\frac{20}{4} = \frac{5 \cdot 4}{4} = 5 \text{ a } 5 \cdot 4 = 20.$$

Dělení zlomku celým číslem

Musíme zopakovat ve třídě methody dělení zlomku celým číslem (viz kap. VIII) jako zmenšení zlomku několikrát (celé číslo-krát). Při opakování zavést více přesnosti a uvést možná zjednodušení.

Můžeme vésti cvičení tohoto typu:

1. Jak zmenšíme zlomek $\frac{3}{4}$ pětkrát? $\frac{10}{7}$ pětkrát? Co se stane se zlomkem, jestliže jeho jmenovatele násobíme pěti? jestliže čitatele dělíme pěti?

2. Který zlomek je pětkrát větší než zlomek $\frac{3}{4 \cdot 5}$? Odpověď: $\frac{3}{4}$; objasnění: $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \cdot 5}$.

3. Je možné najít ještě jiný zlomek, který pětkrát položen za sčítance dá týž součet $\frac{3}{4}$? (Je dělení zlomku celým číslem jednoznačné?) Záporná odpověď je zřejmá, neboť, jestliže položíme pětkrát za sčítance zlomek větší než $\frac{3}{4 \cdot 5}$, dostaneme výsledek větší než $\frac{3}{4}$ a zlomek menší než $\frac{3}{4 \cdot 5}$ dá výsledek menší než $\frac{3}{4}$. Je třeba cvičit ve třídě možná zjednodušení (obdobně jako při násobení zlomku celým číslem) při určování výsledku dělení:

$$\frac{6}{11} : 2 = \frac{6:2}{11} = \frac{3}{11}; \quad \frac{6}{11} : 6 = \frac{1}{11};$$

$$\frac{6}{11} : 2 = \frac{6}{11 \,.\, 2} = \frac{3}{11}; \quad \frac{6}{11} : 8 = \frac{6}{11 \,.\, 8} = \frac{3}{44},$$

při čemž žáci musí odůvodňovat, proč můžeme krátit zlomek tak, že dělíme čitatele a jednoho z obou činitelů ve jmenovateli týmž číslem.

Určení dílu lomeného čísla

Od úlohy dělení celým číslem (zmenšení několikrát) přejdeme k formulaci operace dělení jako „určení části (dílu) čísla", což je základem pro výklad násobení zlomků a je to částečně žákům z dřívějška známo. Vysvětlení se může dít na veličinách: nechť zlomek vyjadřuje známou délku; máme rozdělit tuto délku na několik rovných částí, na příklad na 3 nebo na 5 částí; pak libovolná z těchto částí je vyjádřena zlomkem, který dostaneme dělením daného zlomku třemi nebo pěti, a bude třetinou, pětinou atd. dané délky.

Určení dílu smíšeného čísla

Závěrem žáci se cvičí v určování dílu smíšeného čísla (dělení smíšeného čísla číslem celým). Začíná se od případů dovolujících různá zjednodušení. Takový je třeba případ:

$$72\tfrac{9}{11} : 9 = 8\tfrac{1}{11} \quad \text{nebo} \quad 32\tfrac{1}{2} : 4 = 8\tfrac{1}{8},$$

t. j. když celá část i čitatel zlomku jsou násobky dělitele (ověřit výsledek násobením).

Obecná methoda, jak známo, spočívá v uvedení smíšeného čísla na nepravý zlomek a v následujícím dělení podle pravidla:

$$5\frac{7}{11} : 9 = \frac{62}{11 \,.\, 9} = \frac{62}{99}.$$

To musí žáci znát, je však velmi užitečné cvičit jejich důvtip výše uvedenými speciálními způsoby.

Je-li to nutné pro opakování, může učitel provést ve třídě ústní rozbor obojího užití dělení v úlohách (rozdělování a měření) třeba i v případě dělení smíšeného čísla číslem celým: a) rozdělit $7\frac{1}{2}$ na pět částí, b) určit, kolikrát je 5 obsaženo v čísle $7\frac{1}{2}$.

Učitel musí stále věnovat pozornost případu dělení zlomku celým číslem, byť si jej žáci lehko osvojovali. Nekontrolují-li žáci své odpovědi úvahami výše naznačeného druhu, často mechanicky zamění čísla. Obvyklé jsou nesprávné odpovědi, jako na příklad:

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{4 \cdot 9}{8};\ \frac{5}{7} : 6 = \frac{6 \cdot 7}{5} \text{ a pod.}$$

Někteří žáci dokonce píší:

$$\tfrac{8}{9} : 4 = 4 : \tfrac{8}{9} \text{ atd.},$$

$$\tfrac{5}{7} : 6 = 6 : \tfrac{5}{7} \text{ atd.}$$

§ 6. Násobení zlomkem. Úvod

Přejdeme ke hlavní otázce, jejíž pochopení působí žákům největší potíže, totiž k násobení (a potom i dělení) lomeným číslem. Zde se žák setkává s tou skutečností, že slovu, které mu je známo, slovu násobení, dává se nový smysl (rozšiřuje se pojem výkonu násobení). Při násobení pravým zlomkem je součin menší než násobenec. Násobitel nemůže udávat, kolikrát se má násobenec vzít za sčítance, protože nelze vzít číslo $\tfrac{2}{3}$krát za sčítance a vůbec nic nelze udělat $\tfrac{2}{3}$krát;[6]) je nutná nová definice násobení. A musíme říci, že methodika této otázky ještě nedospěla k definitivnímu vyřešení a že otázka, jak se má vyučovat násobení zlomkem, potřebuje ještě být podrobena experimentálnímu zkoumání za účelem zhodnocení pedagogické účelnosti toho či onoho postupu. Vskutku nemožnost původního smyslu násobení v případě násobení zlomkem působí žákům velké pojmové potíže, což je patrné i z toho, že ve mnoha příručkách, počínajíc středověkem, stále se klade tato otázka (první, kdo ji zdůraznil, byl Luca Pacioli 1494 v práci „Summa“), a hledaly se cesty, jak ji obejíti různými důmyslnými návrhy.

V theoretických kursech (o tom byla řeč už výše v kap. VIII, § 3) násobení zlomku zlomkem se provádí podle předem dané definice, ale tento postup se pro školu nehodí pro svou abstraktnost. Aby se žákům otázka objasnila, je třeba odpovědět na otázky: z jakého důvodu nebo za jakým účelem nebo na jakém základě se dělá to či ono. Jim se nejeví přesvědčivou formální definice násobení. Ve škole je pro jedenácti a dvanáctileté žáky nezbytná konkretisace nového pojmu. Proto také výše naznačený rozbor zlomku jako výsledku

[6]) V běžném životě se přesto někdy říká „vzít $3\tfrac{1}{2}$krát“.

dělení nebo měření dává s methodického stanoviska lepší možnosti pro školní vyučování.

Uvedeme několik methodických směrnic v otázce násobení zlomkem.

I. Především je třeba se zastavit u toho stanoviska, které vládlo v tradiční škole, totiž u definice Cauchyovy, která se snaží stanovit jednotu mezi násobením celým číslem, zlomkem atd. Tato definice zněla takto: „znásobit znamená z násobence utvořit nové číslo zvané součin takovým způsobem, jak je násobitel utvořen z jednotky“ (z kladné jednotky).

1. Usuzování v případě celých čísel. Máme určit 7 . 5; číslo 5 vzniklo z jednotky takto: jednotka byla vzata pětkrát za sčítance, čímž se dostalo číslo $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$; vyjdeme od násobence 7 a z něho utvoříme součin přesně tak, jak bylo číslo 5 utvořeno z jednotky: $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$.

2. Usuzování v případě násobení zlomkem. Máme určit $8 . \frac{3}{4}$; číslo $\frac{3}{4}$ vzniklo z jednotky takto: jednotka byla rozdělena na 4 části, dostalo se číslo $\frac{1}{4}$ atd., zapíšeme postup vzniku čísla $\frac{3}{4}$ z jednotky

$$1;\ \tfrac{1}{4};\ \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4};$$

vyjdeme od násobence a týmž postupem dostaneme

$$8;\ \tfrac{8}{4};\ \tfrac{8}{4} + \tfrac{8}{4} + \tfrac{8}{4} = \tfrac{24}{4} = 6.$$

Uvedeme pro učitele několik takových sporů, které byly vedeny v okruhu těchto otázek. Při násobení $8 . \frac{3}{4}$ bylo možné usuzovat i jinak než jak bylo uvedeno výše. Na příklad, jak můžeme dospět k číslu $\frac{3}{4}$ od jednotky? Mohli jsme vzít 1 a položit ji třikrát za sčítance: $1 + 1 + 1 = 3$.

Stejným postupem sestavíme i jmenovatele; $1 + 1 + 1 + 1 = 4$;

$$\frac{3}{4} = \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1 + 1 + 1}.$$

Takovým způsobem můžeme nazírat na vznik násobitele z jednotky. Totéž provedeme s násobencem 8; $8 + 8 + 8 = 24$ (v souhlase s výše naznačeným pravidlem); $8 + 8 + 8 + 8 = 32$; $\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$. Odpověď je nesprávná. Ba i při násobení celých čísel, na příklad 2 . 16, můžeme číslo 16 sestavit z jednotky různými způsoby; na příklad můžeme postupně tvořit: 1; $1 \times 4 = 4$; $4^2 = 16$ a potom stejnou cestou, vycházejíce z násobence 2: $2 \times 4 = 8$; $8^2 = 64$ a dostaneme, že součin 2 . 16 má se rovnat 64, což ovšem neodpovídá pravdě.

II. Někteří autoři udávají následující definici násobení zlomkem: „násobit zlomkem znamená tu část násobence, která je určena jmenovatelem násobitele, vzít za sčítance tolikrát, kolik je jednotek v čitateli násobitele."[7]) Hlavní vadou uvedené definice je to, že se nenaznačuje, kdy se má užít takového výkonu.

V číselných příkladech je to jasné, máme-li znásobit

$$7 \cdot \tfrac{3}{4};\ 8 \cdot \tfrac{2}{5};\ 3\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3};\ \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \text{ atd.}$$

Podle uvedené definice dostaneme správný výsledek; ale budiž žádáno řešení konkretní otázky: 1 kg kávy stojí 8 rublů, co stojí $\frac{3}{4}$ kg? Jaký výkon máme provést, abychom rozřešili tuto úlohu? Není vidět, proč se má provádět právě násobení. V současné methodice se zavádí definice násobení zlomkem jako nalezení části čísla naznačené násobitelem, a když umíme určit část čísla dvěma výkony, vyvodíme pravidlo násobení zlomkem (viz níže).

Vzhledem k důležitosti otázky násobení zlomkem a její spornosti zastavíme se ještě u jiných methodických způsobů, nežli přejdeme k methodickým pokynům určeným bezprostředně pro vyučování v 5. třídě naší střední školy.

III. Uvedeme, že v praxi (zejména v předrevoluční škole) i v sovětské škole je rozšířeno zamlčování obtížnosti otázky a nezbytnosti zavedení nové definice. V tom případě usuzování se vede tak, jakoby podle smyslu násobení zlomkem se shodovalo s násobením celým číslem, a bez jakýchkoli výhrad vlastnosti výkonu násobení celým číslem se přenášejí na násobení zlomkem. Usuzuje se asi takto: máme 8 násobit číslem $\frac{3}{4}$; znásobíme 8 třemi a obdržíme výsledek čtyřikrát větší nežli žádaný, protože násobitel 3 je čtyřikrát větší než násobitel $\frac{3}{4}$. Abychom dospěli k správnému výsledku, zmenšíme obdržený součin čtyřikrát atd.

Takové nazírání na otázku se projevuje hlavně tehdy, když se násobení zlomkem chápe jako násobení podílem, při čemž místo násobení podílem se násobí dělencem a obdržený součin se dělí dělitelem.

Při takovém vysvětlení výkon násobení postrádá konkretní smysl a zase není vidět, v jakých úlohách se má užít násobení zlomkem.

IV. Nyní se zastavíme u toho methodického směru, který má za nutné zavésti úmluvou novou definici násobení, odpovídající rozšíření

---

[7]) Základem rozbíraných definic je pojímání čísla jako operátoru (operátorová theorie zlomku). Viz ARNOLD „Teoretičeskaja arifmetika", Moskva 1938. Učpedgiz.

pojmu čísla, a činí to konkretní formou. Zde zase máme rozličné methodické postupy.

V „Methodice aritmetiky“ od F. Jegorova je výklad násobení zlomků založen na definici: „Nalezení části čísla se považuje za násobení zlomkem“ a na číselných příkladech se vyvozuje pravidlo násobení. F. Jegorov stál na tom stanovisku, že ve škole je možné stanovit pro násobení zlomkem samostatnou definici, která co nejjednodušeji a nejjasněji naznačuje konkretní význam tohoto výkonu a potom vysvětlit, že násobení zlomků, tak jako násobení čísel celých, vyhovuje zákonu komutativnímu, asociativnímu a distributivnímu. Přidržuje se v celkovém pojetí naznačeného názoru F. Jegorova na tuto otázku, Šochor-Trockij velmi správně podotýká, že je sice možné od žáků požadovat, aby se spolehli na učitelovo slovo, že zavedení nově smluveného termínu je účelné, že však je „také možno dospěti k tomuto sdělení cestou několika cvičení, která zavedení nového názvu jaksi ospravedlňují“. A ve školní praxi se při vysvětlování násobení zlomkem skutečně nyní většinou vychází od konkretní slovní úlohy.

Sluší poznamenat, že také V. A. Jevtuševskij (téhož způsobu užívá Borel-Stäckel) ve své methodice vyšel při násobení zlomkem od konkretní úlohy. Vzal úlohu s celými čísly, která se řeší násobením a záměnou čísel došel k úloze, k jejímuž řešení je třeba násobení smíšeným číslem a pravým zlomkem. Hlavní myšlenka spočívá v tom, že při změně daných čísel v konkretní úloze určitého typu nemůže se změnit výkon, kterým se úloha řeší.

Námitka, která se zde činí, pozůstává v tom, že ve své podstatě úloha řešitelná násobením celým číslem je úloha jednoduchá (řeší se jediným výkonem), a při lomeném násobiteli je to úloha složená (řeší se dvěma výkony: násobením a dělením). Nebudeme se déle zdržovati oceňováním té či oné methody pro vysvětlení násobení zlomkem (čtenář, který si prostuduje uvedenou literaturu, najde mnoho originálního a cenného u každého z výše uvedených methodiků) a přejdeme k příslušným methodickým pokynům, týkajícím se školní praxe.

§ 7. Určení dílu čísla je násobení

Především je třeba ještě jednou ve třídě zopakovat, jak se najde jeden díl celého čísla, pravého zlomku a smíšeného čísla.[8]) Potom je možný dvojí postup:

1. buďto se žákům řekne, že místo abychom říkali „najít sedminu čísla" říkáme „násobit číslo jednou sedminou" a řadou cvičení, ve kterých dané číslo je celé, smíšené, lomené, dospěti k pravidlu násobení zlomkem;

2. nebo se žákům věc objasní slovní úlohou. Na příklad, 1 kg krup stojí 2 ruble 60 kop. Jakým výkonem určíme cenu určitého množství krup, na př. 2 kg, 3 kg, 5 kg? *Odpověď*: násobením. Jaká bude cena $\frac{1}{2}$ kg? $\frac{1}{4}$ kg? *Odpověď*: 1 r. 30 k., 65 k. Jak jsme určili cenu $\frac{1}{2}$ kg? $\frac{1}{4}$ kg? *Odpověď*: našli jsme $\frac{1}{2}$ ze 2 r. 60 k.; $\frac{1}{4}$ ze 2 r. 60 k.

Týmž způsobem se rozebere ještě několik obdobných úloh na určení ceny látky, petroleje a pod. a dojde se k závěru, že cena určitého množství zboží se počítá výkonem násobení, jestliže množství výrobku je vyjádřeno celým číslem, že však obdobná úloha, jestliže množství výrobku je vyjádřeno lomeným číslem, vede na určení části ceny jednotky výrobku (dělení celým číslem). Je účelné i v tomto případě výkon, kterým se najde cena nákupu, nazývat násobením. První cvičení se řeší pouze zpaměti, ale potom se přejde k zápisu řešení a stanovíme, že místo abychom psali $\frac{1}{2}$ čísla 260; $\frac{1}{4}$ čísla 260 (260 : 2; 260 : 4, nebo v dalších příkladech $\frac{3}{4}$: 5 nebo $2\frac{1}{2}$: 8), píšeme řešení té úlohy pomocí výkonu násobení, tedy: 260 . $\frac{1}{2}$; 260 . $\frac{1}{4}$;

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5};\quad 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \text{ atd.}$$

A místo abychom říkali na příklad: „najít čtvrtinu čísla 260" (rozdělit 260 na 4 díly), pravíme „260 máme násobit číslem $\frac{1}{4}$".

Je třeba řešit ve třídě mnoho cvičení, aby se žáci naučili určení části čísla chápat jako násobení a nazývat násobením, a teprve potom můžeme přejít k další otázce — násobení libovolným zlomkem.

---

[8]) Je velmi užitečné začít řešit (užitím dvou výkonů) takové úlohy v prvých vyučovacích hodinách v 5. třídě, při čemž se ovšem vybírají příklady, ve kterých se hledá díl celého čísla vyjádřený celým číslem (ústní cvičení), na př. najít $\frac{1}{9}$ čísel 540, 360 atd., $\frac{1}{7}$ čísel 49, 217, 490 a pod.

Zápis má tvar:

$$15 \cdot \frac{1}{4} = 15 : 4 = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \text{ a pod.}$$

Prvý z uvedených způsobů je jednodušší, ale my dáváme přednost druhému — objasnění slovní úlohou, které ospravedlňuje zavedenou dohodu.

§ 8. Určení několika dílů čísla dvěma výkony (opakování)

Žáci dovedou určit část čísla dvěma výkony z kursu obecné školy. Nicméně je třeba zřetelně a soustavně zopakovat ve třídě tuto otázku jako základ pro další vybudování pojmu násobení čísla libovolným zlomkem.

1. Zprvu se provádějí ústní cvičení; na příklad, hledá se $\frac{1}{4}$ ze 320; $\frac{3}{4}$ ze 16; $\frac{4}{5}$ z 80; $\frac{5}{9}$ ze 180 a pod. Ve všech těchto případech odpověď je celé číslo (viz pozn. pod čarou u § 7).

Poznámky. a) Zdálo by se, že tyto nejjednodušší otázky by měly býti známé žactvu 5. třídy. Není však ojedinělé, že na otázku, čemu se rovná $\frac{1}{6}$ ze 24, žák 5. třídy odpoví: „$23\frac{5}{6}$" — on odečetl $\frac{1}{6}$ od 24.

b) Je nezbytné od začátku školního roku soustavně provádět výše naznačená ústní cvičení.

Potom se přejde k případům určení zlomku celého čísla při libovolné odpovědi: na příklad $\frac{3}{4}$ z 15. Ježto $\frac{1}{4}$ z 15 je rovna $\frac{15}{4}$, $\frac{3}{4}$ z 15 jsou rovny

$$\frac{15}{4} \cdot 3 = \frac{15 \cdot 3}{4} = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}.$$

Při postupném provádění výkonů žáci dávají podrobná vysvětlení, jak určují jeden díl čísla, jak určují několik dílů čísla neboli zlomek čísla.[9])

3. Jest ještě jeden nácvik, na který bylo upozorněno výše, totiž — cestou cvičení i zde utvrzovati chápání toho, že jedna čtvrtina z 15 je rovna 15 čtvrtinám jednotky, a tři čtvrtiny z 15 jsou rovny $\frac{15}{4} \cdot 3$.

4. Potom se přejde k rozboru určování zlomku ze smíšeného

---

[9]) Je-li zlomek pravý, mluví se o „části čísla".

čísla, při čemž zde je možné ponechat žákům, aby samostatně zvolili způsob řešení. Na příklad $\frac{2}{3}$ z $10\frac{1}{2}$ je možno najít obecnou methodou:

$$\frac{2}{3} \text{ z } 10\frac{1}{2} \text{ jsou rovny } \frac{21}{2 \,.\, 3} \,.\, 2 = \frac{21 \,.\, 2}{2 \,.\, 3} = 7,$$

ale žáci mohou najít odpověď jinou methodou a takovýmto zápisem:

$$\frac{2}{3} \text{ z } 10\frac{1}{2} \text{ jsou } \frac{2}{3} \text{ z } 9 \text{ a k tomu } \frac{2}{3} \text{ z } 1\frac{1}{2} \text{ tedy } 6 + 1 = 7$$

nebo ústně $\frac{2}{3}$ z $10\frac{1}{2}$ dává $3\frac{1}{2} \,.\, 2 = 7$.

§ 9. Určení zlomku čísla násobením. Násobení pravým zlomkem

Žáci se už obeznámili s tím, že když máme najít určitý díl čísla, říkáme, že to číslo máme znásobit daným dílem jednotky. Nyní jsou připraveni osvojit si další etapu práce. Místo aby říkali a psali: „Máme určit, čemu se rovná libovolná část (zlomek) čísla“ — na příklad $\frac{3}{5}$ nebo $\frac{4}{7}$, říkají a píší: „Toto číslo máme násobit zlomkem, vyjadřujícím část čísla, kterou máme najít“, tedy zlomkem $\frac{3}{5}$ nebo $\frac{4}{7}$.

Zejména je důležité si všímat toho, aby žáci konali pečlivě zápis v případě určování části lomeného čísla, na příklad:

$$\text{určit } \frac{7}{8} \text{ z } \frac{5}{14}; \quad \frac{5}{14} \cdot \frac{7}{8} = \frac{5 \,.\, 7}{14 \,.\, 8} = \frac{5}{16}$$

a všímat si potom krácení zlomků (činitelů čitatele a jmenovatele).

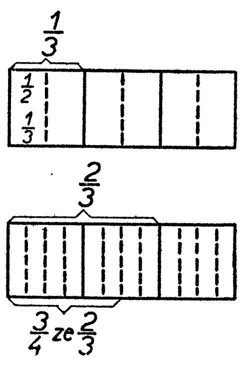
Názorné vyjádření určování dílu jiného dílu, zlomku jiného zlomku je naznačeno v obr. 24:

$\frac{1}{2}$ z $\frac{1}{3}$ dává $\frac{1}{6}$; $\frac{3}{4}$ ze $\frac{2}{3}$ jsou rovny $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

(obr. 24). Takto se na příkladech vysvětluje, že při násobení zlomkem je třeba vzít takový díl násobence, který je udán jmenovatelem násobitele a položit jej za sčítance tolikrát, kolik dílů představuje násobitel.

Násobit zlomkem znamená provésti dva výkony: dělení jeho jmenovatelem a násobení jeho čitatelem.

Pořádek cvičení je týž, jak byl naznačen v § 8.



Obr. 24.

Začíná se ovšem od jednodušších číselných hodnot a potom se přejde k obecnému případu násobení zlomků a smíšených čísel.

Určit $\frac{3}{4}$ z $5\frac{1}{2}$; místo, abychom říkali „určit $\frac{3}{4}$ z $5\frac{1}{2}$", můžeme říci „$5\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$", to znamená

$$5\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11 \cdot 3}{2 \cdot 4} \text{ atd.}$$

Po řešení dostatečného počtu cvičení a slovních úloh mohou žáci sami formulovat pravidlo pro násobení zlomků a smíšených čísel.

Konkretní slovní úlohy se řeší proto, aby se vysvětlil cíl, který jsme si položili, když jsme se dohodli nazvat násobením určení zlomku čísla. Uvedeme příklad:

Úloha 1. Vlak ujede za hodinu 40 km; kolik km ujede vlak za 3 hod., za 6 hod., za $\frac{1}{2}$ hod., za $\frac{3}{4}$ hod.? za 3 hod. $(40 \cdot 3)$ km $= 120$ km; za 6 hod. $(40 \cdot 6)$ km $= 240$ km; za $\frac{1}{2}$ hod. $(40 \cdot \frac{1}{2})$ km $= 20$ km; za $\frac{3}{4}$ hod. 30 km; pravíme, že i tato úloha se řeší násobením, t. j. $\frac{3}{4}$ ze 40 se rovná:

$$40 \cdot \frac{3}{4} = \frac{40 \cdot 3}{4} = 30 \text{ (km)}.$$

Ještě jednou zdůrazníme, že každá jednotlivá námi naznačená etapa práce musí býti procvičena velice pečlivě a že k následující etapě se smí přejít teprve, když je trvale osvojena předcházející etapa, na které je následující založena. A zároveň při rozboru každé jednotlivé otázky je nutné pečlivě si všímat všech detailů, dávat objasnění té theorie, na které je založeno vysvětlení dané otázky, a je nutné pečlivě dbát správnosti, důslednosti a přesnosti všech zápisů.

Uvedeme ještě jeden způsob řešení téže úlohy, který spočívá v tom, že se napřed sestaví plán řešení složené úlohy. Při tomto způsobu zápis se provádí jinak než bylo výše naznačeno.

Úloha 2. Byly přivezeny 3 krabice perníku po $4\frac{1}{4}$ kg perníku v každé krabici, při čemž 1 kg perníku stojí $2\frac{1}{2}$ ruble. Ve škole bylo rozdáno 12 kg perníku. Za kolik rublů perníku zbylo?

Máme určit:	*Jakým výkonem:*
1. kolik váží všechen perník?	násobením
2. kolik perníku zbylo (na váhu)?	odčítáním
3. kolik stojí zbylý perník?	násobením

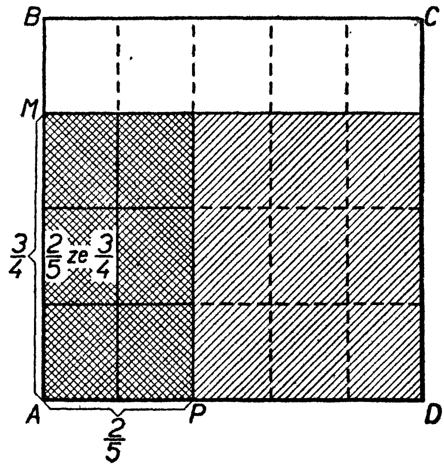
Žáci bez potíží sestaví číselný výraz pro řešení úlohy:

$$2\tfrac{1}{2} \,.\, (4\tfrac{1}{4} \,.\, 3 - 12).$$

Potom následují výpočty: $2\frac{1}{2} \,.\, (12\frac{3}{4} - 12)$ a obdržíme $2\frac{1}{2} \,.\, \frac{3}{4}$; toto násobení zlomkem žáci provést neumějí. Žáci vidí nutnost násobení lomených čísel, vidí, že potíž vznikla z toho, že předpokládali, že zbude celý počet kilogramů perníku. Žáci však ve skutečnosti dovedou určit cenu zbývajících $\frac{3}{4}$ kg perníku, jestliže 1 kg perníku stojí $2\frac{1}{2}$ ruble; k tomu cíli potřebují nalézt $\frac{3}{4}$ ze $2\frac{1}{2}$, ale když sestavovali plán, tu nevěděli, že bude třeba určit zlomek (část) čísla, nemohli předvídat, že jako počet kilogramů zbylého perníku vyjde číslo lomené. Ale vždyť mají jasně napsáno, že třetí výkon, kterým se určí cena zbylého perníku, je výkon násobení, jinými slovy, násobení zlomkem a určení zlomku čísla se provádí v praktických úlohách při řešení stejných otázek.

Grafická ilustrace[10])

Praktické užití dohodnuté definice násobení na případě, že se má určit obsah obdélníka, jehož délka je $\frac{2}{5}$ m a výška $\frac{3}{4}$ m (obr. 25).



Obr. 25.

[10]) Luca Pacioli (Ital z 15. a 16. stol.) takto názorně vysvětloval násobení zlomku zlomkem: „Jestliže $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$ jsou strany čtverce, pak $\frac{1}{4}$ udává plošný obsah toho čtverce".

Připomene se případ, že délka a šířka obdélníka jsou vyjádřeny celými čísly, na příklad délka obdélníka je 2 cm a výška 7 cm: 1. Konstatuje se, že obsah obdélníka byl z počátku nalezen přímým čítáním čtverců, z nichž se obdélník skládá (plošných jednotek). Takto se našlo, že obsah daného obdélníka je 14 cm². 2. Potom na následujícím stupni svých matematických vědomostí žáci počítali obsah obdélníka nepřímou cestou, totiž jako výsledek násobení čísel vyjadřujících lineární rozměry obdélníka.

Najdeme žádaný obsah našeho obdélníka čítáním čtverců. Čtverec představuje ve zmenšeném měřítku 1 m². Strana AD čtverce je rozdělena na pětiny metru, strana AB na čtvrtiny; přímky vedené dělicími body rovnoběžně ke stranám čtverce rozdělí jej na 20 malých obdélníků. Malý obdélník je roven dvacetině z 1 m². Hledaný obsah obdélníka, jehož délka je $AP = \frac{2}{5}$ m a šířka $AM = \frac{3}{4}$ m, najdeme z toho, že ten obdélník se skládá ze 6 malých obdélníků, t. j. přímým čítáním najdeme, že žádaný obsah je roven $\frac{6}{20}$ m² $= \frac{3}{10}$ m² ($\frac{2}{5}$ ze $\frac{3}{4}$ jest $\frac{3}{10}$). Jestliže podle obdoby s celými čísly budeme nepřímo počítat obsah obdélníka, máme $\frac{2}{5}$ násobit zlomkem $\frac{3}{4}$, t. j. $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

§ 10. Cvičení na násobení lomených čísel

1. Srovnávají se mezi sebou případy násobení celým číslem, zlomkem a smíšeným číslem a zopakuje se ve třídě, co naznačuje celý násobitel, co naznačuje lomený násobitel a násobitel vyjádřený smíšeným číslem.

2. Vysvětlí se na příkladech, že ačkoli se slovu „násobení“ v případě násobení zlomkem dává jiný význam v porovnání s významem toho slova při celém násobiteli, přece základní vlastnosti součinu celých čísel zůstávají správné i pro případ násobení zlomků (viz kap. V), jmenovitě: komutativní, asociativní a distributivní (vzhledem ke sčítání) zákon násobení; změna součinu při změně činitelů.

3. Znovu se připomene, jak jsme se dohodli rozumět násobení čísla číslem 1 nebo 0, na příklad:

$$73 \cdot 1 \text{ a } 1 \cdot 73; \quad 25 \cdot 0 \text{ a } 0 \cdot 25; \quad \tfrac{3}{4} \cdot 1 \text{ a } 1 \cdot \tfrac{3}{4}; \quad \tfrac{2}{5} \cdot 0 \text{ a } 0 \cdot \tfrac{2}{5}.$$

4. Pečlivě se vysvětlí, ve kterém případě je součin větší než násobenec, ve kterém je roven násobenci a ve kterém je menší než ná-

sobenec. Za tímto cílem je velmi užitečné vyvěsit ve třídě tabulku na příklad tohoto tvaru:

$$60 \cdot 3 = 180;\ 60 \cdot 2 = 120;\ 60 \cdot 1 = 60;\ 60 \cdot \tfrac{3}{4} = 45;$$

$$60 \cdot \tfrac{1}{2} = 30;\ 60 \cdot \tfrac{1}{4} = 15 \text{ (zapíše se do sloupce).}$$

5. Při počítání součinu několika čísel nejprve se naznačí všecky výkony s čitateli a jmenovateli, potom se provedou všecka možná krácení a teprv na konec se provedou výkony, na příklad:

$$3\frac{2}{5} \cdot 4\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15} \cdot 10 = \frac{17 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot 1 \cdot \overset{1}{\cancel{10}}}{5 \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{15}}} = \frac{51}{5} = 10\frac{1}{5}.$$

6. Z rozboru jednotlivých případů násobení zlomků žáci by mohli vyvodit velké množství pravidel, ale ovšem není vhodné zavádět velký počet pravidel. Žáci si pamatují a slovy formulují pouze obecné pravidlo násobení dvou loměných čísel. Užitečné je zhotovit nástěnnou tabulku i ve tvaru číselného příkladu i ve tvaru zápisu pomocí písmen, na příklad

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Je užitečné uložit žákům jako cvičení, aby sami užili obecného pravidla na zvláštní případy násobení lomeného čísla číslem celým (zde pravidlo bylo známo) a celého čísla zlomkem, kde zvláštní pravidlo udáno nebylo. Avšak potom (ale ne dříve), když už se žáci přesvědčili o správnosti komutativního zákona násobení pro případ násobení lomených čísel, můžeme odvodit pravidlo o násobení celého čísla zlomkem na tom základě, že

$$\frac{a}{b} \cdot c = c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{b}.$$

Obecného pravidla užíváme na zmíněné zvláštní případy tak, že považujeme celé číslo za zlomek, jehož čitatel je roven tomu celému číslu a jehož jmenovatel (podle učiněné dohody) je roven jedné.

Pro případy násobení smíšeného čísla zlomkem, číslem celým a smíšeným se neudávají zvláštní pravidla. Stačí naznačit, jako obecný případ, možnost vyjádřit smíšené číslo jako nepravý zlomek za účelem provedení výkonu násobení.

Žáci 5. třídy převádějí smíšené číslo na nepravý zlomek, mají-li násobit smíšené číslo smíšeným číslem nebo zlomkem.

V případě násobení smíšeného čísla číslem celým a obráceně, postupuje se často tak, jak bylo výše uvedeno (§ 4).

7. Posléze je velice užitečné, aby se žáci cvičili v sestavování slovních úloh na různé případy násobení. Je vhodné řešit číselné i slovní úlohy na sčítání, odčítání, násobení a užívání závorek.

Poznámky: 1. Opakujeme: krácení zlomků jest prováděti už při procesu násobení a ne až ve výsledku; tedy se nemá psát

$$\frac{10 \,.\, 7 \,.\, 92}{25 \,.\, 8} = \frac{6440}{200} = 32\frac{40}{200} = 32\frac{1}{5},$$

nýbrž má se psát

$$\frac{10 \,.\, 7 \,.\, 92}{25 \,.\, 8} = \frac{7 \,.\, 23}{5} = 32\frac{1}{5}.$$

Nedbání tohoto pravidla vede ke krajně nemotorným výpočtům. Taková vada při provádění násobení je velice rozšířena.

2. V případě několikerého postupného násobení má se psát naráz (bez výpočtu $2\frac{3}{5} \,.\, \frac{2}{7}$):

$$2\frac{3}{5} \,.\, \frac{2}{7} \,.\, 10 = \frac{13 \,.\, 2 \,.\, 10}{5 \,.\, 7} = \frac{52}{7} = 7\frac{3}{7}.$$

3. Abychom předešli chybám vyskytujícím se později při dělení zlomků[11]) nepřipouštíme ani při násobení zlomků žádné krácení, dříve než se v zápise naznačí násobení čitatelů a násobení jmenovatelů; tedy nemá se psát

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{16}{25} = \frac{5}{1} \cdot \frac{2}{25},$$

nýbrž má se psát

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{16}{25} = \frac{\overset{1}{5} \,.\, \overset{2}{16}}{\underset{1}{8} \,.\, \underset{5}{25}} = \frac{2}{5}.$$

4. Je třeba upozornit na chybu, které se žáci dopouštějí tím, že násobí zvlášť celé části a zvlášť lomené části, když mají násobit dvě smíšená čísla, na příklad:

$$4\frac{1}{5} \,.\, 10\frac{1}{3} = 40\frac{4}{15}\ (?).$$

11) Při dělení $\frac{5}{6} : \frac{12}{5}$ nesprávně se krátí $\frac{1}{1} : \frac{2}{1}$.

5. Upozorňujeme na často se vyskytující chybu, když v případě

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 2}{8 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 3} = \frac{1}{9}$$

žáci v odpovědi píší převrácenou hodnotu 9 místo $\frac{1}{9}$.

6. Můžeme ukládat žákům cvičení v takovéto formě: udáme násobence, na příklad 7, $\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}$, 1 a uložíme žákům, aby zvolili násobitele sami a to tak, aby součin byl rovný, větší nebo menší než násobenec.

7. Vycházejíce z definice $1\% = \frac{1}{100}$, můžeme řešit ve třídě nejjednodušší úlohy: 1. na určování daného procenta čísla a 2. na určování úroku, který vynese jistina za určitý (daný) čas (viz kapitolu „Procenta").

§ 11. Příklady pro kontrolní práci

1. Vypočísti

a) $\frac{7}{8}$ ze 12,
b) $\frac{9}{16}$ ze $\frac{12}{27}$,
c) $\frac{3}{11}$ ze $\frac{3}{11}$,
d) $\frac{4}{9}$ ze $7\frac{1}{5}$.

2. Nalézt součiny

e) $3\frac{1}{12} \cdot 16 =$
f) $12 \cdot 4\frac{1}{3} =$
g) $6\frac{2}{5} \cdot 1\frac{9}{10} =$
h) $3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{7} =$
i) $7 \cdot \frac{1}{4} =$
j) $14 - 2\frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{2} =$

3. Odpovědět na otázky:

a) Zdali součin bude větší nebo menší než násobenec:

$$7 \cdot 4\frac{2}{3};\quad 9 \cdot \frac{4}{5};\quad \frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{2}.$$

b) Čemu se rovná vynechaný činitel:

$$? \cdot 6\frac{1}{3} = 6\frac{1}{3};\quad ? \cdot 1 = 1.$$

Úloha. Délka obdélníkového pozemku je rovna 280 m a šířka tvoří $\frac{3}{7}$ délky. Kolik semena je třeba na osetí $\frac{4}{5}$ pozemku, jestliže na 1 m^2 je třeba $11\frac{1}{5}$ g semena?

§ 12. Určení čísla ze známé velikosti jeho zlomku

Nežli přejdeme k výkonu dělení zlomkem, zopakujeme ve třídě určení neznámého čísla ze známé velikosti jeho zlomku (části), t. j. když je známa velikost části i jaká je to část.

Začneme určením čísla ze známé velikosti jeho dílu; tato cvičení jsou žákům známá z kursu obecné školy v případě, že hodnota dílu čísla je vyjádřena číslem celým, na příklad, když $\frac{1}{3}$ neznámého čísla je rovna 16; v tomto případě žáci řeknou na ráz, čemu se rovná hledané číslo.[12]) Je zvláště důležité v tomto případě ověřit správnost řešení jak pomocí dělení tak i pomocí násobení:

$$\tfrac{1}{3} \,.\, x = 16; \quad x = 16 \,.\, 3 = 48. \text{ Zkouška: } 48 : 3 = 16.$$

Potom se přejde k případům, že díl čísla je roven pravému nebo nepravému zlomku nebo smíšenému číslu; požaduje se ústní nebo písemné řešení, na příklad:

$$\tfrac{1}{3} \,.\, x = \tfrac{1}{2}; \text{ ústně } x = 1\tfrac{1}{2};$$
$$\tfrac{1}{3} \,.\, x = 2\tfrac{1}{2}; \text{ ústně } x = 7\tfrac{1}{2};$$
$$\tfrac{1}{4} \,.\, x = 3\tfrac{1}{3}; \ x = 3\tfrac{1}{3} \,.\, 4 = 12 + \tfrac{4}{3} = 13\tfrac{1}{3}$$

nebo písemně

$$\tfrac{1}{3}x = \tfrac{6}{7}; \ x = \tfrac{6}{7} \,.\, 3 = \tfrac{18}{7} = 2\tfrac{4}{7}.$$

Potom se může přejít k určení čísla ze známé velikosti jeho libovolného zlomku; pro názornost je vhodné podmínku ilustrovat náčrtem (viz kap. o slovních úlohách); řešíme ve třídě úlohy s konkretním obsahem (na výpočet ceny, vzdálenosti, věku a pod.). Zápis vedeme v takovémto tvaru:

$\frac{3}{4}$ neznámého čísla jsou rovny 96 neboli $\frac{3}{4} \,.\, x = 96$;

$\frac{1}{4}$ neznámého čísla je rovna $\frac{96}{3}$ neboli $\frac{1}{4} \,.\, x = \frac{96}{3}$;

$\frac{4}{4}$ neznámého čísla jsou rovny $\frac{96 \,.\, 4}{3}$ neboli $\frac{4}{4} \,.\, x = \frac{96 \,.\, 4}{3}$.

Potom se může přejít k řešení složitějších úloh.

§ 13. Dělení lomených čísel

Definice dělení

Tato otázka byla podrobně rozebrána v kapitole o dělení celých čísel. Definici dělení lomených čísel je třeba dát, jako v případě celých čísel, takto: dělení je obrácený výkon k násobení; dělit jedno

---

[12]) Viz pozn. pod čarou u § 7 o ústních cvičeních začátkem školního roku.

číslo druhým znamená ze součinu a jednoho známého činitele určit druhého činitele. Vzhledem ke komutativnímu zákonu násobení podíl je nezávislý na tom, zdali známe násobence nedo násobitele.

Otázky řešitelné dělením zlomkem

1. Učitel může vyvodit pravidlo dělení zlomkem v témž pořádku, v jakém se postupuje při násobení zlomkem, totiž tak, že ukáže na konkretní úloze, že probraná otázka určení čísla ze známé jeho části (z velikosti jeho zlomku) řeší se dělením, totiž dělením zlomkem.

4 m látky stojí 4 r. 80 k.; 1 m látky stojí
(480 : 4) k. = 1 r. 20 k.
3 m látky stojí 4 r. 80 k.; 1 m látky stojí
(480 : 3) k. = 1 r. 60 k.
2 m látky stojí 4 r. 80 k.; 1 m látky stojí
(480 : 2) k. = 2 r. 40 k.
$\frac{1}{2}$ m látky stojí 4 r. 80 k.; 1 m látky stojí
9 r. 60 k.; $\frac{1}{2} \cdot x = 4$ r. 80 k.

otázka se řeší dělením.

$\frac{3}{4}$ m látky stojí 4 r. 80 k. Co stojí 1 m téže látky?

Otázka v poslední úloze je obdobná předcházejícím; i tato úloha se řeší dělením; $\frac{3}{4}$ m látky stojí 4 r. 80 k.; $\frac{3}{4}x = 480$; $x = \frac{480 \cdot 4}{3}$ (i tuto úlohu řešíme dělením $x = 480 : \frac{3}{4}$).

Jinými slovy, dohodnutá definice dělení jako určení čísla ze známé velikosti jeho zlomku má určitý účel — řešit všecky úlohy téhož druhu jedním výkonem, nezávisle od toho, jaká jsou čísla v podmínkách úlohy (celá nebo lomená). Z toho plyne také pravidlo dělení zlomkem. Můžeme také, jako v případě násobení zlomkem, sestavit plán řešení složitější úlohy a dojít k témuž závěru.

Ale můžeme dáti přednost jiné cestě k převedení otázky o určení čísla ze známé velikosti jeho zlomku na dělení zlomkem.

2. Budiž úkolem provést dělení $17 : \frac{2}{3}$, t. j. najít číslo, které násobeno číslem $\frac{2}{3}$, dá výsledek 17 (celé číslo). Ježto násobit číslo číslem $\frac{2}{3}$ znamená najít $\frac{2}{3}$ prvého čísla,

$\frac{2}{3}$ hledaného čísla dávají 17;

$\frac{1}{3}$ hledaného čísla dává $\frac{17}{2}$;

$\frac{3}{8}$ hledaného čísla dávají $\frac{17}{2} \cdot 3 = \frac{17 \cdot 3}{2}$ neboli

$$17 : \frac{2}{3} = \frac{17 \cdot 3}{2} = \frac{51}{2} = 25\frac{1}{2}.$$

3. Je dáno, že $\frac{3}{4}$ čísla se rovnají 19. To znamená, že neznámé číslo znásobené číslem $\frac{3}{4}$, rovná se 19; $x \cdot \frac{3}{4} = 19$. Co hledáme? Odpověď: neznámého násobence. Co známe? Odpověď: součin a násobitele. Čemu se rovná součin? Odpověď: 19. Jmenujte násobitele. Odpověď: $\frac{3}{4}$. Kterým výkonem hledáme jednoho činitele, jestliže známe součin a druhého činitele? Odpověď: dělením. Zápis $19 : \frac{3}{4}$. Jak najdeme odpověď na položenou otázku? Máme najít číslo, jestliže víme, že $\frac{3}{4}$ toho čísla se rovnají 19 (dvěma výkony). Odpověď: $\frac{19 \cdot 4}{3}$. Zápis: $19 : \frac{3}{4} = \frac{19 \cdot 4}{3} = \frac{76}{3} = 25\frac{1}{3}$.

4. Budiž úkolem dělit zlomek zlomkem $\frac{5}{7} : \frac{2}{3}$. To znamená najít číslo x z podmínky $x \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{7}$, t. j. z podmínky, že když to číslo znásobíme číslem $\frac{2}{3}$, dostaneme jako součin $\frac{5}{7}$, to znamená, že $\frac{2}{3}$ hledaného čísla jsou rovny

$$\frac{2}{3}x = \frac{5}{7};\ \frac{1}{3}x = \frac{5}{7 \cdot 2};\ \frac{3}{3}x = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 2};\ \text{t. j. } \frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 2} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}.$$

Na těchto příkladech žáci už mohou si všimnout souvislosti mezi dělením zlomkem a určením čísla ze známé velikosti jeho části (pravého zlomku) a pochopit, že můžeme dostat podíl větší než je dělenec.

5. Potom provádíme cvičení, ve kterých dělenec je smíšené číslo:

$\frac{3}{4}$ neznámého čísla se rovnají $2\frac{1}{2}$; najít neznámé číslo. Cestou téže řady otázek jako výše dospějeme k zápisu dělení, které máme provésti:

$$x = 2\tfrac{1}{2} : \tfrac{3}{4}.$$

Na druhé straně x najdeme jakožto číslo, o kterém víme, že jeho část (zlomek $\frac{3}{4}$) se rovná číslu $2\frac{1}{2}$, dvěma výkony: $\frac{3}{4}x = 2\frac{1}{2}$ ($\frac{3}{4}$ neznámého čísla jsou rovny $2\frac{1}{2}$);

$$\frac{1}{4}x = \frac{5}{2 \cdot 3};\ x = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 3},$$

t. j. neznámé číslo

$$x = 2\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{5}{2} : \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

Poznámky. 1. Je nezbytné probrat ve třídě dostatečný počet cvičení podobného druhu a při tom porovnávat dané číslo s výsledkem a vyjasňovat úlohu dělení pravým zlomkem.

2. Při této práci je vhodné vzájemně porovnávat dvě otázky: a) násobit pravým zlomkem znamená najít část (zlomek) čísla (výsledek je menší než násobenec); b) dělit pravým zlomkem znamená najít číslo ze známé velikosti jeho části (zlomku), výsledek je větší než dělenec.

3. Řešit cvičení: na př. najít $\frac{7}{9}$ čísla, jehož $\frac{2}{3}$ se rovnají 54 a obdobně.

§ 14. Pravidlo dělení lomených čísel

Porovnávají se a shrnují se výsledky provedené práce:

1. případ dělení celým číslem:

$$68 : 4 = 17;\quad 4\frac{3}{8} : 4 = \frac{35}{8} : 4 = \frac{35}{8 \cdot 4} = \frac{35}{32} = 1\frac{3}{32};$$

$$\frac{5}{6} : 4 = \frac{5}{6 \cdot 4} = \frac{5}{24};$$

2. případ dělení pravým zlomkem:

$69 : \frac{1}{4} = 69 \cdot 4 = 276$; $\frac{1}{4}$ neznámého čísla je rovná 69;

$69 : \frac{3}{4} = \frac{69 \cdot 4}{3} = 92$; $\frac{3}{4}$ neznámého čísla jsou rovné 69;

$4\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 6$; $\frac{3}{4}$ neznámého čísla jsou rovné $4\frac{1}{2}$;

$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$; $\frac{3}{4}$ neznámého čísla jsou rovné $\frac{2}{5}$;

3. případ dělení smíšeným číslem:

a) $32\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}$; co znamená dělit $32\frac{1}{2}$ číslem $2\frac{1}{2}$? To znamená najít takové číslo x, že $x \cdot 2\frac{1}{2} = 32\frac{1}{2}$, takže, jestliže x vezmeme dvakrát za sčítance a přidáme ještě jeho polovinu, dostaneme $32\frac{1}{2}$; t. j. 5 polovin čísla dává $32\frac{1}{2}$, a číslo je rovné 13. Vskutku

$$\frac{5}{2}x = 32\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2}x = \frac{65}{2 \cdot 5};\quad x = \frac{65 \cdot 2}{2 \cdot 5} = 13;$$

b) $14 : 1\frac{2}{3}$ neboli $14 : \frac{5}{3}$; $x \cdot \frac{5}{3} = 14$; $\frac{5}{3}$ neznámého čísla dává 14; neznámé číslo je $\frac{14 \cdot 3}{5}$ t. j.

$$14 : 1\frac{2}{3} = 14 : \frac{5}{3} = \frac{14 \cdot 3}{5} = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}.$$

Poznámka. V některých methodikách a methodických článcích o aritmetice se navrhuje vysvětlovat dětem dělení zlomků podle obdoby s dělením pojmenovaných čísel, t. j. „měřením“:

1. hledáme $15 : \frac{3}{8}$; to znamená, že hledáme, kolikrát je číslo $\frac{3}{8}$ obsaženo v 15 neboli ve $\frac{120}{8}$; $\frac{120}{8} : \frac{3}{8} = 40$;

2. hledáme $\frac{5}{9} : \frac{1}{12}$.

Řešení: $\frac{5}{9} : \frac{1}{12} = \frac{20}{36} : \frac{3}{36} = 6\frac{2}{3}$.

3. Hledáme $\frac{5}{17} : 2\frac{1}{4} = \frac{5}{17} : \frac{9}{4} = \frac{20}{68} : \frac{153}{68} = \frac{20}{153}$ a pod.

Při tomto způsobu především se provádí zbytečná operace — uvádění zlomků na společného jmenovatele, a u žáků se vzbudí dojem, že při dělení zlomků je nutné uvádět je na společného jmenovatele. Mimo to otázka, která se při tomto způsobu klade, vyvolává velká nedorozumění, ježto poslední dva případy vedou k odpovědi, že zlomek $\frac{1}{12}$ je obsažen $6\frac{2}{3}$krát ve zlomku $\frac{5}{9}$ a všeho smyslu postrádající odpovědi, že číslo $2\frac{1}{4}$ je $\frac{20}{153}$krát obsaženo v $\frac{5}{17}$.

Dělení jednotkou. a) Žáci vědí, že násobit jednotkou znamená dostat součin rovný násobenci, a co tedy znamená dělit jednotkou?

Na základě definice dělení jako obráceného výkonu k násobení je třeba vysvětlit, že $35 : 1 = 35$, neboť $35 \,.\, 1 = 35$;

$$2\tfrac{1}{4} : 1 = 2\tfrac{1}{4}; \text{ neboť } 2\tfrac{1}{4} \,.\, 1 = 2\tfrac{1}{4}.$$

b) Jinak: $35 : \frac{7}{7}$ znamená $\frac{7}{7}x = 35$; je jasné, že v tomto případě známá část čísla je číslo samo.

Ve mnoha případech při dělení $\frac{4}{5} : \frac{4}{5}$ žáci píší nulu nebo říkají: „Nedostaneme nic“. Násobením, zkouškou výsledku v případě dělení $a : a$, musíme odstranit tuto chybu.

Dělení nulou se vylučuje.

Ze všech probíraných příkladů můžeme:

1. vyvodit, že při dělení zlomkem (pravým nebo nepravým) se určuje číslo ze známé velikosti jeho zlomku;

2. vyvodit, že nastávají případy:

$$\left.\begin{array}{l} 60 : 6 = 10 \\ 60 : 4 = 15 \\ 60 : 2 = 30 \end{array}\right\} \text{podíl je menší než dělenec}$$

$$60 : 1 = 60 \quad \text{podíl je roven dělenci}$$

$$\left.\begin{array}{l} 60 : \frac{3}{4} = 80 \\ 60 : \frac{1}{2} = 120 \\ 60 : \frac{1}{4} = 240 \end{array}\right\}$$ podíl je větší než dělenec.

Podobnou tabulku je vhodné mít ve třídě.

3. Vyvodit pravidlo dělení lomených čísel a smíšených čísel (pravidlo udané v učebnici), při čemž při dělení smíšených čísel je výhodné uvést smíšené číslo na tvar nepravého zlomku pouze tehdy, když dělitel je lomené nebo smíšené číslo; v jiných případech můžeme žádat, aby žáci užívali jiného způsobu, uvedeného výše, na příklad:

$36\frac{1}{2} : 2 = 18\frac{1}{4}$ (ústně), nebo $35\frac{1}{4} : 2 = 17\frac{5}{8}$ (ústně) a pod.

4. V konečném tvaru pravidlo dělení zlomku bude znít: dělence násobíme převráceným dělitelem. Navzájem převrácená čísla definujeme jako čísla, jejichž součin se rovná jedné.

Neškodí provést malá cvičení ústní i písemná:

a) na určení převrácené hodnoty čísla, dána jsou čísla

$$4;\ \tfrac{2}{3};\ \tfrac{1}{5};\ 3\tfrac{1}{2};$$

jejich převrácené hodnoty jsou:

$$\tfrac{1}{4};\ 1\tfrac{1}{2};\ 5;\ \tfrac{2}{7}.$$

b) na srovnávání párů rovností tvaru:

$$6 : 4 = \tfrac{3}{2},\ 6 \,.\, \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{2};\quad 6 : \tfrac{2}{3} = 9,\ 6 \,.\, \tfrac{3}{2} = 9;$$

$$6 : \tfrac{1}{5} = 30,\quad 6 \,.\, 5 = 30;\quad 6 : 3\tfrac{1}{2} = 1\tfrac{5}{7},\ 6 \,.\, \tfrac{2}{7} = 1\tfrac{5}{7} \text{ a pod.}$$

Z rozboru takových cvičení docházíme k pravidlu, že dělení lomených čísel je násobení dělence převráceným dělitelem.

5. Speciální případy dělení celého čísla zlomkem a obráceně se počítají jako zvláštní případy obecného pravidla.

6. Z obecného pravidla vyvodit následující zjednodušení:

a) dělení dvou zlomků se stejnými jmenovateli žáci jsou povinni provádět tak, že dělí čitatele prvého zlomku čitatelem druhého;

b) dělení zlomků v případě, že čitatelem a jmenovatelem dělence jsou násobky čitatele a jmenovatele v děliteli, můžeme prováděti tak.

že dělíme čitatele v dělenci čitatelem v děliteli a jmenovatele v dělenci jmenovatelem v děliteli, na příklad:

$$\frac{10}{21} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3}.$$

7. Na základě pravidla dělení lomených čísel cvičí se žáci v provádění řady postupných násobení a dělení bez výpočtu částečných výsledků, na příklad:

a) $\frac{3}{4} : 6 \,.\, 5\frac{1}{2} : \frac{1}{7} : 3\frac{1}{2} = \frac{3\,.\,11\,.\,7\,.\,2}{4\,.\,6\,.\,2\,.\,1\,.\,7} = \frac{11}{8} = 1\frac{3}{8}$;

b) $\frac{4\frac{1}{2}}{3\frac{1}{4}} = \frac{9\,.\,4}{2\,.\,13} = \frac{18}{13} = 1\frac{5}{13}$;

c) $\frac{\frac{3}{4}\,.\,2\frac{1}{2}}{6\frac{3}{4}\,.\,\frac{1}{9}\,.\,5\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}\,.\,\frac{5}{2}}{\frac{27}{4}\,.\,\frac{1}{9}\,.\,\frac{11}{2}} = \frac{3}{4}\,.\,\frac{5}{2}\,.\,\frac{4}{27}\,.\,\frac{9}{1}\,.\,\frac{2}{11} = \frac{5}{11}$.

Poznámka. Ve třetím příkladě dělení bylo zaměněno násobením převrácenými čísly. Zlomek, v jehož čitateli i jmenovateli jsou lomená čísla, jmenuje se složený zlomek nebo zobecněný zlomek.

§ 15. Úlohy řešitelné dělením (doplňky)

Na základě všeho výše probraného můžeme řešit 4 úlohy.

Úloha 1. Případ, kdy dělitel je číslo celé nebo smíšené (hledá se část dělence). Na příklad: „Kus látky stojí 360 rub. a měří 9 m. Kolik stojí 1 m látky?“ Nebo „Kus látky stojí $22\frac{3}{4}$ rub. a měří $6\frac{1}{2}$ m. Kolik stojí 1 m látky?“ Řešení nepůsobí žákům potíže a nedává nic nového.

Úloha 2. Případ, kdy dělitel je číslo lomené (ze známého zlomku čísla hledáme celek čísla). Na příklad: „Kus látky, který měří $\frac{3}{4}$ m, stojí 7 rub. (nebo $7\frac{1}{2}$ rub.). Kolik stojí 1 m té látky?“ Zápis může míti tento tvar: $\frac{3}{4}$ neznámého čísla dávají 7 rub.; neznámé číslo se rovná $\frac{7\,.\,4}{3} = 9\frac{1}{3}$ nebo $7 : \frac{3}{4} = 9\frac{1}{3}$ (rub.). Obecný tvar řešení obou úloh je $\frac{p}{q} = r$, kde p je cena kusu látky, q počet metrů a r cena za 1 m.

Úloha 3. Případ, kdy podíl je číslo celé nebo smíšené a hledá se, kolikrát je jedno číslo obsaženo v druhém. Na příklad: „Bylo koupeno za $104\frac{1}{2}$ rub. látky v ceně $4\frac{3}{4}$ rub. za každý metr. Kolik látky bylo koupeno?“

$$104\frac{1}{2} : 4\frac{3}{4} = \frac{209}{2} : \frac{19}{4} = \frac{209\,.\,4}{2\,.\,19} = 22 \text{ (m)}.$$

Úloha 4. Případ, kdy podíl je pravý zlomek (hledá se, jakou část druhého čísla tvoří prvé číslo). Na příklad: „Byla koupena za 4 rub. látka v ceně 20 rub. za metr. Kolik látky bylo koupeno?“ (nebo lépe: „jaká část [díl] metru byla koupena?“) $4 : 20 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ (m); 20 cm.

Obecný tvar řešení obou úloh 3 a 4 je $\frac{p}{r} = q$, kde p je cena celé látky, r cena jednoho metru a q počet koupených metrů.

Poznámka. V případě, že cena za jednotku je číslo lomené, není nic nového; na příklad: „Bylo koupeno za 3 rub. krup v ceně $\frac{4}{5}$ rub. za 1 kg. Kolik kg bylo koupeno?“ V daném případě můžeme úlohu řešit dělením,

$$3 : \frac{4}{5} = 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \text{ (kg)},$$

je však lépe, když žáci usuzují takto: za 1 rubl můžeme koupit $\frac{5}{4}$ kg; za 3 rub. můžeme koupit třikrát větší počet kg:

$$\frac{5}{4} \cdot 3 = \frac{5 \cdot 3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \text{ (kg)}.$$

§ 16. Změna součinu a podílu

Při dřívějším probírání změny součinu a podílu dvou celých čísel způsobené zvětšením nebo zmenšením daných čísel několikrát bylo nutné zavést omezení na tolik, že nebylo možné dělit libovolným číslem, aby nevznikl zbytek. Nyní však po probrání výkonů násobení a dělení s lomenými čísly můžeme systematicky doplnit otázku změny součinu a podílu při změně daných čísel. Na příklad, mějme $8 \cdot 25 = 200$. Jak se změní výsledek, jestliže i dělence i dělitele zmenšíme třikrát? Součin se zmenší devětkrát, neboť:

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{25}{3} = \frac{8 \cdot 25}{3 \cdot 3} = \frac{200}{9}.$$

Jak se změní zlomek $\frac{4}{7}$, jestliže čitatele znásobíme pěti a jmenovatele devíti? a pod.

Řešení:

$$\frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 9} = \frac{20}{63}; \frac{20}{63} : \frac{4}{7} = \frac{20 \cdot 7}{63 \cdot 4} = \frac{5}{9}.$$

Odpověď: Vyjde zlomek rovný $\frac{5}{9}$ zlomku $\frac{4}{7}$; $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9}$.

Pokyny o zapisování, formulacích a cvičeních

1. Nemáme dovolovat, aby žáci prováděli krácení čitatele a jmenovatele dříve, než je zapíší pod jedinou zlomkovou čáru, t. j. nemá se psát:

$$\tfrac{3}{4} : \tfrac{6}{7} = \tfrac{1}{4} : \tfrac{2}{7};$$

účelné je psát

$$\frac{3}{4} : \frac{6}{7} = \frac{3 \, . \, 7}{4 \, . \, 6} = \frac{7}{8},$$

jinak se těžko vyvarujeme chyb, když při dělení $\frac{5}{8} : \frac{4}{9}$ žák provádí krácení $\frac{5}{2} : \frac{1}{9}$ a pod.

2. Nemáme připouštět zápisy jako:

$$\frac{4}{5} : \frac{4}{5} = \frac{4 \, . \, 5}{5 \, . \, 4} = 1$$

nebo

$$\frac{3}{4} : 1 = \frac{3}{4} : \frac{1}{1} = \frac{3 \, . \, 1}{4 \, . \, 1} = \frac{3}{4}.$$

V takových případech má žák udat odpověď na ráz.

3. Je vhodné dávat cvičení tohoto tvaru: udá se dělenec, na příklad: 7; $\frac{3}{4}$; $2\frac{1}{2}$; 1 a uloží se zvolit dělitele tak, aby výsledek byl větší než dělenec, roven, nebo menší než dělenec.

4. Můžeme řešit úlohy (nejjednodušší případy), ve kterých se žádá najít číslo, známe-li určitý počet procent z něho, na příklad „najít číslo, jestliže víme, že 3% jeho se rovnají 20“.

Řešení: $\frac{3}{100}$ neznámého čísla dávají 20; tedy to číslo je

$$20 : \frac{3}{100} = \frac{20 \, . \, 100}{3} = \frac{2000}{3} = 666\frac{2}{3}$$ (viz kap. „Procenta“).

5. Když žáci poznali pravidlo násobení zlomků, bylo možná dát jeho záznam pomocí písmen:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \, . \, c}{b \, . \, d}.$$

Zde je možné dát záznam pravidla dělení pomocí písmen:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \, . \, d}{b \, . \, c}.$$

(Záznamy pravidel sčítání a odčítání zlomků pomocí písmen v obecném případě $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}$ nejsou vhodné pro 5. třídu.) Je užitečné srovnávat následující řádky pravidel násobení a dělení celého čísla zlomkem a zlomku celým číslem:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}; \qquad a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b};$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{a \cdot c}{b}; \qquad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}.$$

6. Je nezbytné dbáti toho, aby žák dával správnou a přesnou formulaci všech pravidel výkonů se zlomky. K tomu musí v prvé řadě rozumět obsahu pravidel. Ale mimo to musíme dbáti toho, aby žák alespoň při prvních cvičeních, jak postupně říká pravidlo, při tom prováděl potřebné výkony. Nikterak nesmíme připouštět nezřetelné a nedbalé formulace, jako když se na otázku, jak celé číslo dělíme zlomkem, odpoví: „Jmenovatele násobíme celým číslem“. Zajisté násobíme jmenovatele celým číslem, ale to je pouze část pravidla, a jestliže jen té části užíváme, dospějeme k nesprávnému řešení, jako: $5 : \frac{4}{7} = \frac{4}{5 \cdot 7}$. Někdy žáci pravidlo dělení zlomků formulují takto: „Čitatele dáme do jmenovatele, a jmenovatele do čitatele“, a podle toho můžeme dostat $\frac{3}{4} : \frac{6}{7} = \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 7}$. Učitel musí stále míti v patrnosti, že těchto pravidel musí později žáci uvědoměle užívat při řešení nových otázek, na příklad při výkonech s algebraickými zlomky a pod., a že mechanické provádění výkonů bez plného uvědomění, jakož i nezřetelnost při formulacích, budou na závadu v pozdější práci.

7. Je třeba si všímat chyb, kterých se žáci dopouštějí, když mají na příklad 20 dělit číslem $\frac{1}{4}$ neboli určit, kolikrát je $\frac{1}{4}$ obsažena ve 20. Žáci většinou udávají odpověď 5 místo 80. Stejnou chybu jsme konstatovali při dělení $3 : \frac{1}{3}$. Udávali odpověď 1 místo 9. Když dostali za úkol $15 : \frac{1}{6}$ neboli najít, kolikrát je $\frac{1}{6}$ obsažena v 15, žáci většinou odpovídali $2\frac{1}{2}$ místo 90; rovněž při úkolu, kolikrát je číslo $\frac{5}{12}$ menší než 15, je správná žákova odpověď řídkou výjimkou (pokoušejí se počítat rozdíl $15 - \frac{5}{12}$ a pod.).

