František Balada; Eduard Čech; a kol.

Aritmetika pre 3. triedu gymnázií

Štátne nakladateľstvo, Bratislava, 1953, 86 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501409

ARITMETIKA

PRE III. TRIEDU GYMNÁZIÍ

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO
BRATISLAVA

ARITMETIKA

PRE III. TRIEDU GYMNÁZIÍ

1953

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO, BRATISLAVA

Názov originálu: Matematika pro III. třídu gymnasií, Praha, 1953
Autori: František Balada, Dr. Eduard Čech, Jozef Holubář, Dr. Karol Hruška, Dr. Marta Chytilová, Dr. Vanda Janová, Dr. Bedřich König, Dr. Emil Mastný, Dr. Karol Rössler, Dr. Anton Srb, Dr. Jozef Šimek, Anton Tuláček, Rudolf Zelinka
Preložil: Dr. Vojtech Illenčík
Recenzenti: Bohumír Parízek, Víťazoslav Repáš

Schválilo Povereníctvo školstva a osvety výnosom zo dňa 12. marca 1953 č. 56 787/53-I/2 ako učebnicu pre III. triedu gymnázií s vyučovacím jazykom slovenským v II. opravenom a doplnenom vydaní.

ÚVODNÉ POZNÁMKY.

Látka aritmetiky tretej triedy je rozdelená na štyri samostatné oddiely: postupnosť, limity, kombinatorika a pravdopedobnosť. Poňatím i spracovaním sú takmer všetky state rozdielne od predošlých učebníc a z toho vyplývajú určité nároky na metodické podanie.

Tak postupnosti sú definované rekurentne, podstatný dôraz sa kladie na porozumenie pojmu postupnosti a na odvedenie n-tého člena a čiastočných súčtov postupnosti, pričom sa vynechaly umelé, iba formalistické úlohy. Ani príliš umele vykonštruované príklady sa nemajú používať. Finančná matematika je, v súhlase s dnešným názorom, veľmi obmedzená a dôraz sa kladie na riešenie úloh o vzraste nejakej veličiny v danom pomere. Samostatne a podrobne sa preberá metóda matematickej indukcie.

V oddiele ,,Limity,, sa doplňajú vety o nerovnostiach, preberajú sa ohraničené a nulové postupnosti, konvergentné postupnosti, ich limity a úvahy o reálnych číslach ako limitách. Táto časť je podľa svojho spracovania nová a udáva pevné základy pre štúdium vyššej matematiky i pre nové možnosti pestovania logického myslenia.

Vzorce v kombinatorike sa dokazujú priamo úsudkom, takže vzorec sa objaví priamo vo svojej definitívnej forme. Upúšťa sa od formalistických úloh a od zmechanizovania celej partie, ako sa to robievalo prv, a kladie sa hlavný dôraz na usudzovanie.

Počet pravdepodobnosti sa začína kritickým rozborom pojmu pravdepodobnosti, zakladá sa na skutočných pokusoch, spracovanie je ukážkou jednoty teórie a praxe.

V celej aritmetickej časti sa kladie dôraz na úvahy.

Toto poňatie aritmetiky prispeje k tomu, aby žiaci rozumeli prírodnému a spoločenskému dianiu aj so stránky kvantitatívnych vzťahov a aby poznávali význam matematiky pre rozvoj vied a pre technický pokrok v službách socializmu.

Rozvrh učiva.

SEPTEMBER	Úvod do postupností Aritmetické postupnosti Geometrické postupnosti
OKTÓBER	Použitie geometrických postupností Matematická indukcia Nerovnosti
NOVEMBER	Absolútne hodnoty Ohraničené a nulové postupnosti
DECEMBER	Konvergentné postupnosti
JANUÁR	Reálne čísla ako limity
FEBRUÁR	Variácie a permutácie
MAREC	Kombinácie Binomická veta
APRÍL	Úvod do počtu pravdepodobnosti Výpočet pravdepodobnosti
MÁJ	Dokončenie výpočtu pravdepodobnosti Pravdepodobnosť úhrnná a složená
JÚN	Opakovanie

I. POSTUPNOSTI.

Úvod.

Ak ku každému prirodzenému číslu n priradíme podľa akokoľvek zvoleného pravidla číslo a_n (nemusí to byť prirodzené číslo), hovoríme, že

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots \tag{1}$$

je **postupnosť čísel**; číslo a_n je n-tý **člen** postupnosti (1); prirodzené číslo n je **index** člena a_n; miesto (1) píšeme niekedy stručne $\{a_n\}$.

Príklady:

[1] $1, 2, 3, 4, \ldots$; všeobecne $\{n\}$.
[2] $0, 0, 0, 0, \ldots$; všeobecne $\{0\}$.
[3] $1, 4, 9, 16, \ldots$; všeobecne $\{n^2\}$.
[4] $-1, 2, -3, 4, \ldots$; všeobecne $\{(-1)^n \cdot n\}$.
[5] $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$; všeobecne $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$.
[6] $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$; všeobecne $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ alebo $\{2^{-n}\}$.
[7] $0, 1, 0, 1, \ldots$; všeobecne $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$.