§ 17. Poměr dvou čísel

R. 1938 byla vydána pro střední školu Kiselëvova učebnice aritmetiky v přepracování, jež provedl prof. A. Ja. Chinčin, a v této učebnici pojem poměru jednoho čísla ke druhému se stotožňuje s pojmem podílu při dělení prvého čísla druhým. Toto široké pojetí výrazu „poměr" odpovídá tomu významu výrazu, který se mu dává ve vědě. Podíl při dělení jednoho čísla druhým nazývá se jinak poměr těchto čísel.[13])

Před tím užívanou definici poměru jako výsledku srovnávání dvou čísel, jest pojímati jako popis „úlohy a významu pojmu poměru při použití".[14])

„Pro starověkou matematiku vůbec je charakteristické, že v její výstavbě není číslo prvým elementem, nýbrž vzniká jako „výsledek srovnávání konkretních veličin" („pojmenovaných" čísel)..." „V přítomné epoše, jejímž charakteristickým rysem je „aritmetisace" matematiky, t. j. přidělení číslu role primitivního elementu, věc se má jinak. Aritmetické operace provádíme jenom s abstraktními čísly, a s tímto aktem abstrakce, který odstraňuje množství nejasností a omylů, seznamujeme naše děti velmi brzo."... „Jmenovitě podle toho současný matematik nebo fysik, maje před sebou výraz $\frac{a}{b}$, ve zdrcující většině případů naprosto nezávisle od příslušných pojmenování (t. j. od toho, jak se konkretně dospělo k číslům a a b při dané úloze) jej nazývá „poměrem" a ku b."... „Naše přání, aby se pokud možno ve školním vyučování dával každému termínu ten význam, který mu přísluší v současné vědě, je pochopitelné a není třeba je ospravedlňovati. Žádné odvolávání na antickou tradici nesmí se uznat jako platná námitka."... „Jediné, co může někdy být na překážku tomu, aby se pro ten či onen pojem užilo ve školním kurse výkladu odpovídajícího současné vědě, může být pouze obtížnost toho výkladu."... „Ale v případech, kdy je vědecká koncepce pojmu jednodušší a jasnější nežli tradičně školská, nemůže pro zachování této být nijakého ospravedlnění."... „Většina soudruhů, vyjadřujících se proti stotožnění pojmů poměru a podílu, souhlasí s tím, že každý poměr je podíl, ale poukazuje zároveň na to, že každý podíl není poměr."... „jmenovitě: „podíl je poměrem tehdy a jenom tehdy, jestliže dělenec a dělitel jsou buďto dvě abstraktní čísla nebo dvě stejnorodá pojmenovaná čísla"... „veškerá tato koncepce leží mimo matematiku. Matematika zná pouze jedno dělení, dělení abstraktních čísel."... „Dva druhy dělení jsou ve

[13]) Široké pojetí poměru se vyskytuje v knize „Elementarnyj kurs arifmetiki", JE. ŽELEN, vyd. z r. 1905 a j.

[14]) „Matematika v škole", 1941, č. 3. Prof. A. Ja. Chinčin („O ponjatije tbnošenija dvuch čisel").

skutečnosti pouze dva druhy konkretních, praktických úloh, řešené jedním a týmž výkonem, dělením. Proto rozdělování všech možných podílů na dva typy, na ty, jež jsou a jež nejsou poměry, nic společného s matematikou nemá."[15])

Příklady. 1. Najít poměr abstraktních čísel šest ku třem $\frac{6}{3} = 2$, ježto $2 . 3 = 6$. Poměr tří ku pěti se rovná $3 : 5 = \frac{3}{5}$, ježto $\frac{3}{5} . 5 = 3$.

2. Zápis $\frac{25}{5}$ (kg) znamená, že hledaný počet kg je roven poměru čísla 25 k číslu 5.

3. Poměr dvou konkretních veličin definujeme jako poměr číselných hodnot těch veličin, jsou-li obě vyjádřeny v téže jednotce míry. Proto při výpočtu poměru dvou délek, dvou vah a pod. musíme ty veličiny vyjádřit ve stejném pojmenování, na př. poměr váhy 1 kg k váze 1 g jest $1000 : 1 = 1000$; poměr délky 5 m k délce 1 cm jest $\frac{500}{1} = 500$ a pod. Někdy se v takových případech píše dělenec a dělitel se svým pojmenováním

$$8\tfrac{1}{2}\text{ m} : 4\tfrac{1}{4}\text{ m} = 2 \text{ (abstraktní číslo) nebo } 8\tfrac{1}{2} : 4\tfrac{1}{4} = 2.\text{[16]}$$

Poměr 7 m k 11 m je vyjádřen (abstraktním) lomeným číslem $\frac{7}{11}$, protože $\frac{7}{11} . 11 = 7$.

Ježto po zavedení lomených čísel výkon dělení je vždy přesně proveditelný (s vyloučením dělení nulou), můžeme vždy najít podíl neboli poměr jednoho čísla k druhému (jestliže druhé číslo není 0).

Poznámka. Když se při řešení praktické otázky ve školním kursu aritmetiky vypočte podíl při dělení jednoho čísla druhým, neboli poměr dvou čísel, tu se někdy mluví o „geometrickém poměru" pro rozlišení od rozdílu těch čísel, který se potom nazývá „aritmetickým poměrem". Ale slovem „poměr" se obyčejně (a také zde v dalším) rozumí jen „geometrický poměr".

1. Na konkretních příkladech se žákům vysvětlí pojem poměru,

[15]) Tamtéž.

[16]) V kurse geometrie se žáci seznámí s definicí poměru dvou stejnorodých veličin jako čísla udávajícího velikost první veličiny, jestliže byla druhá vzata za jednotku. Pro fysiky „rychlost rovnoměrného pohybu" je poměr dráhy k době. V aritmetice na to nazíráme takto: číselná hodnota rychlosti je rovna poměru (podílu při dělení) číselných hodnot dráhy a doby. Ve fysice se zavádí nejen dělení čísel, nýbrž i dělení pojmenování, na př. $\frac{\text{km}}{\text{hod.}}$, $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ a pod. V kurse aritmetiky na otázku rozměrů se nebere zřetel.

podá se definice, mluví se o tom, že v dalším mohou podíl při dělení jednoho čísla druhým nazývat „poměrem" těch čísel;

Udají se názvy členů poměru. Slovem „poměr" se rozumí i zápis 3 : 6, t. j. nevypočtený poměr i číselná hodnota podílu tedy zlomek $\frac{1}{2}$. Výrazy „první člen" a „druhý člen" poměru se zavedou jako výrazy znamenající „dělence" a „dělitele".

Jestliže poměr (podíl) je zapsán ve tvaru zlomku, pak členy poměru jsou čitatel a jmenovatel zlomku. Názvy členů poměru je třeba otázkami utvrdit, aby si je žáci osvojili, nežli se přejde k úměrám a novým výrazům. Udá se zápis pomocí písmen:

$$a : b = q \quad \text{nebo} \quad \frac{a}{b} = q.$$

Řešení příkladů a úloh na určení poměru dává možnost zopakovat výkony s celými a lomenými čísly.

2. Když žáci při řešení úlohy určí poměr dvou veličin nebo dvou čísel, mohou vysvětlovat smysl odpovědi. Jestliže poměr je číslo celé, pak udává: a) kolikrát je první veličina větší než druhá nebo kolikrát je první číslo větší než druhé, b) kolikrát je druhé číslo menší než prvé nebo kolikrát je druhá veličina menší než druhá, c) kolikrát je druhé číslo (druhá veličina) obsaženo v prvém (obsažena v prvé).

Jestliže poměr je pravý zlomek, pak udává, jakou část druhého čísla (veličiny) tvoří číslo (veličina) první, nebo poměr, na příklad $\frac{3}{4}$, udává, jaký díl druhého čísla (veličiny) a kolikrát (čtvrtina, třikrát) je obsažen v prvním čísle (veličině).

Jestliže poměr (podíl) je číslo smíšené, na příklad $3\frac{2}{5}$, pak udává, že v prvním čísle (veličině) je třikrát obsaženo druhé číslo (veličina) a ještě dvakrát pětina druhého čísla (veličiny).

Velmi užitečná jsou cvičení na převod délkového měřítka na číselné a naopak, na příklad, jestliže u plánu je udáno délkové měřítko „1 cm znamená 100 m" pak číselné měřítko plánu bude 1 cm : 100 m = = 1 cm : 10 000 cm = 0,0001 a obráceně měřítko 1 : 10 000 (0,0001) udává, že 1 cm na plánu odpovídá 10 000 cm neboli 100 m ve skutečnosti, to znamená, délkové měřítko plánu bude „1 cm znamená 100 m".

3. Při přechodu k otázce stanovení závislosti mezi členy poměru a určení neznámého členu poměru učitel má upozornit, že v praxi žákům působí potíže případ, když se má určit druhý člen poměru na základě prvního členu a hodnoty poměru.

Vysvětlení se podá na základě toho, že poměr je podíl, první člen poměru je dělenec a druhý člen je dělitel. Zdůrazní se, že první člen může být libovolné číslo a druhý člen libovolné číslo s výjimkou nuly.

4. Další práce spočívá: 1. ve vysvětlení změny poměru při násobení a dělení jeho členů libovolným číslem, 2. ve stanovení hlavní vlastnosti poměru, že poměr se nemění, jestliže oba členy násobíme nebo dělíme týmž číslem. Obyčejně to nedělá potíže, jakmile si žáci osvojili pojem poměru a jeho zápis ve tvaru zlomku nebo pomocí znaku „ : “.

Hlavní vlastnost poměru (podílu) žáci musí umět vysvětlit i formulovat. Ve cvičeních musíme požadovat od žáků patřičná vysvětlení, na kterémž základě[17]) provádějí krácení poměru a převádění poměru lomených čísel na poměr celých čísel. Je třeba upozornit na to, že při takových úpravách poměr se nemění, ale členy poměru se mění.

Poznámka. Poměr dvou zlomků s týmiž jmenovateli žáci obyčejně bez potíží převádějí na poměr jejich čitatelů:

$$3\tfrac{1}{8} : 1\tfrac{3}{8} = \tfrac{25}{8} : \tfrac{11}{8} = 25 : 11;$$

cestou cvičení musíme dospět k tomu, aby žáci si navykli provádět zjednodušený zápis také v případě poměru dvou zlomků s týmiž čitateli, t. j. nahrazovat poměr takových zlomků převráceným poměrem jmenovatelů, na př.:

$$\tfrac{7}{30} : \tfrac{7}{120} = 120 : 30 = 4; \quad \tfrac{3}{7} : \tfrac{3}{11} = 11 : 7 = 1\tfrac{4}{7} \text{ atd.}$$

5. Poměry $\frac{60}{15} = 4$ a $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ (nebo $60 : 15 = 4$; $15 : 60 = \frac{1}{4}$) se nazývají převrácené poměry; čísla 4 a $\frac{1}{4}$ jsou navzájem převrácená.

Jestliže dva poměry jsou navzájem převrácené, pak první člen jednoho poměru je druhým členem druhého a obráceně. Součin dvou převrácených poměrů je roven jedné. Později se vyloží, že převrácený

[17]) Na základě hlavní vlastnosti zlomku; na základě nezměnitelnosti podílu při násobení a dělení dělence i dělitele týmž číslem (s výjimkou nuly).

poměr dvou čísel je poměr jejich převrácených hodnot. Je dán poměr $60 : 15 = 4$; převrácený poměr je

$$15 : 60 = \tfrac{1}{4} \quad \text{nebo} \quad \tfrac{1}{60} : \tfrac{1}{15} = 15 : 60 = \tfrac{1}{4}.$$

Probíraných otázek se užije později (viz kap. XIII) při řešení rozmanitých úloh.

Později při probírání desetinných zlomků se můžeme dotknout prosté a poměrné chyby při měření: na příklad při výpočtu poměru délky kružnice k délce průměru. Dejme tomu, že přímým měřením se dostalo číslo 3,13, takže prostá chyba porovnáním s 3,14 vyjde 0,01; poměrná chyba je $\frac{0{,}01}{3{,}14} = \frac{1}{314} = 0{,}03 = 3\%$. Zde můžeme také řešit úlohy velkého praktického významu na výpočet procentového poměru dvou čísel (viz kap. „Procenta").

§ 18. Příklady pro kontrolní práci na dělení

1. Najít číslo, jehož sedmina je rovna $\frac{3}{8}$; najít číslo, jehož $\frac{5}{7}$ se rovná 1; najít číslo, jehož $\frac{5}{7}$ se rovná $2\frac{1}{2}$.

2. Najít x, jestliže

$$\tfrac{4}{9}x = \tfrac{1}{36}; \quad \tfrac{5}{6}x = 3\tfrac{1}{8}.$$

3. Provést naznačené výkony:

a) $\frac{5}{8} : 7 =$ c) $2\frac{1}{4} : 1\frac{3}{5} =$ e) $\dfrac{4\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{3}}{4 \cdot 5\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3}} =$

b) $4 : \frac{3}{11} =$ d) $2\frac{7}{9} : 1\frac{8}{27} =$

4. Odpovědět na otázky:

a) kolikrát je $\frac{7}{11}$ menší než 28?

b) které jsou převrácené hodnoty čísel

$$\tfrac{3}{5}; \ 2\tfrac{1}{8}; \ 1; \ 7?$$

c) určit bez provedení dělení, zdali podíl bude větší či menší než dělenec:

$$6\tfrac{2}{3} : \tfrac{3}{4} = \qquad 5 : 2\tfrac{1}{2} =$$

5. Určit neznámého dělitele:

$$4\tfrac{1}{4} : ? = \tfrac{1}{4}.$$

6. Určit neznámého dělence:

$$? : \tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

7. *Úloha.* Najít poměr nebo určit, jakou částí rychlosti osobního vlaku je rychlost nákladního vlaku, jestliže nákladní vlak ujel 220 km za $7\frac{1}{2}$ hod. a osobní vlak 286 km za $6\frac{1}{2}$ hod.

8. Příklad na všecky 4 výkony s obyčejnými zlomky.

DESETINNÉ ZLOMKY

§ 1. Úvod

Historické poznámky

Předchůdci desetinných zlomků byly šedesátkové zlomky. Velmi pomalu pronikala myšlenka, že v této soustavě podstata otázky netkví v čísle 60 (ačkoli je to číslo s velkým počtem dělitelů a ačkoli je měnitelem rozšířených měr úhlových a časových), nýbrž v pravidelném soustavném rozdělování na díly se zachováním stálého poměru mezi nimi.[1])

Indové užívali zlomků se jmenovatelem 10 při vyhledávání druhé odmocniny v případě, že odmocňování se nedá provésti přesně. Tak postupovali mnozí matematikové ve značně pozdější době, ale ještě v 16. stol. v odpovědi vyjádřené desetinným zlomkem převáděli lomenou část vypočtené odmocniny na šedesátiny.

Počínaje středověkem stále silněji se projevovala nezbytnost rozšířit desítkovou soustavu číselnou i na díly jednotky, ale přes všecky své přednosti musila desítková soustava, jak vidíme, těžce zápasit se šedesátkovým dělením.

Zejména důležitým se stalo zavedení desetinných zlomků pro usnadnění té obrovské práce, která se konala v 16. a 17. stol. v době počátečního nahromadění rozvoje vědy a techniky, osvobození od hospodářské a ideologické stagnace feudálně statkářské nadvlády. Byla potřeba objemných výpočtů a je přirozené, že pozornost všech matematiků se soustředila na tento nový obor.

Zavedení desetinných zlomků se připisuje Holanďanu Simonu Stevinovi (1548—1620), který po prvé soustavně zpracoval nauku o desetinných zlomcích, ačkoli již r. 1490 byly vytištěny trigonometrické tabulky, které sestavil Regiomontanus, jež jsou založeny na desetinných dílech (ale zápis se děje pomocí čísel celých); slavný Vieta (1540—1603) první oddělil cifru desetin od ostatních (před tím se tiskla desetinná místa drobnějším tiskem a později byla pro větší názornost oddělována svislou čarou).

---

[1]) Ptolemaios (řecký astronom ze 2. stol. po Kr.) psal $37\frac{4}{60}\frac{55}{3600}$, což znamenalo $37^0\,4'\,55''$.

„Díly" nazývali minutami (*minutae*); $\frac{1}{60}$ *minuta prima*, t. j. první díly (prvního řádu); *minutae secundae* (druhého řádu) $\frac{1}{3600}$ atd. Slavný objevitel logaritmů John Napier v knížce vydané r. 1617 píše desetinný zlomek ve tvaru $28^0\,6'\,7''\,5'''$ (t. j. 28,675), což se četlo: „28 celých 6 prim 7 sekund 5 tercií".

Stevinův zápis desetinných zlomků:

$8_{(0)}\ 9_{(1)}\ 3_{(2)}\ 7_{(3)}$ značilo dnešní 8,937.

Stevin si byl vědom, že desetinné zlomky by byly zvláště výhodné, kdyby byla zavedena desítková soustava měr a na konci své práce (La Disme, 1585) obrací se k širokým kruhům a naléhá na zavedení desítkové soustavy měr délky, váhy, peněz, aby se docílilo jednoduchosti výpočtů prováděných novou methodou (desetinnými zlomky).

Idea desetinných zlomků „visela ve vzduchu" a vedle Stevina jsou i jiní považováni za objevitele desetinných zlomků; tak Kepler ve svých astronomických výpočtech se řídil Bürgiovými (1552—1632) pokyny a užíval tečky nebo háčku k oddělení celé části desetinného zlomku; pokládal Bürgiho za objevitele desetinných zlomků atd.

V 17. stol. již existovala úplná theorie desetinných zlomků.

Z theorie otázky

Jakékoli číslo N v číselné soustavě se základem k dá se vyjádřit ve tvaru $N = a_0k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n$, kde $a_0, a_1, \ldots a_n$ jsou čísla od 1 do $k - 1$ nebo 0 ($a_0 \neq 0$). Připomínáme, že písemný zápis čísel je založen na místním významu cifer; při posunutí o jedno místo na levo nabude každá cifra $k$krát většího významu a tedy obráceně, při posunutí o jedno místo v pravo význam cifry se $k$krát zmenší. Užití principu místního významu cifer se ještě dále rozšiřuje: při dalším posunutí na pravo od místa jednotek cifra nabude významu $k$krát menšího, neboli $\frac{1}{k}$, potom $\frac{1}{k^2}$ atd. Dříve jsme měli řádové jednotky k, k^2, k^3 atd., nyní se zavádějí nové řádové jednotky $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k^2}$, $\frac{1}{k^3}$ atd. neboli k^{-1}, k^{-2}, k^{-3} atd., V naší číselné soustavě $k = 10$; číslo N můžeme psáti $N = a_0\,10^n + a_1 10^{n-1} + \ldots + a_{n-1}10 + a_n10^0 + b_1 10^{-1} + b_2 10^{-2} + \ldots + b_m 10^{-m}$, kde $b_1, b_2, \ldots, b_m$ jsou čísla od 0 do 9 neboli

$$N = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \ldots + a_{n-1}10 + a_n + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_m}{10^m}.$$

Desetinné zlomky byly objeveny tehdy, když byl nalezen způsob zápisu čísla N bez jmenovatelů. Byl zaveden dohodnutý znak[2]) na oddělení desetin jednotky od jednotek. Všecky zápisy a výpočty se zjednodušily, což také předvídali tvůrcové desetinných zlomků:

$$N = a_0a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n,\ b_1b_2 \ldots b_m \text{ neboli } N = M,\ b_1b_2 \ldots b_m,$$

kde M je celá část čísla. Jestliže $M = 0$, pak $N = 0, b_1b_2 \ldots b_m$.

---

[2]) U nás čárka, v Americe tečka.

$$N = M + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_m}{10^m} = \frac{M \cdot 10^m + b_1 10^{m-1} + b_2 10^{m-2} + \ldots + b_m}{10^m}.$$ [3])

V příručkách elementární matematiky pro školní praxi ještě dlouhý čas se takřka nenašlo místa pro desetinné zlomky a teprve tehdy, když po francouzské revoluci byla zavedena metrická soustava měr a když se začalo soustavně užívat desetinných zlomků v obchodní a průmyslové praxi, začalo se i ve škole vyučovati těmto věcem.

V této příručce nazíráme na desetinné zlomky jako na zvláštní případ obyčejných zlomků, jako na zlomky psané pomocí desetinné čárky.

To také odpovídá směrnicím i umístění látky v osnovách aritmetiky 5. třídy. Při výkladu jednotlivých method a výkonů budeme vycházeti z těch znalostí, které si žáci přinášejí o desetinných zlomcích z kursu obecné školy. Kurs 5. třídy má za cíl na jedné straně utvrzení těch znalostí, které žáci mají z kursu obecné školy, na druhé straně je cílem systematický a přiměřeně věku žáků zdůvodněný kurs desetinných zlomků.

V naší aritmetické učebné literatuře se vyskytují různé definice desetinných zlomků: desetinným zlomkem se nazývá takové lomené číslo, jehož jmenovatel je číslo zapsané jedničkou a nulami neboli mocnina deseti (někdy se říká deset nebo mocnina deseti, jako by číslo 10 nebylo mocninou deseti). V těchto definicích se nezdůrazňuje zvláštnost desetinných zlomků — způsob jejich zápisu. Proto jest dáti přednost jiné definici desetinného zlomku jako zlomku, jehož čitatel je číslo celé a jmenovatel mocnina deseti a který je zapsán pomocí desetinných znaků.

§ 2. Psaní a čtení desetinných zlomků

Čtení a psaní zlomku je žákům známo z kursu obecné školy. Když učitel 5. třídy přistupuje k probírání desetinných zlomků, musí zprvu ověřit dovednost žáků čísti a psáti zlomek a rozšířit obor desetinných zlomků, které žáci umějí napsat a přečíst.

[3]) Podrobnosti v kurse „Theoretické aritmetiky" o soustavných zlomcích, zejména desetinných.

1. Žáci většinou správně přečtou a napíší desetinné zlomky jako 3,685; 417,2; 0,45; 0,2756 a pod. Tu je možné jim uložit:

1. rozestavit takový zlomek v součet desetinných dílů jednotlivých řádů (jak bylo uvedeno, tato věc dělá potíže i v oboru čísel celých), přečíst i napsat, na příklad:

$$3{,}685 = 3 + \tfrac{6}{10} + \tfrac{8}{100} + \tfrac{5}{1000}.$$

Můžeme uvésti obdobu se zápisem celého čísla ve tvaru součtu řádů, na příklad:

$$4785 = 4 \,.\, 1000 + 7 \,.\, 100 + 8 \,.\, 10 + 5;$$

$$3{,}685 = 3 + 6 \,.\, \tfrac{1}{10} + 8 \,.\, \tfrac{1}{100} + 5 \,.\, \tfrac{1}{1000};$$

$$3{,}685 = 3 + 6 \,.\, 0{,}1 + 8 \,.\, 0{,}01 + 5 \,.\, 0{,}001;$$

zdůraznit místní význam cifer, stálost číselného poměru mezi jednotkami různých řádů a ideu rozšíření numerace čísel na desetinné zlomky (na pravo od jednotek).

Pro stanovení významu každé cifry bereme s výhodou zlomky tvaru 111,1111; 44,444; 333,3 a pod. Provádí se zápis:

$$143{,}257 = 1 \,.\, 100 + 4 \,.\, 10 + 3 + 2 \,.\, 0{,}1 + 5 \,.\, 0{,}01 + 7 \,.\, 0{,}001.$$ [4])

2. Potom se vysvětlí, čím se liší obyčejné čtení desetinného zlomku 3,685, t. j. čtení „tři celé 685 tisícin", při kterém se čte naráz celý čitatel i jmenovatel, od čtení podle řádů. Zde také je užitečná obdoba s celými čísly; žáci musí pochopit, že čte-li se „naráz" číslo 4791, čte se v podstatě „4791 jednotka" nebo číslo se vyjadřuje v jednotkách (nejnižšího řádu); týž proces nastává i u čtení desetinného zlomku bez rozkladu na řády, vskutku

$$3{,}685 = 3 + \tfrac{6}{10} + \tfrac{8}{100} + \tfrac{5}{1000} = 3 + \tfrac{600}{1000} + \tfrac{80}{1000} + \tfrac{5}{1000} = 3\tfrac{685}{1000},$$

provádíme-li zápis tvarem obyčejných zlomků, nebo ve tvaru desetinném

$$3{,}685 = 3 + 0{,}6 + 0{,}08 + 0{,}005 = 3 + 0{,}600 + 0{,}080 + 0{,}005 = 3{,}685.$$

To je desetinný zlomek, jehož jmenovatelem je číslo složené z jedničky a nul, číslo 1000.[5]) Desetinné zlomky píšeme bez jmenovatele, výkony s nimi mají svoje zvláštnosti, nastávají tu zjednodušení dík jedno-

[4]) Takové zápisy můžeme provádět mimo třídu, za dobrého stavu třídy. Ve vyšších třídách žáci poznají zápis:

$$143{,}257 = 1 \,.\, 10^2 + 4 \,.\, 10 + 3 \,.\, 10^0 + 2 \,.\, 10^{-1} + 5 \,.\, 10^{-2} + 7 \,.\, 10^{-3}.$$

[5]) Někdy žáci říkají, že desetinný zlomek „nemá jmenovatele". Je třeba přesně ujasnit otázku různých tvarů zápisu.

duššímu tvaru zápisu zlomku. Samozřejmě můžeme na objasnění vzít libovolný zlomek ze sbírky úloh.

Smíšená čísla

Výše jsme uvedli, že ve školské literatuře z aritmetiky jsou různé definice desetinného zlomku. Rovněž rozličné je ve školské literatuře nazírání na výše námi zvolená čísla 3,685; 417,2 a pod.

Jedni autoři nazývají taková čísla „desetinnými zlomky", jiní „smíšenými čísly". Když v naší methodice tato smíšená čísla řadíme mezi desetinné zlomky, pravíme, že u těchto desetinných zlomků čitatel je větší než jmenovatel ($3685 > 1000$; $4172 > 10$ atd.). Při vysvětlování jednotlivých otázek na tato čísla (417,2 nebo 3,685) nazíráme také jako na smíšená čísla.

Čitatel a jmenovatel zlomku

Ze zapisovaných a čtených zlomků vybereme příklad na případ:

1. že čitatel daného zlomku je větší než jmenovatel, na př.: $\frac{3658}{1000}$ s příslušným zápisem 3,658;

2. že čitatel daného zlomku je menší než jmenovatel, na př. $\frac{658}{1000}$ s příslušným zápisem 0,658.

Stanovíme, že jako u obyčejného zlomku $\frac{a}{b}$, v případě $a > b$ máme nepravý zlomek $\frac{3658}{1000}$, ze kterého lze odděliti celé číslo (celou část zlomku); v případě $a < b$ máme pravý zlomek (žádná celá $\frac{658}{1000}$). Z toho je jasná bezúčelnost připisování nul na levo v zápise desetinného zlomku.

Je vhodné u zápisu zlomku poukázat na to, že na obou stranách od cifry jednotek jsou ve stejných vzdálenostech desítky a desetiny, sta a setiny, tisíce a tisíciny atd. a vyvěsit tabulku, na které bude porovnán počet nul ve jmenovateli desetinného zlomku a počet desetinných míst v zápise:

$$\tfrac{1}{10} = 0{,}1; \quad \tfrac{1}{100} = 0{,}01; \quad \tfrac{1}{1000} = 0{,}001.$$

Tato cvičení usnadňují čtení desetinných zlomků s velkým počtem desetinných míst.

Nemá se připouštět čtení desetinných čísel tím způsobem, který praktikuje ohromná většina námi dotázaných osob, které již dokončily školu. Na příklad, máme přečíst 7,689 342; dotázaný obyčejně si prstem ukazuje od cifry k cifře a říká: desetiny, setiny atd., až dojde k „miliontinám"; dokonce když žákům 9. třídy při probírání logaritmů podle pětimístných tabulek byla položena otázka, s jakou přesností je zapsán zlomek 1,301 03, nikdo neodpověděl na ráz, že na stotisíciny, ač po odříkání míst všichni odpověděli správně. Tudíž tato věc, ač se zdá snadnou, má své potíže, jimiž se vysvětluje, že daleko není trvale osvojena ve škole.

Prakticky se ve cvičeních v 5. třídě nevyskytuje více nežli 6 desetinných míst a žáci se mohou dokonce naučit, jak se vyslovuje jmenovatel ve všech vyskytujících se případech.

Tedy žáci se mohou naučit šesti jmenovatelům a při čtení libovolného zlomku přečtou nejprve čitatele jako celé číslo, potom rychle určí jmenovatele podle počtu desetinných míst. Na příklad 0,004 09 přečteme „409 stotisícin" atd.

Při čtení a psaní desetinných zlomků zejména s velkým počtem desetinných míst můžeme si čtení jmenovatele usnadnit tím, že si nahoře vyznačíme tečku nebo čárku rozdělujíce desetinná místa takto: 0,689'342. Zdálo by se, že to není příliš logické, když spojíme do jedné skupiny tří cifer desetiny, setiny a tisíciny, do druhé skupiny desetitisíciny, stotisíciny a miliontiny atd.; takto se odtrhávají díly čtené jako „tisíciny", rovněž díly četné jako „miliontiny", ale prakticky je to výhodný způsob, a jestliže žáci si zapamatují v důsledku výše uvedených cvičení, že díly stojící na třetím místě mají za jmenovatele jedničku s třemi nulami, t. j. 1000, díly stojící na šestém místě milion, na devátém místě miliardu (bilion), pak čtení libovolných desetinných zlomků bude usnadněno; při tom je skutečně velmi užitečné při zápise zlomku dělat malé mezery vždy po třech desetinných místech, načež není třeba ani teček ani čárek. Vskutku, jak přečteme zlomek 0,348? 0,000 348? 0,000 000 348?

Návod. V prvním příkladě poslední díly jsou tisíciny,
ve druhém příkladě poslední díly jsou miliontiny,
ve třetím příkladě poslední díly jsou miliardtiny.

Jak přečteme: 0,0006? 0,000 000 6? 0,000 63? 0,000 000 63?

Návod. Za jednotkami libovolného řádu následují jejich desetiny a setiny. Proto zapsané příklady čteme: 6 desetitisícin, 6 desetimiliontin, 63 stotisíciny, 63 stomiliontiny atd.

Při čtení libovolného zlomku žák na ráz určí jmenovatele a potom přečte čitatele jako celé číslo a připojí jmenovatele; na příklad 0,306 849 se čte 306 tisíc

849 miliontin; obtížnější je přečtení zlomku v případě 0,306 84. Jmenovatel zlomku je jasný: stotisíciny, a čitatele je třeba čísti: 30 tisíc 684 (potom připojíme slovo „stotisíciny“). Jinými slovy, pro přečtení čitatele desetinného zlomku je třeba jaksi jiného rozdělení cifer na skupiny nežli pro přečtení jmenovatele. Pro pohodlí můžeme přepsat čitatele bez mezery mezi ciframi a přečíst jej jako celé číslo: 30684.

Mezi jiným při takovém způsobu čtení desetinného zlomku nevznikají potíže ani s nulami uprostřed zápisu ani s nulami na začátku, na příklad:

0,307 89;	0,004 090 1;	5,003 001;
307 89;	4 090 1;	3 001.

Psaní

Tytéž potíže a tytéž cesty jejich překonání máme i při psaní desetinných zlomků. Zase mluvíme o složitějších případech, když v čitateli jsou nuly nebo počet cifer čitatele je menší nežli počet nul ve jmenovateli desetinného zlomku. Na příklad máme zapsat zlomek: šedesát tisíc tři sta osmdesát pět stotisícin nebo zlomek: tisíc dvacetčtyři miliontiny. Žák musí vykonat dvojí práci: 1. podle jmenovatele zlomku najde počet míst v čitateli; v prvém příkladě má čitatel mít pět míst a ve druhém šest, 2. zapíše stranou ciframi čitatele 60 385; 1024.

Z toho je patrné, že v prvém případě můžeme naráz napsat 0,603 85, ve druhém 0,001 024.

Nuly napravo a nalevo

Zápisy 6,13; 6,130; 6,1300; 06,13; 006,13 vyjadřují všechny totéž číslo, které se skládá ze 6 celých jednotek, jedné desetiny a jedné setiny. Vskutku

1. $6{,}1300 = 6 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{0}{10000} = 6 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100}$,
$006{,}13 = 0 \,.\, 10^2 + 0 \,.\, 10 + 6 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100} = 6 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100}$ a pod.

Připisování nul napravo nebo nalevo k desetinnému zlomku (zapsanému bez jmenovatele) nemění jeho velikost:

2. $6{,}130 = 6\frac{130}{1000} = 6\frac{13}{100}$; $6{,}1300 = 6\frac{1300}{10000} = 6\frac{13}{100}$

atd. (Čitatele a jmenovatele zlomku násobíme týmž číslem, tedy zlomek se nemění.)

Poznámka. Zde se mluví o přesném desetinném zlomku.

Zvětšení a zmenšení desetkrát, stokrát atd.

Na obecné škole žáci, když se seznamovali s desetinnými zlomky, hned po jejich čtení a psaní probírali otázku zvětšení a zmenšení zlomku desetkrát, stokrát atd. Takto můžeme postupovat i v 5. třídě, zejména, jestliže žactvo není dostatečně připraveno. Takovými cvičeními se dojde k přesnému chápání řádových jednotek desetinného zlomku jakož i převodu měr. Ale v opakovacím kurse tyto otázky se mají budovat na příslušné theorii a jest na ně nazírati jako na zvláštní případ násobení a dělení čísly 10, 100, 1000, ... (v § 6); rozhodně se má učitel k těmto otázkám vrátit při probírání násobení a dělení desetinných zlomků.

§ 3. Uvádění zlomků na společného jmenovatele. Krácení zlomků

Návyk ve změnách tvaru nejjednodušších desetinných zlomků, jmenovitě v uvádění zlomků na společného jmenovatele a v krácení zlomků, získávají žáci na obecné škole; v daném případě je třeba pouze odůvodnění příslušných úprav.

Tato pro žactvo snadná cvičení mají značný význam, jestliže se při tom opakují základní vlastnosti zlomku, jestliže srovnáváním zlomků se ujasní, že jmenovatelé desetinných zlomků se mohou od sebe odlišovat pouze mocninou deseti, takže vyjádřit desetinný zlomek v jiných rovněž desetinných dílech můžeme pouze tak, že znásobíme čitatele i jmenovatele doplňujícím činitelem rovným mocnině deseti, čímž se zlomek změní pouze formálně, připsáním nul na pravo. Je třeba věnovat pozornost tomu, aby žáci mluvili o „připisování nul“ a ne o „přidávání nul“, protože přidáním, t. j. přičtením nuly ani vnější vzhled zlomku se nezmění.

Někdy žáci říkají: „uvésti zlomek na společného jmenovatele“. Zde je třeba ještě znovu poukázat na to, že jednotlivý zlomek můžeme vyjádřit v různých dílech, a že vyjádřit ve stejných dílech, t. j. uvést na společného jmenovatele, můžeme pouze dva nebo více daných zlomků. Aby si to žáci uvědomili, navrhujeme i zde i v příslušné partii obyčejných zlomků rozdělit práci: 1. vyjádření jednotlivého zlomku různými díly, 2. uvedení dvou nebo několika zlomků na společného jmenovatele.

Krácení desetinného zlomku může býti vedeno jako zkouška správnosti první z těchto operací.

V 5. třídě při opakování není třeba mnoha příkladů na uvedené změny tvaru. Žáci mají ocenit, jaká zjednodušení nastávají v otázce změn tvaru při srovnání s obdobnými změnami u obyčejných zlomků.

§ 4. Rovnost desetinných zlomků. Srovnávání desetinných zlomků

1. Abychom rozhodli, zdali dva zlomky jsou si rovny, a nejsou-li, který z nich je větší, je třeba vyjít od známých závěrů z theorie obyčejných zlomků, tedy z toho, že dva zlomky, vyjádřené v týchž dílech, jsou si rovny, jsou-li si rovni jejich čitatelé, a že ten z nich je větší, který má většího čitatele. To znamená, že při srovnávání zlomků na příklad 0,6879 a 0,724 je třeba především je uvést na společného jmenovatele a potom srovnat jejich čitatele. Po uvedení na společného jmenovatele čitatel prvního zlomku je 6879 a čitatel druhého je 7240. Obyčejná chyba žáků spočívá v tom, že často mají za větší ten zlomek, v jehož zápise je více cifer, a kdybychom ve výše uvedeném příkladě připustili, aby žák srovnával čitatele, aniž uvedl zlomky na společného jmenovatele, vyšla by mu nesprávná odpověď, protože čitateli daných zlomků jsou čísla 6879 a 724, kde $6879 > 724$.

2. Obyčejně učíme žáky srovnávat desetinné zlomky cestou, která není založena na příslušném odůvodnění z kursu obyčejných zlomků, a potom žáci zapomínají, že při srovnávání zlomků smíme srovnávat čitatele jenom při stejných jmenovatelích a při srovnávání zlomků 0,85 a 0,839 876 5 žáci mají sklon k tomu, považovat druhý zlomek za mnohokrát větší než první. Pro objasnění chyby se obyčejně požaduje řádové srovnání čitatelů zlomků; tento způsob je technicky výhodný, jeho se také užívá při srovnávání desetinných zlomků; při tom je užitečné pro větší názornost při srovnání psát řádově jeden zlomek pod druhý:

0,85,
0,839 876 5.

Konkretní rozbor desetinných zlomků

Konkretní význam desetinných zlomků se prokáže nejlépe na penězích, na měrách délkových a na vahách. Výsledek měření délky úsečky, rovný na příklad 1 m 5 dm 4 cm (s přesností na 1 cm) můžeme zapsat v decimetrech: 15,4 dm, v centimetrech: 154 cm, v metrech: 1,54 m a pod. Konkretními příklady srovnávání nejprve délek, potom obsahů, objemů a vah můžeme ilustrovat rovnost dvou desetinných zlomků, můžeme stanovit, který z desetinných zlomků (veličin) je větší nebo menší a kolikrát je větší nebo menší. Na příkladě převodu jemnějších měr na hrubší a obráceně můžeme konkretně vyložit násobení a dělení zlomku deseti, stem atd.

Je třeba zdůraznit, že výsledek měření je přibližné číslo a že výsledek výše uvedeného měření s přesností na 1 m bude 1 m nebo 2 m, s přesností na 0,1 m neboli na 1 dm bude 15 dm nebo 16 dm neboli 1,5 m nebo 1,6 m, s přesností na 1 cm bude 154 cm nebo 155 cm neboli 1,54 m nebo 1,55 m (zaokrouhleno dolů nebo nahoru).

§ 5. Sčítání a odčítání desetinných zlomků

Pokud žáci z kursu obecné školy dovedou sčítat a odčítat desetinné zlomky, nemusíme se příliš zdržovat opakováním pravidel těchto výkonů s desetinnými zlomky, zopakujeme je hned po základních změnách tvaru a omezíme se jen na řešení číselných příkladů.

Přitom žádáme, aby žáci, pokud možno, samostatně odvodili pravidlo sčítání a odčítání desetinných zlomků, které prakticky je jim známé; při tom vyjdou od sčítání a odčítání obyčejných zlomků. Zápis má býti na příklad takovýto:

$$13,68 + 4,154 = 13\tfrac{68}{100} + 4\tfrac{154}{1000} = 13\tfrac{680}{1000} + 4\tfrac{154}{1000} = 17\tfrac{834}{1000} =$$
$$= 17,834 \quad \text{a}$$

$$\begin{array}{r} 13,680 \\ +\ \ 4,154 \\ \hline 17,834 \end{array}$$ [6])

V dalším není třeba, aby žáci doplňovali nulami počet desetinných míst sčítanců, ale stále je třeba ověřovat, jak rozumějí procesu řádového sčítání desetinných zlomků, aby se vyhnuli chybám v takových případech sčítání a odčítání, jako 315,6 a 1,428 a pod.

[6]) Na obecné škole se desetinné zlomky probírají jako „desetinná čísla“; sčítání a odčítání desetinných čísel se provádějí podle pravidel příslušných výkonů s celými čísly na základě místního významu cifer a asociativního zákona.

Uvedeme žákovské chyby při řádkovém sčítání a odčítání rozmanitých desetinných zlomků:

3,12 + 1 = 3,22 (?)	10,25 — 3 = 10,22 (?)
3,12 + 1 = 3,13 (?)	17 + 0,11 = 0,28 (?)
0,3 + 0,8 = 0,11 (?)	25,78 — 0,2 = 23,78 (?)
1,7 + 0,5 = 1,12 (?)	25,78 — 0,2 = 25,761 (?)
10,7 + 0,8 = 10,15 (?)	4,676 — 0,03 = 4,673 (?)
	4,676 — 0,03 = 46,46 (?)

Taková cvičení je třeba stále provádět ve třídě; věnuje se jim 5 až 7 minut v hodině.

V této příručce, jak bylo řečeno výše, neuvádějí se formulace pravidel, kterým se žáci učí ze svých učebnic.

§ 6. Násobení a dělení desetinných zlomků deseti, stem, tisícem atd.

1. Otázka zvětšení nebo zmenšení desetinného zlomku 10, 100, 1000krát obyčejně se neodůvodňuje jako zvláštní případ násobení a dělení desetinných zlomků; tím jest si patrně vysvětlit, že přes zdánlivou snadnost tohoto výkonu, vyjádřenou slovy „posuneme desetinnou čárku napravo, nalevo atd." žáci velmi často chybují při jeho provádění. Dobře je známá žákovská chyba na příklad při zvětšení zlomku 0,36 desetkrát. Často se udává odpověď tvaru 0,360. Může být dvoje vysvětlení chyb: 1. žáci užívají způsobů, které znají pro celá čísla, totiž: znajíce, že celé číslo se zvětší desetkrát, připíše-li se napravo nula, píší v daném případě 0,360; stejná odpověď se dostane v případě, že žáci, vycházejíce z theorie obyčejných zlomků, snaží se zvětšit zlomek desetkrát příslušným zvětšením čitatele. Proto se nemáme vyhýbat objasnění zvětšení desetinného zlomku 10, 100krát na základě vlastností obyčejných zlomků, naopak, je třeba dávat úplné objasnění a teprve potom připouštět posunutí desetinné čárky vpravo a vlevo, na které jsou žáci zvyklí z obecné školy.

Ve výše uvedeném příkladě je třeba se žáky rozebrat, že když napsali 0,360, nezvětšili tím zlomek 0,36; pouze změnili tvar zlomku, protože když znásobili čitatele deseti, znásobili zároveň i jmenovatele deseti, neboť $\frac{36}{100} = \frac{360}{1000}$. Je třeba je na tuto skutečnost upozornit; potom teprve je možno počítat s tím, že se podobná chyba už nevyskytne. Této chybě je velmi obtížno zabránit při výpočtech s měrami. Tak při převodu 0,5 m na centimetry jsou časté odpovědi 0,50; 0,500. Uvedeme několik nesprávných odpovědí, které se vyskytly při revisi znalostí žáků: 43,7 t = 0,437 kg; 0,54 dm = 0,054 mm; 40 cm = = 0,040 m; 700 g = 700 000 kg; 456 m^2 = 45 600 ha a pod.

Po provedení výcviku tvaru:

$$\begin{aligned} 0{,}7 \cdot 10 &= \tfrac{7}{10} \cdot 10 = 7; \\ 0{,}08 \cdot 10 &= \tfrac{8}{100} \cdot 10 = \tfrac{8}{10} = 0{,}8; \\ 0{,}36 \cdot 10 &= \tfrac{36}{100} \cdot 10 = \tfrac{36}{10} = 3{,}6; \\ 0{,}452 \cdot 10 &= \tfrac{452}{1000} \cdot 10 = \tfrac{452}{100} = 4{,}52, \end{aligned}$$

při němž se stále srovnává dané číslo a výsledek, můžeme mluvit o „posunutí desetinné čárky“ o jedno místo napravo při zvětšení desetinného zlomku desetkrát (při násobení deseti). V témž pořádku probíráme otázku násobení zlomku stem, tisícem, dále dělení zlomku deseti, stem, tisícem atd., na příklad:

$$\begin{aligned} 0{,}7 : 10 &= \tfrac{7}{10} : 10 = \tfrac{7}{100} = 0{,}07; \\ 0{,}31 : 10 &= \tfrac{31}{100} : 10 = \tfrac{31}{1000} = 0{,}031 \text{ a pod.} \end{aligned}$$

2. Na základě porovnávání čísel psaných do sloupce od nejmenšího k největšímu (nebo od největšího k nejmenšímu) můžeme také mluvit o tom, že z jednotek „se stanou“ desítky, z desetin jednotky, ze setin desetiny atd.

$$\begin{array}{c|c|l} \uparrow & & 2{,}368 \\ & & 23{,}68 \\ & & 236{,}8 \\ & \downarrow & 2368 \end{array}$$

Odůvodnění můžeme založit na vyjádření desetinného zlomku ve tvaru součtu. Na příklad

$$\begin{aligned} 2{,}368 \cdot 10 &= (2 + 0{,}3 + 0{,}06 + 0{,}008) \cdot 10 = \\ &= 20 + 3 + 0{,}6 + 0{,}08 = 23{,}68 \end{aligned}$$

nebo zápisem ve tvaru obyčejných zlomků

$$\begin{aligned} 2{,}368 \cdot 10 &= (2 + \tfrac{3}{10} + \tfrac{9}{100} + \tfrac{8}{1000}) \cdot 10 = \\ &= 20 + 3 + \tfrac{6}{10} + \tfrac{8}{100} = 23{,}68. \end{aligned}$$

3. V případech násobení jako 0,36 . 100 a pod., když jmenovatel zlomku se rovná samému násobiteli, žáci mluví o „posunutí desetinné čárky“, ačkoli ve skutečnosti čárka odpadá. Na tento případ jest žáky upozornit a odůvodniti jej tím, že součin zlomku s jeho jmenovatelem je roven čitateli.

4. Je dobře dát žákům také příklady zvětšení celého čísla 10, 100, 1000krát „posunutím desetinné čárky“. Žáci mají chápat celé číslo, na příklad 13, jako desetinné číslo 13,000 000 ... a neodmítat posunutí desetinné čárky napravo i nalevo.

5. Špatným návykem je škrtání desetinné čárky při jejím posunutí napravo nebo nalevo; to se nesmí připouštět; jsou možné dva zápisy: buďto 3,608 . 100 = 360,8 nebo zapsat pod dané číslo výsledek zvětšení:

3,608
360,8.

V posledním zápise je patrné posunutí čárky napravo.

Téhož pokynu jest se držeti i při dělení desetinného zlomku deseti, stem, tisícem. V případě dělení je zejména nejasný a nepřesný zápis se škrtáním, jestliže je třeba posunout desetinnou čárku nalevo, kde nejsou žádné cifry, na příklad, jestliže máme 0,0368 zmenšit desetkrát. Je třeba buďto zapisovat 0,0368 : 10 = 0,003 68 nebo, což je značně lepší, napsat dané číslo 0,0368 a pod ně napsat číslo desetkrát menší, tedy 0,003 68. Při tomto zápisu je zcela zřejmé, že desetinná čárka postoupila o jedno místo nalevo.

Zde se zdůrazní myšlenka, že cifra 0 naznačuje nepřítomnost jednotek určitého řádu a že na příklad číslo 0,368 může být zapsáno ve tvaru 0000,368 nebo 0000,368 000 00.

Prakticky radíme žákům, aby nepsali zbytečné nuly nalevo, nýbrž si napřed promyslili, přes kolik nul se má přenésti čárka.

Násobení a dělení desetinného zlomku čísly 10, 100, 1000 užíváme při praktické otázce převodu měr jednoho pojmenování na míry druhého pojmenování.

§ 7. Cvičení. Slovní úlohy

Po zopakování všech výše uvedených otázek žáci:

1. Řeší cvičení na převody měr, na sčítání a odčítání měr, zejména řeší cvičení na míry plošné a prostorové.

2. Řeší příklady na sčítání a odčítání desetinných zlomků se závorkami, při čemž průběhem jejich řešení si připomínají pořádek výkonů prvního stupně a význam závorek (kap. II).

3. Řeší konkretní slovní úlohy na sčítání a odčítání, při čemž učitel může se držet toho postupu rozboru úloh, který byl naznačen v kapitolách o „Sčítání“ a „Odčítání“ celých čísel, načež přejde k řešení kombinovaných úloh, které jsou ve sbírce.

4. Řeší cvičení, založená na vědomostech žáků o změně součtu a součinu při změně daných čísel a na zkouškách správnosti výkonů sčítání a odčítání. Všeliké takové otázky jsou naznačeny v kap. IV, § 6 a v kap. IX, § 3 u příslušných výkonů s celými a lomenými čísly.

§ 8. Vzory otázek pro kontrolní práci

Práce I. 1. Zapsat v desetinném tvaru desetinné zlomky z řady zlomků:

$$\frac{3}{100};\ \frac{5}{300};\ \frac{100}{455};\ \frac{1}{200};\ \frac{15}{100}.$$

2. Napsat v desetinném tvaru (bez jmenovatele) zlomky:

$$\frac{15}{1000};\ 7\frac{3}{10000};\ \frac{131}{100000}.$$

3. Napsat čitatele zlomků:

0,156; 13,0284; 5,0062.

4. Napsat ve tvaru obyčejných zlomků: 0,356 891; 0,001 07; 9,025 03.

5. Zapsat pomocí desetinných zlomků: 4 m 5 cm; 2 kg 100 g; 15 kg 25 g; 36 km 4 m.

6. a) Kolik kg a g je v 15,06 kg?
   b) Kolik m a cm je ve 368,1 m?
   c) Kolik t a kg je v 15,12 t?

7. Zapsat znak rovné, větší nebo menší mezi páry vzatými z čísel:

a)	43,789;	43,8;	43,08;
b)	0,500;	0,5;	0,0579;
c)	1,99899;	1,999.	

8. Kolikrát je 0,000 13 menší než 0,13? 47,368 větší než 0,047 368?

9. Zkrátit zlomky: a) 3,00400; b) 2,7050.

10. Uvésti na společného jmenovatele čísla: 3,07; 3,307; 30,7.

Práce II. 1. Sečíst písemně:

$$13{,}068 + 27 + 9{,}37 + 0{,}2073.$$

2. Odečíst písemně:

a) $13{,}2 - 9{,}256 =$
b) $20{,}001 - 7{,}93 =$
c) $35{,}19 - 19{,}35 =$

3. Sečíst zpaměti:

$0{,}5 + 1{,}2 =$ $\quad$ $10{,}3 + 0{,}12 =$ $\quad$ 4,[illegible]

4. Odečíst ústně nebo polopísemně:

$11{,}32 - 7 =$ $\quad$ $7 - 2{,}96 =$ $\quad$ $1 - 0{,}4568 =$
$2 - 1{,}389 =$ $\quad$ $7{,}356 - 0{,}04 =$ $\quad$ $0{,}412 - 0{,}07 =$

5. Řešit slovní úlohu na sčítání a odčítání desetinných zlomků a na výkony s plošnými nebo prostorovými měrami.

§ 9. Násobení desetinných zlomků

Násobení desetinného zlomku celým číslem

Opakuje se definice násobení celým číslem. Vyvození pravidla násobení desetinného zlomku provedou žáci samostatně na několika příkladech, což nečiní potíží (pomocí obyčejných zlomků), na příklad:

$$0{,}365 \,.\, 7 = \frac{365}{1000} \,.\, 7 = \frac{365 \,.\, 7}{1000} = \frac{2555}{1000} = 2{,}555. \tag{1}$$

Poznámka. Když je průběhem zápisu výkon násobení naznačen zlomkem: $\frac{365 \,.\, 7}{1000}$, žáci se většinou snaží zkrátit činitele v čitateli se jmenovatelem: to můžeme připustit, abychom nepotlačovali jejich iniciativnost a nevnucovali jim pravidla; všem žákům musí býti jasné, že výkon s desetinným zlomkem je možné provést i takto, neboť desetinný zlomek je zvláštním případem obyčejného zlomku.

Při tom si žáci ujasní, že jim byl položen požadavek provést násobení desetinného zlomku celým číslem a že mají odpověď udat zase ve tvaru desetinného zlomku, a při těchto požadavcích současné dělení čitatele a jmenovatele nevede rychleji k cíli (jak tomu je při výkonu s obyčejnými zlomky); naopak to vyžaduje dvojí práci od žáka:

$$0{,}365 \,.\, 7 = \frac{365 \,.\, 7}{1000} = \frac{73 \,.\, 7}{200} = \frac{511 \,.\, 5}{200 \,.\, 5} = \frac{2555}{1000} = 2{,}555. \qquad (2)$$

Potom se řeší ještě několik cvičení na násobení desetinných zlomků s rozmanitým počtem desetinných míst, třeba celým dvojciferným číslem, a rozbírá se otázka, jak se dojde k čitateli a jmenovateli výsledku; z toho se dospěje k vyvození pravidla násobení desetinného zlomku číslem celým v tom případě, že se žádá udati odpověď zase ve tvaru desetinného zlomku.

Poznámky. 1. Aby se došlo k vyvození pravidla, je třeba, aby ře šené příklady byly pečlivě zapsány na tabuli jeden pod druhým a nebyly smazány. Smazat se může jenom cvičení (2), jestliže k němu došlo.

2. Pravidlo násobení desetinného zlomku celým číslem můžeme objasnit žákům (ještě jednou rozebrat) na základě změny součinu způsobené změnou násobence. Mějme 0,436 . 2; najdeme, že 436 . 2 = = 872. Otázkami se vyjasní, že tato odpověď je tisíckrát menší než žádaná, protože změněný násobenec je tisíckrát větší než daný. Skutečná odpověď 0,872.

3. Jestliže třída je méně připravená, jest užitečné místo číselných příkladů vzít slovní úlohu, aby se před přechodem k násobení zlomkem ještě jednou zdůraznil smysl násobení celým číslem a ukázalo, kdy se tohoto případu násobení užívá při výkonech s desetinnými zlomky.

4. Pro výcvik ve hbitém počítání jsou užitečná cvičení tvaru: 0,36 . 20; 0,36 . 200; 0,4123 . 20 000 a pod. V těchto případech někteří žáci ihned řeknou odpověď, ale při tom často také chybují. Taková cvičení je možno dávat také později, až bude poukázáno na to, že i při násobení desetinného zlomku (jako kteréhokoli zlomku) součinem dvou činitelů můžeme desetinný zlomek nejprve násobit jedním činitelem a potom tento částečný součin činitelem druhým, jako 0,36 . 200 = (0,36 . 2) . 100. Jak bylo výše uvedeno, násobení jednociferným číslem má se vždy provádět polopísemně.

5. Rovněž je užitečné dávat cvičení, jaká se dávají při násobení celých čísel zpaměti, na příklad:

$$0{,}48 \,.\, 9 = 4{,}8 - 0{,}48 = 4{,}32 \text{ atd.}$$

6. Násobení celého čísla desetinným číslem mohou žáci také provádět, užívajíce záměny činitelů, avšak podobná cvičení na tomto místě nepovažujeme za nutná.

7. Nemá se dovolovat škrtání desetinné čárky v násobiteli při provádění násobení.

8. Cvičení na násobení desetinného zlomku celým číslem může učitel při všech uvedených případech (pro práci ve třídě) buďto vybírat ze sbírky nebo volit sám. Při přípravě na hodiny je třeba si promyslit účelný postup cvičení podle toho, co zde bylo řečeno.

Násobení desetinným zlomkem

1. Pravidlo násobení celého čísla a desetinného zlomku desetinným zlomkem můžeme žákům vysvětlit tak, že na desetinné zlomky nazíráme jako na obyčejné zlomky; provádíme to na číselných příkladech.[7]) Otázku po smyslu tohoto výkonu lépe odsuneme na později. Pokud je na tabuli místo, zapisujeme zřetelně několik příkladů jeden pod druhý (co největší počet žáků je počítá u tabule), a ze srovnání těch příkladů bude formulováno pravidlo. Počet desetinných míst v činitelích bude rozmanitý; každý příklad jest provésti s podrobným vysvětlením, na příklad:

$$1{,}32 \,.\, 0{,}7 = \frac{132}{100} \cdot \frac{7}{10} = \frac{132 \,.\, 7}{1000} = \frac{924}{1000} = 0{,}924.$$

Otázky: jaký byl čitatel prvního zlomku? čitatel druhého zlomku? jak jsme dostali čitatele součinu? jaký byl jmenovatel prvního zlomku? druhého zlomku? jak jsme dostali jmenovatele součinu? kolik nul je ve jmenovateli prvního zlomku? druhého zlomku? kolik nul je ve jmenovateli součinu? jaký vztah je mezi počtem nul jmenovatele v násobenci, v násobiteli a v součinu? kolik desetinných míst bylo odděleno v násobenci? v násobiteli? kolik desetinných míst je odděleno v součinu? jaký vztah je mezi počtem desetinných míst?

---

[7]) $N_1 = \dfrac{A}{10^m}$; $N_2 = \dfrac{B}{10^n}$; $N_1 \,.\, N_2 = \dfrac{A \,.\, B}{10^{m+n}}$.

2. Stejně jako při násobení desetinného zlomku celým číslem můžeme vysvětlit pravidlo násobení celého čísla desetinným zlomkem a násobení dvou desetinných zlomků ještě jiným způsobem — na základě změny součinu způsobené změnou činitelů, a potom vyžadovat od žáků, aby takové vysvětlení udávali při provádění výkonu.

Na příklad: mějme 0,413 . 0,2; jestliže 0,413 násobíme dvěma, dostaneme součin 0,826 desetkrát větší než žádaný; jestliže násobíme 413 . 2, dostaneme součin zvětšený desetkrát a znovu tisíckrát; proto musíme nalezený součin zmenšit desetkrát a znovu tisíckrát; posléze máme 0,413 . 0,2 = 0,0826.

Pokyny. a) Když je už probráno obecné pravidlo násobení desetinných zlomků, vysvětlí se ve třídě, jaký je smysl pravidla ve výše rozebraných případech: 1. v případě násobení desetinného zlomku celým číslem, 2. při násobení celého čísla desetinným zlomkem a 3. při násobení dvou celých čísel.

b) Opakujeme: nesmí se připustit škrtání desetinné čárky při provádění výkonu; nejlépe je naučit žáky, aby násobili bez ohledu na desetinnou čárku a umístili ji až ve výsledku, ale můžeme také daná čísla přepsat bez čárek; potom jest vésti zápis takto:

3,16 . 20,4 = 64,464

3,16		316	
20,4		204	Prvnímu způsobu zápisu jest
1264	nebo	1264	dáti přednost.
632		632	
64,464		64464	

Chyba, které se při druhém způsobu zápisu žáci dopouštějí, spočívá v tom, že v celém čísle, výsledku násobení celých čísel 316 a 204, oddělují čárkou desetinná místa a dostávají nesprávný zápis.

Poznámka. Není nutné (a ani vhodné) psát činitele do sloupce tak, aby desetinné čárky byly jedna pod druhou.

3. Zvláštní pozornost jest věnovat cvičením na násobení čísly 0,1; 0,01 atd., rovněž násobení čísly 0,2; 0,5; 0,25.

Velký počet žáků námi kontrolovaných v různých číselných kombinacích se dopouštěl chyb při násobení čísly 0,1; 0,01; 0,001. Mezi těmi, kteří dali nesprávnou odpověď na násobení čísly 0,1; 0,01;

0,001 byli dobře připravení žáci, kteří jinak v celé kontrolní práci se nedopustili ani jedné chyby. Uvedeme odpovědi žáků, aby učitel při své praktické práci bral zřetel na tyto potíže:

4,2 . 0,1 = 420 (?)	37 . 0,1 = 370 (?)
0,03 . 0,1 = 3 (?)	32,6 . 0,01 = 3,26 (?)
0,7 . 0,01 = 7 (?)	28,7 . 0,01 = 2870 (?)
0,7 . 0,01 = 0,7 (?)	3600 . 0,001 = 3 600 000 (?).[8]
0,24 . 0,001 = 24 (?)	

Je třeba mnohokrát opakovat, že úloha nalézti jakýkoli zlomek (část) čísla se nazývá násobení zlomkem, proto násobit číslem 0,1 je přesně totéž jako dělit deseti; násobit číslem 0,01 je přesně totéž jako dělit stem. Při tom je však vhodné se také nevyhýbat obecnému pravidlu násobení desetinným zlomkem, aby jak úsudek, tak i technické užití pravidla a s tím spojený zrakový dojem pomáhaly v překonání tohoto obtížného momentu práce. Zápis:

a) $325 . 0{,}01 = 325 : 100 = 3{,}25$;

b) $325 . 0{,}01 = 325 . \frac{1}{100} = 3{,}25$;

c) $$\begin{array}{r} 325 \\ \times\ 0{,}01 \\ \hline 3{,}25 \end{array}$$ (později i tento způsob zapisujeme do řádku 325 . 0,01 = 3,25).

4. Chápání smyslu násobení desetinným zlomkem (325 . 0,2) je slabým místem v naší škole; ve většině případů učitel matematiky zdůrazňuje smysl násobení zlomkem pouze v oddíle o obyčejných zlomcích, a v důsledku nedoceňování této otázky ve cvičeních a ve slovních úlohách na desetinné zlomky máme případ, že žáci nedovedou dát odpověď na otázku, čemu se rovnají 0,3 ze 75 nebo 0,2 ze 64 nebo dávají nejrůznější nesprávné odpovědi, jako na příklad: 0,3 ze 75 = = 225; 0,08 ze 1200 = 15 000 a pod.

Ústní cvičení

Cvičení. 1. Mějme 325 . 0,2. Žáci najdou dvě desetiny čísla nebo pětinu čísla 325, t. j. 325 : 5 = 65; 2. 360 . 0,4 neboli najít 0,4 ze 360: 3. 2,5 . 0,6; 4. 75 . 0,04 atd.

[8]) Takové nesprávné zápisy se nikterak nesmějí vypisovat na tabuli pro žáky; na tabuli se mají udávat žákům pouze správné zápisy.

5. Násobení čísly 0,5; 0,25; 0,75.

Má-li se číslo násobit číslem 0,5, žák má ihned dělit dvěma; má-li se číslo násobit číslem 0,25, má dělit čtyřmi atd.

6. Násobení desetinného zlomku čísly 5; 50; 25 a j.

Příklady.

$$0{,}37 \,.\, 5 = (0{,}37 \,.\, 10) : 2 = 3{,}7 : 2 = 1{,}85.$$
$$0{,}37 \,.\, 50 = 37 : 2 = 18{,}5.$$
$$0{,}32 \,.\, 25 = 32 : 4 = 8.$$

7. Ústně se provádějí násobení 0,1 . 0,1; 0,4 . 0,8; 0,4 . 0,5 a pod., aby si žáci ujasnili, že při násobení desetin desetinami dostáváme setiny atd.

Podobná cvičení má učitel provádět na začátku mnoha vyučovacích hodin a užívat uvedených method při řešení číselných i slovních úloh.

Postup cvičení

1. Násobení dvou a několika činitelů.

2. Kombinované příklady na sčítání, odčítání a násobení se závorkami i bez nich, při čemž se opakuje umluvený pořádek výkonů.

3. Řešení slovních úloh, při nichž je třeba násobení.

4. Otázky theoretického rázu; změna součinu způsobená změnou činitelů; určení zlomku čísla; určení dělence jako součinu dělitele a podílu a j.

Pokyny pro učitele jsou v příslušných odstavcích této kapitoly a v obdobných cvičeních na celá čísla.

§ 10. Příklady pro kontrolní práci

1. Vyjádřit v g: 40,3 kg; vyjádřit v cm^2: 45,68 km^2; 403 m^2;
v cm: 3,5 m; v cm^3: 3,689 m^3; 14,25 m^3;
v cm: 14,02 m; v cm^3: 0,1 m^3.
v kg: 13,2 t;

2. Znásobit: 3,5681 . 100; 4,1 . 10 000; 10 . 3,078;
0,0003 . 100; 1000 . 12,1.

3. Znásobit ústně: 0,7 . 0,4; písemně: 3,685 . 300;
0,5 . 13; 10,5 . 23,4;
0,7 . 200; 13,42 . 0,07;
25 . 0,1; 4,001 . 3,02;
35 . 0,01; 0,452 . 0,31;

polopísemně: 25,4 . 0,01;
0,09 . 0,01;
5230 . 0,001;
3000 . 2,17.

4. Najít (jedním výkonem): 0,4 ze 68;
0,03 z 500:
0,12 ze 35.

5. Vypočítat: 3,02 . 5,1 . 14,2 . 10,1.

6. Řešit slovní úlohu na násobení desetinných čísel.

7. Řešit slovní úlohu na sčítání, odčítání a násobení desetinných čísel.

§ 11. Dělení desetinného zlomku celým číslem

Dělení desetinného zlomku celým číslem nepůsobí žákům potíže. Rozebereme tento případ dělení řadou účelně vybraných příkladů, jež nakonec vedou k tomu, že dělení může být konečné i nekonečné.

1. Začneme případem, že desetinný zlomek lze dělit celým číslem tak, že při vyhledávání podílu není třeba vyjadřovat jednotky posledního řádu v dělenci jednotkami nižších řádů, jak je tomu třeba v případě:

$$5{,}76 : 18 = 0{,}32.$$

Vysvětlení: 576 setin dělíme osmnácti a dostaneme 32 setiny.

2. Přejdeme k případu, že při vyhledávání podílu je třeba rozdělit jednotky posledního řádu v dělenci a pokračovat v dělení až do obdržení přesného podílu; začít můžeme příkladem

$$19{,}5 : 14 = 1{,}25$$

a skončit řešením příkladu tvaru:

4,567 : 125 = 0,036 536.
456
375
817
750
670
625
450
375
750
750
0

3. Mezi příklady pojmeme i taková dělení celého čísla celým, u kterých přesný podíl je konečný desetinný zlomek; na příklad:

13 : 4 = 3,25 nebo 13 : 8 = 1,625.
10 50
20 20
0 40
0

Poznámka. Je třeba navyknout žáky, aby psali v pravý čas desetinnou čárku v podílu; to vyžaduje soustředěnost v práci a tím právě přispívá k vyloučení chyb.