Postupnosti [1], [3] majú tú vlastnosť, že pre $r < s$ je $a_r < a_s$; to sú **rastúce postupnosti.** Postupnosti [5], [6] majú tú vlastnosť, že pre $r < s$ je $a_r > a_s$; to sú **klesajúce postupnosti.** Postupnosti [2], [4], [7] nie sú ani rastúce, ani klesajúce.

V predchádzajúcich príkladoch bolo možné udať jednoduchý vzorec, platný pre každý člen postupnosti, t. j. udať početný výraz, ktorý sa používa na výpočet člena a_n na základe indexu n. Dôležité sú však aj iné, omnoho nepravidelnejšie budované postupnosti, u ktorých takýto vzorec nevieme udať. V tomto smere je pozoruhodná najmä rastúca postupnosť $\{p_n\}$, ktorej členy sú všetky prvočísla:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, \ldots$$

Postupnosť $\{p_n\}$ je nesmierne složitá a patrí medzi najkrajšie a pritom najťažšie oddiely matematiky. Na základe skúmania tabuliek prvočísel boly o postupnosti $\{p_n\}$ vyslovené rozmanité domnienky, z ktorých mnohé boly neskoršie s neobyčajným dômyslom dokázané, iné, i pri usilovnej snahe najlepších matematikov, dosiaľ nie sú dokázané. Dosiaľ nedokázaná je napr. Goldbachova domnienka, vyslovená r. 1742, že každé párne číslo väčšie než 3 sa dá napísať ako súčet dvoch prvočísel; na základe tabuliek sa zistilo, že to platí pre všetky čísla až po 10 miliónov, ale všeobecný dôkaz nebol urobený. Veľký pokrok v tom smere urobil sovietsky matematik I. M. Vinogradov, ktorý r. 1937 dokázal, že každé dosť veľké nepárne číslo sa dá napísať ako súčet troch prvočísel a že každé párne číslo je súčet najviac štyroch prvočísel; tento dôkaz sa považuje za jeden z najskvelejších výkonov modernej matematiky.

Veľmi častý a dôležitý je prípad, že je priamo daný prvý člen alebo niekoľko prvých členov postupnosti, a že pre nasledujúce členy je daný všeobecný predpis, ako sa má počítať člen a_{n+1} na základe poznania predchádzajúcich členov

$$a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

V takomto prípade hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}$ je definovaná **rekurentne** (latinsky recurrere = bežať zpät). Príklad rekurentne definovanej postupnosti dostaneme, ak zvolíme prvé dva členy a_1, a_2 celkom ľubovoľne a každý nasledujúci člen určíme podľa predpisu:

$$a_{n+1} = a_0 + a_{n+1}.$$

Ak volíme napr. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, je začiatok našej postupnosti tento:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

a ľahko možno počítať ľubovoľné množstvo ďalších členov.

Poznámka. Často je účelné začať indexom 0 miesto indexom 1, písať teda postupnosť vo tvare:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{2}$$

miesto vo tvare (1). Vo tvare (2) n-tý člen je a_{n-1}, kým a_n je $(n + 1)$-vý člen.

Cvičenia.

1. Napíšte prvých desať členov postupnosti: a) $\{1\}$; b) $\{1 - n\}$; c) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$;

d) $\{n(n-1)\}$; e) $\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n\right\}$; f) $\{1+i^n\}$.

2. Napíšte prvých desať členov postupnosti, danej rekurentne: a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1$; b) $a_1 = a$, $a_{n+1} = a \cdot a_n$; c) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = k \cdot a_n$; d) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = i \cdot a_n$; e) $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$; f) $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$; g) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$; h) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$.
3. Vyjadrite vzorec n-tého člena postupnosti: a) $a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, \ldots$; b) $a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots$; c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$; d) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$; e) $+1, -1, +1, -1, +1, -1, \ldots$; f) $1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots$; g) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$; h) $-54, 18, -6, 2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$
4. Napíšte vzorec n-tého člena postupnosti, danej rekurentne: a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = -a_n$; b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1$; c) $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n$; d) $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$; e) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$; f) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 - a_n$.
5. Vyjadrite člen a_{n+1} pomocou člena a_n v postupnosti: a) $\{1\}$; b) $\{1 - n\}$; c) $\{(-1)^n\}$; d) $\{nd\}$; e) $\{aq^{n-1}\}$; f) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$; g) $\{1 + (-1)^n\}$.
6. Vyjadrite člen a_{n+2} pomocou člena a_n postupnosti: a) $\{1 + (-1)^n\}$; b) $\{1 - 2n\}$; c) $\{a^n\}$; d) $\{1 + i^n\}$.
7. Pre ktoré x je postupnosť a) $\{nx\}$, b) $\{x^n\}$ rastúca a pre ktoré x je klesajúca?
8. Postupnosť, ktorá je daná rekurentným vzorcom $a_{n+1} = (n+1)a_n + (-1)^{n+1}$, vyhovuje tiež rekurentnému vzorcu $a_{n+1} = n(a_n + a_{n+1})$. Dokážte.
9. Vyjadrite člen a_{n+1} pomocou členov a_n a a_{n-1} v postupnosti $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\right\}$. Ktorá je to postupnosť?
10. Vzorec n-tého člena postupnosti, danej rekurentnými podmienkami $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ má tvar $a_n = k(x^n - y^n)$. Určite čísla k, x, y.
11. Postupnosť, daná rekurentne podmienkami $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$, má tieto vlastnosti: a) $a_{n+3} = -a_n$; b) $a_{n+6} = a_n$. Dokážte.
12. Vzorec n-tého člena postupnosti $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ má tvar $a_n = k(x^n - y^n)$. Určite k, x, y.