Pokyn. Vysvětlení nutnosti rozdělit řádové jednotky při dělení na př. 17,5 : 14 můžeme podati konkretním příkladem: na př. 17 rub. a 5 grivenniků (po 10 kop.) máme rozdělit mezi 14 dětí; každé dostane po 1 rub. (jednom celém rublu) a zbudou 3 rub. a 5 grivenniků; rozměníme-li ruble na grivenniky a dáme každému po 2 grivennikách (2 desetinách rublu), zbude 7 grivenniků, které vyjádříme (rozměníme) v kopejkách a dáme každému po 5 kopejkách (5 setinách ruble). Na konkretním příkladu se rovněž objasní podstata rozdělení hrubých dílů na jemnější, jako na příkladě dělení 13 m na 8 částí, když dostaneme odpověď

1 m 6 dm 2 cm 5 mm = 1,625 m.

5. Teprve po takové přípravné práci můžeme přejít k probírání toho případu dělení desetinného zlomku (nebo celého čísla) číslem

celým, že v podílu dostáváme nekonečný zlomek. Volí se takové příklady, aby žáci pochopili, že v dříve probíraných případech práce vyžadovala pouze vynaložení dosti dlouhé doby, aby se dělení dovedlo do konce, a že v případě dělení $\frac{22}{40} : 9 = 2{,}444\ldots$ nikdy se skončit nemůže; rovněž v případě dělení $52 : 165 = 0{,}3151515\ldots$ i v jiných případech, kdy cifry zbytku, jenž je částečným dělencem, stále se opakují, takže při témž dělenci i cifry podílu se budou opakovat a rovněž se budou znovu opakovat cifry zbytku v dělenci atd. Přitom je užitečné vysvětlit, že na př. při děliteli 9 možných zbytků je jen 8 (vylučujeme-li 0) při děliteli 5 mohou být jen 4, při děliteli 71 různých zbytků může být 70 a že někdy může dlouho trvat, než se poprvé opakuje zbytek a v důsledku toho i cifry podílu.

§ 12. Z theorie látky

Vtipní žáci požadují vysvětlení, proč při dělení desetinných čísel celým číslem neužíváme pravidla dělení obyčejných zlomků. Učitel může na příkladech ukázat, že skrytým způsobem toho pravidla užíváme, ale užívat ho pokaždé je velmi těžkopádné. Budiž úkolem dělit desetinné číslo 3,51 celým číslem 27. Podle pravidla dělení obyčejných zlomků

$$3{,}51 : 27 = \frac{351}{100} : 27; \text{ ale } 351 : 27 = 13, \text{ tedy } 3{,}51 : 27 = \frac{13}{100} = 0{,}13.$$

V podstatě jsme dělení převedli na dělení celých čísel, jenom že při způsobu udaném v předešlém paragrafu jsme už průběhem dělení určili místo pro desetinnou čárku.

Později žáci přejdou k obecnému případu dělení zlomků, kdy se má (řečeno obecně) dělit desetinný zlomek $\frac{A}{10^n}$ desetinným zlomkem $\frac{B}{10^m}$.

Podle pravidla dělení obyčejných zlomků dělení desetinným zlomkem můžeme převésti 1. na dělení celých čísel, totiž příslušných čitatelů dělence a dělitele, jestliže tyto převedeme na společného jmenovatele, na příklad:

$$0{,}351 : 0{,}27 = \frac{351}{1000} : \frac{27}{100} = \frac{351}{1000} : \frac{270}{1000} = \frac{351}{270}$$

a

$$3{,}51 : 0{,}027 = \frac{351}{100} : \frac{27}{1000} = \frac{3510}{1000} : \frac{27}{1000} = \frac{3510}{27}$$

nebo 2. na dělení celým číslem:

$$0{,}351 : 0{,}27 = \frac{35{,}1}{100} : \frac{27}{100} = 35{,}1 : 27;$$

$$3{,}51 : 0{,}027 = \frac{3510}{1000} : \frac{27}{1000} = 3510 : 27.$$

I z daných příkladů i z obecného případu dělení desetinných zlomků:

$$\frac{A}{10^n} : \frac{B}{10^m} = \frac{A \cdot 10^m}{B \cdot 10^n} = \frac{A \cdot 10^{m-n}}{B} = A \cdot 10^{m-n} : B, \text{ je-li } m \geqq n,$$

nebo

$$\frac{A \cdot 10^m}{B \cdot 10^n} = \frac{A}{B \cdot 10^{n-m}} = \frac{A}{10^{n-m}} : B, \text{ je-li } m < n$$

je jasné, že a) dělení desetinných zlomků můžeme vždy převésti na dělení celým číslem (číslem B) a že b) jmenovatel zlomku, který představuje podíl, obecně není mocninou deseti a že hledaný podíl se dá přesně vyjádřit desetinným zlomkem pouze v případě, že $\frac{A}{B}$, t. j. podíl při dělení celých čísel odpovídajících čitatelům dělence a dělitele, dá se vyjádřit ve tvaru konečného desetinného zlomku. Proto otázka dělení v případě desetinných čísel je spojena s otázkou o převodu obyčejných zlomků na desetinné a s pojmem přibližného podílu. Žákům je toto možné vysvětlit pouze na číselných příkladech, podobných těm, jež udáváme na příslušném místě (v § 14).

§ 13. Přibližný podíl

Jakmile žáci poznají fakt možnosti nekonečného dělení, vzniká otázka: jak provést prakticky rozdělení 22 rublů mezi 9 dětí (příklad udán výše)? Je jasné, že máme-li 22 rublových mincí, dostane každé dítě po 2 mincích (po 2 rub.): 22 rub. : 9 = 2 rub. a při tom je zbytek 4 rub. a každé dítě může ještě dostat peníze, ale menší než rubl. Pravíme, že při dělení 22 : 9 máme přibližný podíl 2 zaokrouhlený (dolů) na jednotky.

Rozměníme-li 22 rublů na grivenniky, máme 220 mincí a každý dostane po 24 mincích a zbudou 4 mince, takže při tom ztráta každého je menší než grivennik, t. j. než 0,1 rublu. Pravíme, že při dělení 22 rub. : 9 = 2,4 rub., máme přibližný podíl 2,4 zaokrouhlený (dolů) na 0,1 rub.

Rozměníme-li na kopejky, máme 2200 mincí a každému můžeme dát po 2200 : 9 = 244 mincí, t. j. po 2,44 rub. Dělení čísel můžeme prodloužit dále; ale menších mincí není, pročež se zde musíme zastavit a řekneme: při rozdělení 22 rublů mezi 9 dětí každý dostane po 2 rub. 44 kop. neboli po 2,44 rub., při čemž máme ještě zbytek 4 kop.; ztráta každého je menší než 1 kop. V tomto případě pravíme, že máme přibližný podíl 2,44 zaokrouhlený (dolů) na 0,01 rub.

$22 : 9 \approx 2$
$22 : 9 \approx 2{,}4$
$22 : 9 \approx 2{,}44$

Na cvičení může učitel vzít libovolná 2 celá čísla, u kterých dělení nevyjde beze zbytku.

Dříve jsme měli případ, kdy přibližné číslo vznikne při měření; zde přibližné číslo vzniká při dělení.

Otázka zaokrouhlování celých čísel je žákům známa; novou je v případě zaokrouhlování desetinných čísel otázka zaokrouhlování na libovolný desetinný díl. Žáci vědí, že můžeme zaokrouhlovat nejen dolů, nýbrž i nahoru. V daném konkretním případě je to nemožné; nemůžeme rozdělit peněz více, než jich máme nebo rozdělit na části délku větší než máme. V dalším při převádění obyčejných zlomků na desetinné a při řešení příkladů na dělení abstraktních čísel, celých i desetinných zlomků, mluvíme o přibližné hodnotě zlomku zaokrouhlené dolů i nahoru (§ 17). Pravidla zaokrouhlování jsou táž.

§ 14. Dělení desetinným zlomkem

V tomto případě je jednodušší začít řešením číselného příkladu, aby se vyvození nového pravidla výkonu dělení nekomplikovalo otázkou o smyslu dělení zlomkem, která je nutná při slovní úloze.

Mějme 0,7608 : 0,24. Uvedeme-li zlomky na společného jmenovatele, můžeme dělit 7608 : 2400, jak to doporučují mnozí methodikové, zejména F. Jegorov a A. M. Voronec. Toto pravidlo plyne z výše vyložené obecné theorie a je obecně platné ve všech případech dělení desetinných zlomků, ale je krajně nevýhodné ve mnoha praktických případech a nemůžeme toto pravidlo doporučit pro školu. Na příklad podle tohoto pravidla by se dělení 3,687 56 : 0,4 mělo nahradit dělením 368 756 : 40 000 a pod. Účelnější je převádět dělení desetinným zlomkem na dělení celým číslem, jež je žákům již známo; potom v uvedeném případě dělení 36,8756 : 4 dá se provésti dokonce polopísemně. Podáme zdůvodnění navrhovaného způsobu:

Podle pravidla dělení zlomků:

$$0{,}7392 : 0{,}24 = \frac{7392}{10000} : \frac{24}{100} = \frac{7392 \,.\, 100}{10000 \,.\, 24} = 73{,}92 : 24 \text{ atd.}$$

nebo

$$0{,}7392 : 0{,}24 = 0{,}7392 : \frac{24}{100} = \frac{0{,}7392 \,.\, 100}{24} = \frac{73{,}92}{24} = 73{,}92 : 24 \text{ atd.}$$

Uvedeme zápis výkonu:

$$\begin{array}{ll}
0{,}7392 : 0{,}24 = 3{,}08 & \qquad 14 : 1{,}6 = 8{,}75 \\
\\
\begin{array}{l}
73{,}92 : 24 = 3{,}08 \\
\underline{\ \ 192} \\
\quad\ \ 0
\end{array}
&
\qquad
\begin{array}{l}
140 : 16 = 8{,}75 \\
\underline{128} \\
\ \ 120 \\
\ \ \underline{112} \\
\quad\ \ 80 \\
\quad\ \ \underline{80} \\
\quad\ \ \ \ 0
\end{array}
\end{array}$$

nebo

0,7392 : 0,24 = 73,92 : 24 = 3,08
192
0

1,4 : 1,6 = 14 : 16 = 0,875
140
120
80
0

Methodické pokyny

1. Po výpočtu podílu žáci někdy se snaží ještě podíl zvětšit nebo zmenšit; je třeba: 1. navykat žáky, aby jako při výkonech s celými čísly zaokrouhlením obdrženého podílu zkoumali správnost výsledku, 2. poukázat na to, že v daném případě převádějíce dělení desetinným zlomkem na dělení celým číslem zvětšili dělence i dělitele stejněkrát, takže podíl se přitom nezměnil.

2. Nesmíme připouštět v zápise jakékoli škrtání desetinných čárek; je třeba příklad přepsat, jak je udáno výše, při čemž se doporučuje napřed napsat dělitele ve tvaru celého čísla a potom dělence.

3. Je třeba řešit velký počet příkladů na dělení desetinných čísel, při čemž se užívá stále jediného pravidla uvedeného výše: nový dělitel má býti číslo celé. Jest bráti rozmanité příklady: dělení desetinného zlomku celým číslem, dělení celého čísla desetinným zlomkem a různé případy dělení desetinných zlomků, kde počet desetinných míst v dělenci je menší, větší nebo roven počtu desetinných míst v děliteli.

4. Jako při násobení dvou desetinných zlomků se dvěma desetinnými místy žáci často v součinu oddělí pouze 2 desetinná místa, na př. 0,14 . 0,26 píší = 3,64, tak i při dělení desetinného zlomku s jedním desetinným místem podobným zlomkem žáci zase často píší odpověď s jedním desetinným místem, na př. 0,8 : 0,2 píší 0,4. Je třeba zkouškou správnosti prokázat chybu v takovém výsledku. Vůbec v příkladech na dělení desetinných zlomků má se provádět zběžná zkouška možnosti obdrženého výsledku, abychom zamezili takovým případům, kdy žák při dělení 7 : 50 dá odpověď 1,4 (otázky: je to možné? proč ne?) nebo při dělení 18 : 300 dá odpověď 6; při dělení 12,8 : 4 odpověď 32 a mnoho jiných.

5. Všímáme si potíží, které žáci mají s dělením čísly 0,1; 0,01; 0,001 jako s násobením týmiž čísly; proto je třeba řešit mnoho příkladů tvaru: 4 : 0,001; 25 : 0,01; 27 : 0,001; 315 : 0,001; 31,25 : 0,01 a pod. a znovu pečlivě probrat otázku smyslu dělení (desetinným) zlomkem.

6. Nejprve se řeší dostatečné množství příkladů na dělení, ve kterých podíl je konečný desetinný zlomek; potom se přejde k případu, kdy podíl je nekonečný desetinný zlomek a při tom: 1. učíme, jakou přesnost má obdržená odpověď, je-li odpověď udána na př. na 2 nebo na 3 desetinná místa, 2. čteme se žáky odpověď upravenou na určitý stupeň přesnosti, zaokrouhlujíce výsledek podle žákům známých pravidel o zaokrouhlování čísel, 3. provádíme dělení s předem daným stupněm přesnosti, na př. přesně na 0,01, na 0,001. Při tom za účelem zaokrouhlení výsledku žáci nejprve počítají 3 desetinná místa, žádá-li se odpověď přesně na dvě desetinná místa; počítají 4 desetinná místa, žádá-li se odpověď přesně na tisíciny atd. Později žáci mohou hned soudit na poslední cifru zaokrouhleného podílu podle posledního zbytku, zda je menší či větší či roven polovině dělitele, na příklad:

$$\text{a)}\quad \begin{array}{l} 45 : 37 \doteq 1{,}21 \\ \;80 \\ \;\;60 \\ \;\;23 \end{array} \qquad\qquad \text{b)}\quad \begin{array}{l} 45 : 37 \doteq 1{,}216. \\ \;80 \\ \;\;60 \\ \;\;230 \\ \;\;222 \\ \;\;\;\;\;8 \end{array}$$

V příkladě a) 45 : 37 odpověď je 1,22 s přesností na 0,01; ježto zbytek $23 > \frac{37}{2}$, odpověď zaokrouhlená nahoru je bližší přesnému číslu $\frac{45}{37}$; v příkladě b) je odpověď 1,216 přesně na 0,001 zaokrouhlená dolů bližší přesnému číslu, ježto zbytek $8 < \frac{37}{2}$. (Podrobně viz § 18.)

7. Není vhodné vyhýbat se příkladům, ve kterých se žádá zaokrouhlení konečných desetinných zlomků na žádaný stupeň přesnosti, aby u žáků nevznikl nesprávný názor, jako by pouze nekonečné desetinné zlomky se mohly zaokrouhlovat.

8. Jako obyčejně, vyučování dané látce se končí:

a) řešením číselných příkladů, odpověďmi na otázky theoretického rázu (definice dělení, závislost mezi dělencem, dělitelem a podílem, výpočet neznámého členu, změna podílu při změně daných čísel a j.);

b) řešením slovních úloh; úlohy řešitelné dělením byly námi rozebrány podrobně v příslušné kapitole o celých číslech (§ 2, kap. VI) a potom doplněny v kapitole o lomených číslech (kap. IX, § 17).

9. Úlohy, jejichž řešení vyžaduje násobení a dělení pojmenovaných čísel (měr), neobsahují žádné nové otázky, ke kterým by nebylo přihlédnuto v základních úlohách na násobení a dělení. Jest věnovati pozornost úlohám, v jejichž znění se vyskytují různé míry, na příklad z obsahu obdélníkového pozemku, vyjádřeného v arech nebo hektarech, a z délky, vyjádřené v metrech, má se vypočítat šířka; z váhy, vyjádřené v kilogramech, a ze dvou rozměrů vyjádřených v metrech, má se vypočítat třetí rozměr a pod.

10. Řeší se slovní úlohy na všecky 4 výkony (viz kap. „Slovní úlohy“) a nejjednodušší úlohy s procenty.

§ 15. Příklady pro kontrolní práci

1. Vyjádřit v m: 5 cm, 30 cm,
   v kg: 30,2 g,
   v t: 15,2 kg, 236 kg a pod.,
   v m^2: 5 cm^2, 103 cm^2, 42 560 cm^2,
   v m^3: 17 cm^3, 3568 cm^3, 12 000 cm^3.

2. Dělit

ústně a polopísemně:		písemně:
325 : 1000	24,6 : 4	46,81 : 31
46 : 1000	2,25 : 5	18,08 : 29
45,38 : 100	0,9 : 0,3	10,4 : 65
2,4 : 1000	0,48 : 0,3	0,441 : 21
0,35 : 100	0,6 : 0,02	52 : 0,13
0,04 : 100	35 : 0,5	91,2 : 7,6
315 : 0,001		2,9788 : 2,2.
4,2 : 0,001		

Pokyn. Učitel sestavuje příklady sám násobením toho podílu, který chce dostat v odpovědi, na př. podílu 0,62, dělitelem 29; jako dělenec vyjde 17,98 atd.

3. Najít přibližný podíl

a) s přesností na 0,001 : 253 : 9 a j.,

b) s přesností na 0,01 : 3,24 : 0,8; 3,2 : 0,08 a pod.

Otázky: a) Jak se změní podíl při dělení 42,5 : 0,25, jestliže v dělenci i v děliteli odstraníme desetinné čárky? b) Najít číslo (jedním výkonem), jehož 0,7 se rovná 49.

Úloha. V dílně je klubko železného drátu váhy 5,247 kg. Má se ho užít k výrobě klíčů. Kolik tuctů klíčů bude možné vyrobit, jestliže na každý klíč se spotřebuje 35,5 cm drátu, a metr drátu váží 132,5 g?

Příklad na všecky výkony s desetinnými zlomky.

§ 16. Zápis desetinného zlomku ve tvaru obyčejného zlomku

Předloží se úloha, ve které se žádá sečíst (nebo odečíst) desetinný zlomek s obyčejným, a vyjasní se nutnost zapsat buďto desetinný zlomek ve tvaru obyčejného zlomku nebo obráceně. Zapsat desetinný zlomek ve tvaru obyčejného zlomku nečiní potíže a můžeme se omezit na malý počet cvičení, dávajíce přednost takovým, ve kterých je možné krácení.

Poznámka. Někdy se užívá rčení: „převést desetinný zlomek na obyčejný zlomek“. Toto rčení je nepřesné, protože desetinný zlomek je zvláštní případ obyčejného zlomku.

§ 17. Převod obyčejného zlomku na desetinný (část prvá)

1. *Zvláštní případ:* Mějme nezkratitelný zlomek, jehož jmenovatel obsahuje pouze prvočinitele 2 a 5, a to v jakýchkoli mocninách, na příklad: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{9}{50}$, a podobně. Máme-li takový zlomek, na př. zlomek $\frac{3}{25}$, vyjádřit ve tvaru desetinného zlomku, tu mezi jmenovateli, jací se vyskytují u desetinných zlomků (10, 100, 1000 atd.) můžeme najít takového (nejmenší z nich je 100), na kterého můžeme uvésti daný zlomek, násobíme-li jmenovatele (a tedy i čitatele) doplňujícím činitelem: $\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{100} = \frac{12}{100}$. Takového úsudku můžeme užít v příkladech: $\frac{3}{8}$; $\frac{7}{20}$ a pod. Z takto rozebraných příkladů dojdeme k vy-

vození známého pravidla převodu obyčejného zlomku na desetinný doplněním činitelů 2 a 5 ve jmenovateli, až docílíme stejného počtu dvojek a pětek, a příslušným zvětšením čitatele.

Žáci se mají naučit, aby podle činitelů 2 a 5 v daném jmenovateli naráz určili jmenovatele desetinného zlomku, na který převedeme obyčejný zlomek.

Provádějí se ústní cvičení v převodu obyčejných zlomků na desetinné. Některé vztahy si žáci mají pamatovat.

$\frac{1}{2} = 0{,}5;$	$\frac{3}{4} = 0{,}75;$	$\frac{1}{5} = 0{,}2;$	$\frac{1}{25} = 0{,}04;$
$\frac{1}{4} = 0{,}25;$	$\frac{3}{8} = 0{,}375;$	$\frac{2}{5} = 0{,}4;$	$\frac{2}{25} = 0{,}08;$
$\frac{1}{8} = 0{,}125;$	$\frac{5}{8} = 0{,}625;$	$\frac{3}{5} = 0{,}6;$	$\frac{3}{25} = 0{,}12.$

Je třeba dbát na to, aby žáci v dalším, kde je to možno, vědomě dávali přednost výše uvedené speciální methodě převodu obyčejného zlomku na desetinný tvar.

2. Udá se obecná methoda převodu obyčejného zlomku na desetinný přímým dělením čitatele jmenovatelem.

Provádění práce. Připomeneme žákům definici zlomku jako podílu při dělení; potom zvolíme $\frac{22}{9}$; $\frac{13}{4}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{8}$ a přímým dělením převedeme tyto obyčejné zlomky na desetinné. Na těchto a jiných příkladech zjistíme, že některé obyčejné zlomky lze vyjádřit přesně ve tvaru desetinného zlomku (rozumíme-li desetinným zlomkem konečný zlomek), kdežto jiné, jako třeba zlomek $\frac{22}{9}$, při pokusu vyjádřit je v desetinném tvaru dají nekonečný zlomek (podíl lze vyjádřit v desetinném tvaru jenom přibližně). Zde se poukazuje na možnost zaokrouhlit zlomek nahoru nebo dolů; na příklad:

$$\frac{34}{45} = 0{,}7555\ldots \qquad \begin{array}{l} 34 : 45 = 0{,}7555\ldots \\ \overline{340} \\ \underline{315} \\ 250 \\ 250 \end{array}$$

$$\frac{2}{9} = 0{,}2222\ldots \qquad \begin{array}{l} 2 : 9 = 0{,}2222\ldots \text{ (viz tabulku).} \\ \overline{20} \end{array}$$

Berouce zaokrouhlení desetinných zlomků na stále větší počet desetinných míst, dostáváme desetinné zlomky nejbližší k obyčejným zlomkům $\frac{34}{45}$ a $\frac{2}{9}$.

Zlomek	Zaokr. dolů	Zaokr. nahoru	Přesně na
$\frac{34}{45}$	0 0,7 0,75 0,755	1 0,8 0,76 0,756	1 0,1 0,01 0,001
$\frac{2}{9}$	0 0,2 0,22 0,222	1 0,3 0,23 0,223	1 0,1 0,01 0,001

Aby se žákům objasnil pojem „přibližné (zaokrouhlené) hodnoty" a rozhodnutí o tom, zdali zaokrouhlení dolů či nahoru je bližší přesné hodnotě zlomku, můžeme počítat rozdíl mezi přesnou hodnotou, danou obyčejným zlomkem, a oběma přibližnými hodnotami zaokrouhlenými na týž stupeň přesnosti:

$$0{,}2 < \tfrac{2}{9} < 0{,}3.$$

Máme

$$\frac{2}{9} - 0{,}2 = \frac{2}{9} - \frac{2}{10} = \frac{2}{9} - \frac{1}{5} = \frac{10-9}{45} = \frac{1}{45} = \frac{2}{90} \text{ nebo,}$$

předvídajíce nutnost vyjádřit oba rozdíly s týmž jmenovatelem, píšeme

$$\frac{2}{9} - 0{,}2 = \frac{2}{9} - \frac{2}{10} = \frac{20-18}{90} = \frac{2}{90},$$

$$0{,}3 - \frac{2}{9} = \frac{3}{10} - \frac{2}{9} = \frac{27-20}{90} = \frac{7}{90};$$

jest $\frac{7}{90} > \frac{2}{90}$; proto 0,2 je blíže přesné hodnotě zlomku $\frac{2}{9}$ nežli 0,3 atd.

Jako u celých čísel (viz kap. II, § 4) udají se pravidla zaokrouhlování desetinných zlomků: desetinné zlomky zaokrouhlujeme na desetiny, na setiny atd. Místo zaokrouhlení „na desetiny" mluvíme také o zaokrouhlení „na jedno desetinné místo" atd.

Příklad: přibližné hodnoty čísla 3,682 415 jsou

3,7	(zaokrouhleno na desetiny),
3,68	(zaokrouhleno na setiny),
3,682	(zaokrouhleno na tisíciny),
3,68242	(zaokrouhleno na stotisíciny) atd.

Počet „desetinných míst“ musíme rozlišovat od počtu „významných cifer“ (viz § 22).

§ 18. Převod obyčejného zlomku na desetinný (dokončení)

Žáci vědí, že dělení dvou čísel (celých i desetinných zlomků) dává za výsledek desetinný zlomek (nebo smíšené číslo) konečný nebo nekonečný. Musíme ve třídě zopakovat všecka ta fakta, doplnit je, vysvětlit jejich příčinu, jestliže se to dosud nestalo, na příklad zjistit skutečnost, že v některých případech se cifry podílu opakují již desetinami počínajíc, kdežto jinde opakování začíná později a pod.

1. Abychom vysvětlili příčinu, proč při dělení dvou čísel někdy vychází konečný desetinný zlomek a někdy nekonečný, znovu vyjdeme od zlomků, jejichž jmenovatelé mají pouze prvočinitele 2 a 5 v libovolné mocnině.

2. Rozborem příkladů jako $\frac{3}{7}$; $\frac{8}{9}$ a potom $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{18}$ a j. zjistíme, že není žádného činitele, kterým bychom mohli násobit daného jmenovatele 7, 9, 18, 12, aby vznikl jmenovatel 10, 100, 1000... Tyto zlomky nelze vyjádřit jako desetinné zlomky (konečné) a přímé dělení čitatele jmenovatelem dává v daném případě nekonečně mnoho desetinných cifer.

3. Z rozboru jmenovatelů obyčejných zlomků, které lze a které nelze vyjádřit jako konečné desetinné zlomky, zjistíme znaky jmenovatelů obyčejných zlomků (pouze prvočinitelé 2 a 5 v libovolné mocnině), u kterých je možné tvrdit, že obyčejný zlomek se dá převésti na konečný desetinný zlomek.[9])

[9]) V učebnicích theoretické aritmetiky se odvozují nutné a postačující podmínky, aby nezkratitelný obyčejný zlomek se dal přesně vyjádřit desetinným zlomkem. Počet desetinných míst obdrženého desetinného zlomku je roven většímu z obou mocnitelů prvočísel 2 a 5 při rozkladu daného jmenovatele na prvočinitele.

Pokyn. Zlomek $\frac{3}{12}$ můžeme převést na desetinný zlomek (konečný), protože prvočinitel 3 ve jmenovateli po krácení zlomku odpadne $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. Je třeba žákům předložit několik podobných příkladů a zjistit, že soudit o převeditelnosti obyčejného zlomku na desetinný podle jmenovatele můžeme jenom u zlomků nezkratitelných (v základním tvaru).

Žáci musí získat dostatečný výcvik ve hbitém určování, zdali daný zlomek je možno vyjádřit ve tvaru konečného desetinného zlomku či ne, a lze-li to provést oběma způsoby uvedenými v předešlém paragrafu či pouze dělením čitatele jmenovatelem (§ 17).

4. Příčina opakování cifer při dělení dvou celých čísel nebo při převádění obyčejných zlomků na desetinné byla vysvětlena žákům podle § 11. V daném případě je třeba pouze tuto otázku zopakovat a zavést názvy „perioda", „periodický zlomek".

5. Řeší se cvičení na převod libovolných obyčejných zlomků na desetinné.

Při převodu obyčejného zlomku na desetinný v případě nekonečného dělení výsledek je vyjádřen nekonečným periodickým desetinným zlomkem.

Poznámka. Konečný desetinný zlomek, na příklad 0,272 727, musíme dobře rozlišovat od periodického zlomku 0,272 727 ... Přesná hodnota tohoto periodického zlomku je $\frac{3}{11}$.

§ 19. Provádění výkonů s obyčejnými a desetinnými zlomky zároveň

Musíme poznamenat, že ve školách, jak ukazují provedené kontrolní práce, při výkonech, ve kterých jsou dány i obyčejné i desetinné zlomky, zejména při sčítání a odčítání, žáci obyčejně inklinují k tomu, vyjádřit všecky zlomky v desetinném tvaru, a to i v takových případech, kdy se má vypočíst

$$\frac{3}{4} + 0{,}25; \quad 2{,}5 - \frac{5}{16} \text{ atd.}$$

Proto je především třeba shodnout se na nutnosti vyjádření všech zlomků buď ve tvaru desetinném nebo obyčejném, mají-li se provést výkony s danými zlomky obojího tvaru.

Přitom mohou být případy:

1. ve kterých převod obyčejného zlomku na desetinný usnadňuje výpočet:

$$\tfrac{2}{5} + 0{,}13 = 0{,}4 + 0{,}13 = 0{,}53;$$

2. ve kterých vždycky možné vyjádření desetinného zlomku obyčejným není účelné, jako na př. v případě: $0{,}345 + \frac{1}{2}$ a j., v obou těchto případech je vhodné, vyjádřit obyčejný zlomek v desetinném tvaru;

3. ve kterých převod obyčejného zlomku na konečný desetinný zlomek je nemožný a dal by pouze přibližný výsledek, který nevyjadřuje přesnou odpověď:

$$\frac{2}{7} + 0{,}13 = \frac{2}{7} + \frac{13}{100} = \frac{200 + 91}{700} = \frac{291}{700};$$

v tomto případě je třeba desetinný zlomek zapsat ve tvaru obyčejného zlomku.

Tudíž, abychom dostali přesnou odpověď, nahrazujeme obyčejné zlomky desetinnými pouze tehdy, jestliže se dají vyjádřit jako konečné desetinné zlomky.

4. Jestliže v příkladě je naznačeno několik výkonů násobení a dělení obyčejných i desetinných zlomků, je nejvýhodnější provést tyto výkony v obyčejných zlomcích, při čemž je zápis na příklad tento:

$$3{,}68 \,.\, 1\frac{2}{23} : 0{,}14 \,.\, 5\frac{1}{2} : 5 = \frac{368 \,.\, 25 \,.\, 100 \,.\, 11}{100 \,.\, 23 \,.\, 14 \,.\, 2 \,.\, 5} = \frac{16 \,.\, 5 \,.\, 11}{14 \,.\, 2} =$$
$$= \frac{4 \,.\, 5 \,.\, 11}{7} = \frac{220}{7} = 31\frac{3}{7}.$$

Jestliže v číselném příkladě je třeba provésti několik výkonů sčítání a odčítání jak s obyčejnými tak i s desetinnými zlomky, je někdy[10]) užitečné provésti nejprve všecky výkony s desetinnými zlomky.

5. Při řadě výkonů s obyčejnými i desetinnými zlomky v případě převádění obyčejných zlomků na desetinné často vznikne nekonečný periodický zlomek a v každém případě je třeba vědět, s jakou přes-

[10]) Je-li možné odčítání a pod.

ností brát daná čísla, s jakou přesností se obdrží přibližný výsledek po provedení všech výkonů (§ 22).

Poslední etapou práce jest řešení příkladů a cvičení na řadu výkonů s obyčejnými a desetinnými zlomky.

§ 20. Příklady pro kontrolní práci

1. Vypsat zlomky, které lze převést na konečné desetinné:

$$\tfrac{5}{14};\ \tfrac{3}{20};\ \tfrac{7}{24};\ \tfrac{96}{125};\ \tfrac{1}{60};\ \tfrac{9}{40}.$$

2. Vypočítat ve tvaru desetinného zlomku:

$$10{,}356 + \tfrac{7}{8} - \tfrac{9}{75} - \tfrac{1}{50}.$$

3. Vypočítat přesně:

$$0{,}475 + 0{,}7 + \tfrac{5}{9} - \tfrac{7}{36}.$$

4. Vypočítat: $\frac{3}{8} \,.\, 0{,}16 : \frac{1}{9} \,.\, 16\frac{2}{3}$.

5. *Úloha.* 1 cm³ petroleje váží 0,8 g a 1 cm³ benzinu váží o 0,1 g méně. Kolik váží i s tarou směs $6\frac{1}{2}$ l petroleje a 3 l benzinu nalitá do konve váhy $1\frac{4}{5}$ kg?

6. Příklad na všecky výkony s obyčejnými i desetinnými zlomky.

§ 21. Periodické zlomky (doplňky)

1. Při převádění obyčejného zlomku na desetinný žáci získali představu o periodickém zlomku a periodě. V dalším se vysvětlí na příkladech takových převodů, že existují ryze a neryze periodické zlomky:

$$\tfrac{3}{7} = 0{,}428\,571\,428\,571\ldots = 0{,}\dot{4}28\,57\dot{1};\quad \tfrac{5}{6} = 0{,}833\,33\ldots = 0{,}8\dot{3};$$

udá se definice, zapisování a čtení periodických zlomků.

2. Na řadě příkladů se zjistí, že při převádění obyčejného zlomku na desetinný, jestliže vznikne nekonečný desetinný zlomek, je tento zlomek vždycky periodický. (Příčina opakování cifer byla vysvětlena v § 11.) Je užitečné dávat příklady, u kterých má perioda větší počet cifer, na př.:

$$\tfrac{1}{7};\ \tfrac{3}{7};\ \tfrac{5}{14};\ \tfrac{11}{14} \text{ a pod.}$$

Otázky spojené s nekonečnými desetinnými periodickými zlomky byly probírány na středních školách předrevoluční doby v dosti velikém rozsahu. Byl žádán trvalý návyk v úpravách a výkonech s periodickými zlomky. V tehdejších sbírkách úloh byl velký počet slovních úloh, v jejichž znění daná čísla měla tvar periodických zlomků.

V naší sovětské škole v kurse aritmetiky se látka o periodických zlomcích omezila na zjištění jejich vzniku při převádění obyčejného zlomku na desetinný a vyjádření obyčejného zlomku (v případě, že vznikne nekonečný desetinný periodický zlomek) jeho přibližnými hodnotami s libovolným stupněm přesnosti (§§ 17 a 18).

Když v kurse algebry střední školy byl uveden bod „pojem iracionálního čísla jako nekonečného desetinného neperiodického zlomku“, tu v souvislosti s tím bylo věnováno trochu více pozornosti otázce o nekonečných desetinných periodických zlomcích v kurse aritmetiky proto, aby žákům vyšších tříd byl jasný rozdíl vzniku nekonečného desetinného periodického zlomku (který lze vyjádřit jemu rovným obyčejným zlomkem) a nekonečného desetinného neperiodického zlomku (iracionálního čísla). Tedy byl do kursu aritmetiky zařazen bod „převádění periodického zlomku na obyčejný“, ale, jak známo, tuto věc lze zdůvodniti teprve po seznámení s pojmem limity,[11]) proto v osnovách aritmetiky z r. 1943 znovu zůstal pouze „pojem periodického zlomku“.

V učebnici aritmetiky pro střední školy (A. Kiselëv, vyd. z r. 1938) podal prof. A. Ja. Chinčin stručné přesné zdůvodnění theorie periodických zlomků určené pro učitele (§§ 185 až 194, drobný tisk); pro žáky je stručně vyložena otázka „převádění periodických zlomků na obyčejné“ a my považujeme za vhodné vzhledem k výše řečenému v této příručce rozebrat několik před učitelem stojících otázek týkajících se periodických zlomků.

3. Převod ryze periodického zlomku na obyčejný.

A. Obecně známá methoda (vyložená ve stabilní učebnici) pozůstává v tom, že přímým dělením 1 : 9, 1 : 99; 1 : 999 atd. zjistíme, které periodické zlomky vzniknou převodem takových obyčejných

[11]) V kurse algebry na střední škole se klade otázka o převodu periodického zlomku na obyčejný v souvislosti s probíráním otázky o limitě součtu členů nekonečné klesající geometrické posloupnosti.

zlomků, jejichž čitatel je 1 a jmenovatel je číslo, jehož všecky cifry jsou rovné devíti.

$$\tfrac{1}{9} = 0{,}111\,1\ldots = 0{,}\dot{1}; \qquad \tfrac{1}{99} = 0{,}010\,1\ldots = 0{,}\dot{0}\dot{1};$$

$$\tfrac{1}{999} = 0{,}001\,001\ldots = 0{,}\dot{0}0\dot{1}.$$

Potom srovnáváme daný periodický zlomek, který chceme převésti na obyčejný, s jedním z hořejších periodických zlomků, majícím v periodě stejně cifer jako daný zlomek, na příklad $0{,}\dot{3}\dot{5} = 0{,}353\,535\ldots$ srovnáváme se zlomkem $0{,}010\,101\ldots = \frac{1}{99}$.

Jsme vedeni k domněnce, že daný periodický zlomek $0{,}3535\ldots = \frac{1}{99} \cdot 35 = \frac{35}{99}$; zkouškou se přesvědčíme, že $\frac{35}{99}$ převedeno na desetinný zlomek skutečně dává $0{,}\dot{3}\dot{5}$. Z několika obdobně řešených příkladů (je třeba brát různě počet cifer v periodách volených zlomků) vyvodíme pravidlo.

Vada uvedeného důkazu je v tom, že toho, co platí pro součet konečného počtu sčítanců, užíváme bez nového odůvodnění na součty o nekonečném počtu sčítanců, jmenovitě: při srovnávání zlomků $0{,}353\,535\ldots$ a $0{,}010\,101\ldots$ se považovalo za jasné, že jestliže každého sčítance zvětšíme 35krát, také součet se zvětší 35krát.

B. Ve školách se udává i jiná methoda převádění ryze periodického zlomku na obyčejný: budiž úkolem převésti $0{,}\dot{3}\dot{5}$ na obyčejný zlomek.

Položíme

$$\begin{aligned} 0{,}\dot{3}\dot{5} &= x \text{ neboli} \\ x &= 0{,}353\,535\ldots, \text{ tedy} \\ 100x &= 35{,}353\,535\ldots, \text{ takže} \\ 99x &= 35, \text{ z čehož } x = \tfrac{35}{99}. \end{aligned}$$

Nepřesvědčivost takového důkazu se objevila ve škole, kde byl proveden, zvoláním jedné žákyně (5. třídy): „Posunuli jsme desetinnou čárku, a teď na konci druhého čísla se nám nedostávají dvě cifry“.... Nepřesnost tohoto „důkazu“ je táž, jako při první methodě.

4. Převod neryze periodického zlomku na obyčejný.

Je účelné vyvoditi pravidlo převodu neryze periodického zlomku na obyčejný z rozboru příkladů majících různý počet cifer před periodou a y periodě, při čemž je vhodné nekomplikovat práci celou částí desetinného zlomku, nýbrž brát příklady tak, aby v nich byla 0 před desetinnou čárkou, na příklad:

$$0{,}28\dot{3}\dot{5} = \frac{28{,}\dot{3}\dot{5}}{100} = \frac{28\frac{35}{99}}{100} = \frac{28\,.\,99 + 35}{9900} = \frac{28\,.\,(100-1) + 35}{9900} = \frac{2835 - 28}{9900};$$

$$0{,}28\dot{5} = \frac{28{,}\dot{5}}{100} = \frac{28\frac{5}{9}}{100} = \frac{28\,.\,9 + 5}{900} = \frac{28\,.\,(10-1) + 5}{900} = \frac{285 - 28}{900};$$

$$0{,}2\dot{8}\dot{5} = \frac{2{,}\dot{8}\dot{5}}{10} = \frac{2\frac{85}{99}}{10} = \frac{2\,.\,99 + 85}{990} = \frac{2\,.\,(100-1) + 85}{990} = \frac{285 - 2}{990} \text{ atd.}$$

Postup úsudku je patrný ze zápisu. Po vyvození pravidla se dokončí výpočet pro každý zlomek.

Zdržíme se u některých otázek, které se kladou důvtipným žákům při probírání periodických zlomků (tuto práci můžeme konati mimo třídu).

1. Tyto otázky se týkají především těch případů, kdy perioda se skládá jen z cifry 9.

Na příkladech jest vyložit, že jestliže perioda daného periodického zlomku se skládá pouze z cifry 9, pak neexistuje takový obyčejný zlomek (nepřevoditelný v konečný desetinný zlomek), který by se dal převésti na daný periodický zlomek.

Vskutku:

$$0{,}28\dot{9} = \frac{28{,}\dot{9}}{100} = \frac{28\frac{9}{9}}{100} = \frac{29}{100} = 0{,}29; \quad 0{,}\dot{9} = \frac{9}{9} = 1;$$

$$5{,}\dot{9} = 5\tfrac{9}{9} = 6.$$

V prvém případě obdržíme konečný desetinný zlomek 0,29; v druhém a třetím případě celá čísla 1 a 6. Vycházejíce z těchto úsudků, vysvětlíme žákům, že je zcela možné vyloučit z úvahy desetinné periodické zlomky, jejichž celá perioda se skláda z devítky. Potom každý obyčejný zlomek lze jediným způsobem vyjádřit ve tvaru desetinného zlomku (konečného nebo nekonečného). Bez tohoto omezení by jeden a týž zlomek, na příklad $\frac{7}{10}$, bylo možné napsat dvěma způsoby ve tvaru nekonečného periodického zlomku: $0{,}7\dot{0}$ a $0{,}6\dot{9}$.

2. Kolik cifer bude mít perioda po převodu obyčejného zlomku na desetinný? Žákům můžeme říci, že odpověď na tuto otázku dává věda zvaná

„theorie čísel“ a oni mohou pouze ověřit, že počet cifer v periodě nezávisí na čitateli obyčejného zlomku, který převádíme na periodický, nýbrž je stejný pro všecky zlomky s týmž jmenovatelem. Tak při jmenovatelích 3 a 9 perioda má vždy jedinou cifru, při jmenovateli 11 dvě, při jmenovatelích 7 a 13 šest atd.

3. Ryze periodický zlomek můžeme považovat za neryze periodický, jestliže oddělíme od periody libovolný počet prvních cifer. $3{,}\dot{4}2\dot{5}$ můžeme psáti ve tvaru $3{,}42\dot{5}4\dot{2}$.

Vskutku

$$3{,}\dot{4}2\dot{5} = 3\frac{425}{999} \quad \text{a} \quad 3{,}42\dot{5}4\dot{2} = 3\frac{42542-42}{99900} = 3\frac{42500}{99900} = 3\frac{425}{999}.$$

4. U neryze periodického zlomku můžeme libovolně zvětšit počet cifer stojících před periodou beze změny velikosti zlomku (a se zachováním počtu cifer v periodě).

V periodě jedna cifra:

$$3{,}42\dot{5} = 3\frac{425-42}{900} = 3\frac{383}{900},$$

$$3{,}425\dot{5} = 3\frac{4255-425}{9000} = 3\frac{3830}{9000} = 3\frac{383}{900},$$

nebo v periodě dvě cifry:

$$1{,}4\dot{2}\dot{5} = 1\frac{425-4}{990} = 1\,\frac{421}{990},$$

$$1{,}425\,\dot{2}\dot{5} = 1\frac{42525-425}{99000} = 1\frac{42100}{99000} = 1\frac{421}{990},$$

$$1{,}42\dot{5}\dot{2} = 1\frac{4252-42}{9900} = 1\frac{4210}{9900} = 1\frac{421}{990} \text{ atd.}$$

5. U každého periodického zlomku můžeme zvětšit počet desetinných míst, stojících v periodě, několikrát beze změny velikosti zlomku:

$$3{,}5\dot{2}\dot{1} = 3\frac{521-5}{990} = 3\frac{516}{990} = 3\frac{258}{495} = 3\frac{86}{165},$$

$$3{,}5\dot{2}\,12\dot{1} = 3\frac{52121-5}{99990} = 3\frac{52116}{99990} = 3\frac{86}{165} \text{ atd.}$$

6. Jest ještě jedna otázka, na kterou chtějí žáci znát odpověď: znaky, kdy převod obyčejného zlomku vede na ryze a kdy na neryze periodický zlomek.[12])

Vysvětlit to žákům je poněkud obtížné, ale můžeme ukázat na příkladě, že průběhem dělení čitatele jmenovatelem při převádění obyčejného zlomku na desetinný postupně se krátí činitelé 2 a 5, kteří jsou ve jmenovateli.

---

[12]) A. KISELËV, „Arifmetika“, vyd. z r. 1938, § 194.
I. V. ARNOLD, „Teorija čisel“, vyd. z r. 1939, str. 181 pro učitele.

a) To je zřejmé u obyčejného zlomku rovného konečnému desetinnému zlomku, na příklad:

$\frac{9}{40}$ dává 0 celá $\frac{90}{40}$ desetin, $\frac{90}{10} : 40 \doteq 2$,

t. j. 0 celá 2 desetiny a ($\frac{10}{40}$ desetin neboli) $\frac{1}{4}$ desetiny neboli 0,2 a $\frac{10}{4}$ setin, t. j. 0,22 a $\frac{10}{2} = 5$ tisícin:

$$\begin{array}{l} 9 : 40 = 0{,}225 \\ \underline{}\\ 90 \\ 100 \\ 200 \\ 0 \end{array}$$

Konečný výsledek 0,225.

Při proměně celých čísel na desetiny, desetin na setiny atd. zbytky (a tedy i čitatelé) získávají činitele 5 a 2, kteří se krátí s činiteli 2 a 5 ze jmenovatele obyčejného zlomku, a ve výsledku po krácení všech činitelů 2 a 5 ve jmenovateli ($40 = 2 . 2 . 2 . 5$, třikrát rozměňujeme díly) dostaneme konečný desetinný zlomek.

b) Samozřejmě, jestliže jmenovatel vůbec neobsahuje činitele 2 ani 5 nebo jestliže mimo 2 a 5 obsahuje ještě nějaké jiné činitele, tu ať jakkoli rozměníme zbytky, nikdy se nezkrátí činitelé jmenovatele různí od 2 a 5, a proto takový obyčejný zlomek nelze převést na konečný desetinný zlomek.

Jestliže ve jmenovateli nejsou činitelé 2 a 5, tu nebude žádné krácení (žádná změna dělitele):

$\frac{2}{11}$ dává 0 celá a $\frac{20}{11}$ desetin,

$$\begin{array}{l} 2 : 11 \doteq 0{,}18 \\ 20 \\ 90 \\ 20 \end{array}$$

t. j. 0,1 a $\frac{90}{11}$ setin neboli

0,18 a $\frac{20}{11}$ tisícin, t. j.

0,181 a $\frac{90}{11}$ desetitisícin atd.

Dostaneme ryze periodický zlomek.

Jestliže jmenovatel mimo jiné činitele obsahuje činitele 2 a 5, pak tito činitelé se průběhem rozměňování zbytků zkrátí a ježto pokaždé při násobení deseti se může zkrátit jen jedna dvojka a jedna pětka, počet činitelů 2 a 5 ve jmenovateli určuje počet desetinných míst stojících před periodou a výsledkem je neryze periodický zlomek.

6. Není nutné při dané práci se zastavovat u výkonů s periodickými zlomky. Mají-li žáci o to zájem, aby se jim to naznačilo, můžeme užít vlastností

periodických zlomků uvedených v 3. až 5.; na příklad při sčítání $3{,}25\dot{4} + 2{,}4\dot{8}\dot{1} + 1{,}35\dot{2}\,03\dot{8}$ můžeme psáti

$$\begin{array}{r} 3{,}25\dot{4}\,44\dot{4} \\ 2{,}48\dot{1}\,81\dot{8} \\ 1{,}35\dot{2}\,03\dot{8} \\ \hline 7{,}08\dot{8}\,30\dot{0}, \end{array}$$

ale můžeme také sčítat

$$\begin{array}{r} 3{,}254\,444\,44\ldots \\ 2{,}481\,818\,18\ldots \\ 1{,}352\,038\,20\ldots \\ \hline 7{,}088\,300\,8\;\;\ldots \end{array}$$

§ 22. Přibližné výpočty

1. O umístění a rozsahu

Otázka umístění a rozsahu přibližných výpočtů ve školním kurse matematiky zůstává dosud neřešenou v osnová h střední školy. Dosti veliké místo se udílelo této otázce v osnovách matematiky pro střední školu po Velké říjnové revoluci do školního roku 1931 až 32. Ale stav vyučování matematice té doby a zejména nedostatek potřebného množství methodicky propracované literatury o této otázce pro učitele vedl k neuspokojivému stavu vyučování o přibližných výpočtech v sovětské střední škole. A v dalších osnovách jest o této otázce jenom jedna věta: „Zaokrouhlení výsledku výkonů".

V přítomnosti se v souvislosti s požadavkem dát žákům některé praktické aplikace získaného početního výcviku stále naléhavěji objevuje otázka zavedení přibližných výpočtů do osnov střední školy. Do osnov by bylo možno vsunout toto: „Přesná a přibližná čísla. Zaokrouhlení daných čísel a výsledků výkonů. Absolutní chyba přibližného čísla. Čtyři výkony s přibližnými čísly. Pravidla čítání cifer při těchto výkonech."

V tomto rozsahu budeme se obírati otázkou přibližných výpočtů v této methodice.

První vědomosti o přibližných číslech a jejich zaokrouhlení získávají žáci na obecné škole. Tyto vědomosti je třeba poněkud rozšiřovat a prohlubovat v páté třídě v hodinách aritmetiky. Ale tím se nesmí práce skončit, nýbrž se v ní musí pokračovat i ve vyšších třídách. Žáci vyšších tříd se prakticky seznamují s otázkami přesnosti trigonometrických a logaritmických tabulek; mimo to žákům páté třídy nelze dáti theoretické odůvodnění jim uváděných method přibližných výpočtů, to se dá provést jenom ve vyšších třídách.

V kurse aritmetiky se žáci setkávají s otázkami, které jim dávají představu o nutnosti zavedení přibližného čísla: statistické údaje, praxe měření.

dělení celých čísel a desetinných zlomků, převod obyčejného zlomku na desetinný a j. Pokaždé v takovém případě má učitel klást žákům otázky: o způsobech zaokrouhlení čísel, o počítání se zaokrouhlenými hodnotami, o přesnosti konečného výsledku, o přesnosti, s jakou je třeba brát daná čísla, aby se dospělo k výsledku žádané přesnosti a pod. Všecky tyto otázky jest se žáky 5. třídy probírati výhradně prakticky na číselných příkladech, při čemž se vybírají nejjednodušší a nejpřístupnější methody. Nejúčelnější jest užívati způsobu „čítání cifer"[14], ačkoli „způsob mezí", vysvětlený níže, může učitel vyložit v práci mimo třídu, zejména se žáky vyšších tříd.

1. Z theorie otázky

Rozdíl mezi přesným číslem a jeho přibližnou hodnotou se nazývá chyba této přibližné hodnoty. Na příklad: číslo 1,092 54 můžeme nahradit jeho přibližnou hodnotou 1,092 nebo 1,093. V 1. případě chyba se rovná $1{,}092\,54 - 1{,}092 = +\,0{,}000\,54$, ve 2. případě $1{,}092\,54 - 1{,}093 = -\,0{,}000\,46$.

Abychom ocenili přesnost přibližné hodnoty, užíváme absolutní velikosti chyby; ježto $0{,}000\,46 < 0{,}000\,54$, jest chyba ve 2. případě menší než v 1. Chybu (absolutní chybu) můžeme vypočíst, jestliže známe přesné číslo. Ježto chyba v obou hořejších případech je menší než 0,001, nazýváme každé z obou čísel 1,092 a 1,093 přibližnou hodnotou čísla 1,092 54 s přesností 0,001. Ježto rozdíl (vzatý absolutně) $0{,}000\,46 < 0{,}0005$, můžeme říci, že 1,093 je přibližná hodnota čísla 1,092 54 s přesností 0,0005; to nemůžeme říci o čísle 1,092, ježto $1{,}092\,54 - 1{,}092 = 0{,}000\,54 > 0{,}0005$.

Poznámka. Přibližná hodnota čísla s přesností a je zároveň přibližnou hodnotou tohoto čísla s přesností $a' > a$.[15] Vskutku, 1,093 je přibližná hodnota čísla 1,092 54 s přesností 0,0005, tedy je to také přibližná hodnota téhož čísla s přesností 0,001 nebo 0,005 atd. Je-li řečeno, že číslo je s přesností 0,000 01 rovno 1,092 54, nevylučuje se tím možnost, že to číslo je přesně rovné 1,092 54. Číslo 1,092 se nazývá přibližnou hodnotou zdola čísla 1,092 54; číslo 1,093 se nazývá přibližnou hodnotou shora čísla 1,092 54.

Příklad. $\frac{10}{7} \doteq 1{,}\dot{4}28\,57\dot{1}$.

$1 < \frac{10}{7} < 2$	Libovolné z čísel 1; 1,4; 1,42; 1,428, ... můžeme
$1{,}4 < \frac{10}{7} < 1{,}5$	brát za přibližnou hodnotu zdola čísla $\frac{10}{7}$; libovolné
$1{,}42 < \frac{10}{7} < 1{,}43$	z čísel 2; 1,5; 1,43 atd. můžeme brát za přibližnou
$1{,}428 < \frac{10}{7} < 1{,}429$	hodnotu shora téhož zlomku.

Čísla 1 a 2 jsou přibližné hodnoty zlomku $\frac{10}{7}$ s přesností 1, ježto absolutní velikost rozdílu

$$\left|\tfrac{10}{7} - 2\right| \text{ neboli } \left|2 - \tfrac{10}{7}\right|;\ \left|1 - \tfrac{10}{7}\right| \text{ neboli } \left|\tfrac{10}{7} - 1\right|$$

[14]) V. Bradis, „Kak nado vyčisljať." Moskva-Leningrad, GJZ 1929.

[15]) Při zaokrouhlení dolní mez je možné jenom zmenšit o horní mez jenom zvětšit, jinými slovy, můžeme rozpětí rozšířit, avšak ne zúžit.

je menší než 1, ale $2 - 1 = 1$.

1,4 a 1,5 jsou přibližné hodnoty zlomku $\frac{10}{7}$ s přesností 0,1, ježto

$$\left|\frac{10}{7} - 1{,}5\right| < 0{,}1 \text{ a } \left|\frac{10}{7} - 1{,}4\right| < 0{,}1; \text{ ale } 1{,}5 - 1{,}4 = 0{,}1 \text{ atd.}$$

Chyba obou přibližných hodnot čísla, zdola i shora, se stejnou přesností, jest absolutně menší než rozdíl těch dvou přibližných hodnot.

3. Přibližné sčítání a odčítání

Vážením nějakého předmětu a bylo zjištěno, že váží více než 63 g a méně než 63,5 g. Druhý předmět b váží více než 77,5 g a méně než 78 g. 1. Kolik váží předměty a a b dohromady? 2. Oč váží předmět b více než předmět a?

Řešení.

$$\begin{array}{rl} 1. & 63 < a < 63{,}5 \\ & 77{,}5 < b < 78 \\ \hline & 140{,}5 < a + b < 141{,}5 \end{array} \text{ (s přesností 1 g),}$$

$$\begin{array}{l} 2.\ 77{,}5 < b < 78 \\ 63 < a < 63{,}5 \\ \hline 14 < b - a < 15 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{l} 2.\ 77{,}5 < b < 78 \\ -63{,}5 < -a < -63 \\ \hline 14 < b - a < 15 \end{array}$$

(s přesností 1 g) (znaky nerovnosti byly nahrazeny znaky opačnými).

Tedy: jestliže daná čísla jsou známa pouze přibližně, můžeme také jejich součet (rozdíl atd.) určit pouze přibližně.

1. Sečteme-li přibližné hodnoty zdola obou sčítanců, dostaneme přibližnou hodnotu zase zdola součtu, a sečteme-li přibližné hodnoty shora sčítanců, dostaneme přibližnou hodnotu zase shora součtu.

2. Odečteme-li od přibližné hodnoty zdola menšence přibližnou hodnotu shora menšitele, dostaneme přibližnou hodnotu zdola rozdílu, odečteme-li od přibližné hodnoty shora menšence přibližnou hodnotu zdola menšitele, dostaneme přibližnou hodnotu shora rozdílu.[16])

4. Přibližné násobení a dělení

1. Určit obsah podlahy chodby, jejíž délka a je větší než 16,4 m a menší než 16,45 m a šířka b je mezi 3,2 m a 3,25 m.

2. Určit poměr délky podlahy k šířce.

Řešení. 1. $16{,}4 \cdot 3{,}2 < a \cdot b < 16{,}45 \cdot 3{,}25$; $52{,}48 < a \cdot b < 53{,}4625$, rozdíl mezi nalezenými přibližnými hodnotami je $53{,}4625 - 52{,}48 = 0{,}9825$, t. j. je o něco menší než 1. Proto není účelné udávat tyto přibližné hodnoty na velký počet cifer, můžeme je zaokrouhlit na jednotky.

[16]) „Matematika v škole“ č. 2, 1941. Prof. P. S. Alexandrov a akad. A. N. Kolmogorov „Svojstva neravenstv i ponjatije o približënnych vyčislenijach“.

Pokyn. Abychom pro součin dostali přibližnou hodnotu zdola, můžeme vzít číslo menší než 52,48 a jako přibližnou hodnotu shora můžeme vzít číslo větší než 53,4625 (ne však číslo menší; viz pozn. pod čarou na str. 282).

Odpověď. $52 < ab < 53,5$ (s přesností 1,5).

2. $$16,4 < a < 16,45$$
$$3,2 < b < 3,25$$
$$\frac{16,4}{3,25} < \frac{a}{b} < \frac{16,45}{3,2}$$

$5,04 < \frac{a}{b} < 5,14$; brát větší počet cifer nemá významu.

Odpověď. $5,0 < \frac{a}{b} < 5,2$ (s přesností 0,2).

Znásobením přibližných hodnot zdola činitelů dostaneme přibližnou hodnotu zdola součinu, a znásobením přibližných hodnot shora činitelů dostaneme přibližnou hodnotu shora součinu.

Jestliže dělenec i dělitel a jejich přibližné hodnoty jsou čísla kladná, pak dělíme-li přibližnou hodnotu zdola dělence přibližnou hodnotou shora dělitele, dostaneme přibližnou hodnotu zdola podílu, a dělíme-li přibližnou hodnotu shora dělence přibližnou hodnotou zdola dělitele, dostaneme přibližnou hodnotu shora podílu.[17])

Uvedené způsoby odhadu přesnosti obdrženého výsledku, jsou jednoduché. třebaže vyžadují určení dvou hodnot, horní a dolní hranice (methoda mezí neboli methoda dvojího odhadu). Jsou jiné způsoby určení přibližného výsledku; žákům se má vyložit jen jediný způsob.

Výše uložený způsob může být probrán mimo třídu, ježto se pro 5. třídu doporučuje způsob „čítání cifer“[18]) a přejdeme k methodice tohoto způsobu.

5. Postup práce

1. Už dříve bylo vyloženo, jak vzniká přibližné číslo při čítání velkého počtu předmětů, jako výsledek měření, která mohou býti prováděna s různými stupni přesnosti, a jako výsledek dělení jak přibližných tak i přesných čísel.

Tamtéž bylo uvedeno, že praktický význam mají především čísla přibližná, že desetinné zlomky a mnohociferná čísla (přesná i přibližná) často **zaokrouhlujeme** (t. j. zanedbáváme poslední cifru nebo několik posledních cifer) a bylo udáno pravidlo zaokrouhlení.

2. Žáci vědí, že jestliže první ze zanedbaných cifer je větší než 5, musíme vzíti opravu, t. j. zvětšit předcházející cifru o 1 (to nečiníme, jestliže ona cifra je menší než 5). Zvětšení poslední podržené cifry o 1 provádíme proto, abychom zmenšili při zaokrouhlování vznikající chybu (absolutní velikost rozdílu mezi

[17]) Můžeme říci, že výkon dělení (a odčítání) se provádí „křížem“.

[18]) V. Bradis, „Teorija i praktika vyčislenij“, kap. IV až VI, Učpedgiz, Moskva 1935.

původním a zaokrouhleným číslem). Je vhodné to ověřit třeba na příkladě čísla 82,37, které při zaokrouhlení s přesností 0,1 dává 82,3 nebo 82,4: při zvětšení poslední podržené cifry 82,4 — 82,37 = 0,03; to je menší než 82,37 — 82,3 = = 0,7.

Číslo 82,34 při zaokrouhlení na 0,1 dá 82,3 a 82,4, ale v tomto případě zvětšení poslední cifry dá větší chybu 82,4 — 82,34 = 0,06 nežli 82,34 — 82,3 = = 0,04, proto není vhodné v tomto případě brát opravu. Jest připomenouti, že je zvláštní případ, když se při zaokrouhlování zanedbává jediná cifra 5. V tomto případě se obyčejně užívá pravidla sudé cifry.

3. Čísla zaokrouhlujeme na 1, 10, 100, ... a jak uvedeno v tabulce na str. 271 na desetiny, setiny atd. Zanedbané cifry celého čísla vždy nahrazujeme nulami. Mluví se o „zaokrouhlení na sta, desítky, setiny, tisíciny" nebo „na dvě desetinná místa, na tři" atd.

4. Již bylo uvedeno, že výraz „desetinná místa" musíme rozlišovat od výrazu „významné cifry". Na příkladech se ukáže, že na příklad číslo 7,036 má 4 významné cifry a 3 desetinná místa, 0,000 123 má 3 významné cifry a 6 desetinných míst. První významnou cifrou rozumíme první od leva cifru různou od nully; druhou významnou cifrou je cifra následující, kterou už může být 0 atd., na příklad v čísle 0,012 03 je první významná cifra 1, druhá 2, třetí 0, čtvrtá 3. Nuly na levo od prvé významné cifry se nepočítají mezi významné cifry. Tak čísla 37; 0,37; 0,037 mají po dvou významných cifrách. Počtem desetinných míst se ta čísla liší (0, 2, 3).

5. Zdůrazníme, že cifry 0 na pravo se užívá: a) k vyznačení toho, že scházejí jednotky určitého řádu a tu je 0 „významná cifra", na příklad ve vztahu 1 kg = 1000 g, číslo 1000 má 4 „významné cifry"; b) 0 se klade při zaokrouhlování místo zanedbaných nebo neznámých cifer; na př. jestliže počet obyvatel 257 693 zaokrouhlíme na sta, dostaneme 257 700. Připisovat nuly na pravo u desetinného zlomku můžeme pouze tehdy, když desetinný zlomek je přesné číslo, na příklad 1 g = 0,001 kg = 0,0010 kg. Nesmíme místo 12,03 m napsat 12,030 m, protože to by znamenalo, že bylo měřeno nejen pouze na cm, nýbrž i na mm.

6. Praktické výpočty se provádějí s přesností na 3 nebo na 4 významné cifry; i daná čísla mívají zřídka větší přesnost; často se vyskytují různé přesnosti daných čísel, proto se při výpočtech čísla zaokrouhlují a ponechané cifry se považují za **přesné**, jestliže absolutní chyba nepřevyšuje jednotku příslušného řádu.[19])

---

[19]) V praxi někdy, jestliže jsou známy přibližné hodnoty zdola i shora, bere se za přibližnou hodnotu jejich aritmetický střed. Budiž naměřeno 4,2 m $<$ $< a <$ 4,3 m; za přibližnou hodnotu se bere:

$$\frac{4,2 + 4,3}{2} = 4,25 \text{ (m)}.$$

Potom chyba bude menší než 4,25 — 4,2 = 0,05 nebo 4,25 — 4,3 = — 0,05; absolutní velikost chyby nebude větší než 0,05. Píšeme: délka je 4,25 $\pm$ 0,05. Chyba přibližného čísla nepřevyšuje jednotku posledního řádu.

Na příklad, při zaokrouhlení čísla 25,3682 na setiny máme 25,37; chyba zaokrouhleného čísla je menší než 0,01 (je rovna 0,0018) a poslední cifra 7 není totožná s poslední cifrou daného přesného čísla.

V praxi přibližných výpočtů jsou dva úkoly: 1. jak provádět výkony, aby chyba výsledku byla co nejmenší, 2. s jakou přesností je nutné brát původní čísla, aby se zaručila žádaná přesnost výsledků počtu. Methoda „čítání cifer", které užívají žáci 5. třídy, odpovídá na první otázku bez podrobného vyšetření chyby.[20]) Aby žáci vnikli do této methody, musíme je všemožně vésti k provádění a k rozboru cvičení, níže naznačených.

6. Sčítání a odčítání přibližných čísel

Vezmeme příklad:

1. Vážením dvou předmětů se došlo k číslům 3,46 kg a 5,2 kg. Kolik váží oba předměty dohromady? Máme sečíst 3,46 + 5,2. V prvém sčítanci známe setiny, ale neznáme tisíciny a další místa; ve druhém sčítanci známe desetiny, ale neznáme setiny a další místa.

Zapíšeme sčítance. Neznámé cifry nahradíme otazníky.

$$\begin{array}{r} 3{,}46? \\ +\ 5{,}2?? \\ \hline 8{,}66. \end{array}$$

Je jasné, že poslední cifra 6 je nespolehlivá. Zanedbáme-li tuto nespolehlivou cifru, dostaneme ≈ 8,7 kg, t. j. poslední cifrou budou jenom desetiny.

Obdobně při odčítání, na př. jestliže v předešlé úloze se ptáme, oč je jeden předmět těžší než druhý, máme:

$$\begin{array}{r} 5{,}2??^{21)} \\ -\ 3{,}46? \\ \hline 1{,}74. \end{array} \quad \text{Odpověď: } \approx 1{,}7.$$

Setiny jsou nespolehlivé. Žáci řeší samostatně dostatečný počet příkladů, z čehož se dojde k závěru, že „při sčítání a odčítání čísel jest ve výsledku podržeti tolik desetinných míst, kolik jich je v nejméně přesném daném čísle, při čemž nejméně přesným rozumíme to číslo, které má nejméně desetinných míst".

[20]) Dříve bylo uvedeno, jak můžeme „způsobem mezí" odpovědět na otázku, s jakou přesností máme právo brát výsledek výpočtů, jsou-li daná čísla přibližná.

[21]) Při odčítání dvou navzájem blízkých přibližných čísel nastává mnohdy zmenšení počtu významných cifer (ne desetinných míst), na příklad:

$$\begin{array}{r} 4{,}568? \\ -\ 4{,}517? \\ \hline 0{,}051. \end{array}$$

Při sčítání a odčítání přibližných čísel s jedním a týmž počtem desetinných míst podržíme ve výsledku tolikéž desetinných míst.

Jestliže sčítáme přesné číslo s přibližným, tu přesné číslo nemá vlivu na přesnost výsledku.

7. Násobení a dělení přibližných čísel

Úloha 1. Najít obsah pozemku, jehož délka je 16,4 m a šířka 23,7 m (obě daná čísla jsou přibližná a mají týž počet významných cifer).

```
 16,4?
 23,7?
------
 1148?
 492?
328?
------
388,68
```

Je jasné, že v součinu poslední dvě cifry 6 a 8 jsou nespolehlivé, ježto vznikly sčítáním známých a neznámých cifer.

Hledaný obsah je 389 m² = 3,89 a. Znásobíme-li dvě přibližná čísla mající po třech platných cifrách, dostaneme součin zase s třemi platnými ciframi.

Úloha 2. Násobenec a násobitel mají nestejný počet významných cifer.

Na příklad:

```
   3,14?
   0,62?
  ------
   ????
  628?
 1884?
 -------
 1,9468
```

Je jasné, že cifry 6 a 8 jsou nespolehlivé. *Odpověď*: $\approx$ 1,95.[22]

Po řešení několika příkladů na násobení můžeme formulovat pravidlo: „Při násobení čísel jest ve výsledku podržet pouze tolik významných cifer, kolik jich má ten činitel, který má méně významných cifer". Násobíme-li přibližná čísla s týmž počtem významných cifer, podržíme i ve výsledku týž počet významných cifer.

Úloha 3. Při násobení přibližného čísla přesným číslem podržíme pouze tolik významných cifer, kolik jich má přibližné číslo.

```
 2,51?
     8
------
20,08?.
```

Odpověď: $\approx$ 20,1 (3 významné cifry).

---

[22]) O podrobnostech viz výše uvedenou knihu: V. BRADIS „Kak nado vyčisljať".

Poznámka. Je užitečné navyknout žáky, aby ověřovali správnost umístění desetinné čárky předběžným odhadem součinu; v daném případě máme přibližně $2{,}5 \times 8 = 20$.

Pravidlo dělení přibližných čísel je stejné jako pravidlo násobení.

Příklad: $2\frac{2}{3} : 1\frac{1}{6}$; $2{,}\dot{6} : 1{,}1\dot{6} \approx 266 : 116 \approx 2{,}29$. (Podíl je zaokrouhlen na tři významné cifry, ježto i daná čísla mají po třech významných cifrách.)

Zkouška: $2\frac{2}{3} : 1\frac{1}{6} = \frac{8 \cdot 6}{3 \cdot 7} = \frac{16}{7} = 2\frac{2}{7} = 2{,}\dot{2}85\,71\dot{4} \approx 2{,}29$.

Při výpočtu přibližného podílu, je-li známo, s jakou přesností se má udat odpověď, provádíme dělení až po jednotky řádu následujícího za žádaným řádem a potom ty jednotky zanedbáme užívajíce pravidla zaokrouhlení.

Příklad: 10 : 7, má se počítat s přesností 0,01.

$10 : 7 = 1{,}428\ldots \approx 1{,}43$. Můžeme také nepočítat poslední cifru, nýbrž ihned podle zbytku rozhodnout, zdali následující cifra je větší nebo menší než 5.

Za účelem zkoušky správnosti udaného pravidla jest organisovat práci celé třídy; někteří žáci provedou výpočet s jedním počtem platných cifer a druhá skupina s jiným počtem platných cifer.

Cvičení.

1. Najít obsah pole, jehož délka měří 85 m a šířka 44 m.

2. Najít délku pole, je-li šířka 112 m a obsah 5400 m².

3.

Délka kružnice	Délka průměru
54 cm	17 cm
16,2 dm	5,1 dm.

Stanovit poměr délky kružnice k délce jejího průměru podle jednoho i podle druhého měření.

8. Další práce

1. Poukáže se na to, že v tom případě, že nalezení výsledku vyžaduje několika výkonů, nebere se při jednotlivých výkonech sčítání a odčítání jen tolik desetinných míst a při jednotlivých výkonech násobení a dělení jen tolik významných cifer, kolik bylo výše uvedeno, nýbrž **o jednu cifru více** (tato reservní cifra zabraňuje hromadění chyb vzniklých zaokrouhlováním při jednotlivých výkonech).

2. Poukáže se na to, že vzhledem k výše stanovenému můžeme si usnadnit výpočet tím, že napřed zaokrouhlíme čísla nejpřesněji daná tak, že ponecháme pro sčítání a odčítání jedno reservní desetinné místo a pro násobení a dělení jednu reservní významnou cifru.

Na příklad, a) máme najít obvod čtyrúhelníka, je-li známo, že jedna strana, nejméně přesně změřená, je rovna 4,6 km (přesně na 100 m) a další strany 2,57 km; 0,324 km; 0,624 km. Je patrné, že je zbytečné počítat přesně na metry: stačí sečíst:

4,6 2,57 0,32 0,62 8,11 ≈ 8,1 km	4,6?? 2,57? 0,324 0,624 8,118 ≈ 8,1.
Odpověď je spolehlivá jen na 1 desetinné místo.	Odpověď je táž.

Příklad: b) Vypočíst váhu železného brousku se čtvercovou podstavou, jsou-li rozměry 3,2 cm; 9,5 cm; 9,5 cm; specifická váha železa 7,8 g.

Řešení. Objem brousku $9{,}5^2 \cdot 3{,}2$; odpověď bude míti dvě platné cifry, tedy

$9{,}5^2 = 90{,}25 \approx 90{,}2$; $90{,}2 \cdot 3{,}2 = 288{,}64 \approx 289$ (cm³);
$289 \cdot 7{,}8 = 2254{,}2$ (g) $\approx 2{,}2$ (kg).

Zaokrouhlováním jednotlivých výsledků práce se usnadnila a konečný výsledek nestal se nepřesnější.[23])

9. Pojem poměrné chyby

K určení délky dvora bylo provedeno troje měření:

	výsledek	prostá chyba	poměrná chyba
1. měření	114,6 m	+ 0,5 m	$\frac{0,5}{114,6} \approx 0,4\%$
2. měření	115,7 m	— 0,6 m	$\frac{0,6}{115,7} \approx 0,5\%$
3. měření	115,0 m	+ 0,1 m	$\frac{0,1}{115,0} \approx 0,1\%$

Aritmetický střed: 115,1 m.

Závěr: nejpečlivěji bylo provedeno třetí měření.

Chyba, kterou jsme počítali v předcházejících cvičeních, nazývá se prostá chyba. V daném případě jsme za prostou chybu jednotlivého měření brali odchylku toho měření od středního výsledku (při několikerém měření se aritmetický průměr brává za přesnou hodnotu; znak „+" ukazuje, že aritmetický průměr převyšuje naměřenou hodnotu).

[23]) Zkrácené způsoby násobení a dělení přibližných čísel mohou být předmětem práce mimo třídu, a jak zkušenost ukazuje, hodí se jen pro starší žáky.

Poměrnou chybou nazýváme poměr prosté chyby k velikosti přibližného čísla. Poměrná chyba se zpravidla vyjadřuje v procentech.

Vysvětlivky. 1. Jestliže přibližná čísla mají všecka týž počet platných cifer, na příklad

516 (přesně na 1); 51 600 (přesně na 100); 5,16 (přesně na 0,01); 0,0516 (přesně na 0,0001), pak poměrná chyba ve všech případech:

$$\frac{1}{516} = \frac{100}{51\,600} = \frac{0{,}01}{5{,}16} = \frac{0{,}0001}{0{,}0516} \approx 0{,}19\% \text{ je táž.}$$

2. Jedna a táž prostá chyba může se jevit značnou nebo nepatrnou podle hodnoty měřené veličiny.

Přesné číslo	Přibližné číslo	Prostá chyba	Poměrná chyba[24])
101	100	1	$\frac{1}{101} \approx 0{,}01 = 1\%$
1 001	1 000	1	$\frac{1}{1001} \approx 0{,}001 = 0{,}1\%$
10 001	10 000	1	$\frac{1}{10001} \approx 0{,}0001 = 0{,}01\%$ atd.

3. *Příklad:* Pečlivým měřením délky (1 sáhu) se našlo 213,4 cm; prostá chyba $\pm$ 0,1 cm.

Za vzdálenost země od slunce se bere 149 500 000 km s přesností $\pm$ 100 000 km.

Počet obyvatel města je 1 712 000; prostá chyba 1000 lidí. Poměrné chyby v těchto případech jsou:

$$\frac{0{,}1}{213{,}4} \approx 0{,}04\%; \quad \frac{100\,000}{149\,500\,000} \approx 0{,}07\%; \quad \frac{1000}{1\,712\,000} \approx 0{,}06\%.$$

Prostá chyba necharakterisuje přesnost výsledku.

10. Výpočty poměrné chyby[25])

Vážením dvou předmětů se nalezlo 3,46 kg a 5,2 kg. Kolik váží oba dohromady? Součet čísel je 8,66. Odpověď: $\approx$ 8,7 kg. Přesnost prvního čísla je

$$\frac{0{,}01}{3{,}46} = \frac{1}{346} \approx 0{,}003 = 0{,}3\% < \tfrac{1}{2}\%.$$

Přesnost druhého čísla je

$$\frac{0{,}1}{5{,}2} \approx 0{,}02 = 2\%.$$

Je jasné, že přesnost výsledku nemůže být větší než 2%, t. j. než přesnost méně přesného sčítance. Odpověď: $\approx$ 8,7 kg. Vskutku:

---

[24]) Přesná hodnota veličiny je často neznámá; za poměrnou chybu se brává poměr prosté chyby k přibližnému číslu.

[25]) Tento odstavec není úplně správný. (Pozn. překl.)

$\frac{0,1}{8,7} \approx 1,2\% < 2\%$ (proto při sčítání a odčítání přibližných čísel, abychom nebrali do počtu zbytečné cifry, je vhodné zaokrouhlit sčítance, při čemž se řídíme nejméně přesným sčítancem).[26])

Obdobné důsledky můžeme uvést i u druhých výkonů s přibližnými čísly.

Cvičení.

1. Budiž 5,73 přibližné číslo. Jaká je jeho přesnost?
2. Najít součet přibližných čísel 7,35 + 0,04 + 12.
3. Najít rozdíl přibližných čísel 4,5 — 2,368.
4. Najít přibližný podíl 7,45 : 3,14.
5. Kolik ha měří obdélníkové pole délky 214,3 m a šířky 136 m?
6. Vypočíst průměrnou velikost kroku, ušla-li se vzdálenost 100 m jednou 128 kroky, podruhé 134 kroky.
7. Vědro obsahuje asi 12,3 l. Kolik litrů vody se vejde do 120 věder?
8. Váha 17 lahví je rovna 91,5 kg. Kolik váží každá láhev?
9. Obvod kola u lokomotivy je 4,5 m. Vlak ujel 35 km za 26 minut. Určit průměrný počet otočení za vteřinu.

---

[26]) Zde mluvíme jen o kladných číslech a o konečném počtu sčítanců.

KAPITOLA XI.

PROCENTA

§ 1. Úvod

Výpočty s procenty vznikly za starých dob ve spojení s vracením vypůjčených peněz, a všecky sbírky úloh z aritmetiky z předrevoluční doby výpočty na procenta rozuměly (a dávaly), s velmi řídkými výjimkami, úlohy obchodního rázu — určit úrok z uložené jistiny nebo určit jistinu, víme-li, oč vzrostla za určitou dobu, nebo nalézt, za jakou dobu dá jistina určitý úrok. I definice „procenta" se udávala podle jeho právě naznačeného užívání: „Procentem se rozumí náhrada, která se dává za užívání peněžní částky vypůjčené na určitou lhůtu" (Ferber, „Arifmetika"); „Jestliže někdo si vypůjčí peníze, platí za to ... tento poplatek udává počet procent" (Malinin a Burenin).

My však víme, že obor užívání procent je širší: i ve vědě i ve veřejném životě i v životní praxi stále se provádějí výpočty s procenty.[1]) Ve mnoha současných sbírkách se uvádějí úlohy z nejrůznějších oborů vědění a druhů lidské činnosti, jež vyžadují počítání s procenty; zde máme vedle obchodních výpočtů všeliké výpočty rázu statistického, týkající se zejména všech otázek našeho socialistického budování ve městě i na vsi atd.; fysika, technika, chemie, meteorologie vyžadují každá ve svém oboru počítání s procenty při řešení rozmanitých otázek; stále se provádějí rozmanité výpočty odchylek, koeficientů účinnosti, ztráty energie, provozních výdajů, amortisace, výpočty procentního složení chemických sloučenin, směsí a slitin.

V učebnicích vydaných před revolucí byla pravidla pro výpočet zisku, ztráty, lhůty atd. vykládána v separátních oddílech pozůstávajících z úloh obchodního rázu, řešených zpravidla jako úlohy „trojčlenného počtu" úměrami, při čemž se vycházelo z toho, že procento je přírůstek nebo úbytek jistiny 100 rub. Ale již v knize Belljustin: „Kak ljudi došli do sovremennoj arifmetiki"[2]) je řečeno:

„V 19. století se rozšířil sám pojem procenta, dík jeho zavedení ve statistice, v různých oborech lidského života a činnosti, vědy a techniky.

[1]) Je zajímavo poznamenat, že již v ruské učebnici P. GUR'EV „Praktičeskaja arifmetika" se praví v poznámce pod čarou (vyd. z r. 1870, str. 302): „Je třeba poznamenat, že slova „procento" se v širším významu užívá nejenom při výpočtech týkajících se oběhu peněz, nýbrž i u všech takových veličin, které mohou za stejné doby stejně vzrůsti (byť i jen přibližně) nebo stejně klesnouti, na př. u pohybu obyvatelstva, u vysoušení a vypařování vína a soli, u vzrůstu plodnosti půdy i jinde."

[2]) Vyd. z r. 1941, str. 176.

Nyní se už zavrhuje stará definice procenta, a místo toho se praví, že procento je prostě setina čísla. Tato definice se obyčejně přijímá ve všech učebnicích."

Avšak přes to, že se vychází z jiné definice procenta, ve školní praxi až do současné doby velmi často úlohy „na procenta" se řeší pomocí úměr; to vede k nemotorným a pracným výpočtům (zejména v úlohách, ve kterých se vyskytuje zvětšená suma, která není úměrná době), vyvolává potíže při sestavování obecných vzorců pro řešení úloh „na procenta" a také při sestavování rovnic pro úlohy s procenty při pozdějším kursu algebry.

V naší střední škole se setkáváme také s touto praxí: učitel, řídě se současnou učebnicí aritmetiky, učí hledat procentovou část čísla a číslo ze známé procentové části jakožto zlomek čísla; ale později, po probrání oddílu „úměry", přeučuje žáky: řeší tytéž úlohy „úměrou". To je zejména rozšířeno při řešení úloh o úroku. V tom tkví jedna z příčin toho, že přes velice důležitý praktický význam procentních výpočtů, přes dostatečný počet probraných úloh a cvičení, žáci naší střední školy velmi často neovládají bezvadně procentní výpočty. Mimo to úlohy na procenta se obyčejně řešily při různých oddílech látky bez konečné systemisace: i v oddílu o obyčejných a desetinných zlomcích, i v oddílu „poměry" i v otázkách metrické geometrie a částečně i jinde. To je pochopitelné. Úloha nalézti procentovou část čísla nebo číslo ze známé procentové části je těsně spjata s úlohou nalézti část (zlomek) čísla nebo číslo ze známé jeho části (ze známé velikosti jeho zlomku), t. j. s probíráním výkonů se zlomky a zejména s probíráním desetinných zlomků — s násobením a dělením několika setinami. Otázku procentního poměru ovšem je vhodné umístit při probírání otázky o poměru čísel atd. Ale později je nutné ve speciálně tomu věnované době zopakovat a shrnout všecky probrané případy procentních výpočtů, uvést v soustavu řešené úlohy a procvičit jako doplnění určitý počet úloh číselných i úloh praktického rázu. K tomu účelu je právě v osnovách aritmetiky oddíl „Procenta".

§ 2. Postup probírání látky

1. V přítomné době je základní učebnicí aritmetiky v naší škole „Arifmetika" A. Kiselëva, kterou přepracoval prof. A. Ja. Chinčin r. 1938. V této učebnici není zvláštní oddíl o procentech. V předmluvě prof. Chinčin praví: „U žáků se tvořila představa, jakoby procentní výpočty znamenaly něco podstatně nového při srovnávání s obyčejnými výkony s lomenými čísly, a tato představa ztěžovala užití už získaných návyků na úlohy, které byly pouze oděny novou formou, ale v podstatě neobsahovaly nic nového.

Při vyučování o procentech paralelně s vyučováním o obyčejných a desetinných zlomcích žáci postupně průběhem dlouhé doby se seznamují s procentními výpočty,[3]) učí se rozumět obtížným pro ně otázkám určení části čísla a pod., přesvědčují se o praktickém významu získaných návyků. Pro ty školy, kde se procentní výpočty prováděly paralelně s obyčejnými a desetinnými zlomky, kapitola o procentech naší „Methodiky“ je z části opakováním; pro jiné školy je to nový materiál. Ale ať již učitel jakkoli umístí procentní výpočty, methodický rozbor příslušných otázek je v podstatě stále týž.

Co je to procento?

Víme již, že některé díly jednotky se velmi často vyskytují, na př. poloviny nebo čtvrtiny. Velmi obvyklé (na příklad při evidenci výroby a při peněžních výpočtech) jsou setiny a proto byl zaveden pro setiny zvláštní název. $\frac{1}{100}$ nazýváme jedním procentem, $\frac{3}{100} = 3\%$, $0{,}05 = 5\%$ a pod. Často se užívá také tisícin; $\frac{1}{1000}$ se nazývá promile.[4]) Slovo procento pochází z latinského „pro centum“; ve středověku se říkalo „pro cento“ podle italského „per cento“.[5]) Můžeme soudit, že znak % původně představuje zkratku cto (místo „cento“); v psaných dokladech se znakem „%“ se setkáváme často, v tištěných zřídka, a teprve v 19. století znak % se stal symbolem pro $\frac{1}{100}$.

Uvedeme úryvek názoru prof. A. Ja. Chinčina:[6])

„Pramenem nejasností jsou samy názvy „desetinné zlomky“ a „procenta“, které vzbuzují dojem, jakoby zde byla řeč o jakémsi novém druhu lomených čísel. Ve skutečnosti arci běží o tytéž zlomky, které žáci už podrobně znají, a jedná se jenom o novou formu zapisování zlomků. Bylo by mnohem lepší a značně by to přispělo ke správnému chápání věci, kdyby příslušné kapitoly měly názvy „desetinné zapisování zlomků“ a „procentní zapisování zlomků“, ježto 0,2 od $\frac{1}{5}$, 0,5 od $\frac{1}{2}$, 45% od $\frac{9}{20}$ ničím jiným se neliší nežli způsobem psaní, a čím dříve a čím trvaleji si žáci tuto skutečnost osvojí, tím snáze překonají

[3]) V tomto případě může učitel bez potíže brát příslušná cvičení v kap. VI stabilní učebnice.

[4]) $\frac{1}{100}$ metru, $\frac{1}{100}$ ruble, $\frac{1}{1000}$ kg, $\frac{1}{1000}$ tuny a j.

[5]) TROPFKE, „Geschichte der Elementarmathematik“.

[6]) A. JA. CHINČIN, „Osnovnyje ponjatija matematiki v srednej škole“. Biblioteka učitelja. Učpedgiz 1940.

potíže spojené s desetinnými a procentními výpočty.“… „Žák se může ptát, k čemu je třeba ještě toho nového tvaru zápisu zlomku, jsou-li tu už dva tvary, obyčejný a desetinný. Staré kursy aritmetiky na to odpovídaly poukazem na to, že tato forma zápisu „se ujala v peněžních výpočtech“… „V sovětské praxi procentní výpočty doznaly tak širokého použití, že vzhledem k němu ona odpověď se jeví naprosto zastaralou.“… „Chceme-li hbitě od oka srovnat podle velikosti dva zlomky, na příklad $\frac{8}{23}$ a $\frac{13}{35}$, je tomu na překážku ta okolnost, že jsou vyjádřeny v nestejných dílech (mají různé jmenovatele). K elementárním praktickým potřebám je proto účelné užívat pokud možno (byť i jen přibližného) vyjádření lomených čísel ve stále týchž dílech, t. j. ve tvaru zlomků s jediným společným jmenovatelem. Které číslo se nejlépe hodí za takového universálního jmenovatele? Naše desítková číselná soustava a naše metrická soustava měr jasně naznačují, že za takové číslo se hodí vzít buďto 10 nebo 100 nebo 1000 atd.“… „Jak ukazuje praxe, zejména volba čísla 100 za universálního jmenovatele nejlépe vyhovuje všem potřebám elementárních výpočtů.“… „Čitateli jsou při tom zpravidla poměrně malá čísla, s kterými se lehko pracuje.“… „Někdy býváme nuceni v čitateli připojovat jedno nebo několik desetinných míst (86,3%), což vlastně znamená přechod k promilím atd.“

3. Předběžná cvičení

Přistupujíce při vyučování k látce o procentech, musíme především nacvičit vyjadřování desetinného zlomku (později také obyčejného) v procentech a obráceně zapisování procent ve tvaru zlomku. Proto:

1. Napřed řešíme několik cvičení na zápis celého (nejvýš dvojciferného) počtu procent ve tvaru zlomku a na osvojení pojmu procenta, na příklad:

$$7\% = \frac{7}{100} = 0{,}07; \quad 23\% = \frac{23}{100} = 0{,}23 \text{ a pod.}$$

2. Řešíme dostatečný počet cvičení na vyjádření celého čísla a desetinného zlomku procenty vybírajíce čísla tak, aby nejprve vycházel jednociferný počet procent, potom dvojciferný, potom desetinný zlomek procenta, smíšené číslo procent atd. Je vhodné postupně zapisovat chrakteristické případy do malé tabulky; bude potom lehčí provádění obtížnějšího obráceného procesu: vyjadřování procent ve tvaru desetinného zlomku.

$$\begin{aligned} 0{,}01 &= 1\% \text{ a obráceně } 1\% = 0{,}01; \\ 0{,}07 &= 7\% \text{ a obráceně } 7\% = 0{,}07; \\ 0{,}25 &= 25\% \text{ a obráceně } 25\% = 0{,}25; \end{aligned}$$

$$0{,}1 = 0{,}10 = 10\% \text{ a obráceně } 10\% = 0{,}1;$$
$$0{,}3 = 0{,}30 = 30\% \text{ a obráceně } 30\% = 0{,}3;$$
$$0{,}016 = 1{,}6\% \text{ a obráceně } 1{,}6\% = 0{,}016.$$

Potom přejdeme k vyjádření celého čísla v procentech. Celé číslo rovné $1 = \frac{100}{100}$ vyjadřuje 100%; potom si žáci snadno vyjasní, že číslo $2 = \frac{200}{100}$ vyjadřuje 200%; 3,7 vyjadřuje 370%; 2,56 vyjadřuje 256%.

Dříve bylo už řečeno, že to, jak žáci pochopí podstatu úlohy a jejího řešení, závisí na tom, jak se úloha přečte, nač učitel při své mluvě položí důraz. I při začátku probírání procent i při celé další práci učitel má dbát na rozmanitost svého způsobu řeči, má si všímat, jak žáci čtou výše uvedené zápisy: 0,6 tvoří 60 setin, t. j. 60%; je rovné 60%, „dává" 60°; v čísle 3,5% jsou 3 setiny a 5 tisícin; $3{,}5\% = 0{,}035$ atd.

Aby bylo žákům jasnější, že $0{,}5625 = 56{,}25\%$, nebo že $0{,}3942 = 39{,}42\%$ nebo $0{,}0586 = 5{,}86\%$ (a obráceně), navykáme žáky, aby nejprve přečtli počet setin čísla (v udaných případech 56; 39; 5) a potom udávali naráz konečnou správnou odpověď, t. j. aby správně oddělili celý počet procent desetinnou čárkou od desetin a setin procenta. Někdy učí žáky, aby mechanicky posunovali desetinnou čárku o dvě místa napravo, t. j. aby násobili stem při zápise desetinného zlomku v procentech. Při obráceném procesu se posune desetinná čárka o dvě místa nalevo, t. j. provede se dělení stem. Taková pravidla můžeme dávat teprve později, až je otázka už pečlivě vysvětlena.

3. Vyjádření obyčejného zlomku procenty má veliký význam pro výpočet procentního poměru čísel. Za účelem nezbytného výcviku řešíme dostatečný počet cvičení nejprve v tom případě, že obyčejný zlomek je vyjádřen konečným desetinným z omkem, a později v ostatních případech.

Řešíme tyto úlohy tak, že obyčejný zlomek převedeme na desetinný a potom podle počtu setin soudíme na počet procent:

$$\tfrac{3}{5} = 0{,}6 = 0{,}60 = 60\%;\ \tfrac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375 = 37{,}5\%;$$
$$\tfrac{9}{16} = 9 : 16 = 0{,}5625 = 56{,}25\%,$$

$\frac{4}{9} = 4 : 9 = 0{,}44 \ldots \approx 44\%$ přesně na 1% atd. Na těchto cvičeních se znovu opakuje dělení s předepsanou přesností.

4. Nakonec, poslední úloha — vyjádření procent ve tvaru obyčejného zlomku se vyskytuje v praxi jenom v nejjednodušších případech, které se probírají zároveň s úlohou vyjádření procent ve tvaru desetinného zlomku

$$(23\% = \tfrac{23}{100};\ 4\% = \tfrac{4}{100} = \tfrac{1}{25} \text{ a pod.}).$$

Ale po skončení seznamování s matematickým pojmem procenta můžeme řešit obtížnější cvičení: vyjádřit ve tvaru obyčejného zlomku 4,2%; $3\frac{1}{2}$%; $4\frac{2}{3}$% atd.

$$3\tfrac{1}{2}\% = \frac{3\frac{1}{2}}{100} = \frac{7}{200} \text{ nebo na ráz}$$

$$4{,}2\% = \tfrac{4{,}2}{100} = \tfrac{42}{1000} = \tfrac{21}{500};\quad 4\tfrac{2}{3}\% = \tfrac{14}{300} = \tfrac{7}{150} \text{ atd.}$$

4. Ústní cvičení

1. Vyjádřit v procentech 0,01; 10,07; 0,7; 0,1; 0,9; 1,15; 1,2; 3,4; 0,142; 0,056; 2,14 atd.

2. Vyjádřit ve tvaru obyčejného a potom ve tvaru desetinného zlomku 7%, 17%, 5%, 25%, 10%, 20%, 50% atd.

3. Vyjádřit v procentech: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{3}$ a pod.

Formulaci otázek dávaných žákům musíme, jako při každé látce, různě obměňovat:

a) „vyjádřit v procentech“, „kolik procent dává?“, „kolika procentům se rovná?“

b) „vyjádřit ve tvaru zlomku“, „kterému zlomku se rovná?“, „jakou část jednotky nebo čísla představuje?“

4. Výsledky některých ústních cvičení je třeba zapsat za účelem zapamatování (sestavit tabulku), na příklad:

$\frac{1}{2} = 50\%$	$\frac{1}{10} = 10\%$
$\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\%$	$\frac{1}{20} = 5\%$
$\frac{1}{4} = 25\%$	$\frac{1}{25} = 4\%$
$\frac{1}{5} = 20\%$	$\frac{1}{50} = 2\%$.

Potom žáci snadno přejdou k obtížnějším ústním cvičením:

$$\tfrac{3}{5} \text{ dávají } 20\% \cdot 3 = 60\%;\ \tfrac{3}{4} = 75\%;\ \tfrac{2}{3} = 66\tfrac{2}{3}\%;$$

$$\tfrac{3}{20} = 5\% \cdot 3 = 15\%;\ \tfrac{4}{25} = 4\% \cdot 4 = 16\% \text{ atd.}$$

5. Jakožto předběžnou práci musíme provésti také opakování dvou úloh — určení zlomku (části) daného čísla a určení čísla z dané velikosti jeho zlomku (části).

Je vhodné nejen řešit několik číselných i slovních úloh, nýbrž také žákům připomenout proces, kterým přešli od řešení uvedených otázek dvěma výkony k řešení týchž úloh jedním výkonem násobení (dělení). Toto opakování přispěje k utvrzení podstaty obtížného pojmu násobení a dělení zlomkem.

Po probrání vyjmenovaných otázek ukládáme za domácí cvičení podobné příklady; je žádoucí ukládat je v systematickém pořádku, jak bylo uvedeno výše, a jako doplněk další 3 až 4 libovolné příklady.

6. Přecházeje k probírání slovních úloh na procenta, učitel může vyzvat žáky, aby provedli a přinesli příklady úloh na procenta, jaké řešili dříve. Žáci většinou s radostí vyhoví této výzvě a dokonce sami si vymýšlejí vlastní úlohy. V naší praxi byly případy, že žáci na následující hodinu na zvláštních listech přinesli velké množství rozmanitých úloh na procentní výpočty, které svým obsahem tvořily dobrý materiál pro školu projevující zájmy žáků určitého věku, určité třídy. Byly úlohy, v jejichž obsahu se projevoval společenský život školy, pionýrská práce, různé stránky našeho socialistického budování, život kolchozu, továrny; byly úlohy týkající se organisace domácnosti žákovy, zdravotnictví, knihovnictví atd.; byly úlohy fantastického rázu ukazující vliv dobrodružných povídek na určitého žáka; na druhé straně vedle úloh skutečně uvědoměle a samostatně zpracovaných byly také i pouhé kopie příkladů probraných. Prací učitelovou je užití materiálu dodaného žáky: 1. při systemisaci tří základních úloh o procentech, které se budou probírat, 2. při výběru cvičení na procentní výpočty, když žák s větším zájmem řeší jím samým sestavenou úlohu, 3. pro sbírání materiálu na samostatně žáky sestavené úlohy, které se ovšem nikterak ne mí přehánět. Je třeba poznamenat, že mezi samostatně sestavenými úlohami se mnohdy vyskytují úlohy naprosto neodpovídající skutečnosti; na negativní stránky těchto úloh je třeba žáky upozornit. Tak na příklad žák sestavil úlohu na rozpočet příjmu a vydání dělníka, podle které 70% mzdy připadne na nájemné za pokoj; nebo jiný žák sestavil úlohu o váze různých částí aeroplánu a ukázalo se, že motor váží

méně než vrtule atd. Učitel podle možnosti nemá odmítat takovou úlohu, je-li možné ji upravit tak, aby odpovídala skutečnosti.

§ 3. Určení procentové části čísla

Učitel především připomene žákům několik jimi řešených cvičení a potom vysvětlí, že ačkoli to jsou vesměs úlohy „na procenta“, přece jen to nejsou úlohy jednoho určitého typu, které by se řešily všecky týmž výkonem. Učitel vymezí jako úkol dané hodiny řešení prvé úlohy na procenta, totiž úlohy určení části vyjádřené v procentech. Z kursu obecné školy žáci většinou si nejlépe pamatují řešení této úlohy dvěma výkony: methodou přechodu přes jednotku.

Ústní cvičení

1. Určiti 5% ze 1300; 7% ze 1400; $8\frac{1}{2}$% ze 1400 a pod. Taková cvičení se mají ve škole řešit hned na počátku školního roku při opakování výkonů s celými čísly. Není vhodné (ale v praxi se to pozoruje) při ústním počítání napodobit proces písemného výpočtu, tedy násobit zpaměti 1300 . 0,05.

2. Ústní cvičení v obecném případě, na př. vypočíst 2%, 10%, 15%, 9%, 40%, 60% atd. čísla 1250 atd. Žáci mají užívat při výpočtech všech jim známých method ústního výpočtu, na příklad

$$10\% \text{ z } 1250 \text{ dává } 12{,}5 \cdot 10 = 125;$$
$$15\% \text{ z } 1250 \text{ dává } 125 + 62\tfrac{1}{2} = 187\tfrac{1}{2};$$
$$9\% \text{ z } 1250 \text{ dává } 125 - 12{,}5 = 112{,}5;$$
$$40\% \text{ z } 1250 \text{ dává } 125 \cdot 4 = 500 \text{ nebo}$$
$$40\% = \tfrac{2}{5}, \text{ tedy } 40\% \text{ z } 1250 \text{ dává } 250 \cdot 2 = 500$$

(není účelné vycházet od 1% a počítat 12,5 . 40 nebo 1250 . 0,4 zpaměti).

Písemná cvičení

Zápis pomocí obyčejných zlomků: 1. Najít 3% ze 275 rub. (dvěma výkony).

1% ze 275 rub. dává $\frac{275}{100}$ rub.,

3% ze 275 rub. dává $\frac{275}{100} \cdot 3$ neboli $\frac{\overset{11}{\cancel{275}} \cdot 3}{\underset{4}{\cancel{100}}} = \frac{33}{4} = 8\frac{1}{4}$; 8 rub. 25 kop.

2. Najít 3% ze 275 rub. (jedním výkonem).

$$3\% = \frac{3}{100};\ \frac{3}{100} \text{ ze } 275 \text{ dává } 275 \cdot \frac{3}{100} = 8\tfrac{1}{4}.$$

Zápis pomocí desetinných zlomků.

3. Najít 3% ze 275 rub. (dvěma výkony).

1% ze 275 rub. dává 2,75 rub.

3% ze 275 rub. dává 2,75 . 3 = 8,25; 8 rub. 25 kop.

4. Najít 3% ze 275 rub. (jedním výkonem).

$$3\% = 0{,}03.$$

3% ze 275 neboli 0,03 ze 275 dává 275 . 0,03 = 8,25.

V obecném tvaru:

Najít $p\%$ čísla a.

Najít $\frac{p}{100}$ čísla a znamená

$$a \cdot \frac{p}{100} = \frac{ap}{100}.$$

Na střední škole řešení rozbírané úlohy na procenta, tedy určení procentové části daného čísla jest prováděti jedním výkonem s obyčejnými nebo desetinnými zlomky (způsoby 2 a 4); je třeba číst různými způsoby zapisované výrazy: „3% ze 275 dávají (obnášejí. rovnají se) 0,03 ze 275“ a pod. Po řešení řady slovních i číselných úloh dojde se k závěru o tom, jak se řeší to, čemu budeme říkati prvá úloha o procentech.

Zkušenost ukazuje, že méně připraveným žákům (prospěchově slabším) činí potíže uvědomělé řešení naší úlohy naráz jedním výkonem, proto můžeme dovolit, aby někteří žáci přechodně užívali řešení ve tvaru uvedeném výše pod čísly 1 a 3, t. j. dvěma výkony.

Zejména je třeba věnovat pozornost případu určení procentové části, jestliže počet procent je lomený, na příklad 0,04% čísla. Žák musí řešit i tuto úlohu, jako obyčejně, podle vyvozeného pravidla nezávisle na číselných údajích; avšak jestliže vůbec se mají žáci stále vésti k tomu, aby odhadem zkoumali, zda je možné, aby odpověď, která jim vyjde, byla správná, tu v daném případě je to zejména důležité; žák když dostal odpověď na danou otázku, má ji odhadnout a přesvědčit se, že obdržená odpověď je menší než 1% nebo lépe menší než 0,1%. Na příklad počítali jsme 0,04% ze 375 rub. a vyšlo nám 0,15 rub. = = 15 kop.; 15 kop. dává méně než 1% ze 375 rub. (méně než 3 rub. 75 kop.); 15 kop. je také méně než 0,1% ze 375 rub., což obnáší 37,5 kop.

Po probrání typické úlohy se přejde k řešení různých aritmetických úloh, vyžadujících výpočet procentové části čísla; zejména se probírá řešení úloh, ve kterých se žádá určit číslo, které je o několik % větší nebo menší než dané číslo; při řešení úloh na rozklad celku na několik částí (směsi, sloučeniny, rozdělení úředníků, dělníků, žáků podle pohlaví, věku a pod.) požaduje se závazně kontrola správnosti řešení úlohy (sečtením všech částí).

Je účelné mezi řešené úlohy zařadit také úlohy o úroku (viz § 6, str. 309, úlohy Ia, b, IIa, b) v tom případě, že se ptáme buďto po úroku nebo po době. Není důvodu těmto úlohám věnovat zvláštní oddíl.[7])

Má se žákům 5. třídy udávat pomocí písmen obecné řešení úloh na procenta (jak jsme to učinili výše při prvé úloze na procenta)? My považujeme za předčasné dávat obecná řešení všech úloh na procenta (řešení ostatních úloh bude uvedeno níže), nicméně v lepších třídách, jestliže to čas dovolí, může být udána formule $\frac{ap}{100}$ pro procentovou část čísla jako obecný tvar všech provedených číselných úloh. Jestliže však se zavede řešení pomocí písmen, je nezbytné ověřit dosazením správnost odpovědi při řešení číselných úloh. V tom případě je užitečné a snadné provést několik cvičení na určení číselné hodnoty výrazu $\frac{ap}{100}$ při různých daných hodnotách a a p (celých i lomených); to bude přípravou na příští práci s obecnými výrazy v VI. třídě. Ale zkoušet na známku tuto část práce je předčasné.

[7]) Procentní výpočty (zejména druhá a třetí níže probíraná úloha) se v podstatě převádějí na rovnici (zavede se x) a proto úlohy na procenta musí se řešit také v kurse algebry při sestavování rovnic.

§ 4. Určení čísla z dané procentové části

Jako následující úloha na procenta obyčejně se probírá úloha určení celku podle známé velikosti určité procentové části (počet procent může býti menší i větší než 100%).

Zde mohou býti 3 případy: 1. když je v podmínce úlohy dána určitá procentová část čísla, 2. a 3. když je známo číslo, které se dostane, jestliže se k danému číslu přičte (nebo se od něho odečte) známý počet procent čísla. Každou z těchto úloh jest probírati zvlášť, a musí být zřetelně vysvětleno řešení každé z nich.

Ústní cvičení

1. Je známo, že 5% čísla tvoří 80 jednotek. Najít to číslo.

Žák může řešit úlohu přechodem k jednotce dvěma výkony:

80 : 5 = 16; 16 jednotek tvoří 1% hledaného čísla, tedy hledané číslo je 1600.

$5\% = \frac{1}{20}$; dvacetina neznámého čísla je 80, tedy celé číslo je 1600.

2. Najít číslo, jestliže 4,5% z něho dává 9 nebo 14% z něho dává 7. Při ústním řešení je nejlépe řešit úlohu tak, že se najde nejprve 1% čísla a potom celé číslo.[8]

3. Určit číslo, jestliže $0,\dot{3}\%$ z něho dává 7. V tomto případě se jak pro ústní tak pro písemné řešení užije jediné methody:

$0,\dot{3} = \frac{1}{3}$; $(\frac{1}{3})\% = \frac{1}{300}$; $\frac{1}{300}$ z daného čísla dává 7; celkové číslo se rovná 2100.

4. Užitečné je řešit ústně a později též písemně cvičení, ve kterých se objevují současně obě výše uvedené úlohy na procenta, na příklad najít číslo, je-li známo, že 40% z něho dává tolik jako $4\frac{1}{2}\%$ ze 200 a pod.

Písemná cvičení

1. Uvedeme možné způsoby zápisu řešení úlohy v tom případě, že se hledá číslo, známe-li určitou jeho procentovou část.

[8]) Někdy se bere jako druhá úloha určení procentního poměru čísel, ježto má velký praktický význam, a potom úloha určení čísla z velikosti určité procentové části se bere jako třetí, ježto působí největší potíže.

Úloha 1. Kolik nepřátelských tanků se zúčastnilo boje, jestliže naše protitankové dělostřelectvo zničilo 35% všech zúčastněných tanků, což činilo 28 tanků?

Pomocí obyčejných zlomků

1. Dvěma výkony:

$$\tfrac{35}{100}x = 28;$$

$$\tfrac{1}{100}x = \tfrac{28}{35};$$

$$x = \frac{28}{35} \,.\, 100 = \frac{28 \,.\, 100}{35} = 80 \text{ (tanků)}.$$

2. Jedním výkonem:

$$\tfrac{35}{100}x = 28; \quad \tfrac{7}{20}x = 28;$$

$$x = 28 : \tfrac{7}{20} = \tfrac{28 \cdot 20}{7} = 80.$$

Zkouška: 35% z 80 dává

$$80 \,.\, \frac{35}{100} = \frac{80 \,.\, 7}{20} = 28.$$

Pomocí desetinných zlomků

3.
$$0{,}35x = 28;$$
$$x = 28 : 0{,}35;$$
$$x = 2800 : 35 = 80.\text{[9]}$$

V praxi se nejčastěji užívá třetího způsobu řešení probírané úlohy: pomocí desetinných zlomků; jest poznamenati, že v daném případě úsudek i zápis jsou jednoduché při řešení pomocí obyčejných zlomků i je třeba to provésti ve třídě; taková práce slouží jako základ pro sestavení obecného vzorce řešení úloh tohoto typu.

Probírat se žáky níže uvedené obecné řešení nedoporučujeme. Obecné řešení: je známo, že číslo k tvoří p% neznámého čísla. Určiti neznámé číslo x.

1) *Dvěma výkony* (neboli přechodem k jednotce[10])

$$\frac{p}{100}\,x = k;$$

$$\frac{1}{100}\,x = \frac{k}{p};$$

$$x = \frac{k \,.\, 100}{p}.$$

2) *Jedním výkonem* (dělením)

$$\frac{p}{100}\,x = k;$$

$$x = k : \frac{p}{100};$$

$$x = \frac{k \,.\, 100}{p}.$$

[9]) Jestliže 80 a 28 jsou známá čísla a 35 je číslo hledané, má daná úloha životný konkretní obsah.

[10]) Způsob přechodu k jednotce je uveden v učebnici A. Kiselëva, „Arifmetika“, vyd. z r. 1938, str. 102.

V praxi při řešení druhé úlohy na procenta přechodem k jednotce někdy žáku se nepodaří úlohu dopočítat do konce, protože se mu zdá nemožným výsledek prvního výkonu. Na příklad, budiž známo, že 0,4% čísla dává 0,26. Má se najít to číslo. Žák usuzuje takto: hledáme, čemu se rovná 1% čísla. Vypočteme 0,26 : 0,4; v podmínce úlohy máme známý díl procenta, žák najde správnou odpověď: číslo, větší než 0,26, ale domnívaje se, že to je nemožné, začne se pokoušet daná čísla násobit atd. a nedokáže dokončit úlohu.

Obecná methoda: $0{,}4\% = 0{,}004$; $x = 0{,}26 : 0{,}004$,

$0{,}004\,x = 0{,}26$; $x = 260 : 4 = 65$.

2. Přejděme k výše zmíněnému 2. a 3. případu úloh, kde tedy je známo číslo, které se dostane, jestliže k danému číslu přičteme nebo od něho odečteme určitou jeho procentovou část. Zde musíme uvésti, že nejasný rozbor této otázky a nedoceňování těchto prakticky velmi významných úloh jsou příčinami, proč žáci si s nimi nevědí rady.

Budiž dána *úloha 1.* „Kolika kilogramů mouky je třeba na 76 kg chleba, jestliže výpek činí 45%?

Úsudek: $100\% + 45\% = 145\% \doteq 1{,}45$.

$$1{,}45x = 76 \text{ kg, z čehož}$$

$$x = 76 : 1{,}45.$$

Odpověď: $52\frac{1}{2}$ kg.

(Později budou žáci řešit tuto úlohu rovnicí $x + 0{,}45x = 76$; $1{,}45x = 76$.)

Úloha 2. „Za knihu bylo zaplaceno 1 rubl 70 kop. se slevou 15%. Jaká je krámská cena knihy?"

Řešení: $100\% - 15\% = 85\% = 0{,}85$;

$$0{,}85x = 1{,}7;$$

$$x = 1{,}7 : 0{,}85 = 2 \text{ (rub.)}.$$

Výběr úloh je velmi veliký a různotvárný. Zde je také užitečné řešit úlohy o úroku v případě neznámé jistiny (§ 6, str. 310, IV a, b).

§ 5. Určení procentního poměru dvou čísel

Ústní cvičení

Když učitel přistoupí k úloze nalezení procentního poměru dvou čísel, připomene především žákům, jak určovali poměr dvou čísel.

Jako vzor může se řešit několik nejjednodušších úloh. Potom se dá za úlohu určit procentní poměr dvou čísel buďto ze sbírky nebo z těch úloh, které žáci sami sestavili. Vybere se úloha s nejjednoduššími číselnými údaji. Na příklad jestliže se v úloze žádá najít procentní poměr čísla 45 k číslu 180, musí žák zpaměti určit, že 45 je $\frac{1}{4}$ ze 180, takže 45 tvoří 25% ze 180. Číselné údaje v úlohách se volí tak, aby obtížnost postupně stoupala. Také zde, jak bylo už řečeno výše, jest dbáti na různotvárnost formulací: „Jakou část jednoho čísla představuje druhé číslo?" „V jakém poměru je to číslo k onomu?" „Kolik procent jednoho čísla činí druhé číslo?" „Poměr dvou čísel dává, je roven, činí" atd.

Dává se dostatečný počet cvičení prováděných zpaměti a potom zapisovaných, na příklad:

$$\frac{45}{180} = \frac{1}{4} = 25\%; \quad \frac{4}{100} = 0{,}04 = 4\%; \quad \frac{34}{68} = 0{,}5 = 0{,}50 = 50\%$$

a pod.

Je vhodné volit u některých úloh číselné údaje tak, aby se žádal procentní poměr většího čísla k menšímu, na příklad: 390 ku 130;

$$\frac{390}{130} = 3 = 3{,}00 = 300\%.$$

Písemná cvičení

Potom se dávají číselné příklady k písemnému výpočtu, na příklad žádá se určit, kolik procent ze 143 činí 85 nebo kolik procent ze 29 činí 76.

Zápis:

```
 85 : 143 ≐ 0,594
850
715            85/143 ≈ 0,594 = 59,4%
1350              (přesně na 0,1%)
1287
  630
  572
   58
```

$\frac{85}{143} \approx 0{,}594 = 59{,}4\%$ (přesně na 0,1%)

```
76 : 29 ≐ 2,62
58
180
 60
```

$\frac{76}{29} \approx 2{,}62 = 262\%$ (přesně na 1%).

Někdy žáci, když v prvním příkladě dojdou k odpovědi 0,59 nebo ve druhém k odpovědi 2,62, řeknou: „Odpověď zvětšíme stokrát a dostaneme počet procent". Podobné vyjadřování se nemá připouštět: žák musí chápat, že jestliže mu vyšlo nějaké číslo, nemá práva brát místo něho číslo stokrát větší. Musíme učit žáka, aby říkal: „Dostali jsme 59 setin (nebo 262 setiny); to znamená 59% (nebo 262%)" a pod.

Poznámky. 1. Z výkladu žáci si musí osvojit, že najít procentní poměr dvou čísel znamená najít jejich poměr a vyjádřit výsledek v setinách neboli v procentech. Učitel na příkladech poukáže na to, v jak velké míře se užívá procentního srovnávání čísel denně na stránkách našeho tisku, v životě školy a pod. Nejprve se řeší typické úlohy, potom složitější úlohy se dvěma až čtyřmi výkony. Zde také řešíme úlohy na určení úrokové míry z dané jistiny, úroku a doby (§ 6, str. 310, úlohy IIIa, b).

2. Zvláštní potíže působí žákům úloha, ve které se ptáme, o kolik procent se zvětšilo nebo zmenšilo číslo. Na příklad: „Pro dílnu byla předepsána norma zhotovit 130 šroubů za určitou dobu; zhotoveno bylo za tu dobu 140 šroubů. O kolik procent byl předepsaný úkol překročen?" Žáci mívají ve zvyku říkat, že za účelem určení poměru jednoho čísla k druhému dělíme „menší číslo větším". Tomu se musí věnovat co nejvážnější pozornost: žák musí pochopit, že dělíme tím číslem, vzhledem k němuž vyjadřujeme poměr.

Vrátíme se k naší úloze. Žák ji může řešit dvěma způsoby:

1. $\frac{140}{130} \approx 1{,}077 = 107{,}7\%$ (přesně na 0,1 %)

$$\begin{array}{l} \underline{14} : 13 = 1{,}077 \ldots \approx 107{,}7\%. \\ \;\;\underline{10} \\ \;\;\underline{100} \\ \;\;\;\;90 \end{array}$$

Na otázku v úloze odpovíme: 107,7% činí skutečná výroba vzhledem k normě; plán je překročen o 7,7% (plán se rovná 1, t. j. 100%).

2. Žák může stanovit nejprve, o kolik předmětů byl překročen plán (o 10 šroubů) a potom, kolik % činí toto překročení plánu vzhledem k normě:

$$\frac{10}{130} = \frac{1}{13} \approx 0{,}077 = 7{,}7\%.$$

Odpověď máme na ráz: norma je překročena o 7,7%.

Při posledním výkonu také jsou žáci často na rozpacích; říkají, že nevědí, „čím se má dělit".

Opakujeme, že, aby nedocházelo k podobným odpovědím nebo chybám, učitel musí od začátku stále trvat na přesných formulacích: v daném případě musíme dělit číslem 130 (a ne 140), protože hledáme přírůstek (u jiných úloh úbytek) vzhledem k normě (norma: 130 šroubů).

Obě uvedené methody řešení jsou užitečné a je nejlépe, jestliže žáci si uvědomují, že tato úloha se dá řešit dvěma způsoby.

3. Jak bylo výše uvedeno, žák má při řešení úloh kontrolovat možnost. reálnost docílené odpovědi; na příklad, vyšla odpověď převyšující 100% – je to možné podle smyslu úlohy? Vyšla odpověď menší než 50% (polovina), než 25% (čtvrtina). Musíme odhadnout, zda taková odpověď odpovídá podmínkám úlohy. Na příklad budiž dána úloha: „V továrně je 1500 dělníků; z nich je 60% žen, 35% mužů a zbytek je mládež. Kolik mužů, žen a mladistvých pracuje v továrně?“

Zápis:

žen	60%	900 lidí
mužů	35%	525 lidí
mladistvých ..	5%	75 lidí
	100%.	1500 lidí

Někdy žáci najdou poslední odpověď, t. j. počet mladistvých, odčítáním 1500 — (900 + 525). Tu se při zkoušce správnosti řešení úlohy musíme přesvědčit, že obdržená odpověď 75 (mladistvých) činí 5% čísla 1500.

4. Uvedeme ještě jednu úlohu, jejíž řešení působí žákům potíže: „Při nákupu prodavač žádal za předmět 55 rub. a kupující nabízel 45 rub. Po smlouvání byl předmět koupen za 50 rub. Kolik procent slevil prodavač a kolik procent přidal kupující?“ Žáci obyčejně soudí, že oba učinili stejný ústupek jeden druhému. Ve skutečnosti však prodavač slevil $\frac{5}{55} = \frac{1}{11} \approx 9\%$ a kupující přidal $\frac{5}{45} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11 = 11\%$. Nebo budiž známo, že v textilní továrně dvě dělnice utkaly za stejnou dobu 50 m látky, při čemž jedna měla utkat 55 m užší látky a druhá 45 m širší látky. O kolik procent zůstala první dělnice za plánem a o kolik procent jej druhá překročila? Tato úloha má historickou zajímavost.[11])

5. Učiníme ještě jednu poznámku. Je možné, že při začátku probírání druhé úlohy na procenta žák, kterému učitel uložil, aby řešil úlohu, udá (i na tabuli) jiné řešení než to, které jsme uvedli výše. Jmenovitě: budiž otázkou, kolika procentům ze 250 se rovná číslo 35. Žák správně usuzuje podle obdoby s první a druhou úlohou na procenta takto:

1% ze 250 činí 2,5. Kolikrát je 2,5 (t. j. 1%) obsaženo ve 35, t. j. kolik procent čísla 250 činí číslo 35? Zřejmě:

$$35 : 2{,}5 = 350 : 25 = 14\%.$$

Tento způsob řešení úlohy (dvěma výkony) je správný; učitel může žákovi dovolit takový postup, ale třídu jako celek doporučujeme učit výše uvedenému způsobu (jedním výkonem), totiž: určit, jakou část čísla 250 činí číslo 35 a výsledek vyjádřit v procentech:

$$35 : 250 = 0{,}14 = 14\%.$$

[11]) „Jestliže předmět, který původně stál 100 tolarů, byl prodáván za 110 tolarů a později cena klesla zase na 100 tolarů, dostaneme pro ty dvě změny nestejný počet procent vzrůstu a poklesu ceny; vzrůst byl 10 ze sta a úbytek jenom $9\frac{1}{11}$ ze sta, protože tento počítáme porovnávajíce jej s vyšší cenou 110 tolarů.“ (Tropfke).

Obecná formule

Uvedeme **obecný tvar** řešení úlohy určit procentní poměr dvou čísel. Jsou dána čísla k a a. Máme najít, kolik procent činí číslo k vzhledem k číslu a ($p\%$ nebo $x\%$).

1. Právě rozbíraný způsob: 1% čísla a dává $\frac{a}{100}$; kolikrát je tento zlomek obsažen v čísle k, tolik procent dává číslo k vzhledem k číslu a, tedy $k : \frac{a}{100} = \frac{k \cdot 100}{a}\%$.

2. Dříve uvedená methoda: poměr čísla k k číslu a činí $\frac{k}{a}$. Tento výsledek máme vyjádřit v setinách neboli v procentech. Když při řešení úloh pracujeme s čísly, užíváme desetinných zlomků a naráz vidíme odpověď.

Abychom zlomek $\frac{k}{a}$ (v obecném tvaru) vyjádřili v setinách, musíme jmenovatele znásobit stem a tudíž i čitatele musíme znásobit stem a dostaneme

$$\frac{k}{a} \cdot \frac{100}{100} = \frac{k \cdot 100}{a} \text{ setin} = \frac{k \cdot 100}{a}\%. \text{ Formule je táž}$$

$$x = \frac{k \cdot 100}{a}\%.$$

Tím se vysvětluje, proč při řešení úloh násobíme stem, abychom našli počet procent: na př. mějme vyhledat procentní poměr čísla 4 k číslu 9. Žáci říkají: „Číslo 4 dělíme devíti a násobíme stem: $\frac{4 \cdot 100}{9}\%$." Vysvětlení jim činí potíže a užívajíce odvozeného pravidla mechanicky často chybují nevědouce, které číslo kterým mají dělit a hlavně nikdy nevědí „proč", zejména proč se výsledek násobí stem. Doporučujeme udávat správný důvod tohoto pravidla a nedoporučujeme pro 5. třídu užívání obecného vzorce k řešení druhé úlohy o procentech.

Závěr

Tedy úlohy s procentními výpočty můžeme řešit různými způsoby. Methodu úměr považujeme za zastaralou, zbytečně komplikující práci a naprosto zbytečnou; my nazíráme na řešení všech úloh o procentech jako na řešení příslušných úloh na zlomky: 1. určení zlomku daného čísla, 2. určení čísla ze známé velikosti jeho zlomku a 3. určení poměru dvou čísel.

V jednotlivých případech, zejména při zjednodušených ústních výpočtech je účelné užívat přechodu k jednotce.

V rozpravě se žáky, ve které shrneme celou dokončenou práci, poukážeme na to, že v typických úlohách na procenta pokaždé ze dvou daných čísel určili číslo třetí, neznámé, že všecky tři veličiny (dvě dané a jedna neznámá): a, $p\%$ a k jsou mezi sebou spojeny závislostí. Ježto však v daném případě běží o závislost mezi třemi veličinami, je sledování této závislosti pro žáky nižších tříd obtížné a nelze je doporučit.

§ 6. Užití základních úloh o procentech na úlohy o úroku

V osnovách matematiky je o tomto bodě řečeno, že se má probrat úloha výpočtu úroku za danou dobu. Na tuto úlohu nazíráme jako na jednu z výše probíraných úloh. Na příklad máme najít, jaký úrok (tento pojem musíme žákům vysvětlit) vynese šestiprocentní státní půjčka v ceně 50 rub. za 10 měsíců.

Řešení: Najdeme 6% z 50 rub.: $50 \,.\, 0{,}06 = 3$; 3 rub. činí úrok za 1 rok, a $2\frac{1}{2}$ rub. činí úrok za 10 měsíců.

To je první úloha na procenta obchodního rázu, která se dávala v předrevolučních sbírkách úloh z aritmetiky.

My chceme dovodit, že methodami výše navrženými můžeme snadno řešit všecky typy úloh o úroku, které se probíraly ve starších učebnicích; jejich řešení nevyžaduje zavedení ničeho nového a samozřejmě není nikterak třeba žáky přeučovat a řešit takové úlohy pomocí úměr.[12])

Obyčejně se v těchto úlohách vyskytují 4 veličiny — ze tří daných se počítá čtvrtá. Jsou to tyto 4 veličiny:

1. a ...... počáteční jistina,
   t .... doba vyjádřená počtem roků,
   p....... úroková míra,
   k ...... úrok;

všecky čtyři veličiny jsou jedna druhé úměrny; nebo

2. zavádějí se 4 veličiny: a, t, p, a A — konečná jistina. V tomto případě A — konečná jistina — není úměrná době a řešení je v některých případech obtížnější.

Probereme řešení všech úloh (celkem jsou 4×2 úlohy).

I. a) Dány jsou a, p, t; hledá se k (úrok).

O této úloze byla řeč výše; řešení můžeme zapsat v obecném tvaru:

$$k = \frac{apt}{100}.$$

---

[12]) Učebnice A. KISELËVA, vyd. z r. 1938, §§ 139, 149, 157.

b) Dány jsou a, p, t; hledá se A (konečná jistina).

Úloha zní na př. takto: „Nač vzroste za 10 měsíců jistina 50 rub. uložená na 6% ročních?“

Nejdříve vypočteme $k = 2{,}5$ rub. a potom $A = 50 + 2{,}5 = 52{,}5$; pomocí písmen: $A = a + k$.

II. a) Dány jsou a, p, k; hledá se t (doba).

Na příklad: „Za jakou dobu dá jistina 50 rub. uložená na 6% ročních úrok 2,5 rub.?“

Řešení: $50 \,.\, 0{,}06 = 3$; 3 rub. činí roční úrok; $2{,}5 : 3 = \frac{5}{6}$; tedy 10 měsíců je doba, za kterou bude úrok činit 2,5 rub.; obecné řešení:

$$t = k : \frac{ap}{100} = \frac{k \,.\, 100}{ap}.$$

b) Dány jsou a, p, A; hledá se t (doba).

Úloha zní takto: „Za kolik měsíců jistina 50 rub. uložená na 6% ročních vzroste na 52,5 rub.?“

Nejprve vypočteme $k = 52{,}5 - 50 = 2{,}5$ (rub.) a další postup je týž jako u úlohy II, a.

Řešení všech čtyř probraných úloh vyžaduje umět najít procentní část daného čísla (první úloha na procenta).

III. a) Dány jsou a, t, k nebo A; hledá se p% (úroková míra).

Úloha: „Na kolik procent je uložena jistina 50 rub., jestliže za 10 měsíců vynese úrok 2,5 rub. (vzroste na 52,5 rub.)?“

Řešení: $\frac{2{,}5 \,.\, 12}{10} = 3$; 3 rub. vynese jistina za rok; $\frac{3}{50} = 0{,}06 = 6\%$ (odpověď).

b) V případě, že je dáno A (52,5 rub.) vypočteme napřed $k = A - a$; $k = 2{,}5$ rub., potom jako dříve najdeme p% (úrokovou míru).

Řešení v obecném tvaru: $p = \frac{k}{t} : a$. Odpověď musíme vyjádřit v setinách, v procentech: $p = \frac{k \,.\, 100}{t \,.\, a}\%$.

Řešení těchto dvou úloh vyžaduje umět určit procentní poměr dvou čísel (třetí úloha na procenta).

IV. a) Dány jsou p, t, k; máme vypočítat x (nebo a) (počáteční jistinu).

Znění úlohy: „Která jistina uložená na 6% ročních vynese za 10 měsíců úrok 2,5 rub.?“

$$\text{\textit{Řešení}: } \frac{2{,}5 \,.\, \overset{6}{\cancel{12}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = 3 \text{ rub. činí úrok za rok;}$$

tedy

$$0{,}06 \,.\, x = 3;\; x = 3 : 0{,}06 = 300 : 6 = 50 \text{ (rub.)}.$$

Řešení v obecném tvaru:

$$\frac{p}{100}\,.\,x = \frac{k}{t};\; x = \frac{k\,.\,100}{t\,.\,p}.$$

Řešení této úlohy vyžaduje umět najít číslo z dané jeho procentní části (druhá úloha na procenta).

b) Dány jsou p, t, A; hledá se a (počáteční jistina).

Znění úlohy: „Která jistina uložená na 6% ročních vzroste za 10 měsíců na 52,5 rub.?"

Řešení se převede na řešení úlohy, ve které známe, v co přejde číslo, zvětšíme-li je o určitou jeho procentovou část (rovněž druhá úloha na procenta).

Úrok za 10 měsíců činí $0{,}06 \,.\, \frac{10}{12} = 0{,}05$ z neznámé jistiny, tedy $1{,}05x = 52{,}5$.

$x = 50$; počáteční jistina je 50 rub.

Mají se podobné úlohy dávat žákům? Není ovšem vhodné je dávat jako nějaké nové typy odlišné od 3 základních úloh na procenta; není vhodné dávat obecné vzorce na podobné úlohy;[13]) ale v době, když se ukládají cvičení na výpočty s procenty (viz §§ 3, 4, 5), je možné a účelné dát také nějakou z výše probraných úloh (s konkretními číselnými údaji). Při vhodné volbě daných čísel řešení takových úloh, i té nejsložitější (IV, b), je tak prosté, že se dá provést ve třídě i ústně, na příklad najít, která jistina uložená na 12% ročních vzroste za 10 měsíců na 110 rub.

Řešení:

$$\frac{0{,}12\,.\,10}{12} = 0{,}02\,.\,5 = 0{,}1;\; 1{,}1x = 110;$$
$$x = 110 : 1{,}1 = 100 \text{ (rub.)}.$$

Zkouška je snadná.

Účelné je řešit několik nejjednodušších úloh na složené úrokování: nejprve se přímo určí přírůstek jistiny za první rok a potom se vypočte přírůstek zvětšené jistiny za druhý rok.

§ 7. Praktické práce

Je třeba, aby učitel využil každé možnosti pro sestavování a řešení úloh na procenta; číselná data můžeme brát z denního života, z periodické literatury, z novinových zpráv. Nesmírná je výchovná cena těchto úloh, na kterých může učitel žákům prokázat, jak rostou naše úspěchy, naše kultura a organisovanost.

[13]) To patří do kursu algebry.

Procentní úhloměr

Užitečné je ilustrovat výpočty, podobné výše naznačeným, názorně pomocí diagramů (obdélníkových a kruhových) a průběh změny veličiny průběhem určité doby pomocí grafů. U nás procentní úhloměr není v prodeji. Můžeme žákům uložit, aby si sami zhotovili takové úhloměry a užívali jich při náčrtech kruhových diagramů vedle obyčejného úhloměru; při užívání tohoto musíme procenta převádět na stupně násobením číslem 3,6.

Pro sestrojení procentního úhloměru je účelné zvolit kružnici poloměru 32 mm (nebo 48 mm — obecně násobek šestnácti), potom rozevřením kružítka na 2 mm (ve druhém případě 3 mm) rozdělíme kružnici na rovné oblouky; počet těch oblouků bude 100 a získáme nástroj k zobrazení procent: $\frac{2\pi r}{100} \approx 2$ mm Na kružnici si můžeme vyznačit díly po 5%. Čím větší zvolíme poloměr, tím přesnější bude dělení na procentním úhloměru. Pro užívání celkem třídy můžeme vzít kartonový kruh poloměru 8 cm a na kružnici nanášet díly rozevřením kružítka na $\frac{1}{2}$ cm.

Tabulky

Pro školní potřebu nemáme vůbec procentní tabulky.[14] Užitečné je ukládat žákům, aby sami počítali a sestavovali tabulky pro procentní výpočty. Na příklad tabulku, které mohou prakticky užívat pro charakterisování třídy; kolik % žáků má výborný prospěch, kolik se zúčastní prací v kroužku a pod.

Nechť ve třídě jsou 42 žáci.[15] Tabulka:

1 žák tvoří	2,4% (přesně na 0,1%)		
2 žáci tvoří	4,8%		
3 žáci tvoří	7,1%	8 žáků tvoří ...	19,0%
4 žáci tvoří	9,5%	9 žáků tvoří ...	21,4%
5 žáků tvoří	11,9%	10 žáků tvoří ...	23,8%
6 žáků tvoří	14,3%	20 žáků tvoří ...	47,6%
7 žáků tvoří	16,7%	30 žáků tvoří ...	71,4%
		40 žáků tvoří ...	95,2%.

Potom 23 žáci tvoří 54,7% atd.

$$\begin{array}{lr} \text{20 žáků} & 47{,}6\% \\ \text{3 žáci} & 7{,}1\% \\ \hline & 54{,}7\%. \end{array}$$

[14]) Pro učitele se hodí příručka: A. N. Kogan „Tablica procentnych vyčislenij".

[15]) Časopis „Matematika v škole", 1941, č. 1. N. Nikitin „Praktičeskije navyki v svjazi s izučenijem matematiki".

Nebo: mějme úkol osít pole velikosti 940 m². Žáci sestaví tabulku podobnou předcházející a mohou sledovat v % chod plnění plánu.

Tabulka:

1 m² tvoří.....	0,1% (přesně na 0,1%)
2 m² tvoří.....	0,2%
....	
10 m² tvoří.....	1,1%
20 m² tvoří.....	2,1%
....	
100 m² tvoří.....	10,6%
200 m² tvoří.....	21,3% atd.

Je-li oseto 210 m², je splněno

200 m².......	21,3%
10 m².......	1,1%
	22,4% úkolu.

Sestavování prakticky vhodných tabulek přispívá k uvědomělému osvojení procentních výpočtů a cvičení v jejich spočtení pomáhá v utvrzení získaných znalostí jako co se týče procentních výpočtů, tak i zaokrouhlování čísel.

Různé úlohy

Aby žáci získali dostatečný výcvik v řešení úloh, ve kterých se vyskytují procentní výpočty, je nezbytné ukládat žákům pro řešení ve třídě i doma, na tabuli i samostatně v sešitě velký počet rozmanitých úloh (které budou mít za jednu součást procentní výpočty), mezi nimiž mají býti také geometrické úlohy obsahující procentní poměr obsahů a objemů.

Uvedeme řešení některých úloh, jednak takových, které podle zkušenosti žáky zajímají, jednak takových, které jim činí potíže.

1. Co je větší: 70% z 55 nebo 55% ze 70?

$$55 \,.\, 0,7 = 70 \,.\, 0,55 = 38,5.$$

2. Jak se změní cena věci, jestliže napřed cena vzrostla o 20% a potom klesla o 20%?

Řešení. $20\% = \frac{1}{5}$.

Po 1. změně věc bude stát 120% původní ceny.

Po 2. změně věc bude stát $120\% - 120\% \cdot \frac{1}{5} = 120\% - 24\% = 96\%$ původní ceny, t. j. cena se sníží o 4% původní ceny.

Jest užitečné uložit zkoušku správnosti výsledku na **příkladě.**

Původní cena budiž 40 rub.

Cena po 1. změně bude $40 + 8 = 48$ (rub.);

cena po 2. změně bude $48 - 48 \,.\, \frac{1}{5} = 38\frac{2}{5}$ (rub.).

Cena se snížila o 1 rub. 60 kop., což činí 4% ze 40 rub.

3. Sklad knih dostal od nakladatelství knihy s 30%ní slevou a prodával je za nominální cenu (aby mohl uhradit svá vydání).

Kolik procent jím zaplacené částky získal sklad?

Řešení. Sklad zaplatil částku rovnou 70% nominální ceny knih; ježto knih prodal za nominální cenu (100%), zbylo mu 30% této ceny.

Procentní poměr $\frac{30\%}{70\%} = \frac{3}{7} \sim 0{,}43$ neboli 43% (přesně na 1%).

Zkouška příkladem:

Dejme tomu, že bylo koupeno knih za 4000 rub. podle nominální ceny; bylo tedy za ně zaplaceno $4000 \,.\, 0{,}7 = 400 \,.\, 7 = 2800$ (rub.). Při prodeji za 4000 rub. činil zisk 1200 rub.

$$\tfrac{1200}{2800} = \tfrac{3}{7} \approx 43\%.$$

4. (Sbírka úloh, obecná část č. 2309). „Kolik vody je třeba dolít k 25 g 90%ní kyseliny, aby vznikla 70%ní kyselina?“

Řešení. V 25 g 90%ní kyseliny je $25 \,.\, 0{,}9 = 22{,}5$ g čisté kyseliny; těchto 22,5 g bude zachováno v 75%ní kyselině, t. j. $0{,}75x = 22{,}5$ neboli $\frac{3}{4}x = 22{,}5$;

$$x = 30 \text{ g};$$

tedy obdržíme 30 g 75%ní kyseliny, t. j. je třeba dolít (30 — 25) = 5 g vody.

Obdobně se řeší **úloha** 5 (sbírka úloh, kap. VII, č. 1994). „Čerstvé hřiby obsahují 90% vody, sušené 12%. Jaké množství sušených hřibů bude z 10 kg čerstvých?“

Řešení. V 10 kg čerstvých hřibů čistá váha hřibů (bez vody) činí 10%, t. j. 1 kg. Tento kilogram váhy zůstane i u sušených hřibů. 100% — 12% = 88%, t. j. $88\%x = 1$,

$$x = 1 : 0{,}88 = 1{,}1 \text{ (kg)}.$$

KAPITOLA XII.

SLOVNÍ ÚLOHY

§ 1. Úvod

Od začátku do konce kursu aritmetiky musí učitel matematiky věnovat velikou pozornost řešení slovních úloh. Řešení takových úloh je cenné jako dovednost užívat získaných vědomostí k řešení praktických otázek, jako dovednost stanovit závislost mezi konkretními veličinami a na základě stanovené závislosti vybrat potřebné aritmetické výkony, provésti je a tím rozřešit určitou otázku.

Na slovních úlohách žák se učí a projevuje svou dovednost z podmínek reálné skutečnosti vyšetřit její matematické jádro, přistupovat s číslem a s měrou ke skutečnosti.

Řešení slovních úloh přispívá k rozvoji matematického myšlení žáků, ježto rozklad složené úlohy na jednoduché, stanovení souvislostí mezi jednotlivými otázkami, vybrání neznámé veličiny u každé jednoduché úlohy a určení, které z daných údajů slouží k jejímu nalezení, to vše vyžaduje a rozvíjí důvtip žáků, dovednost usuzovat a pomáhá k osvojení methody analysy a synthesy.

Řešení slovních úloh má velký methodický význam také proto, že řešením takových úloh žáci získávají představu o praktickém významu matematiky, přesvědčují se, že je nezbytné naučit se tomu či onomu výkonu nebo úpravě, a také si při tom vyjasňují základní aritmetické pojmy. Tak v příslušných kapitolách této methodiky, jako na př. v kapitole o odčítání a dělení celých čísel, o násobení a dělení zlomkem, o úměrnosti veličin a j. se vyjasňuje na slovních úlohách cíl určitého výkonu, charakter a závislost daných a hledaných čísel a potom se dochází k nutnému zobecnění. Řešením a rozborem řešení slovních úloh se vyjasňují základní zákony výkonu, změna výsledku způsobená změnou daných a pod.

Konkretní úlohy

Slovní úlohy v kurse aritmetiky můžeme rozdělit na dvě veliké skupiny: úlohy s konkretním obsahem a úlohy abstraktní. Veliký výchovný význam mají úlohy s konkretním obsahem. Úlohu můžeme považovat za skutečně konkretní, jestliže se v ní řeší otázky pro žáka aktuální, takové, s jakými se setkává ve skutečnosti, která ho obklopuje. V konkretní úloze nejen námět a číselná data mají býti reálná, nýbrž také otázka nesmí býti uměle položena. Mladík s chutí a uvědoměle provádí výpočet, jestliže před něho postavíme aktuální otázku: „Máme za úkol sklidit $3\frac{1}{2}$ ha pole a za dnešní den jsme sklidili 28 000 m^2. Kolik procent práce nám ještě zbývá? Kolik dní ještě budeme pracovat, jestliže jako dosud sklidíme za den ... m^2? O kolik procent (nebo m^2) musíme zvětšit pracovní výkonnost, aby se doba sklizně $1\frac{1}{2}$krát zkrátila?" atd. Ale živé odezvy nenajde učitel u žáků, položí-li otázku takto: „Máme za úkol sklidit $3\frac{1}{2}$ ha; provedli jsme 80% práce. Kolik ha jsme již sklidili?" Neboť bylo třeba předem znát odpověď, aby se mohlo udat číslo 80%.

Všecky úlohy, i některé z těch, jejichž námětem je na př. splnění plánu v továrně, sklizeň v kolchoze a pod., ale sestrojené na základě údajů nevzatých ze skutečnosti, jsou ve své podstatě úlohy sice nutné, ale abstraktní a neslouží k dostižení výše uvedených výchovných cílů.

Takové úlohy jsou po většině ve sbírkách sestavených pro řadu let. Konkretní úlohy zpravidla dává učitel sám. Fakta a čísla najde vždy v posledních číslech novin i v přehledných výkazech i v časopiseckých článcích. Dobré je, jestliže učitel vzbudí zájem žáků, aby sami sbírali data a sestavovali úlohy obsahující informace o hrdinských činech naší chrabré sovětské armády a o rozvoji našeho hospodářství podle pětiletého plánu 1946—50.

Tímto způsobem se vychovávají žáci k sovětskému patriotismu, k víře v sílu naší armády a v moc naší veliké vlasti. Množství žáků zúčastňuje se aktivně práce na kolchozních polích. Postup prací při osevu a sklizni může denně poskytnout materiál k sestavení úloh, výpočtu procent splnění plánu a j.

Život školy a třídy rovněž poskytuje materiál k některým životným konkretním úlohám.

Ovšem také matematický časopis má pomáhat učiteli tím, že publikuje texty jednotlivých úloh a sděluje vhodné číselné údaje; také na methodických schůzích učitelstva mají být rozpravy o textu úloh předkládaných učiteli. Zejména je užitečné řešit úlohy, ve kterých se žádá vypočítat skutečnou vzdálenost podle mapy a měřítka, což je nezbytné pro každého pionýra.

Uvedeme příklady takových úloh:

1. Při exkursi se má ujít určitá vzdálenost za hodinu. Na plánė s měřítkem 1 : 25 000 vzdálenosti, kterou mají účastníci exkurse ujít, odpovídá úsečka 18 cm. Rychlost pochodu je 4,5 km za hodinu. Ujdou účastníci určenou vzdálenost za hodinu?

2. Výprava měla za úkol provésti výzkum terénu. Podle mapy sestrojené v měřítku 1 : 100 000 byl sestaven plán krajiny tak, že 1 cm na plánu odpovídal 250 m ve skutečnosti. Kolikrát byly všecky délky na plánu zvětšeny ve srovnání s mapou?

Poznámky. 1. Počet konkretních úloh, které je možno řešit prů během roku, je malý; učitel musí pečlivě připravit každou úlohu a prohlédnout řešení každého jednotlivého žáka.

2. Při řešení konkretní úlohy, na kterou většinou se nenajde odpověď ve sbírce, žák si zvláště dobře uvědomuje svou zodpovědnost za správnost výkonů, které provádí. Na řešení takových úloh se má pěstovat návyk pečlivého provádění aritmetických výpočtů, zvyk odhadovat předem odpověď zpaměti, aby se došlo k jasné představě o velikosti hledaného výsledku. Na těchto úlohách se rovněž vyjasňuje žákům význam přibližných výpočtů.

3. Úlohy, v jejichž znění se vyskytují pojmy z jiných nauk, dávají se v hodinách aritmetiky pouze v tom případě, jestliže žáci se dříve seznámili s těmito pojmy v příslušných naukách, na př. stupně Réaumura a Celsia, zeměpisná délka a šířka, transmise pohybu a pod.

4. *Slovní úloha.* Slovní úlohou nazýváme v aritmetice požadavek určit číselnou hodnotu nějakého souboru věcí nebo veličiny ze známých číselných hodnot jiných souborů nebo veličin, které jsou určitým způsobem závislé mezi sebou a s hodnotou hledanou. Známá čísla v úloze se nazývají čísla daná; číslo, které se má určit, nazývá se hledaným (neznámým). Nezbytné součásti znění slovní úlohy jsou:

1) číselné údaje určující soubor věcí nebo veličin nebo jejich vzájemnou závislost;

2) slovní popis vzájemné závislosti daných hodnot a závislosti hledané hodnoty na hodnotách daných;

3) otázka, na kterou dá odpověď určení hledaného čísla.

Bez kteréhokoli z uvedených prvků je řešení úlohy buďto nemožné nebo neurčité.

V této kapitole se budeme zabývat úlohami, v jejichž znění nejsou udány výkony, jež se mají provésti s danými čísly, aby se určilo hledané číslo na rozdíl od cvičení obyčejně nazývaných příklady,[1]) v jejichž znění jsou přímo udány výkony, které se mají provésti s danými čísly, aby se dostalo číslo hledané. Podle této terminologie:

1. *Příklad*: 45 — 38 = ? Žák má provést udaný výkon.

2. *Úloha*: „Ze 45 sešitů bylo žákům rozdáno 38; ostatní sešity zůstaly pro potřebu třídy. Kolik sešitů zůstalo pro třídu?" Při takové úloze žák musí podle jejího znění napřed rozhodnout, kterého výkonu je třeba ke stanovení hledaného čísla a potom teprve provést výkon: 45 — 38 = 7.

2. Úlohy jednoduché a složené

Výše uvedená úloha se řeší jedním výkonem. Takové úlohy je zvykem nazývat jednoduchými na rozdíl od úloh, jejichž řešení vyžaduje aspoň dvou výkonů a které se nazývají složené.[2]) Je třeba poznamenat, že takové rozdělení úloh se nedá přesně provést; tak na příklad úloha, ve které hledané číslo je součet více než dvou daných čísel, může být řešena jediným sčítáním nebo několika, t. j. bude se jevit jednou jako úloha jednoduchá a podruhé jako úloha složená. Taková úloha, jejíž řešení vyžaduje sečtení několika sobě rovných sčítanců, může se řešit násobením a je to potom úloha jednoduchá, ale může se také řešit postupným sčítáním a potom se jeví složenou.

Úloha určit zlomek čísla a určit číslo z dané velikosti jeho zlomku rovněž může býti řešena jediným výkonem (násobení a dělení zlom-

[1]) Rozdělení nepřesné. V cizojazyčné literatuře se často nerozlišuje mezi úlohou a příkladem.

[2]) Termínu „jednoduchá" a „složená" úloha není zde užito ve smyslu jednoduchosti nebo složenosti závislosti mezi veličinami danými a veličinou hledanou.

kem), načež je to úloha jednoduchá, může však býti také řešena dvěma výkony a je to potom úloha složená.

Je ještě jiný znak jednoduché úlohy: v jednoduché úloze jsou obyčejně dvě dané veličiny, čímž můžeme jednoduché úlohy rozlišovat od složených, u kterých bývá více daných veličin. Také tento znak je nedostatečný. Nicméně budeme užívat termínu „úloha jednoduchá" (řešitelná jedním výkonem) pro pohodlí výkladu.

Všechny základní jednoduché úlohy jsme podrobně probírali při vysvětlování, které otázky se dají řešit každým ze 4 aritmetických výkonů s celými čísly (viz kapitoly „Sčítání", „Odčítání", „Násobení" a „Dělení") a dále při vysvětlování, které otázky se dají řešit pomocí násobení a dělení zlomkem (viz příslušné paragrafy v kapitole „Výkony s obyčejnými zlomky"). Řešíce připomenuté jednoduché úlohy žáci se seznamují s různými případy, ve kterých se užívá jednotlivých výkonů, s různými způsoby vyjádření otázek vedoucích k témuž aritmetickému výkonu a s různými způsoby odpovědí na ty otázky.

Složené úlohy je možno úspěšně řešit teprve 1. po důkladném osvojení řešení jednoduchých úloh, 2. po důkladném výcviku v provádění výkonů.

U celých čísel je jedno i druhé předmětem vyučování na obecné škole; v kurse nižších tříd střední školy je nutné pouze při vysvětlování theorie zopakovat a doplnit tyto úlohy podle plánu, který jsme naznačili v příslušných kapitolách.

Složená úloha se při řešení člení na několik jednoduchých úloh a řeší se alespoň dvěma výkony. Při tom každý z těch výkonů řeší určitou jednoduchou úlohu. Každá z těch jednoduchých úloh, na které se člení složená úloha, vyžaduje výběr dvou veličin daných a jedné hledané, mezi nimiž je nějaká závislost. Jestliže uvážíme, že s výjimkou veličiny hledané při poslední jednoduché úloze (po případě dvou i více posledních jednoduchých úlohách), všecky hledané veličiny musí stanovit řešící sám, a rovněž musí sám provést výběr obou daných veličin jednoduché úlohy, nejprve ze všech veličin daných ve složené úloze a potom nejen z nich, nýbrž i ze všech už vypočtených pomocných veličin, je zřejmé, že hlavní obtíž při řešení složené úlohy především spočívá:

1. ve výběru neznámých u jednotlivých jednoduchých úloh,

Dáno	Hledá se
1. Počet pracovních dní s menší výkonností. Počet pracovních dní s větší výkonností.	Celkový počet pracovních dní.
2. Dáno totéž.	Oč je počet pracovních dní s větší výkonností větší než počet pracovních dní s menší výkonností.
3. Kolik uhlí se vytěžilo za jeden z prvních tří pracovních dní. Kolik uhlí se vytěžilo za jeden z posledních čtyř pracovních dní.	O kolik tun uhlí se vytěžilo více za jeden z posledních dní než za jeden z prvních dní.
4. Dáno totéž.	Kolik uhlí se vytěžilo celkem za dva dni, pracovalo-li se jednou s menší a podruhé s větší výkonností.
5. Kolik uhlí se vytěžilo za jeden z prvních pracovních dní. Počet dní s touto pracovní výkonností. (Počet prvních pracovních dní.)	Kolik uhlí se vytěžilo celkem za prvé tři dni. atd.

Tabulka A ke str. 321.

2. ve výběru těchto jednoduchých úloh samých, t. j. ve výběru vhodné kombinace mezi mnoha možnými kombinacemi čísel.

Obyčejně se sestavuje plán řešení složené úlohy, pozůstávající v přehledu jednoduchých úloh, na které se rozpadá složená úloha a v přehledu pořádku, ve kterém je třeba ty úlohy řešit.

K sestavení plánu řešení úlohy existují dvě hlavní methody: synthetická a analytická.

§ 2. Synthetická a analytická methoda

I. Synthetická methoda

Znění úlohy budiž toto: „Za 3 dni se vytěžilo po 16,5 t uhlí a za následující 4 dni po 16,8 t. Kolik uhlí se vytěžilo dohromady?“ Číslo hledané v úloze je počet tun uhlí vytěženého za všechny dni dohromady. Daná čísla v úloze jsou čtyři. Pro sestavení první jednoduché úlohy je třeba vybrat z těch čtyř daných čísel dvě stojící v určité vzájemné závislosti a stanovit neznámou, t. j. sestavit otázku jednoduché úlohy. Uvádíme v tabulce A (str. 320) některé z možných kombinací daných čísel a příslušné neznámé.

Při sestavování následujících jednoduchých úloh počet daných veličin je větší, protože přibudou již vypočtená řešení předcházejících úloh. Uvažování a výcvik v řešení úloh musí pomoci žákovi, aby ze všech možných kombinací vybral tu, která je nejvýhodnější pro řešení úlohy: žák musí předvídat, zdali odpovědi na jednoduchou úlohu se dá užít k řešení složené úlohy. V tom je obtíž řešení úlohy.[3])

Je jasné, že pro řešení dané úlohy jest dáti přednost kombinaci 5. z tabulky A (str. 320) a řešit v ní uvedenou jednoduchou úlohu.[4]) Pokračujíce v sestavování jednoduchých úloh, převedeme řešení složené úlohy na postupné řešení tří jednoduchých úloh. Řešení bude ukončeno, až odpověď na jednoduchou úlohu bude odpovědí na danou složenou úlohu.

Po výběru jednoduchých úloh máme plán řešení složené úlohy naznačený v tabulce B na str. 322.

Rozebraný způsob rozčlenění složené úlohy na řadu jednoduchých úloh se jmenuje synthetický způsob. Při něm se řešení každé jednoduché úlohy dá ihned provést.

3. Analytická methoda

Analytický způsob řešení složené úlohy vychází z myšlenky postupné řady jednoduchých úloh, která vychází z dané otázky,

---

[3]) K řešení naší úlohy jsou kombinace 1., 2., 3., 4. tabulky A na str. 320 možné, ale jsou nevýhodné, ježto prodlužují řešení úlohy; na příklad:

a) $3 + 4 = 7$ (dní),
b) $16{,}5 \,.\, 7 = 115{,}5$ (t),
c) $16{,}8 - 16{,}5 = 0{,}3$ (t),
d) $0{,}3 \,.\, 4 = 1{,}2$ (t),
e) $115{,}2 + 1{,}2 = 116{,}4$ (t).

[4]) Jestliže připustíme také úlohy na lomená čísla, bude počet možných úloh větší, než v tabulce A; na příklad k daným 1. (viz tab. A)můžeme položiti také otázku: jakou částí počtu dní s větší výkonností je počet dní s menší výkonností? atd.

Známe-li		Můžeme vypočítat	Řešení
1. Kolik uhlí se vytěžilo za jeden z prvních pracovních dní (16,5 t)	Počet prvních pracovních dní (3 dni)	Kolik uhlí (v tunách) se vytěžilo za první 3 pracovní dni	16,5 . 3 = 49,5(t)
2. Kolik uhlí se vytěžilo za jeden z následujících pracovních dní (16,8 t)	Počet následujících pracovních dní (4 dni)	Kolik uhlí (v tunách) se vytěžilo za následující 4 dni	16,8 . 4 = 67,2(t)
3. Kolik uhlí se vytěžilo za za první 3 dni	Kolik uhlí se vytěžilo za poslední 4 dni	Kolik uhlí (v tunách) se vytěžilo dohromady	49,5 + 67,2 = = 116,7 (t)

Tabulka B.

z toho, co musíme[5]) určit v úloze a z výběru takových daných, pomocí kterých by se to určení dalo provést jedním výkonem. Na příklad při výše rozbírané úloze musíme určit, kolik uhlí se vytěžilo dohromady za všecky (první i poslední) dni. Tuto úlohu dovedeme řešit, jestliže budeme znát, kolik uhlí se vytěžilo za první 3 dni a kolik za poslední 4 dni. Ale ani jedno ani druhé neznáme: mezi číselnými daty úlohy nejsou taková číselná data a proto musíme nejprve sestavit a řešit nové dvě jednoduché úlohy atd.

Poznámky. 1. Někdy jsou neznámé oba údaje, kterých je třeba k řešení jedné z proponovaných jednoduchých úloh (takový případ se nám právě vyskytl); někdy neznáme jen jeden z nich a k jeho určení je třeba sestavení jediné jednoduché úlohy, která zase může vésti k nutnosti sestavit ještě další jednoduchou úlohu atd., až v procesu sestavování jednoduchých úloh dojdeme k takové úloze, že k ní potřebné údaje jsou mezi známými číselnými údaji dané úlohy.

[5]) Při synthetické methodě se staráme o to, co „můžeme" určit.

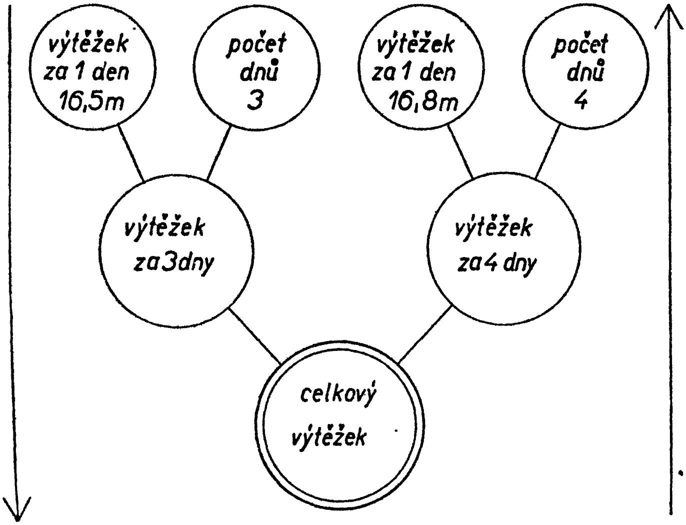
2. Při výběru dat, která je třeba znát pro určení hledané hodnoty analytickou methodou nastávají tytéž potíže, o kterých jsme mluvili při synthetické methodě. Také zde je třeba „vidět do budoucnosti“. vybírat mezi různými kombinacemi úloh: tak na příklad v rozebírané úloze můžeme odpovědět na touž otázku (kolik uhlí bylo vytěženo za všecky dni dohromady), jestliže budeme znát celkový počet pracovních dní a průměrnou těžbu za jeden den. Ale tato cesta je méně vhodná než cesta výše naznačená, protože nalezení průměrné těžby je pro žáky obtížnější nežli nalezení těžby za první tři a za poslední čtyři pracovní dny.

Analyticky sestavený plán řešení téže úlohy bude tento:

Abychom určili	Musíme znát (mít dáno)	
	1	2
1. Těžbu uhlí za všecky dni (kolik uhlí bylo vytěženo za všecky dni?)	Těžbu uhlí za první dni	Těžbu uhlí za poslední dni
2. Těžbu uhlí za první dni	Těžbu uhlí za den	Počet pracovních dní
3. Těžbu uhlí za poslední dni	Těžbu uhlí za den	Počet pracovních dní

Úloha je opět rozčleněna na 3 jednoduché úlohy, ale pořádek těchto úloh je jiný: poslední úloha při prvém způsobu se objevuje jako první úloha při druhém způsobu. Avšak teprv po sestavení poslední jednoduché úlohy při analytickém způsobu usuzování můžeme přistoupit k řešení těch úloh a to tak, že začneme od poslední sestavené úlohy (při syntetickém způsobu usuzování to bude první úloha) a postupně dojdeme k první. Při analytickém způsobu bude řešení první úlohy zároveň už řešením složené úlohy (viz obr. 26). Proto pořádek, ve kterém se počítají výsledky jednotlivých jednoduchých úloh bude stále týž, nezávisle na způsobu usuzování při sestavování plánu.

Obr. 26 udává schema analysy a synthesy rozebírané úlohy. Schema ukazuje: 1. jak při synthese veličiny dané v úloze se spojují



Obr. 26.

v jednoduché úlohy a tak se dojde až k řešení dané složené úlohy; 2. jak při analyse naopak otázka uvedená v úloze se rozštěpuje a tak se dochází až k veličinám v úloze daným.

Nepochybné jsou přednosti analytické methody řešení slovních úloh,[6]) při níž se pěstují usuzovací schopnosti žáků a dosahuje se větší přesnosti, cílevědomosti a důslednosti úsudku, proti methodě synthetické, kde se řadou isolovaných otázek jaksi náhodně dojde k cíli.[7]) Ale na druhé straně pro žáky 5. třídy a mladší sestrojení souvislého řetězu úsudků, vyplývajících jeden z druhého, které je nezbytné pro analytickou methodu sestavení plánu, bývá obtížné. Úsudky jsou při

---

[6]) Podrobnosti viz v: „Očerkach po metodike arifmetiki" od F. A. Erna a ve spisku Jevg. Špitalského: „Obrazovatel'noje značenije arifmetičeskich zadač", Moskva 1904.

[7]) Při synthetické methodě řešení složené úlohy jsou možny chyby dvojího druhu: i při výběru hledané veličiny i při výběru daných veličin. Při analytické methodě řešení jsou možné chyby pouze při výběru daných veličin. Mezi jiným by se mohlo zdát, že průběhem sestavování a řešení jednoduchých úloh výběr daných veličin se usnadňuje tím, že jejich počet se zmenšuje, ale tomu tak není, počet daných se nemusí zmenšovat: 1. vedle daných hodnot, kterých se již užilo, objevují se jako nové dané hodnoty výsledky předchozích jednoduchých úloh a 2. často dané hodnoty, které se užilo k řešení jedné jednoduché úlohy, se užije znovu při druhé, třetí úloze atd.

synthetickém způsobu jednodušší a lehčí než při analytickém také proto, že sestavit k daným číslům otázku je lehčí než obráceně. Mimo to při analytickém pracovním plánu většinu jednoduchých úloh, na které se rozpadá složená úloha, můžeme řešit teprve po rozřešení následujících jednoduchých úloh; a většinou nemohouce řešit jednoduchou úlohu, musíme zaznamenávat všecky následující jednoduché úlohy a teprve potom přistupovat k jejich řešení. Naproti tomu při synthetickém pracovním postupu každá jednoduchá úloha se hned sestaví v úplném znění s určitými danými čísly a je možné bezprostředně ji řešit. Proto při řešení složených úloh v 5. třídě se nejčastěji užívá tohoto způsobu: sestavování plánu se začne analysou (analytickou methodou), ale analysa se neprovede až do konce, nýbrž se přejde k přímému řešení úlohy (synteticky).

Jak bylo uvedeno výše, musíme i při synthetickém způsobu usuzování „vidět do budoucnosti": zdali bude možno užít výsledku jednoduché úlohy k řešení úlohy složené, t. j. užívá se tu analysy: v tomto případě říkáme, že při vyučování aritmetice se užívá synthetickoanalytické methody. Při řešení úloh nelze užívat výlučně ani analysy ani synthesy, nýbrž analysa a synthesa se musí vzájemně doplňovat. „Analytickou" nebo „synthetickou" nazýváme methodu sestavení plánu řešení složené úlohy podle toho, zdali při usuzování převládá analysa či synthesa. Je nepochybné, že musíme žáky naučit užívat obou method. Podrobnou analysu úlohy (při níž se vychází od poslední otázky) je velmi užitečné žákům předvést při shrnutí výkladu, při přehledu a zkoušce správnosti řešení složené úlohy, která byla rozřešena syntheticky a doporučujeme tento postup při vyučování. Také je třeba zvětšit počet úloh řešených analytickým způsobem.

§ 3. Příprava žáků k řešení složených úloh

Potíže žáků při řešení slovních úloh pramení ze mnoha příčin. Rozebereme hlavní z nich a v souvislosti s tím dospějeme k určitým methodickým závěrům pro vyučování řešení úloh.

1. Ježto řešení složené úlohy se převádí na řešení řady jednoduchých úloh, je možné přistoupit k řešení složených úloh teprve,

když se učitel přesvědčí, že žáci dovedou řešit jednoduché úlohy na každý ze čtyř aritmetických výkonů (o takových úlohách jsme mluvili v příslušných kapitolách).

Podle toho, s jakým výsledkem se setká při ověřování vědomostí žáků, učitel užije všech nebo jen některých ze způsobů a cvičení námi uvedených.

2. Ježto hlavní potíž při řešení jednoduchých úloh, na které se rozpadá složená úloha, spočívá ve stanovení závislosti mezi hodnotami danými a hodnotou hledanou (znalost a rozpoznání dotyčné závislosti), je třeba cvičit žáky v sestavování otázek k určitým daným hodnotám, ve výběru daných hodnot pro odpověď na položenou otázku a v určování výkonu, jímž se dochází k odpovědi na otázku úlohy (ústní cvičení).

K tomuto cíli může učitel užít libovolné jednoduché úlohy. Na příklad, nechť v úloze stojí: „Za první den bylo vytěženo 16,5 t uhlí, za druhý den 16,8 t“ nebo „Za první den bylo vytěženo 16,5 t uhlí, za dva dny dohromady 33,3 t“.

a) Učitel může žádat, aby žáci sami sestavili otázku ke každé úloze a aby udali výkon, který vede k odpovědi na sestavenou otázku.

U první úlohy jsou možné otázky: kolik tun uhlí bylo vytěženo za oba dny dohromady? (řeší se sčítáním) nebo: o kolik tun bylo vytěženo za druhý den více než za první? (odčítáním).

b) Učitel položí otázku a žádá od žáků, aby řekl, které hodnoty je třeba znát, aby bylo možné na otázku odpovědět. Na příklad: co je třeba znát, abychom mohli odpovědět na otázku, co stojí jeden sešit? kolik kilometrů projel cyklista nebo vlak? kolik hektarů zoral traktor? kolikrát se otočilo kolo? atd.,; co je třeba ještě znát, aby se mohlo odpovědět na otázku, kolik tun brambor se sklidilo s pole velikosti 3 ha? kolik svrchníků lze ušít ze 30 m látky? atd.; je užitečné neomezovat se jen na odpověď, co je třeba znát, nýbrž žádati také, aby žáci řekli, jakého výkonu je třeba, aby vybrali číselné hodnoty daných a aby sestavenou úlohu řešili a provedli zkoušku.

3. Aby žáci porozuměli procesu řešení složené úlohy řadou postupně řešených jednoduchých úloh, je užitečné probrat s nimi cvičení

pozůstávající v sestavení složené úlohy nejprve ze dvou a potom ze tří jednoduchých úloh: na příklad u výše rozbírané úlohy (viz obr. 26) řeší se první jednoduchá úloha, potom druhá, načež se obě úlohy spojí v jedinou složenou úlohu třetí otázkou. Avšak i tato cvičení 2. a 3. patří ve své podstatě na obecnou školu; učitel se v 5. třídě má přesvědčit, že jeho žáci rozumějí procesu sestavování složené úlohy a skloubení otázek.

4. Potíže žáků při řešení slovních úloh často pramení z nedostatečně pevného výcviku v provádění výkonů; někdy žáci úlohu jednoho a téhož typu dovedou řešit, jestliže daná čísla jsou malá čísla celá, a nedovedou to, jsou-li daná čísla několikaciferná. Proto slovní úlohy na ten či onen výkon mají se procvičovat teprve, když žáci dobře ovládají potřebné výkony, když provádějí výkony hbitě a bez chyb.

V jednotlivých případech je užitečné napřed řešit (ústně) úlohu téhož typu, kde však jsou víceciferná čísla nahrazena dvojcifernými, lomená čísla celými, aby provádění výkonů neodvracelo pozornost žáků od obsahu úlohy.

Uvedeme, že učitel má považovat řešení úlohy za správné pouze za podmínky, že i plán řešení byl správně sestaven i výpočty byly provedeny správně až do konce a že podle možnosti byla provedena také zkouška. Bohužel žáci se často vymlouvají na správnost „postupu řešení“, neuvědomujíce si dobře, že nesprávnost výsledku činí jejich práci bezcennou, ať již příčina chyby je jakákoli.

5. Jedna z hlavních příčin, proč žáci nedokáží rozřešit úlohu, spočívá v úplném nebo v částečném neporozumění smyslu znění úlohy. To pramení buďto z ne dosti zřetelné nebo výrazné dikce učitelovy při čtení úlohy, nebo z nedostatečného výcviku žáků ve čtení vůbec, nebo z nedostatečného výcviku v tichém čtení při samostatném řešení úlohy nebo z jisté nedbalosti nebo nepozornosti při čtení, v důsledku čehož žák často řeší část úlohy vytrhávaje jednotlivé fráze ze znění úlohy a pod.[8]) Je nezbytné, aby učitel, když se připravuje na hodinu, pečlivě si promyslil, jakým způsobem v každém jednotlivém případě předloží žákům úlohu (čtení textu úlohy).

[8]) Časté jsou případy, že žáci soustředí svou pozornost jen na čísla úlohy a slepě je kombinují nebo jakmile uvidí v textu úlohy slova „zvětšeno o“ hned se pustí do sčítání nezávisle na otázce, jako na příklad, je-li v úloze řečeno, že množství látky bylo zvětšeno o 135 m a činí 695 m a pod.

První způsob spočívá v tom, že učitel sdělí žákům ústně znění úlohy. Tohoto způsobu se má užívat při řešení složené úlohy, u které postup řešení je podle učitelova mínění pro žáky nový a může jim činit potíže.

Druhý způsob předložení úlohy je ten, že učitel nebo žák přečte znění úlohy ze sbírky. Při tomto způsobu žáci se učí užívat matematické knihy, v daném případě sbírky úloh. V tom případě buďto učitel sám čte nahlas úlohu (při čemž je nadmíru užitečné, aby žáci sledovali učitelovo čtení ve svých sbírkách a aby se učitelovým příkladem učili) nebo dá některému žáku přečíst úlohu nahlas ze sbírky. V posledním případě učitel má zřetelně opakovat po žákovi jednotlivá slova odstiňuje hlasem ty či ony vztahy a má dávat pokyny o správném čtení.

Někdy je vhodné cvičit žáky v tichém čtení úlohy (pro sebe), aby právě tím se připravovali k samostatné práci (ve třídě i doma). Učitel poskytne potřebný čas na pročtení úlohy a potom vyvolá některého žáka, aby poznal, jak bylo porozuměno úloze a případně pomohl (viz níže).

6. Nepochopení úlohy může míti částečně za příčinu ještě:

a) nedostatečnou obeznámenost s aritmetickými názvy a rčeními (součin, podíl, menšenec nebo: vzít za násobitele, zvětšit o něco nebo několikrát a pod.). Proto je nutné pečlivě, jak bylo námi uvedeno v příslušných kapitolách, procvičit se žáky matematické názvy a rčení. Jestliže však se v textu úlohy vyskytnou slova žákovi neznámá (tára, brutto, netto, kladka a j.), je pokaždé třeba, aby ta slova byla učitelem vysvětlena před čtením úlohy.

b) Nepochopení úlohy žákem může pramenit z toho, že mu není jasná závislost mezi veličinami vyskytujícími se v úloze; na příklad mezi dobou, vzdáleností a rychlostí; mezi množstvím, cenou za jednotku a cenou za množství; mezi průměry kol spojených řemenem a počtem obrátek atd. Zde je rovněž třeba předem pečlivě vysvětlit na rozmanitých příkladech žákům neznámý kvantitativní vztah mezi veličinami.

c) Jindy žákova nesnáz spočívá v tom, že si nedovede v mysli představit konkretní obsah úlohy a proto nemůže přistoupit k jejímu řešení. V tomto případě je užitečné si pomoci názornou ilustrací náčrtem nebo nákresem, zejména u úloh, ve kterých běží o pohyb, o určení vzdálenosti, o rozdělení celku na části a pod.

7. Můžeme užít rozličných způsobů k tomu, abychom pomohli žákům a naučili je vmýšlet se do obsahu úlohy:

a) ve většině případů, třeba že ne vždycky, je vhodné pročísí ukládanou úlohu dvakrát,[9]) při čemž při prvním čtení žáci pouze poslouchají, seznamují se s obsahem úlohy a při druhém čtení zapisují na tabuli a do sešitu;

b) zápis úlohy rovněž má posloužit jako pomůcka k poznání obsahu úlohy, k jejímu rozboru; jím se pomáhá vyjasnění závislosti mezi hodnotami danými v úloze a tím se přispívá k jejímu řešení. Zápis nemá být těžkopádný a proto nemá obsahovat slovní znění obsahu úlohy; čísla daná v úloze mají býti v zápise umístěna tak, aby už samo umístění pokud možno naznačovalo vztahy mezi nimi. Za tím účelem je někdy vhodný zápis daných čísel „do sloupce". Od zápisu otázky může někdy být upuštěno. Uvedeme příklad zápisu úlohy (sbírka, kap. II, č. 205): číslo úlohy se napíše na tabuli i do sešitu na okraj vlevo nahoře; úloha se čte po částech a rovněž po částech se provádí zápis: „Tři brigády dělníků opravovaly úsek silnice dlouhý 8400 m" (zápis); pokračuje se ve čtení: „První brigáda pracovala 108 hodin a opravila 24 m za hodinu" (zápis), dále: „Druhá brigáda pracovala 105 hodin a opravila 28 m za hodinu"(zápis). Položí se otázka: „Kolik metrů silnice zůstalo na třetí brigádu?" (ve třetím řádku dále do prava můžeme zapsat otazník, při zápisu do sloupce).

Zápis: č. 205	I	108 hod. po 24 m,
	II	105 hod. po 28 m.
	III	?
	Celkem.....	8400 m.

c) Když úloha je zapsána, je užitečné, ale není to závazné pokaždé, zopakovat se žáky její obsah. Jestliže vyvolanému žáku činí potíže souvislé opakování úlohy, můžeme mu pomoci k opětovnému

[9]) Je nebezpečí, že žáci očekávajíce druhé čtení, nebudou dosti pozorně sledovat, když se úloha čte po prvé.

sestavení jejího obsahu otázkami, řídíce se zápisem, při čemž jsou málo cenné otázky toho druhu jako: „O čem se mluví v úloze?“ „Co se praví?“ atd. K rekonstrukci znění úlohy č. 205 mohou posloužit následující otázky: „Kolik brigád spravovalo silnici?“ „Kolik hodin pracovala první brigáda a kolik metrů opravila za hodinu?“ atd.

Po zopakování znění úlohy přistoupíme k jejímu řešení.

Samostatné promyšlení úlohy je jednou z podmínek přispívajících k naučení řešit úlohy. Toho musí také učitel dbát při své práci. Při řešení ve třídě není vhodné spěchat s řešením úlohy bezprostředně po přečtení a zopakování znění; musíme dát žákům možnost, aby si promyslili plán řešení, potom jeden nebo dva žáci stručně sdělí, jak si načrtli plán řešení úlohy. Potom se může přistoupit k řešení úlohy na tabuli s pečlivým vysvětlováním všech dílů práce.

Opakujeme, jeden ze způsobů vyučování řešení úloh, námi naznačovaný, spočívá v tom, že učitel rozvíjí u žáků dovednost, aby si představili názorně co nejkonkretněji ty dané hodnoty a tu závislost, která je popsána v textu úlohy. Za tímto cílem někdy se užívá ilustrací, zejména při řešení úloh o pohybu obyčejně se užívá znázornění úsečkou. Na příklad k úloze (sbírka, kap. II, č. 389): „Ze dvou měst, vzdálených mezi sebou 243 km, vyjeli zároveň v opačných směrech dva cyklisté, z nichž jeden ujel 13 km za hodinu. Kolik kilometrů za hodinu ujel druhý, je-li známo, že se setkali po 9 hodinách od výjezdu?“

Zápis: č. 389.	I.	13 km za hod.;	9 hod.
	II.	?	9 hod.

Narýsuje se úsečka a šipkami se vyznačí směry pohybu. Při zápise dvě spolu souvisící dané hodnoty (13 km za hod. a 9 hod.) jsou zapsány do řádku vedle sebe, kdežto v textu úlohy jsou od sebe odtrženy, pročež je obtížnější uvědomit si jejich vzájemný vztah.

8. Jestliže žákům stále ještě působí potíže úlohy, ve kterých otázka není zřetelně oddělena od daných podmínek, jestliže nezískali na obecné škole dostatečný výcvik v rozboru textu úlohy, je nutné vybírat napřed za cvičení úlohy, ve kterých otázka je zřetelně oddělena od hodnot daných v úloze a umístěna na konci textu úlohy (jako v úloze č. 205); později se dávají a pomocí zápisu proanalysují

úlohy, ve kterých otázka stojí na začátku nebo uprostřed textu a je spojena s danými hodnotami dodatečnými podmínkami (jako na př. v úloze č. 389).

9. Žáci, jak známo, úspěšněji řeší úlohy „rozložené na řadu jednoduchých úloh", kterým budeme stručně říkat „rozložené" (ve kterých dané podmínky jsou uspořádány tak, jak to vyžaduje pořádek potřebných výkonů) nežli „nerozložené" (jejichž znění neodpovídá uvedenému pořádku).

Jestliže žáci nemají dostatečný výcvik v řešení „nerozložených" úloh a v tom spočívají potíže při řešení úloh, musí učitel vyplnit tu mezeru, tedy napřed změnit formulaci znění některých úloh, učinit je „rozloženými" a později řešit tytéž úlohy znovu v „nerozloženém" tvaru.

„Nerozložená" úloha (sbírka, kap. IV, č. 1157): „Může kočár jedoucí 10 km za hodinu a nacházející se ve vzdálenosti 200 m od železniční trati, přejeti přes koleje dříve, nežli se spustí závory, což se děje 2 minuty před průjezdem nákladního vlaku, je-li známo, že vlak je ještě 1350 m vzdálen od přejezdu a jede s polovinou normální rychlosti, jež činí 54 km za hodinu?"

Táž úloha v „rozloženém" tvaru: „Vlak jede s polovinou normální rychlosti, která činí 54 km za hodinu, a nachází se 1350 m od přejezdu. Přejezd se uzavírá 2 minuty před průjezdem vlaku. Kočár jedoucí 10 km za hodinu jest ve vzdálenosti 200 m od přejezdu. Může kočár přejet přes koleje dříve, než se spustí závory?"

V každém oddílu sbírky jsou úlohy „rozložené" i „nerozložené".

10. Uvedeme ještě, že aby se vypěstoval uvědomělý poměr žáků k podmínkám úlohy, navrhuje se někdy dávat úlohy jak přeurčené, tak i nedostatečně určené. Někdy se v úlohách zavádí zbytečná hodnota, na příklad ve výše uvedené úloze se může udat den a měsíc události, učitel sám může zavésti zbytečný údaj do znění úlohy. Ale nejpřirozenějšími úlohami tohoto druhu budou úlohy s konkretním obsahem předložené učitelem nebo žáky samými (viz Úvod ke kap. XII). Budiž na příklad úkolem určit, co bude stát vymalování nebo vyčalounování pokoje. Můžeme: a) žádat, aby žáci sami určili, jaké veličiny je nutno

znát pro řešení této úlohy a aby vyšetřili vhodné číselné hodnoty (úloha bez číselných údajů), b) udat rozměry stěn a čalounů, ale neudat rozměry oken a dveří, které nebudou vymalovány nebo vyčalouněny (úloha s nepostačujícími údaji); c) udat všecky potřebné rozměry, udat rozměry stěn i podlahy a rozměry předsíně atd. (úloha se zbytečnými údaji).

V každém oddílu sbírky jsou úlohy, v jejichž textu jsou souvisící spolu údaje sblíženy nebo naopak odděleny, ve kterých je otázka na konci nebo zase ve středu nebo na začátku. Nepovažujeme za nutné, aby se na střední škole řešily napřed jenom jedny z uvedených úloh a potom druhé. Upozorňujeme učitele na závislost obtížnosti úlohy od její slovní struktury a navrhujeme, aby se v případě potřeby (jestliže obsah složené úlohy je žákům nejasný) vybíraly napřed úlohy jednoduché co do struktury textu.

§ 4. Příklady řešení složené úlohy. Zápis

Úloha č. 205 byla zapsána výše (str. 329). Přistupujíce k řešení úlohy žáci mají nejdříve naznačit plán řešení. Pro sestavení plánu usuzujeme (ústně) takto: „Máme najít, kolik metrů silnice z celkového počtu metrů zbylo k opravě pro třetí brigádu[10]) a k tomu cíli potřebujeme vědět, kolik metrů silnice bylo opraveno prací první a druhé brigády; to si napřed vypočítáme“. Zápis řešení (podle otázek):

1. Kolik metrů silnice opravila první brigáda?

$$24 \,.\, 108 = 2592 \text{ (m)}$$

$$\text{I.}\quad \begin{array}{r} 24 \\ \times\; 108 \\ \hline 192 \\ 24 \\ \hline 2592. \end{array}$$

2. Kolik metrů opravila druhá brigáda?

[10]) Sestavení plánu začínáme analytickou methodou a potom řešíme úlohu syntheticky.

$$28 \cdot 105 = 2940 \text{ (m)}$$

2.

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 105 \\ \hline 140 \\ 28 \\ \hline 2940. \end{array}$$

3. Kolik metrů opravily první a druhá brigáda dohromady?

$$2592 + 2940 = 5532 \text{ (m)}$$

3.

$$\begin{array}{r} 2592 \\ +\ 2940 \\ \hline 5532. \end{array}$$

4. Kolik metrů silnice zbylo k opravě pro třetí brigádu?

$$8400 - 5532 = 2868 \text{ (m)}$$

4.

$$\begin{array}{r} 8400 \\ -\ 5532 \\ \hline 2868. \end{array}$$

Poznámky. 1. Celá práce (i zápisy i výpočty) má býti provedena plánovitě a přesně a jednotlivé jednoduché úlohy mají být očíslovány. Žáky musíme navykat, aby kontrolovali správnost řešení.

Jako příklad uvedeme úsudek týkající se první otázky (ústně): „Ježto první brigáda opravila za hodinu 24 m silnice a pracovala celkem 108 hodin, opravila za 108 hodin 108krát více než za 1 hodinu (108krát po 24 m). Tato (jednoduchá) úloha se řeší násobením: 24 . 108“ atd.

Zkouška: $2592 + 2940 + 2868 = 8400$ (m)

$$\begin{array}{r} 2592 \\ +2940 \\ 2868 \\ \hline 8400. \end{array}$$

Na žácích 5. třídy nemusíme požadovat pokaždé podrobný zápis řešení podobný výše uvedenému. Podrobný zápis požadujeme především: a) při samostatném žákovském řešení úloh ve třídě i doma a b) při řešení úloh, které činí žákům největší potíže (viz níže) proto, aby učitel mohl poznat myšlenkový pochod žákův a jak žák formuluje otázky jednoduchých úloh. Zejména není třeba, aby se na tabuli vždycky slovy zapisovaly otázky, protože ty musí zřetelně a hlasitě vyslovit žák u tabule a po něm opakovat učitel, aby každý žák ve třídě otázku slyšel a jí rozuměl. Často je vhodné zapisovat řešení úlohy s vysvětlením smyslu odpovědi na každou jednoduchou úlohu, na příklad:

1. 24 . 108 = 2592; 2592 m silnice opravila první brigáda;
2. 28 . 105 = 2940; 2940 m silnice opravila druhá brigáda;
3. 2592 + 2940 = 5532; 5532 m silnice opravily obě brigády;
4. 8400 — 5532 = 2868; 2868 m silnice zůstalo k opravě pro třetí brigádu.

V jednotlivých případech můžeme vůbec nepožadovat žádný slovní výklad v sešitech. Při řešení úlohy u tabule jsou výše uvedená vysvětlení závazná. Časté prohlížení zápisu úloh řešených žáky samostatně a dozírání na to, aby se žáci v sešitech přidržovali určitého pořádku zápisu výkonů, je závazné. Rovněž je závazné opravování chyb nejen početních, nýbrž i mluvnických. Mnohomluvné učitelem nepřipravené zapisování úsudků do sešitů je v aritmetice 5. třídy nepřípustné. Takové zapisování vede k velkému množství mluvnických chyb, k jejichž vymýcení učiteli aritmetiky nezbývá času. Když žáci ve třídě zapisují plán řešení úlohy, učitel buďto ukáže, jak se píší některá obtížná slova (v ruském textu dané úlohy jsou to slova „šosse“ (silnice) a „remontirovať“ [opravit]) nebo se zeptá některého slabšího žáka, jak se píší ta slova. Je vhodné napsat je na tabuli.

2. Aby se cvičila řeč žáků, umění vyjadřovat myšlenky, je užitečné dávat jim úlohy (k samostatnému zpracování doma) s podrobným slovním zápisem (v rozšířeném tvaru) všech otázek. To je také přípravou na řešení úloh s podrobným vysvětlováním.

PLÁN

1. Kolik metrů opravila 1. brigáda za 108 hodin, jestliže za hodinu opravila 24 m?

2. Kolik metrů opravila 2. brigáda za 105 hodin, jestliže za hodinu opravila 28 m?

3. Kolik metrů opravily obě brigády, jestliže první brigáda opravila 2592 m a druhá 2940 m? atd.

U výše uvedené úlohy za každou otázkou následovalo její řešení; ale je také možné všecky výpočty provádět teprve po sestavení celého plánu. Jestliže učitel požaduje od žáků podrobné písemné vysvětlení řešení úlohy, musí tuto práci zvlášť svědomitě připravit, aby nedocházelo ke zcela pochybeným zápisům. Je účelné u prvních případů řešení úloh s podrobným písemným vysvětlením napřed řešit úlohu ve třídě ústně s podrobným výkladem (jejž opakuje několik žáků). Aby se nezdržovalo školení lepších žáků, je možné, aby podrobně zapisovali slovní vysvětlení (u úloh pracovaných doma) již dříve, než k tomu přistoupí celá třída.

3. Je užitečné při řešení složených úloh sestavovat (se všemi nutnými vysvětlivkami) řešení úlohy ve tvaru „početního výrazu“ ukazujícího, s jakými čísly v jakém pořádku jaké výkony se mají provádět při řešení úlohy. Potom se provedou všecky výrazem naznačené výkony. U výše uvedené úlohy zápis řešení pomocí početního výrazu zní:

$$8400 - (24 \,.\, 108 + 28 \,.\, 105) = 2868.$$

Takový zápis připravuje žáky na chápání algebraických výrazů s písmeny.

4. Všech pokynů, které jsme uváděli o ústním nebo polopísemném počítání při rozboru jednotlivých výkonů, je třeba dbáti i při výpočtech, kterých je třeba pro řešení slovních úloh (zapisování do jednoho řádku při násobení a dělení jednociferným číslem; odčítání doplňováním a pod.).

5. Zápis a zkouška u typické složené aritmetické úlohy výše rozbírané, která zpravidla nečiní potíží žákům střední školy, může míti také jiný tvar, na příklad:

č. 205.

		Zkouška
I	108 hod. po 24 m	2592 m.
II	105 hod. po 28 m	+ 2940 m,
III	?	2868 m
Celkem	..... 8400 m	8400 m

$$\begin{array}{r} 24 \,.\, 108 = 2592 \\ \underline{28 \,.\, 105 = 2940} \\ 5532 \\ -\;\underline{8400} \\ 2868 \end{array}$$

2868; 2868 m silnice opravilo třetí družstvo.

Pojmenování

V různých methodikách a učebnicích aritmetiky se vyskytují různé vzory zápisu řešení slovních úloh s různým vyznačováním pojmenování.[11]) Proto není divu, že i ve školní praxi se setkáváme s nejrůznějšími zápisy. Nezdržíme se u veškeré různotvárnosti zápisů a všech vyznačení pojmenování a uvedeme pouze ty způsoby, které se nejčastěji vyskytují a mají to či ono zdůvodnění. Budiž úkolem ke 24 m přidat 35 m; psává se:

1. 24 m + 35 m = 59 m; 2. 24 + 35 = 59 m; 3. 24 + 35 = 59 (m);
4. 24 + 35 = 59; 59 m; 5. 24 + 35 = 59.

Poslední zápis je správný, ježto výkon provádíme s abstraktními čísly (toho si mají žáci býti vědomi), ale my považujeme za užitečné při řešení slovní úlohy zapisovat pojmenování, aby žák viděl cíl provedeného výkonu a věděl, co vypočítal a co vypočtená odpověď znamená. Proto je při řešení úloh lepší zápis výkonů doprovázený pojmenováním čísel. Ze čtyř ostatních tvarů zápisu, vyhovujících tomuto požadavku, jest zavrhnouti pouze druhý, protože tento zápis vypadá, jakoby sčítáním abstraktních čísel mohlo vzniknout pojmenované číslo nestejnorodé s danými čísly. Takový zápis je zejména rozšířen u dělení ve smyslu „rozdělování", na př. 120 : 8 = 15 dní, s čímž nemůžeme souhlasit. My považujeme za přijatelné pro školu zápisy 1., 3. a 4. při řešení úloh. Poslední dva zápisy nerozlišujeme, protože u obou jsou zapsány výkony s abstraktními čísly, ale u výsledku je udáno pojmenování, zdůrazňující žákovi smysl výsledku, ať už to pojmenování se píše odděleně[12]) či prostě vedle čísla v závorce. Ve zmíněných učebnicích pro 5. třídu v dřívějších dobách se užívalo zápisu 1., ve kterém pojmenování ukazující charakter veličin a prvků souborů, o něž běží v úloze, píší se u každého čísla. V této methodice se přidržujeme zapisování pojmenování ve tvaru 3. a 4., užívaném v Kiselëvově učebnici, které doporučujeme pro žáky.

Pokyn. V jednotlivých případech, když uvědoměle zavádíme do zápisu pojmenování, někdy podle smyslu úlohy pojmenování měníme. Na příklad, má se určit, kolik žáků je ve třídě, ve které je 17 chlapců a 14 dívek; píšeme vhodně

17 + 14 = 31 (žák) a pod.

---

[11]) Známý methodik A. I. Gol'denberg nebyl zastáncem zápisu pojmenování; S. I. Šochor-Trockij naproti tomu se vyjadřoval pro to, aby se pojmenování zapisovala.

[12]) To navrhuje K. P. Arženikov ve své methodice.

Jak zapisovat pojmenování v případech, ve kterých se počítá plošný obsah nebo objem, nebo se na základě obsahu nebo objemu určuje jeden rozměr? I tato otázka je v methodice aritmetiky sporná. V příručkách obyčejně se psává pro obsah $4\ \text{m} \times 1\frac{1}{2}\ \text{m}$ nebo pro objem $3\ \text{m} \times 4\ \text{m} \times 2\ \text{m}$; často vidíme zápisy $(4 \cdot 1\frac{1}{2})\ \text{m}$ nebo $(3 \cdot 4 \cdot 2)\ \text{m}$[13]); řidčeji se vyskytují zápisy $(4 \cdot 1\frac{1}{2})\ \text{m}^2$ nebo $(3 \cdot 4 \cdot 2)\ \text{m}^3$. Při zápise výkonu, kterým se určuje obsah (nebo objem), vyskytuje se všech 5 výše uvedených způsobů a někdy také

6. $4\frac{1}{3}\ \text{m}^2 \cdot 2 = 8\frac{2}{3}\ \text{m}^2$ [14]) nebo 7. $(4\frac{1}{3} \cdot 2)\ \text{m}^2 = 8\frac{2}{3}\ \text{m}^2$.

Máme-li být důslední, tu v souhlase s obecným způsobem zapisování přijatým v Kiselëvově učebnici aritmetiky musíme prakticky při řešení úloh vyžadujících výpočet obsahu nebo objemu rozhodnout se pro zápis

$4\frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{5} = 13{,}6\ (\text{m}^2)$ nebo $4\frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{5} = 13{,}6$; $13{,}6\ \text{m}^2$;[15])

takový zápis doporučujeme.

Při vysvětlování zápisu výpočtu obsahu plochy a objemu tělesa:

1. připomínáme žákům, že v tomto případě bezprostřední měření nahrazujeme nepřímým měřením, výpočtem velikosti plošné nebo prostorové na základě přímo měřených rozměrů plochy nebo tělesa; 2. zdůrazňujeme význam početního určení obsahu a objemu v těch případech, když bezprostřední měření je obtížné nebo když se bezprostřední změření obsahu nebo objemu plošnými a prostorovými jednotkami nedá přesně provést (obsah kruhu a pod.); 3. vysvětlíme, že při nepřímém měření (výpočtem) nečítáme plošné nebo prostorové jednotky skutečně umístěné v dané ploše nebo tělese, nýbrž jen počítáme, kolikrát by bylo možné klást jednotku plošnou nebo prostorovou (nebo kolik takových jednotek nebo jakou část a kolikrát) v řadě podél délky, kolik takových řad připouští umístit šířka (a potom při objemu, kolik takových vrstev připouští umístit výška).

Methody při vyučování o slovních úlohách

Při probírání způsobu vyučování o slovních úlohách jsme uváděli určitý plán, kterého je radno se držet při vyučování: 1. čtení nebo

13) Tento zápis je hrubě nesprávný.

14) Takto se zapisuje na obecné škole.

15) Jeden z nejrozšířenějších v praxi způsobů je zápis $4\frac{1}{4}\ \text{m} \cdot 3\frac{1}{5}\ \text{m} = 13{,}6\ \text{m}^2$. Ve svém článku „Dajëtli proizvedenije futa na fut kvadratnyj fut“ (přeloženo v časopise „Fiz. mat.“ 1928, č. 1 [2]) anglický matematik a pedagog S. W. Meyers odpovídá na otázku jím položenou kladně, ježto podle jeho názoru zápis 3 ft . 3 ft = 9 sq. ft. uzavírá v sobě jednak operaci násobení 3 . 5, jednak podmínku, že jsou-li oba rozměry vyjádřeny v téže délkové jednotce, jest za příslušnou plošnou jednotkou brát čtverec oné jednotky. My považujeme tento výklad za nepřesvědčivý a uvedený zápis za nežádoucí pro žáky 5. třídy, protože otázka rozměrů není předmětem vyučování v 5. třídě (v praxi se vyskytují pouze výrazy „trudodni“, „čelovekodni“ a řidčeji „kilogramometry“).

poslouchání znění úlohy s důkladným objasněním jejího obsahu za pomoci zápisu a opakování; 2. určitý předběžný rozbor vedoucí k tomu, které hodnoty se mají postupně počítat a jak tyto hodnoty přispívají k nalezení žádané odpovědi; 3. rozčlenění složené úlohy na řadu postupně řešených jednoduchých úloh; stanovení, kterého výkonu vyžaduje řešení každé jednoduché úlohy a provedení toho výkonu; 4. zkouška správnosti.

V dalším uvádíme ještě v určité soustavnosti některé typy úloh (viz také úlohy o úměrnosti veličin) pro orientaci a plánovitost při vyučování řešení úloh. Je třeba se zmínit o pracích amerických pedagogů C. Washburna a R. Osborna,[16]) kteří v souvislosti s úspěchy experimentální pedagogiky v posledních letech podrobili experimentálnímu zkoumání (za stejných podmínek) 3 methody ve vyučování řešení úloh: 1. tu methodu, že každý žák řeší mnoho úloh, při čemž není žádný předběžný přípravný výcvik, nýbrž udávají se pouze vzory řešení úloh a žádá se, aby žák rozřešil co největší počet úloh. 2. druhá methoda ve vyučování řešení úloh spočívá v důkladném předběžném výcviku žáků, v rozboru každé úlohy před jejím řešením a v učení řešit každou úlohu podle určitého postupu a 3. třetí methoda spočívá v tom, že se žáci cvičí v rozpoznávání analogie řešených složených a obtížných úloh s těmi jednoduchými a lehkými úlohami, jejichž řešení je žákům běžné. Výsledek pokusu byl ten, že nejlepší úspěch měli ti žáci, kteří řešili největší počet úloh, kterým byla poskytnuta největší samostatnost při práci. Vskutku touto methodou se docílí toho, že se žáci co nejdůkladněji vmýšlejí jak v obsah úlohy, tak i ve způsoby jejího rozřešení. Zajisté při vyučování žáků řešení úloh má ohromný význam praxe v řešení velmi značného počtu úloh, ale nemenší význam má druhá methoda, která zavádí a formuje pevný a určitý plán řešení a učí uvědomělému užívání patřičných výkonů. Ona slouží jako předběžný stupeň k samostatnému řešení úloh žákem, ona hraje velikou roli při vyučování slabších žáků, ona učí technice řešení a zápisu. Při vyučování řešení úloh je radno užívat všech tří method a brát na pomoc různé pedagogické způsoby, podrobně rozebrané v předešlých paragrafech.

---

[16]) „Novoje v amerikanskoj metodike arifmetiki" (přeloženo z angl.), GIZ, 1932.

§ 5. Klasifikace úloh řešených v kurse aritmetiky

I. Některá kriteria pro klasifikaci (úlohy ryze aritmetické a algebraické)

V methodické literatuře aritmetické je mnoho pokusů klasifikovat úlohy řešené v kurse aritmetiky pomocí 4 aritmetických výkonů s hlediska jejich obsahu, způsobů řešení a j. Tak všecky zde dosud rozbírané úlohy, jednoduché i složené, obyčejně se nazývají úlohami „ryze aritmetickými" na rozdíl od druhé skupiny úloh t. zv. „obmyslných",[17]) které se v kurse aritmetiky obyčejně nazývají „algebraickými" nebo „typovými". První z ruských methodiků, který se pokusil o klasifikaci slovních úloh, byl A. J. Gol'denberg, který nazval ryze aritmetickými ty úlohy, ve „kterých závislost hledaného čísla na číslech daných je tak jednoduchá, že se jeví možným obsáhnout jaksi naráz nebo skoro naráz ty výkony, jejichž provedení je nutné a stačí k určení neznámého čísla". Dále nazval úlohami „algebraického" rázu takové úlohy, ve kterých závislost mezi hledaným číslem a danými čísly není tolik „průzračná".

Znak uvedený Gol'denbergem, zavádějící subjektivní ocenění „jednoduchosti", „průzračnosti", nemohl posloužit jako určité kriterium pro klasifikaci slovních úloh.[18])

Obtížnost řešení „algebraické" úlohy aritmetickými methodami často spočívá v tom, že k jejímu rozřešení je nutné provádět výkony s číselnými hodnotami veličin, které nejsou v bezprostřední vzájemné závislosti, na rozdíl od situace, kterou jsme měli při řešení výše rozbíraných tak zvaných ryze aritmetických úloh. Při řešení „algebraických" úloh nastává potřeba uchylovat se k „předpokladu" nebo „připuštění". Proto řešení těchto úloh vyžaduje od žáka důvtipu a nezřídka učitelova návodu k užití určité methody řešení (methody řešení úloh určitého „typu").

Na příklad budiž dána úloha: „Byly rozdány 432 sešity mezi 56 žáků dvou postupných ročníků. Každý žák vyššího ročníku dostal

---

[17]) „Sinnreich" je nazval Diesterweg.

[18]) Některé klasifikace slovních úloh jsou uvedeny v „Metodike arifmetiky" od F. I. JEGOROVA a v „Očerkach po metodike arifmetiki" od F. A. ERNA.

po 10 sešitech a každý žák nižšího ročníku po 6 sešitech. Kolik žáků bylo v každém z obou ročníků?" Jak známo, je k řešení této úlohy třeba: 1. předpokládat (připustit), že všichni žáci dostali po 6 sešitech (nebo po 10 sešitech) a 2. provést výkon s čísly 6 a 56, která ve skutečnosti nejsou v bezprostřední vzájemné závislosti.

Řešení:

1. 6 . 56 = 336 (sešitů),
2. 432 — 337 = 96 (sešitů)
3. 10 — 6 = 4 (sešity)
4. 96 : 4 = 24, 24 žáci vyššího ročníku,
5. 56 — 24 = 32, 32 žáci nižšího ročníku.

F. A. Ern, vycházeje z právě uvedeného a odvolávaje se také na Arženikova, považuje za charakteristický znak úloh „algebraického" typu „methodu řešení pomocí předpokladu, zaměňujícího danou úlohu jinou úlohou snáze řešitelnou obyčejnými aritmetickými methodami". Ale ani toto kriterium nemůžeme bez výhrad vzíti za základ klasifikace slovních úloh, protože je nemálo takových úloh, které můžeme řešit i pomocí předpokladu i bez něho. Budiž na příklad dána úloha 2: „Dělník vydělal za každý pracovní den 19 r. 25 k. a průměrně vydal denně za byt, stravu a pod. 14 r. 50 k. Za leden mu zůstalo 70 r. 25 k. Kolik pracovních dní bylo v lednu?"

Řešení s předpokladem.

1. 19,25 — 14,50 = 4,75; 4 r. 75 k. zůstalo dělníkovi koncem každého pracovního dne;

2. 4,75 . 31 = 147,25; 147 r. 25 k. by zůstalo dělníkovi za celý leden při předpokladu, že všecky dny byly pracovní;

3. 147,25 — 70,25 = 77; ve skutečnosti zůstalo dělníkovi za měsíc o 77 r. méně, t. j.

4. 77 : 19,25 = 4; byly 4 dny v lednu, ve kterých se nepracovalo;

5. 31 — 4 = 27; 27 pracovních dní.

Řešení bez předpokladu.

1. 14,5 . 31 = 449,5; 449,5 r. utratil dělník za leden;

2. 449,5 + 70,25 = 519,75; 519,75 r. vydělal dělník za leden;

3. 519,75 : 19,25 = 27; 27krát je obsažen denní výdělek dělníků v celkovém měsíčním výdělku; 27 pracovních dní.

Ačkoli kriterium předložené F. A. Ernem pro klasifikaci slovních úloh, týkající se úloh „algebraického" rázu, nelze považovat za nesporné, co jest ve skutečnosti jedním z charakteristických znaků a v dalším k němu přihlížíme.

2. Rozdělení úloh podle typů

Po stručné zmínce o některých pokusech klasifikace úloh řešených v kurse aritmetiky je třeba říci něco také o rozdělení úloh podle „typů" ve mnoha sbírkách z předrevoluční doby, podobném rozdělení úloh podle typů, které se vyskytuje v dávných příručkách. Rozdělení úloh mělo za cíl zavésti určitý systém do vyučování řešení úloh; to bylo zajisté velice žádoucí. Ale realisace tohoto cíle nebyla vždy zdařilá. Za starodávna autoři dělili úlohy na skupiny podle vnějších znaků obsahu, na příklad v aritmetice Magnického byl zvláštní typ úloh: „trojitý obchod zeleninou v krámcích s firmou".[19]) Kriteria pro rozdělení úloh podle typů v aritmetických sbírkách úloh předrevoluční periody jsou rovněž velice různotvárná, nesoustavná; některé úlohy se sjednocují do jednoho typu podle svého obsahu nebo dokonce podle určitého termínu vyskytujícího se v obsahu; jiné se sjednocují podle způsobu řešení společného všem úlohám toho typu, třetí podle takového či onakého znaku a u čtvrtých ani autoři sami nemohou charakterisovat společný znak a pod.

Velkým nedostatkem zavedení „typů" úloh do vyučování aritmetice bylo to, že žáci se snažili při řešení úloh určitého typu si zapamatovat a užívat methody jim ukázané, místo aby ji uvědoměle řešili vnikajíce do vztahů veličin vyskytujících se v úloze.

Dále poukazujeme na nezdar jiných pokusů klasifikovat aritmetické úlohy. Ale z pedagogického hlediska soustavný výběr úloh podle určitých znaků jest považovati za užitečný ve sbírce úloh pro učitele

[19]) O výběru úloh v „Aritmetice" Magnického doporučujeme pročíst podle knihy „Istorija metodičeskich idej po arifmetike v Rossii XVIII v.". GALANIN, Moskva, 1915.

a v methodické příručce pro něho. Znakem dělení úloh podle typů má býti v první řadě postupné stoupání složitosti těch závislostí mezi danými a hledanými hodnotami, které se vyskytují v úloze a v souvislosti s tím rozdílnost způsobu, jak se úloha řeší, methody řešení (ne rozdílnost v konkretním obsahu, viz níže). Jestliže učitel ví, které způsoby řešení, které methody činí žákům potíže, musí se k nim vracet a vybírat příslušné úlohy podle zkušenosti získané pozorováním práce žáků. Mezi uvedenými „typy" úloh ve sbírkách byly úlohy na tak zvaná „pravidla"; „pravidlo procentové", „pravidlo dělení v daném poměru", „trojčlenné pravidlo" atd.

3. Úlohy na speciální pravidla

I v učebné osnově i ve sbírkách schválených pro střední školu v přítomnosti jsou doplňující kapitoly „Úlohy o úměrných veličinách" a „Úlohy o procentních výpočtech", rozbírané v příslušných kapitolách této „Methodiky". Mnozí methodikové se vyjadřují proti oddělení uvedených úloh ve zvláštní oddíly, protože příslušné úlohy je možné rozdělit do celého kursu aritmetiky, zejména proto, že jediná závislost mezi veličinami probíraná v úlohách v kurse aritmetiky je úměrnost veličin a vedle základních úloh na sčítání a odčítání při řešení všech úloh mají žáci co dělat s úměrností veličin. A skutečně na příklad úloha: „48 dělníků vykopalo příkop za 60 dní. Za kolik dní by vykopalo týž příkop 60 dělníků?" může býti umístěna v oddílu „Násobení a dělení celých a lomených čísel" i v oddílu „Úměrnost veličin". Je pravda, že žáci, když řeší podobné úlohy ve všech oddílech aritmetiky, nemají tušení, že řeší úlohy na „zvláštní pravidla" a obejdou se bez nich, ale zároveň také nemají tušení, že existují úměrné veličiny a že užívají úměrnosti, která se neprojevuje zřetelně v textu. Totéž lze říci o úlohách s procentními výpočty atd. Hlavní omyl zastánců odstranění těchto kapitol z kursu aritmetiky spočívá v tom, že to lze učinit „beze škody věci". V úvodu ke kapitole o procentech jsme vyložili podstatnou ztrátu, která vzniká škole rozptýlením úloh na procentní výpočty bez závěrečné jejich systemisace; při řešení úloh v oddíle „úměrné veličiny" se systemisují a dostávají racionálnější formu methody řešení úloh dříve probíraných.

4. Klasifikace úloh podle typu příslušné rovnice

Výše jsme poukázali na nezdar některých pokusů vymezit rozdíl mezi ryze aritmetickými úlohami a úlohami „algebraického" rázu v kurse aritmetiky. Bylo učiněno mnoho jiných pokusů o vymezení těchto dvou skupin úloh.

Vycházejíce z toho, že každou úlohu lze řešit rovnicí, mnozí autoři klasifikují úlohy podle typu té rovnice, na jejíž řešení lze přivést řešení dané úlohy.

S. I. Šochor-Trockij udává toto kriterium: ryze aritmetickými nazýváme úlohy, při jejichž řešení pomocí neznámé označené x se neprovádí podle podmínek úlohy žádný výkon nebo se provádí pouze jeden výkon, jehož provedení vede k určení neznámého čísla. Ostatní úlohy patří k úlohám algebraického rázu. Ale ani kriterium, které uvádí Šochor-Trockij, nestanoví klasifikaci úloh, protože způsob sestavení rovnice pro řešení libovolné úlohy není určitý, nýbrž závisí na postupu usuzování. Usuzujeme-li jedním způsobem, můžeme zařadit úlohu mezi ryze aritmetické a usuzujeme-li jiným způsobem, zařadí se táž úloha mezi algebraické".[20]) Ale ovšem tak zvané aritmetické řešení úloh zvaných „algebraickými" je v podstatě řešení rovnic[21]) bez užití obvyklých method řešení, pouze na základě přímého usuzování, na základě „zdravého rozumu". Obtížnost řešení tak zvané „algebraické" úlohy aritmetickým způsobem většinou roste s počtem těch rovnic a s množstvím potřebných úprav těch rovnic, pomocí kterých lze úlohu řešit algebraicky.

V práci I. Aleksandrova: „Metody rešenij arifmetičeskich zadač" (předrevol. vydání) je učiněn první pokus systemisace slovních úloh podle method jejich řešení. Všecky úlohy se tu třídí na dvě skupiny:

1. úlohy, ve kterých jsou přímo nebo nepřímo naznačeny výkony, které se mají provésti s danými čísly a 2. úlohy, ve kterých se vyskytuje

---

[20]) Úloha: „Určete podíl při dělení, je-li dělenec roven 115, dělitel 18 a zbytek 7";

řešení prvé: $x = \dfrac{115 - 7}{18}$;

řešení druhé: $x \cdot 18 + 7 = 115$.

[21]) To platí o methodice a sbírce úloh samého Šochor-Trockého.

řada výkonů s neznámým číslem; výsledek těchto výkonů je znám; přitom I. Alexandrov nenazývá ty úlohy „aritmetickými" a „algebraickými". Ovšem tyto termíny nejsou nutné, jsou však vhodné pro stručnost mluvy.

Chceme-li charakterisaci rovnicemi, tu můžeme říci, že úlohy prvé skupiny I. Alexandrova mají tvar $x = f(a, b, c, \ldots, m)$ a úlohy druhé skupiny $f(x, a, b, c, \ldots, m) = 0$.[22])

V dalším rozbíráme methody řešení složených úloh ryze aritmetických i „algebraických" v kurse aritmetiky.

§ 6. Methody řešení slovních úloh

I. Úlohy ryze aritmetické (jednoduché i složené)

K ryze aritmetickým úlohám v oddílech „Celá čísla" (sbírka úloh, kap. II), „Obyčejné zlomky" (sbírka, kap. IV) a „Desetinné zlomky" (sbírka, kap. V) řadíme:

1. všecky jednoduché úlohy řešené jedním ze čtyř výkonů (viz kap. II)

$$x = a + b; \; x = a - b; \; x = a \,.\, b; \; x = \frac{a}{b}.$$

Obrácené jednoduché úlohy (neboli úlohy formulované nepřímo) rovněž nazýváme ryze aritmetickými:

$$x \pm a = b; \quad a \pm x = b; \quad x \,.\, a = b; \quad \frac{x}{a} = b; \quad \frac{a}{x} = b.$$[23])

2. K ryze aritmetickým úlohám složeným řadíme úlohy na 2, 3 atd. výkony tvaru:

$x = a \pm b \pm c$ (úlohy na sčítání a odčítání);
$x = a \,.\, b \,.\, c$ (úlohy na násobení);

dále úlohy na tři první výkony tvaru:

$x = a \pm bc$	$x = ab + cd + e$
$x = (a \pm b)\, c$	$x = ab - (cd + ef)$
$x = (ab \pm cd)\, m$	$x = a - (b + c + d) \,.\, m$
$x = (a \pm b)\, c \pm d$	atd.;

[22]) I. Alexandrov ve své práci neuvádí žádné rovnice.

[23]) Tyto úlohy podle I. Alexandrova se řadí k úlohám algebraického rázu v kurse aritmetiky.

posléze úlohy, v nichž se vyskytuje dělení zároveň s ostatními výkony:

$$x = c : (a : b) \qquad x = (a : b) : (c : d)$$

$$x = a : \left(\frac{a}{b} + c\right) \qquad x = \frac{ab}{cd}$$

$$x = (a : b) \,.\, c \qquad x = \frac{abc}{d}$$

$$x = \frac{ab}{c} \qquad x = \frac{abc}{def} \text{ a pod.}$$

V methodické literatuře aritmetiky se vytyčoval požadavek systemisace ryze aritmetických úloh podle „výkonů a počtu výkonů“.[24]) Ve větší nebo menší míře tato myšlenka je provedena v každé sbírce úloh.[25])

Při výběru úloh pro žáky učitel má vědět, že pro stupeň obtížnosti řešení úlohy má velmi malý význam počet výkonů potřebných k jejímu řešení nebo formule, na kterou řešení vede. Tak na rozbor úlohy řešení dvěma výkony, z nichž oba jsou dělení, tedy na typ $a : (b : c)$ nebo prvý výkon je násobení a druhý dělení, tedy $(a \,.\, b) : c$. žáci námi zkoumaní potřebovali dvojnásobnou dobu než na řešení úlohy se 4 nebo 5 výkony, ze kterých 3 jsou násobení a jeden sčítání se třemi sčítanci, tedy $ab + cd + ef$. Úlohy řešené touž formulí týmž počtem výkonů, rovněž nikterak nebývají všecky stejně obtížné, na př. v případě úloh odpovídajícího formulím $a : (b : c)$ nebo $(a : b) : c$ je první typ obtížnější než druhý; u každé z těchto formulí je úloha v případě, že obě dělení odpovídají na otázku: „kolikrát je jedno číslo obsaženo v druhém“ značně těžší nežli v případě, že se týchž výkonů užívá k rozdělení čísla na daný počet rovných částí a pod.

Obtížnost úlohy závisí na tom, jak žáci chápou závislost mezi veličinami vyskytujícími se v úloze, na reálnosti obsahu úlohy, na charakteru úlohy (je-li to úloha abstraktní, úloha vzatá ze života, úloha geometrického a pod. obsahu).

---

[24]) Agap'jevův článek „Pedagogičeskij sbornik“ srpen 1902: Podle této systemisace mají býti 24 typy (kombinace) úloh se dvěma výkony, 145 typů úloh na 3 výkony atd.

[25]) Viz úlohy ve sbírce v kap. II, IV, V pod záhlavím „Úlohy na sčítání, odčítání a násobení“, „úlohy na všecky 4 výkony“ a j.

2. Způsob řešení složených „ryze aritmetických“ úloh

1. Ve školní praxi složené aritmetické úlohy obyčejně se třídí podle obsahu: úlohy na směsi, na pohyb, na společnou práci a pod.

Úloha 1. „Byla sestavena směs dvou druhů cukrovinek; 1 kg prvního druhu cukrovinek stojí 13 rub. Určit, co stojí 1 kg cukrovinek druhého druhu, je-li známo, že bylo koupeno po 9 kg každého z obou druhů a že za celý nákup byly zaplaceny 243 rub.“

Úloha 2. „Ze dvou míst vzdálených jedno od druhého 243 km vyjeli současně proti sobě dva cyklisté, z nichž jeden jel průměrnou rychlostí 13 km za hodinu. Kolik kilometrů za hodinu ujel druhý, je-li známo, že se potkali 9 hodin po začátku jízdy?“

Úloha 3. „Dva dělníci zhotovili za 9 pracovních hodin 243 kusy výrobku. Jeden z nich zhotovil 13 výrobků za hodinu. Kolik kusů zhotovil za hodinu druhý dělník?“

Číselná formule řešení je u všech tří úloh táž:

$$\frac{243 - 13 \,.\, 9}{9} = 14; \ \ 14 \text{ rub.}; \ 14 \text{ km}; \ 14 \text{ kusů.}$$

K řešení libovolné z těchto úloh je třeba provésti tytéž 3 výkony v témž pořádku. Je jasné, že není důvodu klasifikovat tyto úlohy podle obsahu; na čem záleží, je způsob, methoda řešení. Ale při vyučování řešení úloh, zejména při objasňování kterékoli methody řešení, je užitečné probírat úlohy rozmanitého obsahu, aby žáci hlouběji vnikli do methody řešení a lépe si ji osvojili.

2. Větší složitost složených úloh řešených v 5. třídě při srovnání s obecnou školou spočívá v tom, že se řeší úlohy: 1. s několikacifernými čísly, 2. nejenom s celými, nýbrž i s lomenými čísly, 3. řeší se úlohy vyžadující většího počtu výkonů. Na příklad úloha 4: „Ze dvou míst vzdálených jedno od druhého 576 km, vyjely proti sobě dva vlaky, z nichž jeden projel trať dlouhou 210 km za každé $3\frac{1}{2}$ hodiny a šest hodin po začátku své jízdy, ve 20 hod. 55 min. se setkal na jedné stanici s druhým vlakem, jehož jízda začala v $17\frac{11}{12}$ hodin. Kolik kilometrů za hodinu ujel druhý vlak?“

Řešení: $\frac{576 - 6 \,.\, 60}{3} = 72$ (km), kde při srovnání s úlohou 3 se musí provésti předem ještě tyto pomocné výpočty:

$$210 : 3\frac{1}{2} = 60 \text{ (km)}; \quad 20 \text{ hod. } 55 \text{ min.} = 20\frac{11}{12} \text{ hod.}; \quad 20\frac{11}{12} - 17\frac{11}{12} = 3 \text{ (hod.)}.$$

Kdyby v úloze 4. místo údaje „šest hodin po začátku jízdy“ bylo řečeno, v kolik hodin vyjel první vlak, tu by bylo nutné provésti ještě jeden výpočet a rovněž tak kdyby bylo řečeno, že doba jízdy prvního vlaku je k-krát větší než doba jízdy druhého nebo o k hodin větší nebo že tvoří $k\%$ doby jízdy druhého vlaku.

V těchto případech, t. j. při řešení úloh navzájem podobného obsahu, stupeň složitosti řešení je určen počtem výkonů.

Učitel může zvýšit složitost úlohy, která je v sbírce, doplňujícími podmínkami a obráceně, jestliže řešení úlohy ze sbírky působí žákovi potíže, učitel může provésti částečný výpočet a předložit mu k řešení nejprve zjednodušenou úlohu, a potom se žák může vrátit k řešení úlohy ze sbírky.

3. V převážné většině případů je nutné požadovat od žáků, aby po řešení úlohy provedli zkoušku správnosti odpovědi. Přitom žák vlastně sestavuje a řeší novou úlohu, ve které nalezená hodnota se bere za danou a jedna z původně daných za neznámou. Je užitečné učit žáky, aby formulovali znění této nové úlohy.

Učitel může změnit tvar hořejších úloh 1., 2., 3. a úloh obdobných (se 3 až 4 výkony) tak, že libovolnou z daných hodnot zvolí za neznámou a odpověď původní úlohy považuje za danou. Tato práce přispívá k lepšímu porozumění vyšetřované závislosti, ježto na příklad v úlohách „o pohybu“ závislost dráhy na rychlosti a době žáci chápou snadno, ale obrácená úloha, která vyžaduje určit závislost rychlosti na době, za kterou se urazí určitá dráha, působí žákům značné potíže.

Methoda přechodu k jednotce

Při řešení „ryze aritmetických“ úloh velmi často máme co dělat s veličinami, mezi nimiž je vztah přímé a nepřímé úměrnosti. Tyto úlohy žáci v pozdějším kurse aritmetiky po probrání látky o úměrnosti veličin a o sestavování úměr budou řešit podle určitého pravidla jako úlohy na „jednoduchou“ a „složenou trojčlenku“. Při probírání násobení a dělení čísel celých a lomených řeší žáci tytéž úlohy úsudkem, methodou společnou všem úlohám tohoto druhu, která se nazývá methodou „přechodu k jednotce“ (při přímé úměrnosti vyšetřovaných veličin se provádí nejdříve dělení a potom násobení, při nepřímé úměrnosti obráceně).

Úlohy. 1. Na soustruhu bylo za 7 hodin vyrobeno 56 šroubů. Kolik šroubů se vyrobí na témž soustruhu za 12 hodin?

Řešení. $(\frac{56}{7} \cdot 12)$ šroubů $= 96$ šroubů.

2. Na vytápění domu bylo dovezeno topivo na 80 dní při spotřebě 525 kg za den. Na kolik dní vystačí totéž topivo při denní spotřebě 700 kg?

Řešení. $\frac{525 \cdot 80}{700}$ dní neboli $\frac{3}{4} \cdot 80 = 60$ (dní).

Podrobnosti o řešení uvedených úloh a o potížích žáků při vysvětlování viz kap. XIII „Úměrné veličiny“.

Methoda poměrů

Při probírání výkonů s lomenými čísly je možno řešiti tytéž úlohy „methodou poměrů“.

Řešení. 1. Doba práce se soustruhem se zvětšila v poměru $\frac{12}{7}$. Souhlasně (v témž poměru) se změní (zvětší) počet vyrobených šroubů.

Odpověď: $(56 \cdot \frac{12}{7})$ šroubů; 96 šroubů.

2. Denní spotřeba topiva se změnila (zvětšila) v poměřu $\frac{700}{525}$ neboli $\frac{4}{3}$. Počet dní se souhlasně zmenší (nepřímá úměrnost).

Odpověď: $(80 \cdot \frac{3}{4})$ dní neboli $(80 : \frac{4}{3})$ dní.

V posledním případě úloha (s nepřímo úměrnými veličinami) se řeší dvěma výkony dělení.

„Methody poměru“ účelně užíváme tehdy, když methoda „přechodu k jednotce“ není uspokojivá vzhledem k pomocným hodnotám veličin (viz kap. XIII, § 4 „Úlohy na trojčlenku“).

Methoda zavedení smluvené jednotky

Ke složeným aritmetickým úlohám se řadí úlohy o „společné práci“ nebo úlohy o „nádržkách“. Tyto úlohy mají historický význam a ve sbírkách úloh předrevoluční periody zaujímaly značné místo. Methoda, kterou se tyto úlohy řeší v kurse aritmetiky lomených čísel — „zavedení smluvené jednotky" — má velký vzdělávací význam a je přípravou na řešení podobných úloh methodou rovnic.

Úloha Lacroixova: (Lacroix, známý francouzský matematik 19. století, autor řady velmi populárních učebních příruček z elementární matematiky): „Jedna kašna naplní nádrž za $2\frac{1}{2}$ hodiny a druhá za $3\frac{3}{4}$ hodiny. Za jak dlouho se naplní nádrž oběma kašnami zároveň?" Odp. za $1\frac{1}{2}$ hodiny.[26])

Řecká úloha: „Jsem bronzový lev; dva proudy vytékají z mých očí, jeden z mých úst a ještě jeden z mé nohy. Mé pravé oko naplní nádrž za dva dni, mé levé oko za tři dni a má noha za čtyři dni; šest dní postačí k tomu, aby se naplnila z mých úst. Potekou-li zároveň všecky prameny i z očí i z nohy i z úst, za kolik hodin se naplní nádrž?" Odp. : za $4\frac{4}{61}$ hod. $\approx$ 4 hod. 4 min.

Úloha 1. „Ze dvou míst vzdálených jedno od druhého 105 km vyjeli současně proti sobě dva cyklisté. Jeden projede celou dráhu za 8 hodin a druhý za 7 hodin. Ptáme se, za kolik hodin po začátku jízdy se potkají?"

Plán a řešení.

1. Kolik km ujel za hodinu první cyklista)?

$$105 : 8 = 13\frac{1}{8} \text{ (km)}$$

2. Kolik km ujel za hodinu druhý cyklista?

$$105 : 7 = 15 \text{ (km)}$$

3. O kolik km se za hodinu sobě přiblíží oba cyklisté?

$$15 + 13\frac{1}{8} = 28\frac{1}{8} \text{ (km)}$$

4. Za kolik hodin se potkají cyklisté?

$$105 : 28\frac{1}{8} = \frac{105 \cdot 8}{225} = \frac{56}{15} = 3\frac{11}{15} \text{ (hod.)}.$$

Úloha 2. „Ze dvou míst vyjeli zároveň proti sobě dva cyklisté. Jeden projede celou dráhu za 8 hodin a druhý za 7 hodin. Ptáme se, za kolik hodin po začátku jízdy se potkají?"

Plán a řešení.

1. Jakou část dráhy ujel za hodinu první cyklista?

$$\frac{1}{8} \text{ (dráhy}$$

2. ... druhý cyklista?

$$\frac{1}{7} \text{ (dráhy)}.$$

3. O jakou část celé dráhy se za hodinu sobě přiblíží oba cyklisté?

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{7} = \frac{15}{56} \text{ (dráhy)}$$

4. Za kolik hodin se potkají?

$$1 : \frac{15}{56} = \frac{56}{15} = 3\frac{11}{15} \text{ (hod.)}.$$

Odpověď je táž: za 3 hod. 44 min. po začátku jízdy.

---

[26]) G. N. Popov, „Sbornik istoričeskich zadač", úloha č. 437.

Úloha 3. „960 knih se má svázat v době co nejkratší. Jedna knihařská dílna mohla by provésti tu práci za 16 dní, druhá za 24 dni a třetí za 48 dní. Práce byla svěřena všem třem dílnám dohromady. Za kolik dní byla práce hotova?“

Úloha 4. „Objednávce vazby knih může jedna knihařská dílna vyhovět za 16 dní, druhá za 24 dni a třetí za 48 dní. Objednávka byla svěřena všem třem dílnám dohromady. Ve které nejkratší lhůtě může býti objednávka vyřízena?“

Řešení.

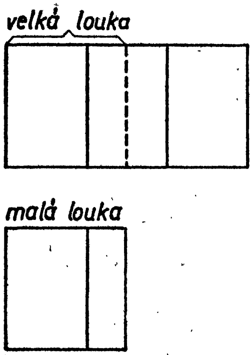
$$\frac{960}{960:16+960:24+960:48}=\frac{960}{60+40+20}=\frac{960}{120}=8\ \text{(dní)}.$$

$$\frac{1}{\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}}=\frac{1}{\frac{6}{48}}=\frac{1}{\frac{1}{8}}=8\ \text{(dní)}.$$

Srovnávajíce znění úloh 1 a 2, 3 a 4, upozorníme žáky na to, že v úlohách 1 a 3 je udána velikost celé dráhy nebo celé objednávky (105 km, 960 knih); v úlohách 2 a 4 tyto velikosti nejsou udány; velikost dráhy nebo objednávky je tu vzata za jednotku. Formulace úlohy je jiná v případech 2 a 4 než v případech 1 a 3. Čísla 105 a 960 jsou zbytečné údaje; je jich třeba při řešení úloh v oboru celých čísel.

(Pro práci mimo třídu.) Úloha o sekáčích. (Úloha L. N. Tolstého v poněkud pozměněném znění; sbírka úloh, „Obecný oddíl“, č. 2225): „Sekáči byli najati k pokosení dvou luk. Ráno začali kosit velkou louku a odpoledne byli rozděleni; polovina sekáčů zůstala na první louce a k večeru ji dokosila, druhá polovina sekáčů přešla na druhou louku poloviční velikosti. Kolik bylo sekáčů, je-li známo, že průběhem následujícího dne zbývající část práce provedl jediný sekáč?“

Řešení.



Obr. 27.

1. způsob. Práci všech sekáčů za 1 den vezmeme za smluvenou jednotku; potom prvního dne bylo na velkou louku spotřebováno $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ jednotky, a na menší louku bylo za první den spotřebováno pouze $\frac{1}{4}$ jednotky (celodenní práce všech sekáčů); na posečení druhé louky je však třeba $\frac{3}{4}:2=\frac{3}{8}$ jednotky, takže na druhý den zbylo $\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ celodenní práce všech sekáčů a to provedl jeden sekáč.

Tedy bylo $1:\frac{1}{8}=8$; 8 sekáčů.

2. způsob. Můžeme zvolit za jednotku práci poloviny sekáčů za půl dne atd.

Názorné řešení: Pokyn (viz obr. 27). Prvého dne byly vykonány 3 části práce na velké louce a 1 část na malé, celkem 4 části. Druhého dne jeden sekáč za den vykonal pouze $\frac{1}{2}$ části (stejně velké jako dřívější části); tedy 4 části práce vykonalo $4 : \frac{1}{2} = 8$ sekáčů.

Aritmetický průměr

Při řešení aritmetických úloh se vyskytuje výraz „aritmetický průměr" dvou nebo několika čísel; přitom se žáci seznamují s pojmy průměrné rychlosti, průměrné ceny, průměrné doby a j. a učí se počítat „průměrné hodnoty"; to nepůsobí žákům potíže. Těžší je obrácená úloha, je-li znám aritmetický průměr dvou čísel a jedno z nich (nebo jejich rozdíl nebo poměr) a mají se určit ta čísla.

Úloha (sbírka, kap. II, č. 376): „Aritmetický průměr dvou čísel je roven 130; jedno z čísel je rovné 150. Najít druhé číslo" (zpaměti). Žáci stanoví, aritmetický průměr dvou čísel, tedy polovina jejich součtu se rovná 130, pročež součet obou čísel je 260. Jedno číslo je 150, tedy druhé je 110.

Zkouška: $\frac{150 + 110}{2} = 130.$

Výše uvedenými methodami se řeší následující aritmetické úlohy:

Úlohy ze sbírky na	Kap. II „Celá čísla"	Kap. IV „Obyč. zlomky"	Kap. V „Des. zlomky"
Směsi . . . . č.	378—383	1004—1008 a j.	1537—1543
Pohyb . . . . č.	389—397	1129—1145	1593—1601
Společná práce . . . . . č.	380—485	1047—1059	1602—1607
Aritmetický průměr č.	373—377	998—1002	1532—1536 a j.

3. „Algebraické" úlohy v kurse aritmetiky

Někteří methodikové soudili a soudí, že „typové" úlohy („obmyslné", vyžadující zvláštních obratů) nepatří do kursu aritmetiky, že se mají probírat v kurse algebry a řešit sestavením rovnice. Nesmíme zajisté ve školní praxi přehánět ani jejich počet ani obtížnost, avšak vzdělávací význam těch tak zvaných „algebraických úloh" v kurse aritmetiky je značný: ony přispívají k rozvoji vynalézavosti, důvtipu žáků, ony vyžadují k řešení, aby se žák zahloubal do práce, aby si důkladně promyslil znění úlohy a existující závislost mezi veličinami.

Zejména, v 5. třídě jak jednoduché tak i složené ryze aritmetické úlohy mají býti žákům známy z kursu obecné školy a v 5. třídě po zopakování a dalším procvičení v řešení těchto úloh je užitečné řešit úlohy „algebraického rázu".[28])

Různotvárnost těchto posledních úloh (počet kombinací) je stejně jako u ryze aritmetických úloh velmi značná. V této kapitole omezujeme úvahy především na ty úlohy, které jsou v autorčině sbírce úloh pro 5. třídu a uvádíme způsoby jejich řešení.

I. SKUPINA ÚLOH

Stanovení myšleného čísla[29])

A. „Celá čísla".

4. Způsob řešení

Výše byly uvedeny nejjednodušší z úloh „algebraického rázu" založené na závislosti mezi danými čísly a výsledkem obrácených výkonů (§ 6). Rovněž k nejjednodušším úlohám jest řaditi „početní hádanky",[30]) které se někdy dávají ve tvaru abstraktním (jednodušším), někdy ve tvaru úlohy s věcným textem.

Příklad. Má se najít číslo, je-li známo, k jakému výsledku se dojde, jestliže se to číslo kombinuje s danými čísly sčítáním, odčítáním, násobením a dělením: ($x + a \pm b = c$ nebo $x \,.\, a \pm b = c$ nebo $\frac{x}{a} \pm b = c$ nebo $a \pm bx = c$ a pod.).

Úloha 1 (z oddílu „Celá čísla", kap. II, č. 399): „Jestliže od trojnásobku myšleného čísla ubereme 54, dostaneme 279. Které číslo bylo myšleno?"

[28]) Přechod od jedněch úloh ke druhým byl naznačen výše při objasnění methody „Zavedení smluvené jednotky".

[29]) „Methoda inverse".

[30]) Vedoucí při řešení pomocí algebry na rovnici prvního stupně o jedné neznámé.

Nikterak není vhodné řešit nebo zapisovat tuto úlohu rovnicí $x \,.\, 3 - 54 = 279$. Výhradně na základě „zdravého rozumu" mají žáci 5. třídy vypočítat neznámé číslo. Mají si zřetelně představit, že když od trojnásobku hledaného čísla odečte 54, dostane se číslo 279; kdyby (předpoklad) se bylo neodečítalo nic, bylo by to číslo 279 + + 54 = 333. To je tedy trojnásobek myšleného čísla a proto bylo myšleno (hledané číslo) 333 : 3 = 111. Takto se „odhalí", „rozpozná" neznámé číslo „methodou zpětného postupu", „inversí".

Závazné je provedení zkoušky: 3 . 111 — 54 = 279.

Takové úlohy s celými čísly (sbírka, kap. II, č. 398 — 401) může učitel sestavovat ve třídě tak, že uloží jednomu žákovi, aby si myslil číslo, potom k němu něco přičetl, něco od něho odečetl, něčím násobil atd. a řekl třídě konečný výsledek; potom učitel dá za úkol, aby ostatní žáci našli číslo, které si myslil jejich spolužák. Při této methodě „určení myšleného čísla" se provádí „obráceným pořadím výkonů".[31])

Poznámka. Někdy se dávají také podobné „početní hádanky" s tím rozdílem, že po provedení několika výkonů se dojde k výsledku rovněž obsahujícímu neznámé číslo (na př. $3x + 5 = 4x$ a pod.).

Rozsah takových cvičení v kurse aritmetiky 5. třídy musí být velmi omezený.

B. *„Lomená čísla"*

Touž methodou „určení myšleného čísla" řeší se úlohy podobného druhu v oddílech „Obyčejné zlomky" (sbírka, kap. IV, č. 1035 až 1043) a „Desetinné zlomky" (sbírka, kap. V, č. 1505, 1506, 1509, 1510). Jestliže žáci dobře vniknou do řešení těchto úloh s celými čísly, budou při řešení úloh téhož typu s lomenými čísly míti před sebou jako jedinou potíž provádění výkonů s lomenými čísly, zejména také určování velikosti čísla z dané velikosti jeho části (zlomku), o čemž byla zde řeč v příslušné kapitole o zlomcích, kde bylo také promluveno o řešení složitějších úloh k tomu se vztahujících.

Toto „převedení" řešené úlohy na úlohu základní musí býti ve třídě důkladně probráno.

---

[31]) Při tom se provádějí obrácené výkony k těm, které prováděl první žák.

Úloha 2 (sbírka, kap. VI, č. 1035): „Jestliže k neznámému číslu přičteme $\frac{3}{4}$ toho čísla a ještě číslo 40, dostaneme číslo 180. Určit neznámé číslo“. Způsob řešení úlohy se žákům objasní na základě probraného způsobu u čísel celých, tedy: dejme tomu, že už se nepřičetlo 40; odečtením čísla 40 od čísla 180 dostaneme, že 140 tvoří $\frac{7}{4}$ neznámého čísla, tedy neznámé číslo je 80. Zkouška: $80 + 80 \cdot \frac{3}{4} + 40 = 180$.

Poněkud obtížnější je *úloha 3* (sbírka, kap. IV, č. 1039): „Jestliže od $\frac{5}{12}$ neznámého čísla odečteme 99, dostaneme $\frac{3}{16}$ téhož neznámého čísla. Určit to číslo.“ Vyjádříme-li vše ve stejných dílech $\frac{5}{12} = \frac{20}{48}$ a $\frac{3}{16} = \frac{9}{48}$, můžeme říci, že $\frac{11}{48}x = 99$, z čehož $x = 9 \cdot 48 = 432$.

Zkouška: $\frac{5}{12}$ čísla 432 dává 180; $\frac{3}{16}$ téhož čísla dávají 81; 180 99 = 81.

Historické úlohy z indického díla „Podstata početního umění“.

1. „Žádá se najít takové číslo, že když je násobíme samo sebou, potom přičteme 2, dále zdvojnásobíme, potom přičteme 3, dělíme pěti a na konec násobíme deseti, vyjde číslo 50.“

2. „Najít číslo, které zvětšeno o $\frac{2}{3}$ sama sebe a ještě o jednu dá 10.“[32])

Rozebraná methoda inverse, „řešení úlohy od konce jejího znění“ učí žáky soustavně logicky myslit; žáci jí rádi užívají v různých případech. Na př. (sbírka „Obecný oddíl“, č. 2242): „Tři bratři požádali hospodyni, aby jim uvařila k večeři brambory. Při vaření všichni tři bratří usnuli; nejdříve se probudil nejstarší bratr a vida na stole brambory, snědl svůj díl a zase usnul; za nějakou dobu se probudil druhý a nevěda, že nejstarší bratr už jedl, také snědl svůj díl a zase usnul; na konec se probudil nejmladší a učinil totéž, co jeho bratři. Když nejstarší bratr znovu procitl, vzbudil své bratry a tu se vše vysvětlilo; o zbývající 24 brambory se podělili oba mladší bratři. Kolik bramborů navařila hospodyně?“

Řešení. 1. způsob. Když nejstarší bratr snědl $\frac{1}{3}$ všech bramborů, zbyly $\frac{2}{3}$ celku; když prostřední bratr snědl $\frac{1}{3}$ zbytku, zůstaly $\frac{2}{3}$ ze $\frac{2}{3}$, tedy $\frac{4}{9}$ všech bramborů; když nejmladší bratr snědl svou část, zůstaly $\frac{2}{3}$ ze $\frac{4}{9}$, t. j. $\frac{8}{27}$ všech navařených brambor; $\frac{8}{27}x = 24$ brambory, takže hledané číslo se rovná 81.

2. způsob („od konce“)[32]): 24 brambory dávají $\frac{2}{3}$ toho počtu, který zůstal po jídle prostředního bratra, t. j. prostřední bratr nechal na stole 36 bramborů; podobně najdeme, že nejstarší bratr nechal 54 brambory na stole, když snědl svou třetinu. Tedy bylo celkem 81 brambor.

[32]) G. N. Popov, „Istoričeskije zadači“ č. 205 a 206.

[33]) Obdobně se řeší „početní hádanka“ č. 2243.

Methoda záměny

Probírané zde úlohy „algebraického rázu" z kursu aritmetiky vedou při řešení pomocí algebry na rovnice 1. stupně. Výše uvedené úlohy se řeší v algebře pomocí jedné rovnice o jedné neznámé. V dalším probíráme úlohy, které se v kurse algebry nejsnáze řeší pomocí soustavy dvou (nebo více) rovnic. Rozbor začneme několika zvláštními případy. Methoda řešení spočívá v tom, že vyloučíme jednu z obou neznámých (nebo všecky neznámé až na jednu) tím, že ji vyjádříme pomocí druhé neznámé (zaměníme jednu neznámou za druhou). Rozbor z toho plynoucích důsledků vede k řešení úlohy. Někdy všecky neznámé nahrazujeme jednou novou pomocnou neznámou.

II. SKUPINA ÚLOH[34])

1. Matematický obsah úlohy: Určení dvou čísel ze známého jejich součtu a rozdílu.[35])

A. „*Celá čísla*"

$x + y = a$, $x - y = b$. *Úloha 1.* (sbírka, kap. II, č. 402). „Kus plátna dlouhý 104 m má se rozstřihnout na dvě části tak, aby první obsahovala o 16 m více než druhá. Kolik metrů plátna bude v každé části?"

Pokyn. Tyto úlohy se řeší pomocí „předpokladu", „připuštění", že větší čísla byla nahrazena nejmenším a za této podmínky se určí součet, který se potom dělí na tolik rovných dílů, kolik je neznámých.

1. způsob. Kdyby první (větší) část plátna měla tu délku, kterou má druhá (t. j. kdyby byla o 16 m kratší než ve skutečnosti), byla by délka všeho plátna o 16 m kratší: 1. $104 - 16 = 88$, t. j. délka kusu plátna za učiněného předpokladu by byla 88 m; 88 m musíme rozdělit na 2 rovné části, abychom dostali délku menší části: 2. $88 : 2 = 44$; 44 m je délka menší části; 3. $44 + 16 = 60$; 60 m je délka větší části kusu plátna.

[34]) Obyčejně se udává užší okruh úloh, nazývaný „typem" úloh.

[35]) Při dané závislosti může slovní znění úlohy být značně rozmanité.

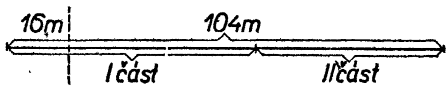
2. způsob. Kdyby druhá (menší) část kusu plátna měla tu délku, kterou má prvá (t. j. kdyby byla o 16 m delší než ve skutečnosti), byla by délka všeho plátna o 16 m delší.

Řešení: 1. $104 + 16 = 120$; 120 m by byla délka celého kusu plátna;

2. $120 : 2 = 60$; 60 m je délka větší části;

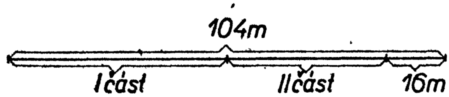
3. $60 - 16 = 44$; 44 m je délka menší části.

Znázornění 1. způsobu:



Obr. 28a.

2. způsobu:



Obr. 28b.

Poznámky. 1. Je třeba žáky upozornit na to, že při prvním způsobu se napřed určí menší část a při druhém větší. Proč?

2. Při řešení prvních úloh nového typu se vybírají úlohy s malými čísly, aby zápis a výpočet neodvracely pozornost od podstaty řešení úlohy. Žádoucí jsou zprvu ústní řešení, při nichž se zapíší jenom výsledky výkonů.

3. Oba způsoby aritmetického řešení vyšetřovaného typu úloh jsou diktovány jejich algebraickým řešením:

$$\begin{array}{l} x + y = a \\ \underline{x - y = b} \\ 2x = a + b; \quad x = \dfrac{a+b}{2}; \\[2ex] 2y = a - b; \quad y = \dfrac{a-b}{2}. \end{array}$$

4. Obyčejně činí při řešení těchto úloh žákům potíže formulace první otázky. Existence dvou způsobů řešení poukazuje na nutnost úplné formulace otázky. „Jaká by byla délka kusu plátna, kdyby první (druhá) část měla takovou délku jako druhá (první)?“

Někdy se otázka formuluje takto: „Určit délku dvojnásobné menší (větší) části“. Po rozboru úlohy je možná i tato formulace.

5. Jako vždy má se řešení úlohy zakončit zkouškou správnosti odpovědi, v daném případě: $60 + 44 = 104$ (m), $60 - 44 = 16$ (m).

6. Úlohy vyšetřovaného typu řeší žáci také na obecné škole. Ale přesto jsou časté případy, že po přečtení textu výše uvedené úlohy některý žák navrhne 104 dělit dvěma a druzí žáci hned ho zarazí slovy: „to je nesprávné“. Učitel má využít příležitost a vyložit žákům 3. způsob řešení (viz níže).

Předběžná cvičení

Úloha 2 (sbírka, kap. II, č. 414): „Ve dvou bednách je 128 kg čaje. Jestliže se z první bedny odejmou 4 kg a dají do druhé, bude v obou bednách stejně čaje. Kolik čaje je v každé bedně.“

Otázka: O kolik kilogramů čaje je v první bedně více než ve druhé?

Odpověď: o 8 kg. Proč?

Pro objasnění této otázky mohou žáci řešit tuto úlohu oběma způsoby uvedenými výše.

$$\begin{aligned} 128 - 8 &= 120 \text{ (kg)} & \text{nebo} \quad 128 + 8 &= 136 \\ 120 : 2 &= 60 \text{ (kg)} & 136 : 2 &= 68 \\ 60 + 8 &= 68 \text{ (kg)} & 68 - 8 &= 60. \end{aligned}$$

Zkouška: $60 + 68 = 128$; $68 - 4 = 60 + 4$

Ústní cvičení. 1. V jedné bedně je o 10 kg čaje více než ve druhé. Kolik kilogramů čaje musíme dát z jedné bedny do druhé, aby v obou bednách bylo totéž množství čaje? Odpověď 5 kg.

2. Máme dvě čísla: 100 a 60. Kolik jednotek musíme ubrat od většího a přidat je k menšímu, aby vznikla dvě navzájem rovná čísla? *Odpověď*: polovinu ze 40, t. j. 20.

Zkouška: $100 - 20 = 80$; $60 + 20 = 80$.

3. *Úloha 3* (sbírka, kap. II, č. 415): „Dva přátelé měli dohromady 240 rub. Když jeden dal druhému 30 rub., měli potom oba stejně. Kolik peněz měl původně každý?“ (ústně).

Když už měli oba stejně peněz, měl každý po 120 rub. ($240 : 2 = 120$). Ale to už dal jeden druhému 30 rub., tedy původně měl první $120 + 30 = 150$ (rub.) a druhý $120 - 30 = 90$ (rub.).

Zkouška: $90 + 150 = 240$; 240 rub.; $90 + 30 = 150 - 30 = 120$.

Otázka: O kolik rublů měl jeden více než druhý?

Odpověď: o 60 rub. (dvakrát 30).

4. O kolik jednotek je jedno číslo větší než druhé, je-li známo, že jestliže se od jednoho ubere 20 jednotek, které se přidají ke druhému, budou pozměněná čísla sobě rovna? Odpověď: o 40 (dvakrát 20). Přesvědčit se na číslech (sbírka, kap. II, č. 416).

3. způsob: Po výše uvedených a podobných cvičeních bude zcela jasný třetí způsob řešení úlohy 1 (sbírka, kap. II, č. 402):

1. $104 : 2 = 52$ (m)	3. $52 + 8 = 60$ (m)
2. $16 : 2 = 8$ (m)	4. $52 - 8 = 44$ (m).

Zkouška: $60 + 44 = 104$ (m); $60 - 44 = 16$ (m).

Případ tří čísel

Úloha 4 (sbírka, kap. II, č. 407): „Rozdělit 1800 na tři části tak, aby byla první o 400 a druhá o 200 větší než třetí.

		Odpověď
Zápis textu:	I o 400 větší než III	800
	II o 200 větší než III	600
	III	400
		1800.

1. způsob: Kdyby každé z hledaných čísel bylo rovné nejmenšímu z nich (třetímu), byl by jejich součet $1800 - 400 - 200 = 1200$; tedy nejmenší číslo je $1200 : 3 = 400$ atd.

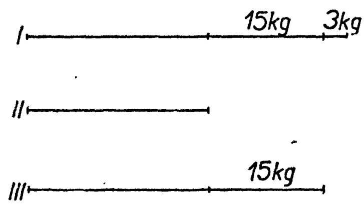
2. způsob: Kdyby každé z hledaných čísel bylo rovné největšímu z nich (prvnímu), byl by jejich součet 1800 + 400 + 200 = 2400; tedy největší číslo je 2400 : 3 = 800 atd.

3. způsob: Kdyby každé z hledaných čísel bylo rovné druhému z nich, byl by jejich součet 1800 — 200 + 200 = 1800, tedy druhé číslo je 1800 : 3 = 600.

Úloha 5 (sbírka, kap. II, č. 406): „Tři kusy žuly váží dohromady 156 kg. První kus je o 18 kg těžší než druhý, druhý je o 15 kg lehčí než třetí. Kolik váží každý kus žuly?"

$$\left.\begin{array}{l}\text{I o 18 kg těžší než II}\\ \text{II o 15 kg lehčí než III}\end{array}\right\}\ 156\text{ kg.}$$

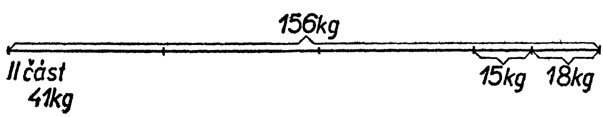
Znázornění:



Obr. 29.

1. způsob: Připustíme-li, že váha každého kusu žuly je rovna skutečné váze 2. kusu, bude celková váha všech kusů 123 kg, protože

I o 18 kg těžší než II	*Řešení*:
II	156 — 18 — 15 = 123 (kg)
III o 15 kg těžší než II	123 : 3 = 41 (kg)
(viz obr. 30a)	



Obr. 30a.

Váha	II. kusu	41 kg
váha	III. kusu	56 kg
váha	I. kusu	59 kg
Zkouška:		156 kg.

2. způsob: Připustíme-li, že váha každého kusu žuly je rovna skutečné váze 3. kusu, bude celková váha všech tří kusů činit 168 kg.

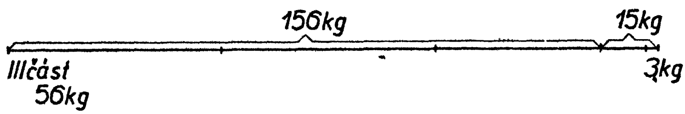
I je o 3 kg těžší než III

protože II je o 15 kg lehčí než III (viz obr. 30b)

Řešení:

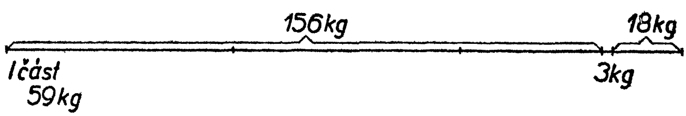
156 + 15 — 3 = 168

168 : 3 = 56 (kg); to je váha třetího kusu atd.



Obr. 30b.

Můžeme řešit úlohu také tak, že připustíme, že váha každého kusu žuly je rovna skutečné váze 1. kusu; potom celková váha všech tří kusů by byla 156 + 3 + 18 = 177 (kg) a váha prvního kusu 177 : 3 = 59 (kg) (viz obr. 30c).



Obr. 30c.

Složitější úlohy

Často se složitost úloh vyšetřovaného typu zvyšuje: 1. požadavkem najít 3,4 i více čísel; 2. doplňujícími podmínkami (úlohy 6 a 7), 3. abstraktní formulací (v matematických termínech [úlohy 8 a 9]).

Úloha 6 (sbírka, kap. II, č. 412): „Ze dvou pozemků celkové velikosti 357 ha bylo sklizeno brambor průměrně po 20 t 8 q na 1 ha. Určit obsah každého pozemku, je-li známo, že z jednoho z nich bylo sklizeno o 21 008 q více nežli z druhého."

Předem musíme určit velikost sklizně z obou pozemků: 20 t 8 q = 208 q; 208 . 357 = 74 256 (q); tu máme potom rozdělit na dvě části tak, aby první byla o 21 008 q větší než druhá.

Úloha 7 (sbírka, kap. II, č. 431): „Dva lidé měli dohromady 86 rub. Když první dal druhému 10 rub., zůstalo mu ještě o 12 rub. více než měl druhý, když již dostal těch 10 rub. Kolik rublů měl původně každý z nich?"

Předem musíme určit, o kolik rublů měl první původně více než druhý. Kdyby po předání 10 rublů od prvního druhému měli oba stejně, to by znamenalo, že první měl o 20 rublů (10 . 2 = 20) více než druhý, ale ve skutečnosti po předání peněz stále měl první ještě o 12 rublů více; to znamená, že před předáním měl více než druhý o 32 ruble (20 + 12 = 32). Tedy musíme 86 rub. rozdělit na dvě části tak, aby první byla o 32 rub. větší než druhá.

Úloha 8 (sbírka, kap. II, č. 434). „Součet dvou čísel se rovná 890 a rozdíl týchž čísel se rovná 100. Určit obě čísla."

Text této úlohy je podobný textu výše zkoumaných úloh, ale je vyjádřen v matematických termínech: „součet, rozdíl, podíl" a pod. To znamená pro žáky novou potíž; taková cvičení přispívají k tomu, aby si žáci osvojili matematické výrazy. Při rozboru je třeba ujasnit, co znamená součet a rozdíl a je-li třeba říci znění úlohy svými slovy, na př. „2 hledaná čísla dohromady (jejich součet) dávají 890, a jedno z nich je větší než druhé (rozdíl mezi nimi) o 100. Určit obě čísla."

B. Lomená čísla

Úloha 9 (sbírka, kap. IV, č. 1077): „Jestliže k myšlenému číslu přičtu jiné číslo, dostanu 15, a jestliže od téhož myšleného čísla odečtu totéž druhé číslo, dostanu $1\frac{3}{4}$. Které číslo jsem si myslil a které druhé číslo jsem jednou přičetl a po druhé odečetl?"

Při řešení této úlohy (na rozdíl od řešení úlohy 8) je třeba napřed stanovit, že součet obou hledaných čísel se rovná 15 a rozdíl $1\frac{3}{4}$.

Řešení:

1. $15 - 1\frac{3}{4} = 13\frac{1}{4}$
2. $13\frac{1}{4} : 2 = 6\frac{5}{8}$
3. $6\frac{5}{8} + 1\frac{3}{4} = 8\frac{3}{8}$

Odpověď: $8\frac{3}{8}$ a $6\frac{5}{8}$.
Zkouška: součet $8\frac{3}{8} + 6\frac{5}{8} = 15$; rozdíl $8\frac{3}{8} - 6\frac{5}{8} = 1\frac{3}{4}$.

Úlohy vyšetřovaného typu (zkoumané skupiny úloh) ze sbírky:
„Celá čísla“, kap. II, č. 402 až 417, 431 až 435.
„Obyčejné zlomky“; kap. IV, č. 1060 až 1067, 1072 až 1077.
„Desetinné zlomky“, kap. V, č. 1544 až 1553.

III. SKUPINA ÚLOH

Určení dvou nebo více čísel z daného jejich součtu a poměru

A. Celá čísla

$x + y = a, \frac{x}{y} = b$ Tyto úlohy se obyčejně nazývají úlohy na „dělení v daném poměru“. „Dělení v daném poměru“ tvoří zvláštní bod osnovy a proto se ty úlohy později probírají podrobně, když se dojde k tomuto bodu, a potom se udá tvar zápisu jejich řešení. Tehdy se probírá úměrnost veličin a žáci se seznamují s příslušnými termíny.

Při probírání výkonů s celými a lomenými čísly na obecné škole i v 5. třídě řeší se tytéž úlohy bez zavádění termínů s libovolně zvolenou formou úsudku a zápisu. To dává těmto úlohám větší význam pro rozvoj důvtipu a usuzovacích schopností žactva.

Úloha 1 (sbírka, kap. II, č. 421). „Rozdělit 2568 na dvě části tak, aby jedna byla dvakrát větší než druhá.“

Otázky: „Jak se má rozdělit číslo 2568?“ „Na kolik sobě rovných částí musíme rozdělit číslo 2568?“ Zřetelně se vysvětlí učiněné „připuštění“, že menší část čísla tvoří jednu jednotku.

B. Lomená čísla

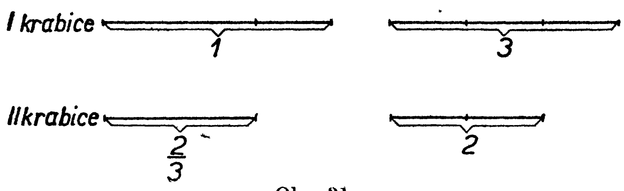
Úloha 2 (sbírka, kap. IV, č. 1078). „Ve dvou kolchozech je 270 koní; v jednom z nich je koní $1\frac{1}{2}$krát více než ve druhém. Kolik je koní v každém kolchoze?“

Úloha 3 (sbírka, kap. IV, č. 1079). „Ve dvou krabicích je 390 šroubů. Kolik je šroubů v každé krabici, jestliže počet šroubů v první je roven $\frac{3}{5}$ počtu šroubů ve druhé?“

V úlohách 1 a 2 poměr byl vyjádřen celým nebo smíšeným číslem; řešení úloh v těchto případech obyčejně žákům nečiní potíže.

V úloze 3 poměr je vyjádřen pravým zlomkem, což činí úlohu složitější. Je užitečné znázornit úlohu graficky (obr. 31).

Jestliže připustíme, že počet šroubů v první krabici tvoří jednu část (jednotku), pak počet šroubů ve druhé krabici tvoří $\frac{2}{3}$ (jednotky).



Obr. 31.

Potom se úloha řeší:

buďto 1. lomenými čísly: 390 šroubů tvoří $1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$ části; tedy ve větší krabici je $390 : 1\frac{2}{3}$, t. j. 234 šrouby a v menší $234 \cdot \frac{2}{3}$, t. j. 156 šroubů (zkouška: $234 + 156 = 390$; $\frac{156}{234} = \frac{78}{117} = \frac{2}{3}$), nebo 2. celými čísly: jestliže počet šroubů v 1. krabici tvoří 3 části (viz obr. 31), pak počet šroubů ve 2. krabici tvoří 2 části téže velikosti a tedy 390 šroubů tvoří 5 takových částí atd.

Poznámka. Aritmetické řešení vyšetřovaného typu úloh je diktováno jejich algebraickým řešením:

$$x + y = a; \quad \frac{x}{y} = b; \quad x = y \cdot b; \quad y\,(b + 1) = a;$$

$$y = \frac{a}{b+1}; \quad x = \frac{a}{b+1} \cdot b.$$

V dané úloze je $a = 390$; $b = \frac{2}{3}$.

Složitější úlohy

Složitost úloh vyšetřovaného typu se obyčejně zvyšuje 1. požadavkem najít 3, 4 i více čísel, 2. složitějšími číselnými hodnotami, 3. abstraktní formulací, 4. doplňujícími podmínkami.

A. Celá čísla

Úloha 4 (sbírka, kap. II, č. 425). „V továrně pracují ve třech dílnách 624 lidé. V první dílně je 5krát více dělníků než ve druhé a ve třetí dílně je tolik dělníků, kolik jich je v prvních dvou dílnách dohromady. Kolik je dělníků v každé dílně?“

Řešení této úlohy nečiní žákům potíže: $\frac{624}{1+5+6}$, t. j. 52 lidé pracují ve 2. dílně atd.

Methoda podobnosti

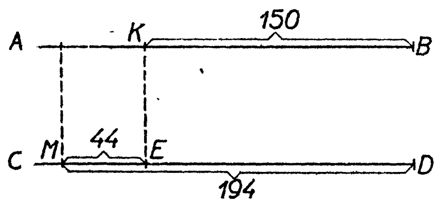
Poznámka. Tyto úlohy se řešívaly následujícím způsobem: připusťme na př., že ve druhé dílně je 13 lidí, potom je v první dílně 65 lidí a ve třetí 78. To by činilo celkem 156 lidí, t. j. čtyřikrát (624 : 156 = 4) méně než je skutečný počet. Tento způsob řešení úlohy 4 nazývá Alexandrov[36]) „methodou podobnosti“ na rozlišení od prvé methody „dělení v daném poměru“, „při které se určuje velikost každé části ze známého počtu částí“. „Methoda podobnosti“ spočívá v tom, že se připustí určitá velikost části a potom se určí, kolikrát je připuštěná velikost větší nebo menší než skutečná velikost. My jsme ukázali na příkladě úlohy 4, že není nutnosti „předpokládat určitou velikost“; mimo to tento způsob může značně zvýšit složitost řešení, jestliže se nevýhodně zvolí rozměr jedné části (my jsme výhodně zvolili velikost 13) a tím se stane, že úloha řešitelná celými čísly musí se řešit lomenými čísly.

Úloha 5 (sbírka, kap. II, č. 437). „Aritmetický průměr dvou čísel se rovná 46 a jedno číslo je třikrát větší než druhé. Určit obě čísla“.

Úloha 6 (sbírka, kap. II, č. 447). „Ve dvou koších bylo stejně jablek. Když bylo z prvního koše prodáno 150 jablek a ze druhého 194, zůstalo v prvním koši třikrát tolik jablek jako ve druhém. Kolik jablek bylo v každém koši?“

Vysvětlení. Počet 44 jablek (194 — 150 = 44), o která bylo prodáno více ze druhého koše než z prvního, tvoří dvě části jablek zbylých v 1. koši (3 — 1 = 2, viz obr. 32). To znamená, že ve 2. koši zbyla 22 jablka (44 : 2 = 22) a v 1. zbylo 66 jablek (22 . 3 = 66). V 1. koši bylo (150 + 66 = 216) 216 jablek a ve 2. (194 + 22 = 216) 216 jablek. Tím je zároveň provedena už i zkouška, neboť vychází: v obou koších bylo stejně jablek.

[36]) I. Alexandrov, „Metody rešenij arifmetičeskich zadač.“



Obr. 32.

V obrazci je $AB = CD$; úsečky AB a CD odpovídají celkovému počtu jablek v 1. a 2. koši.

Úsečka KB odpovídá číslu 150; MD číslu 194; úsečka ME číslu 44.

Zbytek jablek v 1. koši je zobrazen úsečkou AK (3 části).

Zbytek jablek ve 2. koši je zobrazen úsečkou CM (1 část) atd.

B. Lomená čísla

Úloha 7 (sbírka, kap. IV, č. 1101). „Součet dvou čísel se rovná $16\frac{5}{8}$; podíl při dělení většího čísla menším jest $2\frac{1}{2}$. Určit ta čísla."

Návod: stanoví se, že podíl $2\frac{1}{2}$ znamená, že první číslo je $2\frac{1}{2}$krát větší než druhé.

Úloha 8 (sbírka, kap. V, č. 1554). „Žák utratil 0,9 rub. na nákup knihy a papíru, při čemž za knihu zaplatil 9krát více než za papír. Kolik stála kniha a kolik papír?" Úloha se řeší zpaměti: 0,9 rub. = = 90 kop. Papír stojí 9 kop. a kniha 81 kop.

Úloha 9 (sbírka, kap. V, č. 1556). „Za práci od kusu dostali tři dělníci dohromady 136 rub. První dostal 0,75 toho, co dostal třetí a druhý 2,5krát více než třetí. Kolik dostal každý z nich?"

Zápis	I	136 rub.	0,75 toho, co III	0,75	24 rub.
úlohy a	II		2,5krát více než III	2,5	80 rub.
odpovědi	III		1	1	32 rub.
				4,25	136 rub.

$\frac{24}{32} = \frac{3}{4} = 0,75$; $80 : 32 = 2,5$. (Zkouška.)

1. $136 : 4,25 = 13600 : 425 = 32$ 32 rub. dostal III.

$$\begin{array}{r} 1275 \\ \hline 850 \\ \hline 0 \end{array}$$

2. $32 \,.\, 0,75 = 32 \,.\, \frac{3}{4} = 24$ (zpaměti);

3. $32 \,.\, 2,5 = 64 + 16 = 80$ (zpaměti).

Úloha 10 (sbírka, kap. IV, č. 1086). „Jak mají tři korespondentky rozdělit mezi sebou $217\frac{1}{2}$ rub., které dostaly za vykonanou práci, je-li známo, že jedna z nich provedla $\frac{2}{5}$ celé práce, druhá $\frac{2}{3}$ toho, co prvá, a třetí zbytek práce?“

I	$217\frac{1}{2}$ rub.	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$ celé práce	87 rub.
II		$\frac{2}{3}$ toho, co I	$\frac{4}{15}$ celé práce	58 rub.
III		zbytek	$\frac{1}{3}$ celé práce	$72\frac{1}{2}$ rub.
				$217\frac{1}{2}$ rub.

$$\frac{87}{217\frac{1}{2}} = \frac{87 \,.\, 2}{435} = \frac{2}{5}; \quad \frac{58}{87} = \frac{2}{3}; \text{ Zkouška.}$$

Řešení:

1. $\frac{2}{5} \,.\, \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$ (práce);

2. $1 - \frac{2}{5} - \frac{4}{15} = 1 - \frac{10}{15} = \frac{1}{3}$ (práce);

3. $217\frac{1}{2} \,.\, \frac{2}{5} = \frac{435 \,.\, 2}{2 \,.\, 5} = 87$ (rub).;

4. $217\frac{1}{2} \,.\, \frac{4}{15} = \frac{435 \,.\, 4}{2 \,.\, 15} = 29 \,.\, 2 = 58$ (rub.);

5. $217\frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{3} = \frac{435 \,.\, 1}{2 \,.\, 3} = \frac{145}{2} = 72\frac{1}{2}$ (rub.),

nebo (viz úlohu 3): vyjádříme-li zlomky $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{1}{3}$ ve stejných dílech, máme $\frac{6}{15}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{5}{15}$. To znamená, že první korespondentka dostane 6, druhá 4 a třetí 5 dílů, přičemž jeden díl se dostane, jestliže $217\frac{1}{2}$ dělíme patnácti atd.

Úloha 11 (sbírka, kap. IV, č. 1104). „Součet tří čísel se rovná $20\frac{3}{7}$. První číslo je $1\frac{1}{2}$krát menší než druhé a tvoří $\frac{2}{3}$ třetího. Určete ta čísla.“

I	$20\frac{3}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	2 části
II		$\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2} = 1$	$\frac{3}{3}$	3 části
III		1	$\frac{3}{3}$	3 části atd.

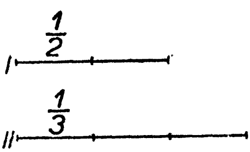
Úlohy, ve kterých zlomek (část) jednoho čísla se srovnává s částí jiného čísla, obyčejně činí žákům potíže.

Úloha 12 (sbírka, kap. IV, č. 1105). „Součet dvou čísel je roven 1. Najít ta čísla, jestliže $\frac{1}{2}$ prvního čísla se rovná $\frac{1}{3}$ druhého.

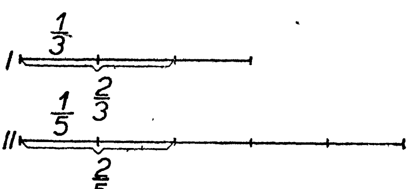
1. způsob. Jestliže $\frac{1}{2}$ prvního čísla se rovná $\frac{1}{3}$ druhého, pak celé první číslo tvoří $\frac{2}{3}$ druhého. Vezmeme druhé číslo za jednotku a řešíme obecnou methodou.

2. způsob usuzování. Jestliže $\frac{1}{2}$ prvního čísla se rovná $\frac{1}{3}$ druhého (viz obr. 33), pak 1. číslo se skládá ze dvou takových částí, jaké jsou ve druhém čísle obsaženy tři atd.

Úloha 13 (sbírka, kap. IV, č. 1107). „Dva bratři mají dohromady 48 ořechů. $\frac{2}{3}$ počtu těch ořechů, které má první bratr, jsou rovny $\frac{2}{5}$ počtu těch ořechů, které má druhý bratr. Kolik ořechů má každý z obou bratří?“



Obr. 33.



Obr. 34.

Návod (viz obr. 34). Všecky ořechy 1. bratra tvoří 3 části a všecky ořechy 2. bratra tvoří 5 částí téže velikosti. Úloha se řeší zpaměti.

Úlohy vyšetřovaného typu ve sbírce úloh:

„Celá čísla“, kap. II, č. 418 až 430.

„Obyčejné zlomky“, kap. IV, č. 1078 až 1092 a 1097 až 1109.

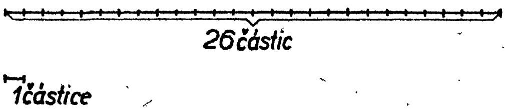
„Desetinné zlomky“, kap. V, č. 1554 až 1562.

IV. SKUPINA ÚLOH

Určení dvou (nebo více) čísel z daného jejich rozdílu a poměru

A. Celá čísla

$x - y = a, \frac{x}{y} = b$. *Úloha 1.* „Najít dvě čísla, jestliže jejich rozdíl se rovná 1800 a podíl při dělení jednoho čísla druhým se rovná 26.“ Objasní se, že předně rozdíl 1800 ukazuje, že jedno číslo je o 1800 větší než druhé a že za druhé podíl 26 ukazuje, že jedno číslo je 26krát větší než druhé. Provede se znázornění (obr. 35).



Obr. 35.

B. Lomená čísla

Úloha 2 (sbírka, kap. IV, č. 1096). „Rozdíl dvou čísel se rovná $12\frac{5}{6}$; jedno číslo tvoří $\frac{1}{7}$ druhého. Najít ta čísla.“

Vysvětlení. Jestliže jedno číslo tvoří $\frac{1}{7}$ druhého, můžeme menší číslo zvolit za jednotku (jednu částici) a potom druhé číslo tvoří 7 takových částic. Je jasné, že 6 částic tvoří $12\frac{5}{6}$ atd.

Úloha 3 (sbírka, kap. IV, č. 1093). „Dvěma traktory byl zorán pozemek; prvním z nich bylo zoráno $\frac{13}{15}$ toho, co druhým. Kolik hektarů zorali každým traktorem, jestliže prvním traktorem bylo zoráno o $192\frac{1}{4}$ ha méně než druhým?“

I	$\frac{13}{15}$	o $192\frac{1}{4}$ méně než II.
II	1	

1. způsob. Připustíme, že půda zoraná 2. traktorem tvoří 15 částic, potom půda zoraná 1. traktorem tvoří 13 částic téže velikosti; 2 částice činí $192\frac{1}{4}$ ha atd.

2. způsob. Připustíme, že půda zoraná 2. traktorem tvoří jednotku, potom rozdíl $\frac{2}{15}x = 192\frac{1}{4}$ ha.

Při tomto způsobu usuzování žáci někdy nechápají jasně, co znamená číslo x; za x oni chybně brávají velikost veškeré půdy zorané oběma traktory.

Úloha 4 (sbírka, kap. V, č. 1565). „Najíti dvě čísla, jestliže jejich rozdíl se rovná 3 a podíl při dělení jednoho čísla druhým se rovná 3“ (ústně).

Vysvětlení. Máme najít dvě čísla, víme-li, že první číslo je třikrát větší než druhé, dává tedy 3 částice. Pomocí obrazce nahlédneme, že 2 částice ($3 - 1 = 2$) tvoří číslo 3, takže menší číslo se rovná $1\frac{1}{2}$ a větší $4\frac{1}{2}$. Vskutku $4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 3$ a $4\frac{1}{2} : 1\frac{1}{2} = 3$.

Poznámka. Řešení úloh vyšetřované skupiny v obecném tvaru:

$$x - y = a;$$

$$\frac{x}{y} = b, \quad x = y \,.\, b;$$

$$by - y = a;$$

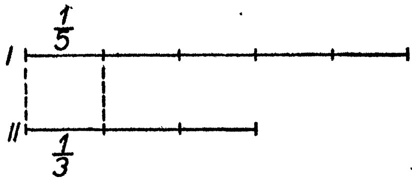
$$y = \frac{a}{b-1};$$

$$x = \frac{a}{b-1} \,.\, b.$$

Methoda řešení je táž jako u skupiny III dělení v daném poměru.

Úloha 5 (sbírka, kap. IV, č. 1113). „Rozdíl dvou čísel je 40. Jestliže od prvního čísla odečteme $\frac{4}{5}$ tohoto čísla a potom od druhého odečteme $\frac{2}{3}$ tohoto druhého, dostaneme dva stejné rozdíly.“

Vysvětlení. Rozdíl 40 ukazuje, že první číslo je o 40 větší než druhé. Mimoto je známo, že $\frac{1}{5}$ prvního čísla ($1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$) obsahuje týž počet jednotek jako $\frac{1}{3}$ druhého ($1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$). Které z čísel je větší? První číslo je větší, neboť menší jeho část, pouhá pětina, rovná se třetině druhého čísla (viz obr. 36).



Obr. 36.

Z obrazce je patrné, že jestliže první číslo se skládá z 5 částic, druhé se skládá ze 3 takových částic. 2 částice dávají 40.

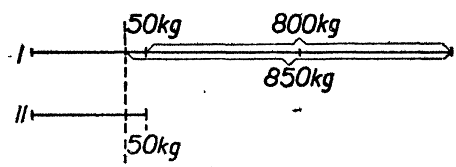
1. číslo je 100,
2. číslo je 60.

Zkouška. Jestliže od čísla 100 odečteme $\frac{4}{5}$ ze 100, t. j. 80, dostaneme 20; jestliže od 60 odečteme $\frac{2}{3}$ ze 60, t. j. 40, dostaneme 20. Oba rozdíly jsou si rovny.

Složitější úlohy

Je dobře se zdržet u úloh potud složitějších, že v nich se udá součet nebo rozdíl a poměr hledaných čísel po jakési jejich změně. Tyto úlohy se obyčejně řeší pomocí znázorňujících obrazců; jejich řešení vede k rozvoji důvtipu žáků.

Úloha 6 (sbírka, kap. II, č. 436). „V jednom skladišti je třikrát více mouky než ve druhém. Jestliže se odveze z prvního skladiště 850 kg a ze druhého 50 kg, zbude v obou skladištích stejně mouky. Kolik mouky je v každém z obou skladišť?“



Obr. 37.

V obr. 37 je naznačeno: 1. že v 1. skladišti bylo třikrát více mouky než ve druhém (úsečka 3krát delší); 2. že ze 2. skladiště se odvezlo 50 kg a z 1. skladiště rovněž 50 kg a ještě dalších 800 kg (celkem 850 kg); 3. že v obou skladištích zbylo stejně mouky.

Z obrazce je patrné, že dvě části uskladněné mouky dávají 800 kg; z toho plyne, že ve 2. skladišti bylo 400 kg (1 část) a v prvním 1200 kg (3 části). Úloha se řeší zpaměti.

Zkouška: 1200 — 850 = 350 (kg) a 400 — 50 = 350 (kg).

Úloha 7 (sbírka, kap. II, č. 438). „Součet dvou čísel se rovná 410; dělení většího čísla menším dá podíl 7 a zbytek 10. Najíti ta čísla" (ústně).

Vysvětlení. Kdyby bylo jedno číslo pouze 7krát větší než druhé, pak by součet obou čísel nedával 410, nýbrž 410 — 10 = 400. Menší číslo se rovná 50 a větší 50 . 7 + 10 = 360.

Vskutku, jestliže číslo 360 dělíme číslem 50, dostaneme podíl 7 a zbytek 10; 360 + 50 = 410.

Úloha 8 (sbírka, kap. II, č. 440). „Při dělení dvou čísel vyjde podíl 3 a zbytek 10. Jestliže sečteme dělence, dělitele, podíl i zbytek, dostaneme 143. Najít dělence i dělitele" (ústně).

Nejprve stanovíme součet dělence a dělitele: 143 — 3 — 10 = 130, kde 3 je podíl a 10 je zbytek.

Další řešení je stejné jako u minulé úlohy:

2. 130 — 10 = 120.
3. 1 + 3 = 4 (části).
4. 120 : 4 = 30, to je menší číslo.
5. 30 . 3 + 10 = 100, to je větší číslo.

Zkouška: 100 + 30 + 3 + 10 = 143; při dělení čísla 100 číslem 30 vyjde podíl 3 a zbytek 10.

Úlohy vyšetřovaného typu ve sbírce úloh:

„Celá čísla", kap. II, č. 436 až 451;
„Obyčejné zlomky", kap. IV, č. 1093 až 1096 a 1110 až 1114;
„Desetinné zlomky", kap. V, č. 1563 až 1575.

1. *Historická úloha*[37]) (pro práci mimo třídu).

„Oslice a mezek kráčeli společně s nákladem pytlů stejně těžkých. Oslice naříkala nad tíží břemene. „Proč ty naříkáš?" pravil mezek; „jestliže ty mně dáš jeden svůj pytel, stane se moje břímě dvojnásobným tvého, ale jestliže já ti dám jeden svůj pytel, pak se naše břemena teprve vyrovnají". Kolik pytlů nesl každý z nich?" (Řecko.)

Pokyn: mezek nese o dva pytle více než oslice, 4 pytle připadají na jednu část.

---

[37]) G. N. Popov, „Sbornik istorič. zadač po elementarnoj matematike", ONTI, 1936, č. 83.

Odpověď: mezek nese 7 pytlů a oslice 5.

2. Uvedeme ještě jednu úlohu, kterou žáci rádi řeší: „Chlapec má tolik sester jako bratří, ale jeho sestra má polovinu sester než bratří. Kolik je bratří a kolik sester?"

Odpověď: 3 sestry a 4 bratři.

Návod: z 1. podmínky je patrné, že počet bratrů je o jednu větší než počet sester. Ze 2. podmínky plyne, že kdybychom jednu sestru nečítali, bylo by bratří dvakrát tolik než sester; mimo to by potom byl počet bratří o 2 větší než počet sester (viz sbírku úloh, obecný oddíl, č. 2240).

Výše vyšetřované skupiny úloh, které se v kurse algebry řeší sestavením soustavy dvou rovnic prvního stupně o dvou neznámých a následujícím vyloučením jedné z neznámých, v kurse aritmetiky vedou také k nutnosti „vyloučit" jednu z neznámých, což se děje v některých případech methodou záměny jedné neznámé druhou neznámou a v jiných případech srovnáním čísel buď přímo v úloze daných nebo nějakou úpravou získaných.

Pokračujeme v probírání těchto method řešení úloh v těch případech, kdy jedna z obou rovnic — a později také druhá — je obecná rovnice prvního stupně o dvou neznámých.

V. SKUPINA ÚLOH

a) Vyloučení jedné neznámé pomocí záměny druhou neznámou

1. *Nejjednodušší případ*

$ax + by = c, x + y = k$. *Úloha 1.* Úloha z povídky A. P. Čechova „Repetitor". „Kupec koupil 138 loket černého a modrého sukna za 540 rub. Ptáme se, kolik loket kterého sukna koupil, jestliže loket modrého sukna stál 5 rub. a loket černého 3 rub.?"

I. Kdybychom připustili, že všechno sukno bylo černé, stálo by $(5 . 138 = 690)$ 690 rub. a ne 540 rub., t. j. bylo by o 150 rub. dražší. Tento rozdíl 150 rub. vzniká z dvourublového $(5 - 3 = 2)$ rozdílu u každého lokte černého sukna; tedy černého sukna bylo 75 loket $(150 : 2 = 75)$ a modrého 63 lokte $(138 - 75 = 63)$.

Zkouška: $5 . 63 + 3 . 75 = 315 + 225 = 540$.

II. Můžeme připustit, že by bylo koupeno jenom černé sukno. Potom dojdeme nejprve k výsledku, že bylo koupeno 63 lokte modrého sukna.

Poznámka. Můžeme řešit tyto úlohy obojím způsobem a objasnit žákům, proč v prvém případě napřed vyjde množství černého sukna a potom modrého a ve druhém případě obráceně.

Čínská úloha z díla „Děvět oddílů početního umění". „V kleci je neznámý počet bažantů a králíků. Víme pouze, že v celé kleci je 35 hlav a 94 nohy. Žádá se určit počet bažantů a počet králíků."[38])

A. Celá čísla

$ax + by = c$, $y = x + k$. *Úloha 2* (sbírka, kap. II, č. 458). „8 m hedvábí a 5 m kartounu stojí 83 rub. 50 k.; 1 m hedvábí je o 2 rub. 80 k. dražší než 1 m kartounu. Co stojí 1 m hedvábí a co 1 m kartounu?"

Řešení. Připustíme, že místo kartounu bylo koupeno hedvábí, potom

1. 2 rub. 80 k. . 5 = 14 rub. (5 m hedvábí by bylo o 14 rub. dražší než 5 m kartounu).

2. 83 rub. 50 k. + 14 rub. = 97 rub. 50 k. (by stálo 13 m hedvábí).

3. 97 rub. 50 k. : (8 + 5) = 7 rub. 50 k. (stojí 1 m hedvábí).

4. 7 rub. 50 k. — 2 rub. 80 k. = 4 rub. 70 k. (stojí 1 m kartounu).

Zkouška: 7 rub. 50 k. . 8 + 4 rub. 70 k. . 5 = 60 rub. + 23 rub. a 50. k = 83 rub. 50 k.

Je užitečné sestavit plán řešení také s předpokladem, že byl koupen pouze kartoun (proč v tomto případě vyjde napřed cena kartounu?).

$ax + by = c$, $y = kx$. *Úloha 3* (sbírka, kap. II, č. 462). „Mám v kapse třikrát více 20 kopejkových nežli 15 kopejkových mincí; celkem mám 6 rub. 75 k. Kolik mám v kapse jedněch a druhých mincí?"

[38]) G. N. Popov, „Sbornik istor. zadač po elementarnoj matematike", 1936, č. 98.

Řešení. Na každou 15 kopejkovou minci přijdou tři 20 kopejkové, jež platí celkem 60 kop. a spolu s 15 kopejkovou mincí dají 75 kop. Kdybych měl peníze v mincích po 75 kop., bylo by jich $675 : 75 = 9$. Odpověď: 9 mincí po 15 a 27 po 20 kop.

Zkouška: $9 \cdot 15 + 27 \cdot 20 = 135 + 540 = 675$; 6 rub. 75 kop.

B. Lomená čísla

Úloha 4 (sbírka, kap. IV, č. 1121). „Kolik váží 1 m^3 dubu a 1 m^3 suché jedle, jestliže $6\frac{1}{2}$ m^3 dubu a $2\frac{2}{5}$ m^3 jedle váží dohromady $6\frac{16}{25}$ t, při čemž váha 1 m^3 dubu je $1\frac{1}{3}$krát větší než váha 1 m^3 jedle?"

				Odpověď
Dub	$6\frac{1}{2}$ m^3	$6\frac{16}{25}$ t	1 m^3 váží $1\frac{1}{3}$krát více	$\frac{4}{5}$ t
Jedle	$2\frac{2}{5}$ m^3			$\frac{3}{5}$ t.

Zkouška:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{5} \cdot 6\frac{1}{2} = \frac{4 \cdot 13}{5 \cdot 2} = \frac{52}{10} = 5\frac{1}{5}\ (t) \\ \frac{3}{5} \cdot 2\frac{2}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{5} = \frac{36}{25} = 1\frac{11}{25}\ (t) \end{array}\right\}\ 5\frac{1}{5} + 1\frac{11}{25} = 6\frac{16}{25}\ (t).$$

Řešení. I. Připustíme, že místo jedle byl vzat dub. Aby zůstala zachována celková váha $6\frac{16}{25}$ t, musíme místo $6\frac{1}{2}$ m^3 dubu vzít $8\frac{2}{3}$ m^3 jedle. Tedy $11\frac{1}{15}$ m^3 jedle váží $6\frac{16}{25}$ t; 1 m^3 jedle váží $\frac{3}{5}$ t; 1 m^3 dubu váží $\frac{4}{5}$ t:

1. $6\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} = \frac{13 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 8\frac{2}{3}$ (m^3);
2. $8\frac{2}{3} + 2\frac{2}{5} = 11\frac{1}{15}$ (m^3);
3. $6\frac{16}{25} : 11\frac{1}{15} = \frac{166 \cdot 15}{25 \cdot 166} = \frac{3}{5}$ (t);
4. $\frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{4}{5}$ (t).

II. Připustíme, že místo jedle byl vzat dub. Aby zůstala zachována váha $6\frac{16}{25}$ t, musíme vzít dubu pouze $1\frac{4}{5}$ m^3 $\left(2\frac{2}{5} : 1\frac{1}{3} = \frac{12 \cdot 3}{5 \cdot 4} = 1\frac{4}{5}\right)$ místo $2\frac{2}{5}$ m^3 jedle atd.

Úlohy o směsích 2. druhu

Touž methodou vyloučení jedné neznámé pomocí záměny druhou neznámou řeší se úlohy, které se v methodikách aritmetiky a ve sbírkách úloh nazývají úlohami o „směsích 2. druhu“[39]) (viz úlohu 7 na str. 417).

Úloha 6 (sbírka, kap. V, č. 1585): „Bylo koupeno 1,6 kg cukrovinek dvou druhů; cena prvého druhu je 6,8 rub. za 1 kg, cena druhého druhu 8,4 rub. za 1 kg. Průměrná cena 1 kg směsi činí 7,5 rub. Kolik cukrovinek prvního a druhého druhu bylo koupeno?“

Řešení I (s předpokladem, že koupené cukrovinky byly vesměs 1. druhu):

$$\frac{7{,}5 \,.\, 1{,}6 - 6{,}8 \,.\, 1{,}6}{8{,}4 - 6{,}8} = \frac{1{,}6 \,.\, (7{,}5 - 6{,}8)}{1{,}6} = 0{,}7.$$

Odpověď: 0,7 kg dražšího druhu;
0,9 kg lacinějšího druhu.

Nebo *II* (s předpokladem, že všecky cukrovinky byly 2. druhu):

$$\frac{8{,}4 \,.\, 1{,}6 - 7{,}5 \,.\, 1{,}6}{8{,}4 - 6{,}8} = \frac{1{,}6 \,.\, (8{,}4 - 7{,}5)}{1{,}6} = 0{,}9 \text{ (kg) atd.}$$

Složitější úlohy

Úloha 7 (sbírka, kap. II, č. 473). „Chlapec koupil 3 hrušky a 10 jablek za 3 rub. 75 kop., při čemž za 3 hrušky zaplatil o 51 kop. více než za dvě jablka. Kolik stála 1 hruška a 1 jablko?“

Řešení I. Kdyby chlapec místo 3 hrušek koupil jablka, mohl koupit 2 jablka a dostal by 51 kop. zpět; potom by měl celkem 12 jablek (10 + 2 = 12) a zaplatil by 3 rub. 75 kop. — 51 kop. = = 3 rub. 24 kop.; tedy jedno jablko stojí 3 rub. 24 kop. : 12 = 27 kop. a 1 hruška stojí 35 kop.

$$\left(\frac{27 \,.\, 2 + 51}{3} = 35\right).$$

Nebo *II.* Kdyby chlapec místo jablek koupil hrušky, mohl místo 10 jablek koupit 15 hrušek (5krát 2 jablka, 5krát 3 hrušky), ale musil

[39]) Rozlišovaly se dva druhy úloh „o směsích“: a) z dané ceny za jednotku směšovaných látek (p_1; p_2) a z daných množství těch látek (m_1; m_2) stanovit cenu jednotky směsi: $n = \frac{p_1 m_1 + p_2 m_2}{m_1 + m_2}$ (viz kap. XI); b) z dané ceny za jednotku směšovaných látek (p_1; p_2) a ceny za jednotku směsi (n) stanovit množství směšovaných látek, je-li známo množství směsi (m). Úlohy na směsi 2. druhu se nyní v některých methodických příručkách nazývají „úlohami s předpokladem“. Podle námi provedené klasifikace veškeré úlohy „algebraického rázu“ jsou úlohami „s předpokladem“; při jejich řešení užíváme „předpokladu“, „připuštění“ (§ 6).

by zaplatit 3 rub. 75 kop. + 51 kop. . 5 = 6 rub. 30 kop. Za 6 rub. 30 kop. mohl koupit 18 hrušek atd.

Úlohy vyšetřovaného typu ve sbírce:

kap. II, „Celá čísla“, č. 454 až 474;
kap. IV, „Obyčejné zlomky“, č. 1115 až 1123;
kap. V, „Desetinné zlomky“, č. 1576 až 1588.

VI. SKUPINA ÚLOH

b) Vyloučení jedné neznámé srovnáním daných

A. Celá čísla

$ax + by = c$, $a_1x + b_1y = c_1$. *Úloha 1* (sbírka, kap. II, č. 478). „Továrna vyrobila 7000 párů mužské obuvi a 5000 párů dětské v celkové ceně 58 000 rub. Potom vyrobila 10 000 párů mužské obuvi a 4000 párů dětské v celkové ceně 76 000 rub. Kolik stojí pár mužské a pár dětské obuvi?“

Zápis úlohy:

7000 párů muž. obuvi a 4000 párů dětské za 58 000 rub.
10 000 párů muž. obuvi a 4000 párů dětské za 76 000 rub.

1. Musíme objasnit, že cena druhého množství obuvi je vyšší než cena prvního množství pouze proto, že po druhé bylo mužské obuvi více než po prvé;

2. musíme určit, o kolik párů mužské obuvi bylo po druhé vyrobeno více než po prvé (o 3000 párů) a o kolik rublů bylo proto po druhé více zaplaceno (o 18 000 rub.). Další řešení nečiní potíží.

B. Lomená čísla

Úloha 2 (sbírka, kap. V, č. 1592). „Za 1,5 kg jednoho zboží a 28 kg druhého zboží bylo zaplaceno 252,2 rub. Jindy za 30 kg druhého zboží a 4,5 kg prvého bylo zaplaceno 325,5 rub. Kolik stojí 1 kg každého zboží?“

1,5 kg; 28 kg; 252,5 rub.
4,5 kg; 30 kg; 352,5 rub.

Všimneme si, že po druhé bylo koupeno třikrát více prvního zboží než po prvé; proto můžeme srovnat počet kilogramů prvního zboží tak, že předpokládáme, že první nákup byl třikrát větší než ve skutečnosti. Potom se úloha řeší podobně jako minulá úloha.

4,5 kg; 84 kg; 757 rub. 50 kop.
4,5 kg; 30 kg; 325 rub. 50 kop.

Poznámka. Za lepšího stavu třídy můžeme probírat případ, kdy se mění první i druhá podmínka za účelem srovnání daných. Řešení nevyžaduje nových vysvětlivek.

Úlohy vyšetřovaného typu ve sbírce:
kap. II, „Celá čísla“, č. 475 až 479;
kap. IV, „Obyčejné zlomky“, č. 1124 až 1128;
kap. V, „Desetinné zlomky“, č. 1589 až 1592.

VII. SKUPINA ÚLOH

Změna jednoho činitele o několik jednotek[40])

Tyto úlohy jsou v ruštině obecně známé jako úlohy „na galki i palki“ (o kavkách a tyčích).

A. Celá čísla

Úloha 1. „Leteli galki, seli na palki,
Kagda selo po odnoj galke,
Nechvatilo palki,
Kagda seli po dve galki,
Nechvatilo galki.
Skol'ko bylo galok? Skol'ko bylo palok?“

(Letěly kavky, sedly na tyče; když sedlo po jedné kavce, nedostávala se tyč; když sedlo po dvou kavkách, nedostávala se kavka. Kolik bylo kavek? Kolik bylo tyčí?)

Vysvětlení. Když na každou tyč sedlo po jedné kavce, nedostávala se tyč, tedy počet kavek byl o jednu větší než počet tyčí. Ale stačilo,

[40]) Řešení v obecném tvaru. Činitelé buďtež x a y. Změna prvého z nich budiž a. Potom změna součinu je $(x + a)\,y - xy = ay$. Znajíce změnu součinu ay a změnu jednoho činitele a, vypočteme druhého činitele y.

aby na každou tyč přisedla jedna další kavka ($2 - 1 = 1$), aby se umístily všecky kavky (umístila se i ta kavka, na kterou po prvé nezbylo místo a ještě zůstalo jedno místo volné — pro které se nedostávala kavka), tedy po druhé se umístilo o dvě kavky víc než po prvé. Na každou tyč přisedlo po jedné kavce, tedy byly dvě tyče ($2 : 1 = 2$) a 3 kavky. Odpověď: 2 tyče, 3 kavky.

Zkouška: 1. když kavky sedly po jedné na každou tyč, zůstala jedna kavka bez místa: $3 - 2 = 1$;

2. když 3 kavky sedly po dvou na každou ze dvou tyčí, skutečně scházela 1 kavka k tomu, aby se mohla obsadit všecka místa: $2 \cdot 2 - 3 = 1$.

Poznámka. Předběžná ústní cvičení: známe jednoho činitele; určit, oč se změní součin, jestliže ke druhému činiteli přičteme (nebo od něho odečteme) dané číslo celé nebo lomené (sbírka, č. 329 až 334, 964).

Úloha 2 (sbírka, kap. II, č. 493). „Pro vysázení keři bylo určeno několik záhonů. Zahradník si vypočítal, že kdyby na každý záhon zasadil 3 keře, musil by určit ještě dalších 6 záhonů k vysázení všech keřů, kdyby však zasadil 5 keřů na každý záhon, zůstaly by 4 záhony nevysázené. Kolik keřů chtěl zasadit zahradník a na kolik záhonů?“

1. $5 - 3 = 2$; o 2 keře více na každý záhon by přišlo při druhém způsobu než při prvém;

2. $3 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 38$; o 38 keřů by se vysadilo více při druhém způsobu než při prvém;

3. $38 : 2 = 19$; na 19 záhonech chtěl zahradník vysázet keře;

4. $3 \cdot (19 + 6) = 75$ nebo $5 \cdot (19 - 4) = 75$; 75 keřů chtěl zahradník vysázet.

Poznámka. Algebraické řešení úlohy: znamená-li x počet záhonů, pak počet keřů určených k zasazení podle první podmínky se rovná $3x + 3 \cdot 6$ a podle druhé podmínky $5x - 5{,}4$; tedy $3x + 3 \cdot 6 = 5x - 5 \cdot 4$;

$$18 + 20 = 5x - 2x;$$
$$38 = 2x; \quad x = 38 : 2;$$
$$x = 19.$$

B. Lomená čísla

Úloha 3 (sbírka, kap. IV, č. 1147). „Součin dvou čísel se rovná $11\frac{1}{4}$; jestliže k jednomu z těch čísel přičteme $\frac{1}{2}$, bude součin roven $12\frac{1}{2}$. Určit ta čísla.“

1. činitel		k 1. se přičte $\frac{1}{2}$
2. činitel		
součin	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{1}{2}$

1. Změna součinu při změně jednoho (zde prvního) činitele:

$$12\tfrac{1}{2} - 11\tfrac{1}{4} = 1\tfrac{1}{4};$$

2. $1\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = 1\frac{1}{4} \,.\, 2 = 2\frac{1}{2}$; druhý činitel se rovná $2\frac{1}{2}$.

3. $11\frac{1}{4} : 2\frac{1}{2} = \frac{45\,.\,2}{4\,.\,5} = 4\frac{1}{2}$; první činitel se rovná $4\frac{1}{2}$.

Zkouška: $4\frac{1}{2} \,.\, 2\frac{1}{2} = 11\frac{1}{4}$; $5 \,.\, 2\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$.

Úlohy vyšetřovaného typu ve sbírce:
„Celá čísla“, kap. II, č. 489 až 494.
„Obyčejné zlomky“, kap. IV, č. 1146 až 1152.
„Desetinné zlomky“, kap. V, č. 1608 až 1613.

U vyšetřovaných skupin úloh byly naznačeny hlavní aritmetické methody řešení úloh „algebraického“ rázu; tím ovšem není vyčerpána celá různotvárnost možných „typů“ a nejsou zvláště zahrnuty „obmyslné“ úlohy, jejichž řešení podle našeho mínění patří do práce mimo třídu.

Z provedeného přehledu je patrné, že v oddíle o celých číslech i v oddílech o obyčejných a desetinných zlomcích jsou aritmetické úlohy řešitelné jednotnými methodami. Při tom se u každého typu řeší napřed takové úlohy, ve kterých se vyskytují pouze celá čísla a později se řeší obdobné úlohy s lomenými čísly. Toto opakování spojené s rozšířením výcviku má přispívat k rozvoji dovednosti řešit úlohy.

Odpůrci zavádění úloh algebraického rázu do kursu aritmetiky často namítají, že aritmetické methody řešení jsou maskovaným řešením rovnicemi. Nám se zdá, že uvedené příklady prokazují, že všecky tyto úlohy se dají řešit bez znalosti řešení rovnic; zároveň řešení těchto úloh žáka učí vnikati do podstaty otázek a skutečně přispívá k „vybroušení úsudku", pěstuje logické myšlení žáků, rozvíjí jejich důvtip. Žádné učení methodám řešení není přípustné. Klasifikace skupin úloh byla námi provedena výhradně pro učitele.

Poznámka. V této kapitole jsme se nezastavili u rozboru method „úměry", „přechodu k jednotce"[41]) ani u řešení úloh, při kterých se žáci seznamují se složenými jednotkami, s termíny „čeloveko-dni" a pod., protože o tom je řeč v kapitole „poměry a úměry" při rozbírání příslušných otázek (kap. XIII). Rovněž úlohy na určení „nejmenšího společného násobku", úlohy „o čase", „procentní výpočty" (kap. XII) a j. byly námi rozbírány u příslušných oddílů kursu.

Doplněk. Výše bylo naznačeno řešení úloh obyčejně nazývaných úlohami o směsích „1. druhu", což jsou složené aritmetické úlohy, jakož i úloh o směsích „2. druhu", což jsou úlohy „algebraického" rázu (viz str. 374).

Týmiž způsoby se řeší úlohy, ve kterých se jedná o koncentraci roztoků nebo o stupňovitosti lihu a úlohy o „slitinách a probách".

Pokyny: a) Stupňovitost čistého lihu se bere za jednotku (100% neboli 100°). Jestliže líh je smíšen s vodou, udává stupňovitost procentní poměr (podle objemu) čistého lihu k celé směsi.

b) Drahých kovů (zlato, stříbro) užívá se v životě obyčejně s přísadou jiných kovů (ligatura). „Proba" udává poměr váhy čistého stříbra k celkové váze a vyjadřuje se v promilích (tisícinách).

Říká se: „835 prob; to znamená 0,835 = 835‰.*)

Naznačíme řešení některých úloh.

Úloha 1 (sbírka, obecný oddíl, č. 2305). „Z dané zásoby 10 l 70%ní kyseliny sírové byly vzaty 2 l a nahrazeny týmž množstvím vody. Kolikaprocentní kyselina vznikla?"

I	8 l	70%
II	2 l	0%

Vysvětlení. V 8 zbývajících litrech 70%ní kyseliny je obsaženo (8 . 0,7 = 5,6) 5,6 l čisté (100%ní) kyseliny; ve 2 l vody není žádná kyselina sírová (0 l); tedy budeme míti v 10 l roztoku 5,6 l kyseliny sírové, t. j.

$$\frac{5,6}{10} = 0,56 = 56\%.$$

Zápis řešení:

$$\frac{8 \cdot 0,7 + 2 \cdot 0}{8 + 2} = 0,56 = 56\%.$$

---

41) Viz ALEKSANDROV, „Metody rešenija arifmetičeskich zadač".

*) U nás se dosud užívá karátů (čtyřiadvacetin), nikoli prob (tisícin). Pozn. překl.

Úloha 2 (obecný oddíl, č. 2268). Máme stříbro s 850 a 720 probami. Kolik musíme vzít jednoho i druhého stříbra, abychom dostali 1 kg 40 g stříbra s 800 probami.

V obou slitinách je (1040 . 0,8) g čistého stříbra; kdyby obě slitiny bylo 850 prob, bylo by v nich (1040 . 0,85) g čistého stříbra. Chyba pocházející z učiněného připustění je rovná

$$1040 \,.\, 0{,}85 - 1040 \,.\, 0{,}8 = 1040 \,.\, 0{,}05 = \tfrac{1040}{20} = 52 \text{ (g)}.$$

Tedy

$$\frac{52}{0{,}85 - 0{,}72} = \frac{52}{0{,}13} = 400;$$

400 g druhé slitiny;
640 g první slitiny.

Poznámka. Když se probere látka o dělení v poměru převráceném k poměru daných čísel (viz kap. XIII, str. 417, úloha 7), můžeme řešit úlohu také jiným způsobem:

	Proba			
I	0,85		— 0,05	Množství stříbra musíme vzít v poměru převráceném k poměru čísel 0,05 a 0,08, t. j. v poměru 8 : 5.
II	0,72	0,80	+ 0,08	

(Sbírka, obecný oddíl, č. 2261 až 2268 a 2305 až 2311.)

VIII. ÚLOHY S GEOMETRICKÝM OBSAHEM

Při řešení úloh s geometrickým obsahem získávají žáci určitou praktickou dovednost ve výpočtu obsahu, objemu, váhy, učí se provádět výpočty s přibližnými čísly, která se vždycky vyskytují při řešení praktických otázek, učí se v těchto případech zaokrouhlovat obdržený výsledek.

Úlohy s geometrickým obsahem se mají řešit současně s jinými úlohami. Nejdříve se u celých čísel opakují věci žákům známé z kursu obecné školy, tedy: výpočet obsahu čtverce a obdélníka; povrchu a objemu krychle a kvádru; potom se pokračuje v řešení obdobných úloh u výkonů s obyčejnými zlomky a zejména u výkonů s desetinnými zlomky.

Poznámka. Při této práci se mají stále žákům dávat krátká cvičení (písemná i ústní) na výkony s mnohojmennými čísly a na vyjádření měr učitého pojmenování měrami vyššího a nižšího pojmenování.

Jako doplněk se žákům 5. třídy ve sbírce dávají cvičení na výpočet délky kružnice, obsahu kruhu a j.

Velký praktický význam má dovednost počítat skutečné rozměry podle měřítka a rozměrů na mapě nebo plánu a také dovednost řešit obrácené úlohy. Je užitečné provádět tuto práci nejen při řešení úloh ze sbírky, nýbrž také jako praktickou práci, ke kterémužto cíli se užívá mapy nebo plánu terénu žákům známého. Zvláštní zájem a pozornost žáků budila tato práce, když sledovali na mapě postup Sovětské armády na západ při vypuzování fašistických imperialistů z naší země.

Sbírka úloh, „Celá čísla", č. 193 až 198, 213 až 216, 289 až 297 a j., „Obyčejné zlomky, kap. IV., č. 835 až 842, 1024 až 1034 a j., „Desetinné zlomky", kap. V, č. 1320 až 1330, 1344 až 1358, 1434 až 1440, 1511 až 1526 a j.

§ 7. Názornost při řešení úloh

Znázorňování úsečkami, kterého bylo výše užito při vysvětlování úloh činících určité potíže žákům 5. třídy, je osvědčeno mnohaletou praxí; má nejen pomocný význam při řešení dané úlohy, nýbrž má také vzdělávací význam, učí převádět aritmetické úlohy na geometrické (o úsečkách), připravuje na obecné řešení obdobných úloh.

Ale kladných výsledků se dosáhne pouze za těch okolností, že učitel ponechá žákům dostatečnou samostatnost v řešení úloh pomocí úseček, nechá je promyslit, vyzkoušet různé způsoby názorného zobrazování a dovedně jim pomůže v případě nezbytnosti.

Při řešení úloh, které žákům nečiní potíže, je znázorňování úsečkami arci zbytečné. Jsou však skupiny úloh, jejichž řešení za pomoci úseček je prosté a jasné, kdežto řešení bez pomoci názorného zobrazení působí mnoha žákům nesnáze. Mimo výše uvedené úlohy přichází tu v úvahu skupina úloh, ve kterých se žádá určit dvě čísla, jejichž hodnoty se mění tak, že jejich rozdíl zůstává stálý (nebo rovný nule). (Sbírka, Obecný oddíl, č. 2143 až 2147 a 2154 až 2160 a j.)

§ 8. Samostatné sestavování úloh žáky

1. Sestavování úloh žáky samými má význam pro matematický vývoj žáků a přispívá ke zvýšení zájmu o hodiny aritmetiky. Zdařile

sestavená, učitelem schválená úloha dodává uspokojení jejímu autoru a povzbuzuje ho k další práci.

2. Ve školní praxi se žákům ukládá buďto sestavit úlohu vyhovující určitým podmínkám nebo si vymyslit úlohu, jakou chtějí. Na příklad se uloží vymyslit úlohu s určitým počtem výkonů nebo na určité výkony, někdy také s určitým pořádkem výkonů, na př. sestavit úlohu, která by se řešila podle formule

$$\frac{ab + cd}{a + b}; \ (a + b)\,c; \ a + bc \text{ atd.};$$

sestavit úlohu na procenta a pod.

3. Můžeme uložit žákům sestavení úlohy, jejímž řešením by byl numericky daný početní výraz, ale jmenovitě v tomto případě je veliké nebezpečí, že žáci ve snaze dospěti k žádaným výkonům utvoří naprosto nereálný text úlohy, což se také pozoruje v praxi. Proto podobných cvičení se musí užívat se zvláštní opatrností.

4. Žáci mnohdy sestavují úlohy s nereálnými danými hodnotami a sám obsah úlohy mnohdy neodpovídá skutečnosti. To nastává nejčastěji, když se od žáků žádá, aby znovu sestavili danou úlohu s jinými čísly a oni přenášejí obsah úlohy s určitými numerickými daty, jež připouštějí změny v určitých mezích (váha předmětu, cena, rozměr, rychlost) na naprosto libovolné číselné hodnoty. Naši žáci sami zaujímají kritické stanovisko k úlohám podobného druhu, ale učitel musí takové nereálné úlohy sám včas opravovat a žádat od žáků, aby z novin, časopisů atd. vypisovali číselné hodnoty, kterých by se dalo užít pro sestavování úloh. Tato práce přispívá k rozšíření obzoru žáků různotvárností jimi sestavovaných úloh.

5. Často žáci si vymýšlejí úlohy téhož typu s různými numerickými hodnotami; učitel jich může užít k vyvození obecné formule řešení úloh; za tímto účelem sestaví tabulku řešení vyskytujících se různých případů.

V těchto případech je užitečné sestavovat a ponechávat řešení úloh ve tvaru početních výrazů bez provádění naznačených výkonů. Učitel, který povzbuzuje žáky k samostatnému sestavování úloh, musí v prvé řadě také sám sestavovat úlohy, jak to bylo námi naznačováno v příslušných kapitolách i v „Úvodě“ k této kapitole. Zejména má učitel sestavovat úlohy obdobné těm, které jsou ve sbírce, a dávat řešit ty úlohy ve třídě, načež k utvrzení method uloží za domácí úkol úlohu ze sbírky. (Pokračování o řešení úloh se najde v kap. XIII.)

KAPITOLA XIII.

ÚMĚRY. ÚMĚRNÉ VELIČINY

§ 1. Úvod

Úplná theorie úměr je vyložena v proslulých Euklidových „Základech". Euklid sestavuje dvojí theorii úměr: pro veličiny a pro čísla. U Euklida číslo je „soubor jednotek", tedy číslo celé, vyjadřující diskretní veličinu. Za jeho doby nebyla ještě vytvořena vzájemně jednoznačná korespondence mezi geometrickou veličinou (spojitou) a číslem, tudíž poměr dvou délek, obsahů nebo objemů se nepřeváděl na poměr dvou čísel. V theorii celých čísel (starověké aritmetice) Euklid zavádí vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi celými čísly a úsečkami složenými z úseček určité délky jako jednotek. Proto známé Euklidovy axiomy o veličinách jsou pro něho také základem aritmetiky celých čísel a výkony s celými čísly jsou převedeny na výkony s úsečkami.[1])

Po zavedení lomených čísel definice a věty z nauky o celých číslech byly rozšířeny i na lomená čísla.

V první známé ruské příručce aritmetické od L. F. Magnického, o které jsme se zde nejednou zmínili, nevyskytují se úměry, ačkoli se probírají poměry, úlohy na trojčlenku a dokonce řady. Žák Magnického Nikolaj Kurgapov v jím vydané aritmetice zavádí úměry před probíráním trojčlenky (1757, o 54 roky později po vydání „Arifmetiky" Magnického).

Koncem téhož 18. století Dmitrij Aničkov v kurse aritmetiky vykládá úměry a řady v jedné kapitole.[2])

V otázce o umístění úměr ve vyučování jsou u methodiků různé názory. Jedni nazírají na úměru jako na číselnou identitu nebo rovnici s neznámým členem a proto probírání úměr umísťují do algebry nebo do theoretických kursů aritmetiky („v úměře se učí některým obecným vlastnostem"), a tamtéž umísťují i probírání těch úměr, jejichž členy jsou určitá čísla vyjádřená ciframi. Tento případ je předmětem vyučování v aritmetice na střední škole jako methoda k řešení mnoha úloh o úměrnosti čísel a veličin;[3]) k výkladu této methody zde přejdeme. Zastánci vyloučení oddílu o úměrách z kursu aritmetiky

---

[1]) „Geometrisace" aritmetiky v protikladu k současnému převádění závislostí mezi geometrickými veličinami na závislost mezi čísly, k aritmetisaci geometrie.

[2]) D. D. GALANIN, „Istorija metodičeskich idej po arifmetike v Rossii XVIII veka", Moskva 1915.

[3]) Obecná theorie úměr, úměra postupná, úměra spojitá, vlastnost rovných poměrů patří do osnovy 7. třídy; potom se toho užívá při probírání podobnosti obrazců (v souhlase s historií této látky); rovnice tvaru úměry se probírají v kurse algebry.

střední školy činí úplně reálný návrh: úlohy tohoto druhu řešit několika výkony i některými umělými zjednodušenými způsoby. Stavíce se na praktické stanovisko vytýkají, že ve mnoha tak zvaných úlohách „na úměru" se rozchází aritmetická přesnost a životní praxe (na příklad, při velkém množství zboží se poskytuje sleva a váha koupeného zboží není úměrná ceně; při menším počtu hodin pracovní výkon se zvýší a nebude úměrný době a pod.) a že při řešení úloh na úměry žáci, mechanicky užívajíce úměr, dospívají ke kuriositám, když se snaží řešit úměrou i úlohu tohoto tvaru: „Jeden člověk ujde nějakou dráhu za určitou dobu. Jaké doby bude třeba, půjdou-li dva lidé společně?" a pod.

V některých učebnicích se ještě zachovává oddíl „Aritmetické úměry", který dnes už není předmětem školního vyučování.[4]) Čísla, mezi nimiž je závislost $a - b = c - d$, byla nazvána „úměrnými" (obdoba s multiplikativní úměrou je v rovnosti dvou tak zvaných aritmetických poměrů neboli rozdílů). Jakýsi zájem má „aritmetická úměra", protože se vyskytuje při výpočtu aritmetického průměru dvou čísel (a při probírání vlastnosti libovolného členu aritmetické řady). Spojitá aritmetická úměra $a - b = b - c$ dává aritmetický průměr dvou čísel $b = \frac{1}{2}(a + c)$; spojitá geometrická úměra $a : b = b : c$ dává geometrický průměr $b = \sqrt{ac}$.

§ 2. Úměry

Objasnění pojmu

1. Na konkretních příkladech se objasní žákům nový pojem „rovnosti dvou poměrů". Napřed můžeme žákům uložit na příklad, aby zapsali tu myšlenku, že 10,3 + 6,7 znamená právě tolik jako 10 + 7 nebo že 22,2 — 5,2 znamená právě tolik jako 10 + 7.

2. Opakuje se vše, co žáci znají o poměru čísel a o poměru veličin jako o poměru číselných hodnot, které mají ty veličiny, jsou-li vyjádřeny obě v téže jednotce.

3. Potom se zavede pojem úměry po uvedení několika příkladů a zápisu rovnosti dvou poměrů.

Jako dobrý příklad poslouží zase měřítko zkrácení. Mějme měřítko 0,01. Úsečka 5 cm na plánu zobrazuje úsečku 500 cm (5 m) v přírodě; úsečka 7 cm na plánu zobrazuje 7 m v přírodě. Dostáváme poměry

---

[4]) WIELEITNER, „Chrestomatija po istorii matematiki," vypusk I Arifmetika i Algebra, GTTI, 1932. Z aritmetiky řeckého matematika Nikomacha (kolem r. 100 po Kr.) o vlastnostech aritmetické, geometrické a harmonické úměry.

$$5\ \text{m} : 5\ \text{cm} = 500\ \text{cm} : 5\ \text{cm} = 100,$$
$$7\ \text{m} : 7\ \text{cm} = 700\ \text{cm} : 7\ \text{cm} = 100,$$

a úměru

$$500 : 5 = 700 : 7,$$

nebo

$$5\ \text{m} : 0{,}05\ \text{m} = 100,$$
$$7\ \text{m} : 0{,}07\ \text{m} = 100,$$
$$5 : 0{,}05 = 7 : 0{,}07;\ \text{úměra.}$$

V učebnicích obyčejně se definuje úměra jako rovnost dvou poměrů. Je užitečné být přesný; napíšeme-li $500 : 5 = 100$; $700 : 7 = 100$, máme rovnost dvou poměrů (oba poměry jsou si rovny), ale nemáme úměru. Máme čtyři čísla, ze kterých můžeme sestavit úměru $500 : 5 = 700 : 7$.

Zápis úměry se děje i pomocí dvojtečky i pomocí zlomkové čáry:

$$5 : 500 = 7 : 700;\ \tfrac{5}{500} = \tfrac{7}{700}.$$ [5])

Mezi poměry, které se srovnávají, mají býti také poměry lomené a poměry s lomenými členy (jsou uvedeny výše).

Čtení úměry

Potom se přejde ke čtení úměry; při tom se mají žáci cvičit ve čtení úměr různými způsoby. Při těchto cvičeních žáci si osvojují smysl úměry.

Úměra $24 : 8 = 30 : 10$ se čte: a) poměr 24 k 8 se rovná poměru 30 k 10 (rozdělíme-li 24 na 8 dílů, dostaneme stejné díly jako když rozdělíme 30 na 10 dílů); b) 24 se má k 8 jako se má 30 k 10 (neboli 8 je ve 24 obsaženo tolikrát jako 10 ve 30); c) 24 je tolikrát větší než 8, kolikrát je 30 větší než 10 (nebo 8 je tolikrát menší než 24, kolikrát je 10 menší než 30).

Úměra $7 : 35 = 4 : 20$ se čte: a) poměr 7 ke 35 se rovná poměru 4 ke 20; b) 7 se má ke 35 jako se mají 4 ke 20; c) 7 tvoří takovou část ze 35, jakou tvoří 4 ze 20.

---

[5]) Žáci někdy chtějí krátit členy každého poměru. Tu se přesvědčují, že dané poměry jsou si rovny, $\tfrac{1}{100} = \tfrac{1}{100}$, ale při tom nezachovali ta čísla, jejichž poměr vypočetli.

Názvy členů úměry

Zavedou se názvy členů úměry, při čemž se má upozornit na vyskytující se chybu: jsou-li poměry zapsány ve tvaru zlomků, žáci nazývají vnějšími členy oba jmenovatele. Pro orientaci může se poměr napsaný nalevo nazývat prvním poměrem a poměr napsaný napravo druhým.

Potom následují cvičení, ve kterých žáci: a) samostatně vybírají 4 čísla pro sestavení úměry; b) vybírají čísla, ze kterých lze sestavit úměru s daným poměrem nebo s danými členy (dvěma nebo třemi); c) vybírají z daných poměrů takové, ze kterých se může sestavit úměra; d) přesvědčují se o správnosti napsané rovnosti. Je užitečné dávat cvičení, ve kterých žáci mají zjistit nemožnost rovnosti poměrů.

Základní vlastnost úměry

Při těch cvičeních, ve kterých se vyskytují malá čísla jako členy úměry, je třeba stále ověřovat a stanovit fakt, že v úměře součin vnějších členů se rovná součinu vnitřních členů. Důkaz této základní vlastnosti úměry je většinou obtížný pro žáky 5. třídy.

Jsou různé způsoby důkazu základní vlastnosti úměry. Jeden z nich: budiž $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; násobíme-li obě strany dané úměry číslem bd, dostaneme

$$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd, \text{ z čehož } ad = cb \text{ neboli } ad = bc.$$

Znalosti základní vlastnosti úměry se užívá k ověření úměry (dané nebo samostatně sestavené) a k určení neznámého členu úměry.

Zkouška správnosti úměry

O správnosti úměry se můžeme přesvědčit dvěma způsoby: buďto se přesvědčíme, že oba poměry jsou si rovny nebo že součin členů vnějších se rovná součinu členů vnitřních.

První způsob zkoušky se již prováděl. Nyní se uloží žákům cvičení na zkoušku správnosti dané nebo samostatně sestavené úměry na základě rovnosti součinu členů vnějších a členů vnitřních; můžeme užít současně obou způsobů jednak pro opakování dřívějšího, jednak pro porovnání obou způsobů.

Záměna členů úměry

1. Zkoušky správnosti úměry (oběma způsoby) jest užívati k tomu, aby se na číselných příkladech zjišťovalo, že úměra zůstane správná, jestliže vyměníme mezi sebou oba vnější členy úměry.

Vysvětlení. Součin vnějších členů se při změně jejich pořádku nezměnil, součin vnitřních členů se také nezměnil, proto také rovnost součinů zůstane zachována (úměra zůstane také správná, jestliže vyměníme mezi sebou oba vnitřní členy — vysvětlení je stejné).

$\boxed{20} : 4 = 15 : \boxed{3}$; $20 . 3 = 60$; $4 . 15 = 60$ oba poměry jsou rovné pěti.

$\boxed{3} : 4 = 15 : \boxed{20}$; $3 . 20 = 60$; $4 . 15 = 60$ oba poměry jsou rovné $\frac{3}{4}$.

Stejně

$20 : \boxed{4} = \boxed{15} : 3$; oba poměry 5.

$20 . 3 = 3 . 20$; $4 . 15 = 15 . 4$

$20 : \boxed{15} = \boxed{4} : 3$; oba poměry $\frac{4}{3}$.

Čísla námi uzavřená do rámečku je vhodné při zapisování na tabuli vyznačit zarámováním nebo barevnou křídou nebo podtržením.

Je třeba žákům důkladně vysvětlit, že ve vyšetřovaných případech se mění poměry, ze kterých se skládá úměra, že však se záchovává rovnost poměrů (v každém případě). Potom je lehké pochopit (a zkouškou se přesvědčit), že v úměře smíme mezi sebou zaměnit i oba členy vnější i oba členy vnitřní.

Úměra zůstane správná, jestliže první poměr zapíšeme jako druhý a druhý jako první:

$$20 : 4 = 15 : 3.$$
$$15 : 3 = 20 : 4.$$

Otázka: co se při tom děje? *Odpověď:* ty dva členy, které v původní úměře byly vnější, jsou v nové úměře členy vnitřními atd. *Otázka:* Změní se součin členů vnějších nebo součin členů vnitřních? *Odpověď:* ne. Je jasné, že ani poměr se nemohl změnit. V tomto případě se změnil pouze tvar zápisu úměry.

Vyšetřují se podle učebnice změny pořádku členů úměry (poměrů) za podmínky, že rovnost poměrů musí zůstat zachována. Pro systematisaci mohou žáci zapsat na tabuli (a do sešitů) úměru v 8 tvarech:

$$20 : 4 = 15 : 3$$
$$\boxed{3} : 4 = 15 : \boxed{20}$$
$$20 : \boxed{15} = \boxed{4} : 3$$
$$3 : 15 = 4 : 20$$

$$\boxed{15 : 3} = \boxed{20 : 4}$$
$$15 : \boxed{20} = \boxed{3} : 4$$
$$\boxed{4} : 3 = 20 : \boxed{15}$$
$$4 : 20 = 3 : 15.$$

2. Zkouškou a přiměřeným vysvětlením se řeší cvičení, ve kterých se mají krátit členy úměry nebo se má úměra zbavit zlomků.

Zkoušku můžeme provádět kterýmkoli ze způsobů.

Příklad. Zůstane správnou úměra 75 : 15 = 105 : 21, jestliže oba členy prvního poměru dělíme pěti? Proč?

Zůstane správnou úměra 75 : 15 = 105 : 21, jestliže přední členy obou poměrů dělíme pěti? Provésti zkoušku a vysvětlit, proč úměra zůstane správná atd.

Pokyn. Vysvětlení můžeme podávat na základě vlastnosti členů úměry, ale žáci mohou také vycházet od toho, že podíl se nezmění při současném násobení nebo dělení dělence i dělitele týmž číslem, od změny podílu při změně dělence atd.

Pravidla se v tomto případě nepodávají, žáci mají rozumět, že ta nebo jiná změna tvaru je možná a umět kontrolovat (zkouškou správnosti) provedenou změnu.

Určení neznámého členu úměry

Žáci v předcházejících cvičeních samostatně sestavovali příklady úměr volíce čísla a zkoušejíce správnost sestavené úměry. Nyní je třeba obrátit pozornost na to, že ze tří členů úměry je možné vypočítat člen čtvrtý podle základní vlastnosti úměry.

Cvičení se řeší v tomto pořadí:

a) $x : b = c : d$, potom b) $a : b = c : x$, c) $a : x = c : d$, b) $a : b = x : d$.

Provedený výzkum v RSFSR ukázal různotvárnost method, kterých užívají žáci střední školy při řešení úměry.[6]) Uvedeme některé z nich.

1. Vyskytují-li se v úměře zlomky, nahradí se poměr zlomků poměrem čísel celých a aby nebylo nutné počítati se zlomky, píše se:

$$x : \tfrac{3}{4} = 3\tfrac{1}{3} : \tfrac{2}{5}; \; 4x : 3 = 50 : 6,$$

z čehož se najde $x = 6\frac{1}{4}$; nebo se řeší ještě složitěji tak, že se všecky členy uvedené úměry uveďou na společného jmenovatele a po jeho odstranění se píše $60x : 45 = 200 : 24$, z čehož zase $x = 6\frac{1}{4}$.

2. Provede se dělení na pravé i na levé straně zvlášť a potom se určí neznámý člen úměry:

$$x : \tfrac{3}{4} = 3\tfrac{1}{3} : \tfrac{2}{5}; \; x : \tfrac{3}{4} = \tfrac{4}{3}x; \; 3\tfrac{1}{3} : \tfrac{2}{5} = \tfrac{25}{3};$$

$$\frac{4}{3}x = \frac{25}{3}; \quad x = \frac{25 \,.\, 3}{3 \,.\, 4} = 6\tfrac{1}{4}.$$

3. Nejprve se určí součin vnitřních (vnějších) členů a potom se najde neznámý člen dělením toho součinu známým členem vnějším (vnitřním):

$$x : \tfrac{3}{4} = 3\tfrac{1}{3} : \tfrac{2}{5}; \quad \tfrac{3}{4} \,.\, 3\tfrac{1}{3} = \frac{3 \,.\, 10}{4 \,.\, 3} = \tfrac{5}{2};$$

$$x = \tfrac{5}{2} : \tfrac{2}{5} = \frac{5 \,.\, 5}{2 \,.\, 2} = 6\tfrac{1}{4}.$$

4. Nejprve se vypočítá známý poměr a z něho násobením známým vnitřním (vnějším) členem se vypočítá neznámý člen:

$$x : \tfrac{3}{4} = 3\tfrac{1}{3} : \tfrac{2}{5}; \; 3\tfrac{1}{3} : \tfrac{2}{5} = 8\tfrac{1}{3};$$

$$x = 8\tfrac{1}{3} \,.\, \tfrac{3}{4} = \frac{25 \,.\, 3}{3 \,.\, 4} = 6\tfrac{1}{4}.$$[7])

My jsme zde provedli až do konce způsoby řešení úměr vyskytující se v praxi; je třeba říci, že vinou složitosti jedněch řešení a methodické neúčelnosti druhých jsou časté případy, že žák neprovede řešení případu do konce.

My považujeme tuto methodu za nejlepší:

$$x : \tfrac{3}{4} = 3\tfrac{1}{3} : \tfrac{2}{5}; \quad x = \frac{\tfrac{3}{4} \,.\, 3\tfrac{1}{3}}{\tfrac{2}{5}} = \frac{3 \,.\, 10 \,.\, 5}{4 \,.\, 3 \,.\, 2} = \frac{25}{4} = 6\tfrac{1}{4}.$$

[6]) „Instruktivno-metodičeskije pis'ma", NKP, 1932, č. 29 a 1933, č. 8, sestavila Je. S. BEREZANSKAJA.

[7]) Způsoby 3. a 4. se vyskytovaly r. 1942 až 1945 v hodinách aritmetiky v 5. třídě, viz školy města Kujbyševa.

Jestliže žáci si osvojili v kurse aritmetiky výkony s lomenými a celými čísly, nemohou míti potíže, ale kromě toho je velice účelné zopakovat: a) určení neznámého činitele ze součinu a druhého činitele, b) násobení a dělení několika čísel. Proto při výpočtu neznámého členu úměry je závazné nejprve pouze naznačit číselnou formulí, které výkony se kterými čísly se mají provést, potom provésti všecka možná krácení činitelů, načež se teprve provádí skutečné násobení a dělení.

Cvičení, jako vždy, se provádějí s určitým stupňováním nesnadnosti; daná čísla jsou nejprve čísla celá a potom zlomky (obyčejné i desetinné).

Příklad: $2x : 9 = 2\frac{1}{3} : 5\frac{1}{4}$; $2x = \dfrac{9 \cdot 2\frac{1}{3}}{5\frac{1}{4}} = \dfrac{9 \cdot 7 \cdot 4}{3 \cdot 21} = 4$; $x = 2$.

Pravidlo pro výpočet vnějšího nebo vnitřního členu úměry podle učebnice.

Uvede se zápis úměry a její základní vlastnosti pomocí písmen:

$$a : b = c : d; \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad a \cdot d = b \cdot c.$$

§ 3. Úměrnost veličin

V naší methodické literatuře matematické není jednotného stanoviska o rozčlenění učební látky při probírání úměr a úměrnosti veličin.

V matematických osnovách ruské předrevoluční školy se probíraly nejprve poměry, potom úměry a posléze látka o úměrnosti veličin, která se redukovala na řešení úloh trojčlenkou. Pod vlivem zastánců meranského programu byl navržen požadavek „funkčního myšlení" žáků, požadavek, aby pojem funkce hrál vůdčí roli v celém kursu matematiky na střední škole. Tento směr se projevil zejména výrazně v otázce, jak vyučovati oddílu aritmetiky (jak rozšířiti osnovu) „Úměry a úměrné veličiny", kde se po prvé ve škole setkáváme ve vlastním smyslu slova s funkční závislostí mající velký význam pro matematický rozvoj žáků. Co se týče rozčlenění látky, tu v některých příručkách a učebnicích, na příklad v „Kurse arifmetiki dlja pedtechnikumov" vydaném r. 1933, pojem úměrné závislosti veličin se zavádí bez předchozího zavedení úměry. Ale ježto hlavní vlastností úměrnosti veličin je fakt rovnosti poměrů párů jejich hodnot (úměra), je správnější vycházet výslovně z této vlastnosti úměrných veličin, objasňující žákům význam slova „úměrný" a mimo to je správnější od studia poměru přejít přímo ke studiu rovnosti dvou poměrů a neodtrhovati od sebe tyto dvě věci novým pojmem funkční závislosti, který vyžaduje pečlivého zpracování. Proto my se řídíme pořádkem rozčlenění tohoto učiva přijatým ve stabilní učebnici: úměry, pojem úměrnosti veličin, řešení úloh o úměrných veličinách.

Plán práce

Už nejednou měli žáci co dělat s proměnnými, vzájemně závislými veličinami, zejména při řešení úloh. Ale zde se po prvé shrnují a systematisují nashromážděné vědomosti. Důkladně, na příkladech se žákům vysvětlí pojmy: proměnná a stálá veličina závislá i nezávislá. Příklady se berou toliko v číselném tvaru; sestavují se tabulky. Příklady mají býti co nejrůznotvárnější a vybírány tak, aby v jedněch případech žáci mohli z rozboru daných dojít k určité závislosti mezi veličinami a ve druhých (složitějších) případech aby pouze konstatovali existenci závislosti mezi veličinami, a v některých případech stanovili také nezávislost zkoumaných veličin.

Prvými příklady závislosti veličin mohou býti žákům známé aritmetické závislosti mezi danými čísly a výsledky výkonů (součet a sčítanci; součin a činitelé; zápis základních spojů sčítání a násobení atd.); jako příklady mohou posloužit závislosti žákům známé z kursu geometrie, jako na příklad změna obsahu obrazce, zejména obdélníka, v závislosti na jeho délce a šířce; změna obsahu čtverce v závislosti na jeho straně atd.

Učitel musí sám uvésti několik příkladů stálých a proměnných veličin a závislostí mezi nimi a musí pobídnout žáky, aby uváděli samostatně příklady z aritmetiky (zejména texty úloh), z geometrie a fysiky (jako na příklad změnu váhy v závislosti na změně objemu, změnu dráhy v závislosti na době, na rychlosti pohybu) i ze života žáků (poplatek za vodu v závislosti na počtu členů rodiny, nájem v závislosti na velikosti obytného prostoru atd.), z průmyslu (velikost výroby v závislosti na pracovní době, na počtu strojů, na výkonnosti a pod.) i z oboru zemědělství (mzda a počet pracovních dní, velikost sklizně v závislosti na počtu osetých hektarů atd.).

Při této práci mají žáci sestavovat tabulky znázorňující funkční závislost odpovídající textu vyšetřované úlohy. Účelné je nejdříve zhotovit několik nástěnných tabulek, podle kterých se později činí závěry a provádí se opakování.

Tabulka 1.

	Doba pohybu v hodinách	Střední rychlost v km/hod.	Vzdálenost od výchozího bodu v km
Pěší	3	4	12
Kůň	3	10	30
Cyklista	3	14	42
Automobil	3	50	150

Tabulka 2.

Doba jízdy v hodinách	Konečná vzdálenost od počáteční stanice	Střední rychlost v km/hod.
2	70	35
3	105	35
4	140	35
6	210	35

Tabulka 3

pro obdélník.

Základna v cm	Výška v cm	Obsah v cm^2
10	3	30
10	6	60
10	12	120
5	3	15
20	5	100

Tabulka 4

pro obdélník.

Obsah v cm^2	Výška v cm	Základna v cm
60	5	12
60	10	6
60	15	4
60	20	3

Lekce I. Z rozboru naznačených závislostí žáci docházejí k závěru:

1. že veličiny jsou stálé a proměnné,

2. že jedna a táž veličina může býti za určitých podmínek stálá a za jiných proměnná (na příklad tabulky 1 a 2, 3 a 4);

3. že veličiny mohou býti mezi sebou v určité závislosti, ale mohou také být nezávislé jedna na druhé (na příklad vzdálenost v tabulce 1 závisí na střední rychlosti pohybu, ale nezávisí na počtu lidí pohybujících se daným způsobem, všímáme-li si toho počtu a pod.);

4. že závislost jedné veličiny na druhé se jeví takto: jestliže se změní číselná hodnota jedné veličiny, dostane také druhá veličina jinou hodnotu neboli, jak pravíme, při změně jedné veličiny se změní také druhá veličina, při čemž vždy jedné hodnotě jedné veličiny odpovídá zcela určitá hodnota druhé veličiny (odpovídající hodnoty);

5. že závislost mezi veličinami je závislost vzájemná: jestliže na příklad se změní strana čtverce, změní se obsah čtverce a obráceně;

6. že jedna veličina může záviset na několika veličinách (tabulka 3, tabulky 2 a 1).

Když jsou žáci důkladně seznámeni se základními pojmy, přejde se k vyšetřování toho, jak jedna veličina závisí na druhé a ke stanovení znaku nejprve přímé a potom nepřímé úměrnosti veličin (jako zvláštních případů funkční závislosti).

Lekce 2. Porovnáváním čísel v tabulkách se zjistí, že existuje taková závislost mezi veličinami, u které při zvětšení (zmenšení) jedné veličiny několikrát příslušná číselná hodnota druhé veličiny se zvětší (zmenší) také tolikrát. Je třeba upozornit žáky na to, že poměr dvou libovolných číselných hodnot jedné veličiny je roven poměru příslušných číselných hodnot druhé veličiny. O takových veličinách pravíme, že jsou mezi sebou přímo úměrné; z příslušných číselných hodnot těch veličin můžeme sestavit úměru (rovnost dvou poměrů). Definice všech žákům vysvětlovaných pojmů se udávají podle učebnice.

Cvičení. Vyhledat neznámé číselné hodnoty jedné ze dvou přímo úměrných veličin udaných v tabulce 5, je-li známa aspoň jedna její číselná hodnota a jsou-li známy číselné hodnoty druhé veličiny (aspoň dvě), na příklad

$$\frac{x}{7{,}8} = \frac{5}{1}; \; x = 39 \text{ (kg) atd.}$$

Tabulka 5.

Objem ocelového předmětu v dm^3	Váha předmětu v kg
1	7,8
5	?
10	?
?	390
?	1170

Z těchto cvičení je žákům patrné, že k určení jedné číselné hodnoty jedné ze dvou přímo úměrných veličin není třeba vypisovat více než dva řádky z tabulky úměrných veličin.

Potom se přejde k řešení úloh ze sbírky, v jejichž znění se vyskytují dvě přímo úměrné veličiny. Je třeba žáky upozornit, že před řešením úlohy musíme vyšetřit, zdali veličiny v úloze dané jsou či nejsou přímo úměrné. (Úlohy na „jednoduchou trojčlenku“.)

Zápis řešení úlohy (ve tvaru úměry):

$3\frac{1}{2}$ hodiny	56 šroubů
12 hodin	x šroubů

$$\frac{x}{56} = \frac{12}{3\frac{1}{2}}; \quad x = \frac{56 \cdot 12}{3\frac{1}{2}} = \frac{\overset{8}{56} \cdot 12 \cdot 2}{\underset{1}{7}} = 192 \text{ (šrouby).}$$

Vysvětlení: a) poměr dvou číselných hodnot jedné veličiny se rovná poměru příslušných číselných hodnot druhé veličiny neboli b) počet zhotovených šroubů (je výhodné začít s neznámou) se zvětší tolikrát, kolikrát se zvětší pracovní doba.

Tyto otázky musí býti velmi důkladně propracovány a musí býti zavedena určitá soustavnost zápisu řešení úloh o přímo úměrných veličinách, ačkoli tu žáci nemají žádné podstatné nesnáze. Ale teprve potom se může přejít k rozboru a řešení úloh na nepřímou úměrnost veličin a počítat s tím, že dík důkladnosti ve vysvětlování jednotlivých momentů a etap práce nedojde k té nejasnosti a zmatenosti, kterou u žáků často pozorujeme při řešení úloh na nepřímou úměrnost veličin.

Mezi jiným v zápisech žáků často nacházíme výrazy „přímá" a „nepřímá" úměra. Úměra není „přímá" ani „nepřímá"; je jen „přímá a nepřímá úměrnost veličin".

Lekce 3. Porovnáváním daných čísel ve slovní úloze nebo čísel v tabulce (na příklad v tabulce 4) dojdeme k vyjasnění existence takové závislosti mezi dvěma veličinami (na příklad mezi základnou a výškou obdélníka s určitým obsahem), u které při zvětšení (zmenšení) číselné hodnoty jedné veličiny několikrát příslušná hodnota druhé veličiny se zmenší (zvětší) také tolikrát. Takové veličiny se nazývají veličiny nepřímo úměrné.

Cvičení. 1. Zkoušíme, zdali je možné sestavit úměru z číselných hodnot dvou veličin (základny a výšky) daných na příklad v tabulce 4. Je patrné, že na příklad poměr $\frac{10}{5}$ není roven poměru příslušných hodnot $\frac{6}{12}$; ale ty dva poměry jsou čísla navzájem převrácená; totéž vidíme u poměrů $\frac{15}{10}$ a $\frac{4}{6}$, kde zase obdržíme čísla $\frac{3}{2}$ a $\frac{2}{3}$ navzájem převrácená atd. Proto můžeme sice sestavit úměru,[8]) avšak abychom toho docílili, musíme vzít poměr dvou číselných hodnot jedné veličiny a poměr převrácený k poměru příslušných číselných hodnot druhé veličiny, jinak řečeno, musíme vyměnit mezi sebou členy druhého poměru: $10 : 5 = 12 : 6$ nebo $15 : 10 = 6 : 4$. Po důkladném vysvětlení věci se může přejíti k zápisu

$$10 : 5 = \tfrac{1}{6} : \tfrac{1}{12} = 12 : 6 \quad \text{nebo} \quad 15 : 10 = \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{6} = 6 : 4,$$

t. j. poměr dvou hodnot jedné veličiny je roven poměru v obráceném pořádku vzatých příslušných hodnot druhé veličiny.

2. Vypočítat neznámou hodnotu jedné ze dvou nepřímo úměrných veličin podle tabulky 6.

Řešení.

$$x : 200 = 80 : 160 \text{ nebo } x : 200 = \tfrac{1}{160} : \tfrac{1}{80}; \quad x = \frac{200 \,.\, 80}{160} = 100.$$

[8]) Tím se vysvětlují názvy „přímo úměrné veličiny" a „nepřímo úměrné veličiny".

Zápis $x : 200 = 80 : 160$ můžeme zavést hned na počátku jakožto převrácený poměr získaný záměnou členů. Takové řešení je pro žáky jednodušší.

Tabulka 6.

Průměr kola v mm	Počet otočení za minutu
80	200
160	?
?	120

3. Potom se řeší úlohy na „jednoduchou trojčlenku", v jejichž znění se vyskytují nepřímo úměrné veličiny (ve tvaru úměry). Je velice užitečné vést žáky k tomu, aby si všímali, kde se vyskytuje taková závislost v látce probírané v jiných vědách a v denním životě, a aby samostatně sestavovali úlohy o veličinách přímo a nepřímo úměrných.

Pokyny. 1. Při řešení úloh, v jejichž znění se vyskytují nepřímo úměrné veličiny, žáci často chybují při sestavování úměry, zapisujíce mechanicky: „dolní číslo má se k hornímu jako" atd. Jest upozorniti žáky na to, že jestliže v prvním poměru je přední člen menší než zadní, musí i ve druhém poměru být přední člen menší než zadní nebo že musí obráceně v obou poměrech být přední člen větší než zadní — pouze za těchto okolností mohou se poměry sobě rovnat. Ve výše uvedené úloze hledaný počet otočení za minutu musí býti menší než 200 a na pravé straně úměry přední člen 80 je skutečně menší než 160.

Aby nedocházelo k chybám, je třeba při řešení úloh jak o veličinách nepřímo úměrných, tak o veličinách přímo úměrných vésti žáky k pevnému pracovnímu plánu a pevné technice: a) zapisovat číselné hodnoty jedné veličiny do jednoho sloupce a hodnoty druhé veličiny do druhého sloupce (je vhodné neznámou hodnotu zapisovat do druhého řádku i sloupce); b) když se přistoupí k řešení úlohy, má se především rozhodnout, zdali veličiny v úloze dané jsou závislé či nezávislé a jsou-li závislé, určit, jakého druhu je ta závislost: zda je to přímá nebo nepřímá úměrnost (na základě prvého znaku) a potom c) matematicky zapsat tu závislost a vypočíst neznámou hodnotu.

Příklad. K odvezení nafty bylo třeba 30 cisteren, z nichž každá pojme po 16,5 t. K disposici jsou cisterny, které pojmou po 24,75 t. Kolika takových cisteren je třeba k odvezení téhož množství nafty?

16 t	30 cisteren
24,75 t	x cisteren.

Vysvětlení: 1. počet cisteren potřebných na převoz nafty závisí na tom, kolik nafty se vejde do každé cisterny, při čemž kolikrát se zvětší množství nafty v každé cisterně (24,75 t místo 16 5 t), tolikrát se zmenší počet (x) potřebných cisteren.

x musí býti menší než 30 tolikrát, kolikrát je 16,5 menší než 24,75 (přední člen v obou poměrech je menší než zadní člen);

$$x : 30 = 16{,}5 : 24{,}75;$$

$$x = \frac{30 \,.\, 16{,}50}{24{,}75} = \frac{30 \,.\, 66}{99} = \frac{10 \,.\, 22}{11} = 20 \text{ (cisteren)};$$

nebo 2. když zjistíme, že mezi množstvím nafty v jedné cisterně a počtem cisteren potřebných k převozu je vztah nepřímé úměrnosti, zapíšeme rovnost poměrů:

$$\frac{16{,}5}{24{,}75} = \frac{x}{30}.$$

2. Výše jsme uvedli pouze jeden nutný a postačující znak nepřímé úměrnosti dvou veličin a na základě tohoto znaku jsme řešili příslušné úlohy. Z vyšetřování tabulek závislosti nepřímo úměrných veličin můžeme vyvodit ještě druhý znak nepřímé úměrnosti veličin, a to: součin libovolné číselné hodnoty jedné veličiny a příslušné hodnoty druhé veličiny je veličina stálá.

Na základě druhého znaku nepřímé úměrnosti veličin výše uvedená úloha se řeší takto (naloženo žádané množství nafty):

$$x \,.\, 24{,}75 = 30 \,.\, 16{,}5,$$

z čehož zase

$$x = \frac{30 \,.\, 16{,}5}{24{,}75} = 20.$$

Tento způsob je pro žáky obtížnější a méně se ho užívá v praxi.

3. Pojem koeficientu úměrnosti je nerozlučně spojen s celou naukou o úměrnosti a zejména se všelikými praktickými aplikacemi pojmu úměrnosti. Proto jsou pochopitelné různé pokusy zavésti studium koeficientu úměrnosti do kursu aritmetiky, které se vyskytují ve školské matematické literatuře porevoluční doby.

Obecně známé jsou nesnáže, se kterými se setkávají žáci při seznamování s fysikálními a technickými formulemi, když si dříve pevně osvojili, že o poměru se může mluvit pouze u stejnorodých veličin a nyní se na příklad při určování rychlosti na nich žádá, aby dělili dvě různorodé veličiny: dráhu dobou a při určování specifické hmoty, aby dělili hmotu objemem a pod.

Pouze ve vyšších třídách při práci v kroužku můžeme na základě týchž tabulek (2 a 3) a výše uvedených nebo jiných úloh zavésti pojem koeficientu přímé úměrnosti veličin, při čemž je nutné zřetelně vymezit následující dva momenty: za znak přímé úměrnosti jsme brali stálost poměru dvou číselných hodnot jedné a téže veličiny při přechodu od jedné veličiny ke druhé; nyní se objevuje ještě jeden znak přímé úměrnosti veličin, totiž: stálost „koeficientu úměrnosti“, t. j. poměru navzájem si odpovídajících číselných hodnot dvou veličin.

Na příklad v případě tabulky 1.: $\frac{12}{4}$, $\frac{30}{10}$, $\frac{42}{14}$, $\frac{150}{50}$, abstraktní číslo 3 jest „koeficient úměrnosti“. Můžeme žákům vysvětlit, že koeficient úměrnosti je stálý násobitel, kterým jest násobiti číselné hodnoty jedné veličiny, abychom dostali jim odpovídající číselné hodnoty druhé veličiny.[9]) Jako příklad koeficientu úměrnosti může posloužit měřítko plánu nebo mapy, výše zmíněná rychlost rovnoměrného pohybu, specifická váha atd.[10])

4. Na obecné škole žáci znázorňovali pomocí tabulek a grafů závislost mezi některými veličinami, na příklad zapisovali do tabulky a potom znázorňovali graficky změny teploty průběhem dne nebo při nemoci, sestavovali graf pro jízdu vlaku podle jízdního řádu, zobrazovali názorně (diagramy) podle novinových zpráv vzrůst produkce v různých oborech průmyslu za pětiletku atd. Těchto žákům známých názorných způsobů jest využíti při probírání látky o přímé a nepřímé úměrnosti.

§ 4. Úlohy na trojčlenku

Výše jsme uváděli, jak se řeší pomocí úměr úlohy, v jejichž znění se vyskytují přímo nebo nepřímo úměrné veličiny, při čemž

[9]) I. 2, $\frac{3}{4}$, 5, 7, $\frac{8}{9}$; II, $\frac{6}{5}$, $\frac{9}{20}$, 3, $\frac{21}{5}$, $\frac{8}{15}$. Čísla druhé skupiny vzniknou z příslušných čísel první skupiny znásobením jedním a týmž násobitelem (různým od nuly), který se nazývá koeficientem úměrnosti (v daném případě $\frac{3}{5}$). JULES TANNERY, Lecons d'Arithmétique théorique et pratique.

[10]) Učiteli možno doporučit v této souvislosti článek V. E. Fridenberga v časopise „Fizika, chimija, matematika v trudovoj škole“, 1930, č. 6.

ze dvou daných číselných hodnot jedné veličiny a jedné dané hodnoty druhé veličiny se má určit příslušná druhá hodnota druhé veličiny (ze tří daných čísel určit čtvrté na základě úměrnosti). V tomto paragrafu promluvíme o druhém užívaném způsobu řešení těchto úloh — způsobu „přechodu k jednotce".

Trojčlenku nazývali ve středověku „zlatým pravidlem".

„Trojčlenka" zaujímá rozsáhlé místo i v kursech aritmetiky všech evropských zemí v 16. století, když díky objevu nových zemí a mnoha technickým vynálezům široce se rozvinul obchod a průmysl. Rovněž v 17. a 18. století toto pravidlo bylo považováno za nejužitečnější pro celou aritmetiku (komerční) pravidlo, které je nad všechnu chválu, „klíč kupců". Ale často se toto pravidlo sdělovalo bez vysvětlení žákům majícím ho užívat: udával se pořádek zápisu čísel a řeklo se: „Znásob obě poslední čísla a co ti vyjde, děl číslem prvním".

Při „obrácené trojčlence"[11]) toto pravidlo se nehodilo a proto se zavádělo zvláštní pravidlo a v příručkách úlohy na trojčlenku se dělily: 1. na úlohy na přímou trojčlenku, 2. na úlohy na obrácenou trojčlenku. Ale ježto vztah úměrnosti veličin se nespojoval s úlohami „na trojčlenku", bylo obtížné rozhodnout otázku, jaké trojčlenky se má užít v určitém případě, zda „přímé" či „obrácené". Obyčejně se postupovalo zkusmo; napřed se užilo „přímé" trojčlenky a jestliže obdržený výsledek odporoval smyslu úlohy, užilo se „obrácené" trojčlenky.
Počínajíc 15. stoletím se objevuje velký počet praktických úloh různých typů a příslušných pravidel pro jejich řešení, kterým se žáci učili nazpamět. Sem patří úlohy na procentní pravidlo, směšovací, řetězové pravidlo a pod., mnohdy se vyskytují úlohy vyžadující zapamatování velice těžkopádného pravidla. Potom se udávala pětičlenná, sedmičlenná a tomu podobná pravidla k řešení zvláštních případů „složené trojčlenky". Tento směr aritmetiky (vzniklý ve středověku), udávat pouze pravidla bez odůvodnění a bez vysvětlení, má nejen historický význam, nýbrž měl veliký vliv na školní vyučování v pozdější době a snad se projevuje při řešení úloh na trojčlenku dodnes v pokusech našich žáků dělit „dolní číslo horním", „menší číslo větším" a pod. Nebezpečí mechanického řešení úloh žáky je zvyšováno roz ělováním příslušných oddílů ve sbírkách úloh a opatřováním jich příslušnými záhlavími („přímá" a „nepřímá" úměrnost). Žák vidí již ze záhlaví, do kterého typu patří daná úloha; tím odpadá nutnost usuzování. Proto je nezbytné v oddíle úloh o úměrnosti veličin dávat „smíšené" úlohy po předchozím rozboru každého jednotlivého typu. Vůbec není třeba, aby žáci znali názvy „přímá a obrácená trojčlenka". Mají znát výrazy „přímá a nepřímá úměrnost" a snažit se řešit úsudkem podobné úlohy.

V 17. století se velice rozšířila tak zvaná vlašská praktika. Ona nepodávala žádné nové obecné pravidlo řešení trojčlenných úloh, nýbrž redukovala se na

[11]) T. j. při nepřímé úměrnosti.

různá zjednodušení při výpočtech. Vlašská praktika vyžadovala od řešitele úlohy vniknutí do vlastností daného čísla, aby se za účelem zjednodušení výpočtu mohlo užít rozkladu čísla na sčítance nebo na činitele; na příklad budiž dána úloha:

100 m látky stojí 47 rublů. Co stojí 45 m téže látky?

Řešení způsobem rozkladu:

50 m látky stojí	23 r. 50 k.
5 m látky stojí	2 r. 35 k.
45 m látky stojí	21 r. 15 k.

nebo

10 m	4 r. 70 k.
40 m	18 r. 80 k.
5 m	2 r. 35 k.
45 m	21 r. 15 k.[12])

Při výpočtech praktického života se tohoto způsobu dodnes užívá. Vlašská praktika má své výhody, ale mnohdy vede k cíli příliš pomalu a nemůže nahradit obecnou methodu.

V souvislosti s rozvojem trojčlenky vzniklo „řetězové pravidlo", které mělo velký význam před zavedením metrické soustavy měr v kupecké praxi a v některých komerčních výpočtech, jako na př. při převodu měr délkových, vah a peněz jednoho státu na ty, jichž se užívalo v druhém státě. Toto pravidlo mělo velký význam v 18. století v kupecké aritmetice.

Od 19. století řešení úloh na trojčlenku se doprovází odůvodňujícím úsudkem a užívá se přehlednějšího a srozumitelnějšího způsobu zápisu ve tvaru zlomku, t. j. řešení úloh se děje přechodem k jednotce, kterého se u nás ve škole dodnes užívá vedle řešení úměrou.

Jak bylo dříve řečeno, v poslední době jsou v proudu snahy po zavedení rovnic při řešení vyšetřovaného typu úloh. Ale úlohy, v jejichž znění se vyskytují úměrné veličiny, mají vzdělávací i praktický význam také v kurse aritmetiky. Tyto úlohy se probírají nejprve v oddíle o celých číslech, potom v oddíle o lomených číslech bez vysvětlení podstaty té funkční závislosti, která existuje mezi veličinami danými v podmínkách úlohy a bez užití názvu „úměrnost"; tehdy se ty úlohy řeší několika výkony. Tento způsob řešení úloh na trojčlenku žáci většinou sami volí, když přistupují k jejich řešení, a učitel může této znalosti užít k tomu, aby vyložil také racionálnější způsob řešení pomocí zápisu ve tvaru zlomku.

Plán práce. Zapíše se a řeší se malý počet úloh s dvěma úměrnými veličinami pomocí dvou výkonů, nejprve s čísly celými a pak s lomenými; nejprve na přímou a potom na nepřímou úměrnost.

Jako příklad řešme následující úlohu: „Pro 28 lidí je práce na $7\frac{1}{2}$ dne. Za kolik dní může provésti tu práci 21 stejně výkonných lidí?"

[12]) Ve sbírce úloh a cvičení z aritmetiky od Je. S. Berezanské jsou úlohy č. 2139, 2140 a j. na užití zde naznačeného pravidla.

1. $7\frac{1}{2} \cdot 28 = 210$; 210 dní je třeba jednomu člověku k vykonání celé práce.

2. $210 : 21 = 10$; 10 dní je třeba 21 lidem.

Vysvětlí se: a) proč při řešení podobných úloh mluvíme o „přechodu k jednotce" (2 etapy úsudku: od jednoho množství k jednotce a od jednotky ke druhému množství); b) že nemusíme provádět výpočet zvlášť pro každou z obou etap. Podá se matematický zápis znění úlohy tabulky identické s tou, které se užívalo při řešení podobných úloh úměrou:

28 lidí provede práci za $7\frac{1}{2}$ dne,

21 lidí provede práci za x dní.

Především se stanoví, že pojmenování výsledku bude „dni".

Je třeba pečlivě se snažit, aby otázky (a úsudky), které se vyskytují při řešení úlohy, vždy se vztahovaly ke hledané veličině. U dané úlohy po každé řekneme: „Dní je třeba ..." nebo se ptáme „Kolika dní je třeba?"

Úsudky: hledaný počet dní se rovná $7\frac{1}{2}$ dne za předpokladu, že pracuje 28 lidí. Počet dní, kterých je třeba jednomu člověku k provedení práce (při stejné výkonnosti), je 28krát větší. 21 lidí potřebuje na touž práci doby 21krát menší:

28 lidí ...... $7\frac{1}{2}$ dne

1 člověk ... $(7\frac{1}{2} \cdot 28)$ dní

21 lidí ...... $\dfrac{7\frac{1}{2} \cdot 28}{21}$ dní.

Jsouce si vědomi, že zápis řešení úlohy o úměrných veličinách má tvar zlomku, žáci při řešení úlohy nejprve napíší: „$x = —$" dní; a po úsudcích vpisují postupně činitele v čitateli a jmenovatele. Pomocné zápisy jsou zbytečné:

Zápis: $$x = \frac{7\frac{1}{2} \cdot 28}{21} = \frac{\overset{5}{\cancel{15}} \cdot \overset{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{28}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{7}{\cancel{21}}} = 10 \text{ (dní).}$$

Poznámky. 1. Žáci se cvičí v zapisování znění úlohy do dvou řádků a ve čtení úlohy podle takového zápisu.

2. Když se žákům čte znění úlohy, neřekne se jim, ze kterého oddílu se jim dává úloha, zdali z oddílu o úměrnosti přímé či nepřímé.

3. Žáci: a) řeší úlohy pomocí úměry; při tom mají vysvětlovat, podle kterého znaku poznávají, že veličiny dané v úloze jsou si úměrné, b) řeší úlohy také pomocí přechodu k jednotce s podrobným vysvětlením, c) mohou řešit v jednotlivých případech výše naznačenými methodami vlašské praktiky.

4. Je třeba ve třídě poukázat na to, že v úlohách s úměrnými veličinami se praktické otázky řeší jaksi schematicky. V životě není exaktně úměrných veličin (všichni dělníci nepracují stejně rychle a dobře atd.).[13])

5. Při řešení o úměrných veličinách můžeme dojít k neznámé veličině přechodem přes libovolnou „jednotku". Na příklad:

a) „Ze dvou spojených ozubených kol jedno, které má 75 zubů, otočí se 92krát; kolikrát se otočí druhé kolo se 45 zuby?" Za pomocnou jednotku můžeme zde zvoliti číslo 5 (5 zubů);

b) při řešení úlohy „$\frac{3}{4}$ m látky stojí 2 r. 30 k., kolik stojí $3\frac{1}{2}$ m?" můžeme za pomocnou jednotku zvolit délku $\frac{1}{4}$ m, která je 14krát obsažena ve $3\frac{1}{2}$ m;

c) je-li známo, že ze 0,3 t čerstvých jablek bylo 35 kg sušených a máme určit, kolik sušených jablek bude ze 2,1 t čerstvých, bude při řešení úlohy výhodné považovat za jednotku 0,3. A zároveň je vhodné řešit tutéž úlohu 2 výkony. Výběr způsobu řešení a příslušného vysvětlení v jednotlivých případech se má přenechat žákům, jest však dbáti toho, aby oba hlavní způsoby byly dobře procvičeny dostatečným počtem úloh.

6. Žákům se vysvětlí, co znamenají slova „všecky ostatní podmínky jsou nezměněny". Když se dá úloha jen se dvěma úměrnými veličinami, to znamená, že vyšetřujeme jenom závislost mezi dvěma danými veličinami, nepřihlížejíce ke skutečné závislosti, která je

[13]) V knize pro žáky V. M. BRADIS a A. K. CHARČEVA „Ošibka v matem. rassuždenijach" jsou zajímavé sofistické úlohy založené na neopatrném užívání trojčlenky při neexistenci úměrnosti (§ 6 a j.). Učpedgiz, 1938.

vždy složená; když se dá úloha s několika úměrnými veličinami, řešíme ji tak, že postupně přihlížíme vždy k jedné závislosti mezi dvěma veličinami, předpokládajíce na chvíli, že „všecky ostatní podmínky jsou nezměněny“.

7. Uvedeme, že řešení způsobem přechodu k jednotce často vyžaduje nezvyklé otázky nebo úsudku a někdy vede k podivné odpovědi, na příklad:

a) V úloze: „Kolik metrů látky můžeme koupit za 12 r. 61 k., jestliže $2\frac{1}{2}$ m stojí 9 r. 70 k.?“ dochází k neobvyklé otázce „Kolik metrů látky se dostane za jeden rubl?“, kdežto přirozená otázka je: „Kolik stojí jeden metr látky?“.

b) Rovněž tak nesouhlasí vždy s obyčejným chodem usuzování vysvětlení při odpovědi na otázky, které se kladou při řešení přechodem k jednotce některých úloh, v nichž hodnotami daných veličin jsou lomená čísla; na příklad: „Za $2\frac{5}{6}$ hodiny je možno provésti $\frac{1}{2}$ práce. Jakou část práce je možno provésti za $1\frac{1}{2}$ hodiny?“ (ostatní podmínky jako rozsah práce, pracovní výkonnost atd. jsou nezměněny). V této úloze na otázku, jakou část práce je možno provésti za hodinu, je třeba vysvětlit, že za hodinu se provede $2\frac{5}{6}$krát méně práce.

c) Rovněž tak v úloze: „Na vykopání příkopu dlouhého 15 m byla vyslána skupina 10 dělníků. Kolik dělníků vykope za stejnou dobu stejně široký příkop délky 27 m?“ Při řešení této úlohy přechodem k jednotce, když je třeba položit otázku: „kolika dělníků je třeba, aby za stejnou dobu vykopali stejně široký příkop délky 1 m?“ je odpověď vyjádřena lomeným číslem: $\frac{2}{3}$ dělníka a pod. Musíme vysvětlit žákům, že taková odpověď se nesmí brát doslova; ona znamená, že na vykopání 1 m příkopu je třeba $\frac{2}{3}$ té práce, kterou vykoná 1 dělník.

(Tato úloha se řeší jednodušeji, jestliže se zvolí 3 m za pomocnou jednotku; řešení této úlohy pomocí úměry není spojeno s potížemi.)

d) Rovněž musíme žákům stále vysvětlovat také smysl jiných odpovědí na otázku v úloze, které se jim někdy zdají nesmyslné; na příklad, jestliže v odpovědi na otázku vyjde, že k provedení práce je třeba $25\frac{1}{4}$ nákladních aut nebo $57\frac{3}{4}$ dělníků a pod., musíme žákům vysvětlit smysl odpovědi, totiž: k provedení řečené práce nestačí 25 aut nebo 57 dělníků, ale vezmeme-li 26 aut, pojede poslední auto jen částečně naložené nebo poslední dělník provede jen část práce svých soudruhů (co do velikosti práce nebo co do času), že však zaokrouhleně je třeba 26 aut (a ne 25, ačkoli chyba by v tomto případě byla menší) a 58 lidí (a ne 57), nechceme-li, aby část nákladu zůstala nenaložena nebo část práce neprovedena.

Vyšetříme ještě jednu úlohu:

e) „Aby se provedla určitá práce, musí 35 lidí pracovat denně po 8 hodinách. Po kolika hodinách denně musí pracovat 40 lidí, aby se ta práce provedla za stejnou dobu?“ Při řešení této úlohy způsobem přechodu k jednotce dojdeme k závěru, že 1 člověk provede tu práci (při ostatních podmínkách nezměněných), jestliže pracuje denně po 8 . 35 = 280 hodinách, ale den má pouze 24 hodin. Následující úsudek tuto nesmyslnost odstraní a odpověď na otázku v úloze (280 : 40 = 7) 7 hodin denní práce nemá v sobě nic nesmyslného.

Při řešení podobných úloh, jakož i úlohy c) je radno dáti přednost buďto řešení úměrou nebo některé modifikaci způsobu přechodu k jednotce, na příklad při řešení dané úlohy je účelné vyjádřit velikost práce v člověkohodinách, vyjde 8 . 35 člověkohodin denní práce; potom na každého ze 40 dělníků přijde $\frac{8 \cdot 35}{40} = 7$ hodin denní práce.

Vůbec při řešení úloh spjatých s pojmem úměrnosti veličin nesmíme zapomínat na to, že úměrnost mezi danými veličinami má praktický význam pouze tehdy, jestliže změny zůstávají v určitých mezích, nehledíc na formální správnost theoretického výsledku. Nechť na příklad 5 dělníků může provésti práci za 10 hodin; za kolik hodin vykoná tu práci 1000 dělníků? Odpověď „za 3 minuty“ je arci prakticky nesprávná, protože taková práce není pro 1000 dělníků, kteří by si jenom navzájem překáželi.

Nicméně je při řešení úloh se třemi a více úměrnými veličinami způsob přechodu k jednotce výhodný a je dobře ho užívat, ale vysvětlit ty potíže, které zde byly naznačeny.

§ 5. Složená závislost

V této práci je třeba probrat několik příkladů na složenou závislost. K tomu můžeme užít veličin ze dřívějších tabulek 2, 3, 4 a 5 nebo jiných, na příklad následujících tabulek 7 a 8:

Tabulka 7.

Rychlost v km/hod.	Doba v hod.	Dráha v km
10	3	30
20	3	60
30	3	90
10	6	60
20	6	120
30	6	180
10	9	90
20	9	180
30	9	270

Tabulka 8

pro obdélník.

Základna v cm	Výška v cm	Obsah v cm^2
5	12	60
10	12	120
15	12	180
5	24	120
10	24	240
15	24	360

Všecky tyto tabulky sestavují žáci pod učitelovým vedením při probírání vhodných slovních úloh.

Plán práce

Lekce 1. 1. Porovnáváním číselných hodnot udaných v tabulce 7 se zjistí, že tři prvky rovnoměrného pohybu, dráha, rychlost a doba, jsou mezi sebou v závislosti a to: a) dráha závisí na dvou veličinách, jsouc přímo úměrná době pohybu a rovněž přímo úměrná jeho rychlosti; stejně se zjistí rozborem čísel v tabulce 8, že b) obsah obdélníka je přímo úměrný i základně i výšce. Porovnáváním čísel v tabulkách 7 a 8 se dále zjistí, že a) doba pohybu rovněž závisí na dvou veličinách: je přímo úměrná dráze a nepřímo úměrná rychlosti; rychlost je přímo úměrná dráze a nepřímo úměrná době pohybu; rovněž se zjistí, že b) základna (výška) obdélníka je přímo úměrná obsahu při nezměněné výšce (základně) a je nepřímo úměrná výšce (základně) při nezměněném obsahu.

Dále můžeme se žáky vyšetřit na slovních úlohách závislost mezi velikostí nějaké práce, počtem dělníků a pracovní dobou; závislost mezi cenou za jednotku zboží, cenou za koupené zboží a množstvím tohoto zboží atd., atd.

2. Probírá se případ, že jedna veličina se mění tak, že je nepřímo úměrná dvěma daným veličinám, jestliže třeba se má provést určitá práce v určité lhůtě, zatížení jednoho člověka je tolikrát menší, kolikrát větší je počet lidí určených k té práci; rovněž zatížení jednoho člověka je tolikrát menší, kolikrát je větší pracovní výkonnost každého dělníka. Příklad: má se vykopat určitý počet krychlových metrů země, potom

Počet lidí	3	6	9
Vykopáno za den v m^3	1,25	2,5	3,75

Rovněž podle určitých číselných hodnot můžeme zjistit, že doba, na kterou stačí určitá zásoba chleba (píce atd.) je nepřímo úměrná počtu lidí, pro něž je zásoba určena a denní porci každého a pod.

Lekce 2. Řešení úloh se složenou závislostí veličin v úloze se vyskytujících.[14])

Uvedeme řešení jedné úlohy, na příklad: „Pro 24 krav měla býti opatřena na 6 dní zásoba 720 kg sena, ale počet krav se o jednu zvětšil a sena bylo dodáno více, než se předpokládalo, a to 1 t. Na kolik dní stačí toto seno kravám při stejné denní dávce pro každou?“

Zápis úlohy do dvou řádků není závazný, ale často usnadňuje práci přispívaje k přehlednosti podmínek úlohy:

24 krávy .... 720 kg ... 6 dní
25 krav ..... 1000 kg ... x dní.

Žáci musí rozebrat podmínky úlohy: 1. stanovit, které veličiny se vyskytují v úloze, jaké jsou jejich dané hodnoty, která veličina je neznámá, 2. objasnit, v jakém vztahu je hledaná veličina k ostatním daným veličinám.

V úloze máme určit dobu, na kterou vystačí zásoba sena.

Ptáme se: na čem závisí ta doba? kdy, za jakých podmínek seno vystačí na delší dobu? kdy na kratší? Uvedeme vysvětlení řešení (způsobem přechodu k jednotce): kdybychom měli méně sena, a to 1 kg, stačilo by pro týž počet 24 krav na dobu (počet dní) 720krát menší: $\frac{6}{720}$ dní, ale ve skutečnosti máme 1000 kg sena; to stačí pro týž počet krav na dobu 1000krát větší: $\frac{6 \,.\, 1000}{720}$ dní, ale kdybychom tím senem krmili méně krav, na příklad jen jednu krávu, stačilo by seno na dobu (počet dní) 24krát větší (nepřímá úměrnost) $\frac{6 \,.\, 1000 \,.\, 24}{720}$ dní; pro 25 krav totéž seno při týchž dávkách stačí na $\frac{6 \,.\, 1000 \,.\, 24}{720 \,.\, 25} =$ $= \frac{100 \,.\, 24}{12 \,.\, 25} = 8$ (dní).

Takto řešení složené úlohy bylo převedeno na řešení 4 jednoduchých úloh se zápisem v jediném řádku pro x.

V předběžných cvičeních na rozbor složené závislosti žáci určovali, ve kterém případě nastává úměrnost přímá a ve kterém nepřímá. To bylo cílem práce.

---

[14]) Úlohy na „složenou trojčlenku“; v tomto případě „pětičlenné pravidlo“.

Při řešení úlohy se nemusí při každém jednotlivém úsudku udávat název závislosti a ve výše podaném vysvětlení název závislosti byl udán v závorce.

Je zřejmé, že můžeme řešit předloženou námi úlohu obyčejným způsobem řešení složené aritmetické úlohy (řadou otázek), a není závazné řešit podobnou úlohu nějakou zvláštní methodou. Výše napsaný řádek vyjadřující řešení slouží pouze ke zjednodušení výpočtu. Uvedeme řešení hořejší úlohy se zvláštním zápisem jednotlivých otázek:

1. $6 : 720 = \frac{1}{120}$; na $\frac{1}{120}$ dne stačí pro 24 krávy 1 kg sena;

2. $\frac{1}{120} \cdot 1000 = 8\frac{1}{3}$; na $8\frac{1}{3}$ dne stačí pro 24 krávy 1000 kg sena;

3. $8\frac{1}{3} \cdot 24 = \frac{25 \cdot \overset{8}{\cancel{24}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 200$; na 200 dní stačí pro 1 krávu 1 t sena;

4. $200 : 25 = 8$. Odpověď: na 8 dní stačí pro 25 krav 1 t sena.

Zjednodušení při zápise řešení do jednoho řádku spočívá v tom, že se neprovádějí částečné výpočty: 120, $8\frac{1}{3}$ atd.; na to je třeba žáky upozornit.

Je třeba povzbuzovat iniciativu žáků, když chtějí řešit úlohu na úměrnost speciálním netypickým způsobem, užívajíce vlastností daných čísel.

§ 6. Dělení v daném poměru

Úlohy na dělení v daném poměru se často nazývají úlohami „na úměrné dělení“ a také se mluví o „rozdělovacím počtu“. Tyto různotvárné úlohy měly a dosud mají rozsáhlé užití.

Ode dávna se užívalo úměrného dělení v těch případech, když šlo o rozdělení odkázaného jmění[15]) mezi dědice a také v rozmanitých případech dělby výdělku, odměny a pod. Všecky tyto úlohy se řešily trojčlenkou a jak bylo výše řečeno, pro každou úlohu bylo zvláštní „pravidlo“, kterého se žák snažil užít, když se setkal s úlohou podobnou naučené. Ve starých ruských učebnicích „pravidlo úměrného dělení“ se nazývalo „pravilo tovariščestva“ (viz české „počet spolkový“) a v učebnici aritmetiky od Malinina a Burenina (vyd. z r. 1884) se praví: „Úlohy, ve kterých se žádá dané číslo rozdělit na části úměrné jiným daným číslům, vedou na pravidlo spolkové nebo úměrného dělení“.

---

[15]) Viz MAGNICKIJ, „Arifmetika“.

Tedy úměrným dělením se rozuměla i konkretní otázka, kterou bylo třeba řešit, i způsob řešení.

V současných učebnicích aritmetiky úlohami na úměrné dělení nebo lépe na dělení v daném poměru se míní určitý způsob řešení těch úloh, jejichž hlavní typy budou naznačeny níže. Tyto úlohy se často řeší pomocí postupných úměr nebo na základě vlastnosti řady rovných poměrů, která se neprobírá v 5. třídě;[16]) na příklad úloha „Číslo 132 se má rozdělit na dvě části úměrné číslům 3 a 8" se řeší takto:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{8}; \quad \frac{x_1 + x_2}{x_1} = \frac{3 + 8}{3}; \quad \frac{x_1 + x_2}{x_2} = \frac{3 + 8}{8}; \quad \frac{132}{x_1} = \frac{11}{3},$$

z čehož se určí x_1 atd. Ježto žáci 5. třídy neznají tuto theorii, řeší tyto úlohy bez jakékoli pevné methody. Proto úlohy na úměrné dělení je možné a účelné řešit ve třídě ihned po probrání otázek spojených s pojmem poměru čísel. Jediná nesnáz tkví v nemožnosti užívat názvu „úměrný", dokud tento pojem se neprobírá. Proto navrhujeme při nezbytném opakování po dokončení oddílu o úměrách se vrátit k řešení několika úloh na „dělení v daném poměru", které se teď může nazývat „úměrným dělením" a může se užívat příslušných termínů v otázkách a vysvětlení (naznačeno níže).

Úloha 1. Výše uvedená úloha může posloužit jako 1. úloha vzhledem k jednoduchosti v ní daných čísel: „Celé číslo 132 má se rozdělit na dvě části, při čemž díl připadající na každou část je rovněž vyjádřen celým číslem (3 a 8)."

Poznámka. Ještě jednodušší je úloha, ve které také poměr obou částí je vyjádřen celým číslem, na příklad 8 : 4. Tuto úlohu, kde jedno číslo má býti dvakrát větší než druhé a pod. můžeme uvésti jako analogii. Jako vždy, než přistoupíme k řešení úlohy, musíme se žáky pečlivě rozebrat obsah úlohy: v tomto případě musíme vysvětlit smysl dělení v daném poměru.

Otázka: jak se má rozdělit číslo 132? *Odpověď:* tak, aby jedna část se měla k druhé tak jako 3 k 8 neboli aby části byly v poměru 3 : 8 (později mluvíme o částech úměrných číslům 3 a 8). *Otázka:* co to znamená? Nejjednodušší odpověď: a) to znamená rozdělit číslo 132 na dvě části tak, aby v jedné části byly obsaženy 3 takové „dílce", jakých je ve druhé části obsaženo 8; b) to znamená rozdělit číslo 132 na dvě části tak, aby se jedna skládala ze 3 takových „dílců", „podílů", jakých druhá část obsahuje 8.

Užívat výrazu „část" je nevhodné, protože by žák musil říkat „první část obsahuje 3 části, slovo „díl" nemá tuto vadu a v některých případech vysvětluje smysl dělení v daném poměru, ale v jiných případech se lépe hodí slova „dílec", „částice", „podíl".

Při řešení první úlohy se můžeme omezit na výše uvedené odpovědi o smyslu dělení v daném poměru, ale při další práci učitel ať nezapomíná také

[16]) Tento způsob je uveden v „Arifmetice" KISELËVOVĚ, pod red. A. Ja. Chinčina, 1938.

jinak rozbírat smysl rozdělení, udávaje vysvětlení jiného tvaru, na příklad: c) rozdělit číslo 132 v poměru 4 : 8 znamená rozdělit číslo 132 na dvě části tak, aby druhá část byla tolikrát větší než prvá, kolikrát je 8 větší než čtyři, t. j. dvakrát (v případě, že poměr je vyjádřen číslem celým nebo, ve smluveném významu, i když poměr je vyjádřen číslem $2\frac{1}{3}$; $2\frac{3}{8}$ a pod.) nebo

d) rozdělit číslo 132 v poměru 3 : 8 znamená rozdělit 132 na dvě části, z nichž jedna tvoří $\frac{3}{8}$ druhé (případ lomeného poměru) nebo druhá tvoří $\frac{8}{3}$ prvé (je rovna dvěma prvým částem a ještě $\frac{2}{3}$ prvé části); při řešení úlohy je užitečné provésti zkoušku výpočtem součtu nalezených čísel; je užitečné se přesvědčit, že jedno číslo tvoří žádanou část druhého nebo

e) rozdělit 132 v poměru 3 : 8 znamená rozdělit je na dvě takové části, že třetina první části je obsažena osmkrát ve druhé nebo že osmina druhé části je obsažena třikrát v prvé části. Opakujeme, že zkouška správnosti při úloze na dělení v daném poměru je velmi užitečná pro vyjasnění podstaty probírané otázky.

Při řešení úloh na dělení v daném poměru hledaná čísla někdy se značí římskými číslicemi I, II, III atd. nebo písmeny x_1, x_2, x_3 atd. V podstatě v těchto případech taková označování nemají významu. ale někteří methodikové (na příklad Šochor-Trockij) řadí úlohy na úměrné dělení k „počátečním pojmům algebry" a zavádějí x k vyznačení jedné neznámé, t. j. řeší úlohy na úměrné dělení methodou rovnic výslovně poznamenávajíce, že tyto úlohy se dají řešit i bez pomoci rovnic, na příklad, výše daná úloha 1 může se řešit rovnicí:

$$1.\quad 3x + 8x = 132,$$

kde x znamená 1 dílec; úloha „280 se má rozdělit na takové dvě části, aby jedna tvořila $\frac{3}{5}$ druhé", řeší se rovnicí:

$$2.\quad x + \tfrac{3}{5}x = 280,$$

kde x znamená celou první část atd.

V praxi naší školy takové zápisy rovněž se vyskytují. Kdyby se při tom řešení úlohy převádělo na následující usuzování: při úloze 1. 11 neznámých čísel dává 132, pročež neznámé číslo je 12, nebo při úloze 2. $\frac{8}{5}$ neznámého čísla dává 280, tedy neznámé číslo je $x = \frac{280\,.\,5}{8} = 175$, bylo by možné nic nenamítat proti zavádění takového zápisu. Ale v praxi učitelé užívající podobného zápisu předčasně dávají provádět řešení rovnic s odstraňováním jmenovatele a pod. v tu dobu, kdy žáci ještě nemají základní poznatky z theorie rovnic. My máme za to, že aritmetický způsob usuzování při řešení rozmanitých úloh na úměrné dělení má velký vzdělávací význam a budeme se ho v dalším přidržovat.

Úloha 2. Rozdělení čísla na několik částí v poměru čísel (nebo úměrných číslům) 3, 4 a 7. Na příklad, číslo 161 se má rozdělit v poměru 3 : 4 : 7. Co znamená tento stručný (smluvený) tvar zápisu? Znamená, že číslo 161 se má rozdělit na 3 části, že se mají najít 3 sčítanci, jejichž součet se rovná číslu 161, tak aby první část se skládala ze 3 dílců, druhá část ze 4 zase takových dílců a třetí část ze 7 týchž dílců. Smluvený zápis I : II : III = 3 : 4 : 7. K řešení úlohy je třeba: 1. spočítat, kolik dílců je dohromady ve všech třech částech, 2. určit, jak velký je každý dílec a 3. určit každou část.

Poznámky. 1. Při zkoušce obdržené odpovědi můžeme vyjít od kteréhokoli z výše uvedených vysvětlení zápisu I : II : III = 3 : 4 : 7. Na příklad se přesvědčíme, že třetina prvého čísla, t. j. $11\frac{1}{2}$, je obsažena čtyřikrát ve II a sedmkrát ve III.

2. Podáváme vysvětlení způsobu řešení úloh na dělení v daném poměru na číselném příkladě, ale samozřejmě může učitel k tomuto cíli užít konkretní slovní úlohy ze sbírky.

3. Je velice důležité vysvětlit žákům (nejlépe zkouškou správnosti řešení), že zápis I : II : III zahrnuje následující poměry v zápisu jen stručně naznačené:

I : II = 3 : 4;   II : III = 4 : 7;   I : III = 3 : 7.

4. Potom se může probrat úloha na rozdělení čísla v poměru čtyř (nebo i více) celých čísel; její řešení nepřináší žádné nové potíže.

Úloha 3. Další zvýšení složitosti při srovnání s dříve řešenými úlohami je v tom, že poměr částí, na které se má rozdělit dané číslo. je vyjádřen lomenými čísly.

Cvičení. 1. Napřed je radno probrat příklad, ve kterém se žádá rozdělit číslo jenom na dvě části, jejichž vzájemný poměr by se rovnal poměru dvou lomených čísel. Žáci vědí, že poměr lomených čísel se dá nahradit poměrem celých čísel a učí se provádět toto nahrazování (kap. IX, § 17, bod 4). Poukáže se jim na to, že je výhodné, ne však nezbytné, provésti toto nahrazení, protože počítání s lomenými čísly činí větší potíže než počítání s celými čísly. Shledá-li to učitel nutným, může dát řešit úlohu obojím způsobem.

2. Budiž úkolem rozdělit číslo 100 v poměru $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} : \frac{5}{6}$.

První způsob. Žáci vědí, že tento jediný řádek stručně vyjadřuje dva poměry, z nichž každý se dá převésti na poměr celých čísel, v daném případě:

$$\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = \tfrac{1}{2} : \tfrac{3}{4} : \tfrac{5}{6} = \tfrac{6}{12} : \tfrac{9}{12} : \tfrac{10}{12} = 6 : 9 : 10;$$

hledaná čísla:

celkem je dílců $6 + 9 + 10 = 25$; 24

jeden dílec činí $100 : 25 = 4$ + 36

40

100

Druhý způsob: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{6 + 9 + 10}{12} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$;

jeden dílec činí

$$100 : 2\tfrac{1}{12} = \frac{100 \cdot 12}{25} = 48;$$

$\frac{1}{2}$ dílce dává 24, $\frac{3}{4}$ dílce 36, $\frac{5}{6}$ dílce 40. Odpověď je táž.

Poznámky. 1. Důkladně se musí vysvětlit žákům, že velikost dílce v prvním způsobu je odlišná od velikosti dílce ve druhém způsobu, že se dílec zmenší při záměně poměru lomených čísel poměrem celých čísel, a rovněž je odlišný počet dílců, ale zachovává se poměr počtu dílců obsažených v jednotlivých částech.

2. Potom se vysvětlí možnost a účelnost krácení členů poměru, je-li více členů (při dvou členech je to otázka probraná); je třeba zjistit, že při této úpravě velikost každého dílce se zvětší; počet dílců obsažených v jednotlivých částech se přiměřeně zmenší, ale poměr počtu dílců obsažených v jednotlivých částech zůstává týž.

V dalším má učitel dbáti na to, aby žáci, kde je to možno, prováděli krácení řady členů poměru.

3. Ve výše řečené úloze členy poměru byly vyjádřeny obyčejnými zlomky. Jestliže mají tvar desetinných zlomků, usuzujeme stejně. Po záměně poměru lomených čísel poměrem celých čísel dochází ke krácení členů poměru.

Úloha 4. Další zvýšení složitosti úloh na dělení v daném poměru spočívá v tom, že je znám poměr několika čísel, na příklad, po zjednodušení budiž I : II : III : IV = 1 : 3 : 4 : 7 a mimo to: a) je známo jedno z čísel, na příklad je známo, že číslo III obsahuje 60 jednotek, t. j. že 4 dílce tvoří 60 jednotek; potom na jeden dílec připadá 15 jednotek a další postup je jako dříve. Hledaná čísla: 15; 45; 60; 105;

nebo b) je znám součet dvou nebo několika hledaných čísel nebo jejich rozdíl a má se najít jedno číslo nebo součet všech. Na příklad je známo, že číslo IV je o 63 větší než I, t. j. $7 - 1 = 6$ dílců dává 63 jednotky, tedy jeden dílec obsahuje $10\frac{1}{2}$ jednotky atd.

Pokyn. Učitel může zpestřit znění úloh, které jsou ve sbírce a u nichž se žádá rozdělit dané číslo v daném poměru tím, že podle udané odpovědi bude považovat za známou buďto některou z částí čísla nebo součet zvolených částí nebo jejich rozdíl a uloží žákům, aby určili úhrnné číslo nebo všecky části nebo zvolenou neznámou část.

Na příklad, ve sbírce je úloha: „Aby se vyrobil nátěr na stromy, bere se vápno, žitná mouka a tuk v poměru 3 : 2 : 2. Kolik bude třeba každého materiálu na výrobu 4,2 kg nátěru?“ Odpověď: 1,8 kg; 1,2 kg; 1,2 kg. Učitel může otázku v úloze pozměnit na př. takto: „Kolik nátěru dostaneme, jestliže se vezme 1,2 kg tuku (ostatní materiál je nutno vzít podle předepsaného poměru)?“

Řešení: celkem je $3 + 2 + 2 = 7$ dílců; jeden dílec je $1{,}2 : 2 = 0{,}6$ (kg); nátěru bude $0{,}6 \cdot 7 = 4{,}2$ (kg). Uveďme, že často se při řešení podobné úlohy kladou zbytečné otázky, počítá se zvlášť, čemu se rovná každá část (v našem případě se určuje množství vápna a mouky) a potom se sčítají nalezené části.

Úloha 5. Budiž úkolem rozdělit číslo na 3 části (na 3 sčítance) tak, aby bylo I : II = 3 : 4; II : III = 8 : 7. To jest obecný případ úlohy rozdělit číslo na části v daném poměru.

Nejdříve se vysvětlí význam toho, že na druhou část připadají v prvním poměru pouze 4 dílce a ve druhém poměru připadá na touž část 8 dílců. To znamená, že velikost dílce je v prvním a ve druhém poměru jinaká. Ale v prvním poměru můžeme dále rozdělit dílec tak, aby na druhou část připadlo také 8 nových dílců, a potom se příslušně změní i počet dílců připadajících na první část, avšak potom velikost dílců bude v obou poměrech stejná:

I : II = 6 : 8; II : III = 8 : 7;

pak můžeme zapsat poměry do jednoho výrazu a řešit úlohu tak, jak bylo naznačeno výše.

Dojde se k tomu, že pro vyrovnání počtu dílců připadajících na jednu a touž část (která tvoří spojující článek mezi poměry), je třeba příslušná čísla násobením zvýšit a nahradit jejich nejmenším společným násobkem: probírají se příklady odpovídající třem případům určování nsn dvou čísel:

1. I : II = 3 : 4	2. I : II = 3 : 4	3. I : II = 3 : 4
II : III = 8 : 7	II : III = 5 : 7	II : III = 6 : 7

Složitější úlohy, ve kterých jsou dány 3 různé poměry i více, neřeší se na střední škole.

Uvedeme jiné řešení naší úlohy:

$$\begin{aligned} I &: II = 3 : 4, \\ II &: III = 8 : 7. \end{aligned}$$

První poměr vyjadřuje, že číslo I tvoří $\frac{3}{4}$ čísla II, druhý poměr vyjadřuje, že číslo III tvoří $\frac{7}{8}$ čísla II, takže poměr tří čísel můžeme psáti

$$I : II : III = \tfrac{3}{4} : 1 : \tfrac{7}{8} = 6 : 8 : 7 \text{ (jako dříve).}$$

Poznámky. 1. Je užitečné, měnit pořádek čísel ve znění úlohy; na příklad předepsat poměry částí I : II = 4 : 3, III : I = 5 : 6.

2. Žáci si mají zvykat na určitý pořádek úpravy, jestliže oba poměry jsou dány v lomených číslech, na příklad:

$$\begin{aligned} I : II &= 0{,}3 : 1{,}24 = 30 : 124 = 15 : 62 \\ II : III &= 3{,}1 : 1 = 31 : 10 = 62 : 20 \\ I : II : III &= 15 : 62 : 20. \end{aligned}$$

Úloha 6. Jest úkolem rozdělit číslo v poměru převráceném dvěma nebo několika číslům (na části nepřímo úměrné dvěma nebo několika číslům).

Cvičení. 2. Má se rozdělit číslo v poměru převráceném pouze dvěma číslům.

Vysvětlení: Číslo 144 rozdělit v poměru převráceném číslům 3 a 5 (na části nepřímo úměrné číslům 3 a 5) znamená rozdělit 144 na dvě části tak, aby poměr první ke druhé nebyl 3 : 5, nýbrž 5 : 3. Zápis I : II = 5 : 3 a další postup jako dříve. Přesvědčit se, že

$$I : II = \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{5} = 5 : 3.$$

2. Rozdělit číslo na části v poměru převráceném třem (nebo více) číslům neboli části nepřímo úměrné několika číslům. Na příklad rozdělit číslo v poměru převráceném číslům 2, 3, 4. Žáci mohou zapisovat:

$$\mathrm{I} : \mathrm{II} = 3 : 2 = 6 : 4$$
$$\mathrm{II} : \mathrm{III} = 4 : 3$$
$$\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = 6 : 4 : 3,$$

ale můžeme zapsat: $\mathrm{I} : \mathrm{II} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ (týž poměr 3 : 2),
$\mathrm{II} : \mathrm{III} = \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ (týž poměr 4 : 3),

nebo naráz $\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$. Další řešení úlohy nečiní potíže.

Učiní se závěr: „Abychom rozdělili číslo na části nepřímo úměrné daným číslům, můžeme je rozdělit na části přímo úměrné převráceným hodnotám daných čísel".

Poznámka. Výše jsme probírali skupinu úloh, ve kterých byl dán poměr těch částí, které se mají najít. Je však skupina úloh — jak konkretních slovních úloh tak i abstraktních úloh — při jejichž řešení musí žáci nejprve určit poměr částí, na příklad:

1. V jakém poměru musíme rozdělit číslo (nebo jaký je poměr dvou čísel), je-li známo, že jedna část má býti $2\frac{1}{2}$krát větší než druhá?

2. Rozdělit číslo 360 na dvě části tak, aby jedna část tvořila $\frac{3}{5}$ druhé, nebo 10% nebo 30% druhé.

Nebo 3. máme sestavit výpočet poplatků za službu obce domácnosti: za elektrické světlo, známe-li intensitu užívaných žárovek (žáci tu mají předpokládat, že vybíraný poplatek je přímo úměrný intensitě žárovek); sestavit výpočet poplatku za vodu, známe-li, ze kterých členů se skládá rodina za předpokladu, že vybíraný poplatek je přímo úměrný počtu členů rodiny a pod.

Pro práci mimo třídu se mohou uložiti složitější úlohy, na př. zápis poměrů tří i více veličin podle slovní formulace, na příklad:

4. Rozdělit číslo 310 na 3 části tak, aby první tvořila $\frac{1}{3}$ druhé a aby druhá část tvořila $\frac{4}{5}$ třetí. Zápis poměrů:

$$\mathrm{I} : \mathrm{II} = \tfrac{1}{3} : 1 = 1 : 3 = 4 : 12$$
$$\mathrm{II} : \mathrm{III} = \tfrac{4}{5} : 1 = 4 : 5 = 12 : 15$$
$$\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = 4 : 12 : 15.$$

Odpověď: 40, 120, 150.

Nebo zápis poměrů, je-li dán součet nebo rozdíl čísel a poměr mezi jejich částmi, na příklad:

5. Rozdělit číslo na dvě části tak, aby $\frac{1}{2}$ první části se rovnala $\frac{1}{3}$ druhé části. V jakém poměru se má rozdělit dané číslo?

Odpověď: Hledaný poměr $\mathrm{I} : \mathrm{II} = 1 : 1\frac{1}{2} = 2 : 3$ (viz jiné řešení v kap. „Slovní úlohy", č. 1105).

Nebo 6. Rozdělit číslo na tři části tak, aby $\frac{1}{2}$ první části tvořila $\frac{2}{3}$ druhé a aby $\frac{3}{4}$ druhé části tvořily $\frac{4}{5}$ třetí atd.

7. (Sbírka, kap. VI, č. 1876). „V jakém poměru musíme vzít cukrovinky v ceně 7,5 rub. za 1 kg a 7 rub. za 1 kg, aby průměrná cena směsi byla 7,2 rub. za 1 kg?"

Zápis úlohy a úsudku

I.	7,5 rub. za 1 kg	7,2 rub. za 1 kg	— 0,3 rub.	0,2 kg
II.	7 rub. za 1 kg		+ 0,2 rub.	0,3 kg.

Úloha obdobná úlohám, které je smluveno nazývati úlohami **„na směsi 2. druhu"** (kap. „Slovní úlohy", str. 374) a řeší se „methodou záměny". V daném případě nelze užíti „methody záměny", protože neznáme množství koupených cukrovinek (nebo cenu celého nákupu).

Řešení: Při ceně 7,2 rub. za 1 kg směsi každý kilogram cukrovinek 1. druhu byl oceněn o 0,3 rub. laciněji a každý kilogram 2. druhu o 0,2 rub. dráže. Aby snížení ceny za 1. druh bylo kryto zvýšením za 2. druh (aby se nezměnila cena celkového nákupu), je nutné, aby se na každých 0,2 kg cukrovinek 1. druhu bralo 0,3 kg druhého, t. j. cukrovinky se berou v poměru $0{,}2 : 0{,}3 = 2 : 3$ neboli v poměru převráceném k číslům 0,3 a 0,2; $\frac{1}{0{,}3} : \frac{1}{0{,}2} = 0{,}2 : 0{,}3 = 2 : 3$.

Zkouška: 2 kg 1. druhu a 3 kg 2. druhu dohromady stojí $15 + 21 = 36$ (rub.) nebo $7{,}2 \,.\, 5 = 36$.

Na 2 kg cukrovinek 1. druhu je ztráta $0{,}3 \,.\, 2 = 0{,}6$; 60 kop.
Na 3 kg cukrovinek 2. druhu je zisk $0{,}2 \,.\, 3 = 0{,}6$; 60 kop.

8. Na konec je dobře se zastavit ještě u jedné úlohy, která v abstraktním tvaru se jeví úlohou na dělení úměrné dvěma řadám čísel (a může se uložit před probráním látky o úměrnosti veličin).

Na příklad: „Dvě družstva dělníků dostala za práci dohromady 2425 rub., při čemž jedno družstvo 13 dělníků pracovalo 4 dny a druhé družstvo 15 dělníků pracovalo 3 dny. Kolik peněz dostalo každé družstvo?“ Žáci mohou řešit úlohu následujícím postupem:

první družstvo poskytlo 52 pracovních dní,
druhé družstvo poskytlo 45 pracovních dní;

výplata se rozdělí mezi družstva v poměru počtu pracovních dní, považujeme-li ostatní podmínky za stejné (plat jednotlivce, pracovní výkonnost a pod.);

$$\mathrm{I} : \mathrm{II} = 52 : 45;$$

počet dílců je $52 + 45 = 97;$

každý dílec činí $2425 : 97 = 25$ (rub.).

1. družstvo obdrží	$25 \,.\, 52 = 1300;$	1300 rub.
2. družstvo obdrží	$25 \,.\, 45 = 1125;$	1125 rub.
	Zkouška:	2425 rub.

Naznačená methoda je nejpřístupnější žákům střední školy.

Jak známo, úlohy uvedeného typu se řešívají přechodem k jednotce. Především se zjistí, že plat se rozdělí mezi družstva: úměrně počtu pracujících lidí a úměrně době práce (počtu pracovních dní). Tedy číslo 2425 máme rozdělit přímo úměrně i počtu dělníků i počtu pracovních dní.

Začne-li se předpokladem, že každé družstvo pracuje jen jeden den, dojde se na konec k rozdělení výplaty v poměru $\mathrm{I} : \mathrm{II} = (4 \,.\, 13) : (3 \,.\, 15)$; nebo začne-li se předpokladem, že každé družstvo se skládá z jediného dělníka (o těch nevhodnostech při přechodu k jednotce byla řeč výše), dojde se k rozdělení v poměru $\mathrm{I} : \mathrm{II} = (13 \,.\, 4) : (15 \,.\, 3)$. Další průběh řešení je jako dříve.

Při řešení poslední úlohy žáci se mohli seznámit s výrazem „čelovekoden“. Při řešení obdobných úloh mohou se žáci setkati i s jinými složenými výrazy jako „tuna-kilometr“ a j.

§ 7. Příklady pro kontrolní práci

1. Rozložit 95 na tři sčítance úměrné číslům:

$$0{,}3 : 2 : 1\tfrac{1}{2}.$$

2. Najít neznámý člen úměry:

$$x : 3\tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{7} : 0{,}2 \text{ (daná čísla jsou zlomky).}$$

3. Rychlost jízdního kola má se k rychlosti automobilu jako 2 : $7\frac{1}{2}$. Automobil projel vzdálenosti mezi dvěma městy za 4 hodiny. Za kolik hodin se ujede táž vzdálenost na kole?

4. Řešit úlohu s 5 až 6 výkony, ve které jest provésti úměrné dělení a procentní výpočty.

SEZNAM DOPORUČOVANÉ LITERATURY

I. Literatura z theorie aritmetiky pro učitele

H. WEBER a J. WELLSTEIN. Enzyklopädie der Elementarmathematik, 1. Bd., 1. Buch, Grundlagen der Arithmetik. (Přeloženo do ruštiny.)

E. BOREL-P. STÄCKEL. Die Elemente der Mathematik, 1. Bd., Arithmetik und Algebra. (Přeloženo do ruštiny. 1923.)

J. TANNERY. Notions de Mathématiques. Suivies de notices historiques par P. Tannery. (Přeloženo do ruštiny 1914.)

J. TANNERY. Leçons d'arithmétique théorique et pratique. (Přeloženo do ruštiny 1913.)

K. FERBER. Arifmetika. Moskva, 1914.

A. V. VASILJEV. Celoje čislo, 1922, Petrograd.

J. V. ARNOLD. Teorija čisel, Učpedgiz, 1939.

I. V. ARNOLD. Teoretičeskaja arifmetika, Učpedgiz, 1938.

P. D. BELONOVSKIJ. Osnovy teoretičeskoj arifmetiki, Učpedgiz, 1938.

H. LEBESGUE. Sur la mesure des grandeurs. (Ruský překlad, Učpedgiz, 1938.)

J. BERTRAND. Arithmétique théorique (do ruštiny přeložil Pirožkov).

J. A. SERRET. Arithmétique. (Přeloženo do ruštiny.)

F. KLEIN. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, 1. Band, Arithmetik, Algebra, Analysis. (Ruský překlad, Moskva-Leningrad, 1933.)

B. A. TULINOV a Ja. F. ČEKMAREV. Teoretičeskaja arifmetika, Učpedgiz, 1940.

II. Literatura z historie matematiky

H. G. ZEUTHEN. Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter. (Ruský překlad, GTTI, 1932.)

J. TROPFKE. Geschichte der Elementar-Mathematik, 1. Bd., Rechnen. (Ruský překlad, Moskva, 1914.)

F. KEDŽORI. Istorija elementarnoj matematiki. Oděsa, 1917, 2. vyd.

H. WIELEITNER. Geschichte der Mathematik I. (Ruský překlad, GTTI, 1932.)

V. P. ŠEREMETEVSKIJ. Očerki po istorii matematiki, Učpedgiz, 1940.

V. BELLJUSTIN. Kak postepenno došli ljudi do nastojaščej arifmetiki, Učpedgiz, 1941.

D. D. GALANIN. Istorija metodičeskich idej po arifmetike v Rossii, č. 1., XVIII. vek, Moskva 1915.

G. N. POPOV. Sbornik istoričeskich zadač po elementarnoj matematike, ONTI, 1936.

B. V. GNEDENKO. Očerki po istorii matematiki v Rossii, OGIZ, Moskva-Leningrad, 1946.

III. Starodávné ruské učební příručky aritmetické

MAGNICKIJ. Arifmetika, sireč' nauka čislitel'naja, 1703.
PETR GUR'JEV. Praktičeskaja arifmetika, 1870.
V. BUNJAKOVSKIJ. Arifmetika, 1852.

IV. Obecné kursy methodiky matematiky, v nichž jednotlivé kapitoly jsou věnovány methodice aritmetiky

J. W. A. YOUNG. The teaching of mathematics in the elementary and the secondary school. (Přeloženo do ruštiny.)
M. SIMON. Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. (Přeloženo do ruštiny.)
A. HÖFLER. Didaktik des mathematischen Unterrichts.
W. LIETZMANN. Methodik des mathematischen Unterrichts.

V. Speciální kursy methodiky aritmetiky věnované aritmetické látce střední školy

F. I. JEGOROV. Metodika arifmetiki. 1917.
S. I. ŠOCHOR-TROCKIJ, Metodika arifmetiki, Učpedgiz, 1935.
F. A. ERI. Očerki po metodike arifmetiki, 1915.
A. S. PČELKO. Chrestomatija po metodike načal'noj arifmetiki, Učpedgiz, 1940.

VI. Knihy pro žákovskou četbu

JA. I. PEREL'MAN. Zanimatel'naja arifmetika, OGIZ, 1934.
JE. I. IGNAT'JEV. V carstve smekalki. Kniha I., 5. vyd., Petrograd, 1917.
A. A. LJAMIN. Fiziko-matematičeskaja chrestomatija, sv. 1.
JA. I. PERELMAN. Zanimatel'nyje zadači, vyd. „Molodoj gvardii".
A. M. VORONEC a G. I. POPOV. O merach i sčëte drevnosti. Sv. 1., GIZ, 1928.

OBSAH

KAPITOLA I.

OBECNÉ METHODICKÉ POKYNY PRO VYUČOVÁNÍ ARITMETICE

KAPITOLA II.

NUMERACE

KAPITOLA III.

SČÍTÁNÍ

KAPITOLA IV.

ODČÍTÁNÍ

KAPITOLA V.

NÁSOBENÍ

KAPITOLA VI.

DĚLENÍ. PROVÁDĚNÍ NĚKOLIKA VÝKONŮ

KAPITOLA VII.

VLASTNOSTI ČÍSEL. DĚLITELNOST ČÍSEL

KAPITOLA VIII.

ZLOMKY

KAPITOLA IX.

POČETNÍ VÝKONY S OBYČEJNÝMI ZLOMKY

KAPITOLA X.

DESETINNÉ ZLOMKY

KAPITOLA XI.

PROCENTA

KAPITOLA XII.

SLOVNÍ ÚLOHY

KAPITOLA XIII.

ÚMĚRY. ÚMĚRNÉ VELIČINY

Spisovatel *Je. S. Berezanskaja*
Název díla *Methodika aritmetiky (Pomůcka pro učitele střední školy)*
Ze čtvrtého vydání ruského originálu
Методика арифметики, пособис дла учителей средней школы
přeložil *Dr Eduard Čech*
Vydala *Jednota československých matematiků a fysiků v Praze*
roku *1949*
Náklad *3000 výtisků*
Vytiskla *Knihtiskárna „Prometheus“ v nár. správě, Praha*
Vydání *první*
Cena brož. výt. *Kčs 182,—*

Kop 124