2. Aritmetické postupnosti.

Nech je dané ľubovoľné číslo d.

Potom môžeme rekurentne definovať postupnosť $\{a_n\}$ takto: Prvý člen zvolíme ľubovoľne a všetky nasledujúce členy určíme predpisom:

$$a_{n+1} = a_n + d. \tag{1}$$

Takto vzniknutá postupnosť sa volá **aritmetická postupnosť**. Číslo d sa menuje jej **diferenciou** (latinský výraz pre rozdiel), pretože sa rovná rozdielu $a_{n+1} - a_n$ ktorýchkoľvek dvoch susedných členov postupnosti. Zrejme **aritmetická postupnosť s kladnou diferenciou je rastúca postupnosť; so zápornou diferenciou je to klesajúca postupnosť**; ak je $d = 0$, sú všetky členy postupnosti rovnaké.

Ak sú r, s dva indexy a ak napr. $r < s$, podľa rekurentného predpisu (1) je

$$a_s = a_r + (d + d + \ldots + d),$$

kde počet sčítancov v zátvorke rovná sa rozdielu $s - r$ oboch indexov. Teda

$$a_s = a_r + (s - r)\, d. \tag{2}$$

Vzťah (2) bol odvodený za predpokladu $r < s$, ale ľahko z neho vypočítame, že pri tom istom predpoklade musí byť aj $a_r = a_s - (s - r)\, d$, čiže

$$a_r = a_s + (r - s)\, d,$$

čo znamená, že vzťah (2) musí zostať správny i pre $r > s$; zrejmé je, že (2) platí aj pre $r = s$. Teda (2) platí pre ktorékoľvek dva indexy r, s.

Zvláštnym prípadom vzorca (2) je vzorec

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d \tag{3}$$

pre výpočet n-tého člena a_n na základe prvého člena a_1 a diferencie d. Ako príklad vezmime nepárne prirodzené čísla; tie tvoria zrejme aritmetickú postupnosť s prvým členom 1 a s diferenciou 2, takže n-té nepárne číslo podľa (3) rovná sa $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2$ alebo

$$a_n = 2n - 1. \tag{4}$$

Ak podľa poznámky na konci článku 1 začiatočnému členu dáme index 0, máme miesto (3) jednoduchší vzorec:

$$a_n = a_0 + nd. \tag{5}$$

Na základe vzorca (2) môžeme jednoznačne určiť aritmetický rad, ak sú dané ktorékoľvek dva jeho členy (s rôznymi indexami), a vypočítať ktorýkoľvek iný člen radu. Ak má byť napr. $a_{10} = 15$, $a_{20} = -15$, vsadíme $r = 10$, $s = 20$ do (2) a dostaneme

$$-15 = 15 + 10d,$$

z čoho vypočítame diferenciu $d = -3$. Ak chceme vypočítať prvý člen a_1, vsadíme $r = 10$, $s = 1$ do (2) a dostaneme $a_1 = 15 - 9d =$

$= 15 + 27$, teda $a_1 = 42$. Ak chceme vypočítať napr. a_{50}, je zbytočné počítať najprv a_1; vsadíme $r = 20$ (alebo $r = 10$), $s = 50$ do (2) a dostaneme $a_{50} = a_{20} + 30d$ alebo $a_{50} = -15 - 90$, $a_{50} = -105$.

Ak je

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots \tag{6}$$

ľubovoľná postupnosť, môžeme pomocou nej definovať rekurentne novú postupnosť $\{s_n\}$ takto: Prvý člen je $s_1 = a_1$; každý nasledujúci člen je určený rekurentným predpisom

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}, \tag{7}$$

takže zrejme

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \tag{8}$$

Čísla s_n sa menujú **čiastočné súčty postupnosti** (6).

Naučíme sa, ako možno počítať **čiastočné súčty aritmetickej postupnosti.** Začneme príkladom. O slávnom matematikovi K. F. Gaussovi sa hovorí táto anekdota: Keď bol žiakom národnej školy, dostali žiaci za domáce cvičenie vypočítať súčet

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 \tag{9}$$

so sto sčítancami. Žiak Gauss hneď vyhlásil, že vyjde 5050. Či sa to skutočne prihodilo, nie je zaručené, ale nie je to ani nemožné, lebo súčet (9) rovná sa súčtu

$$100 + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1,$$

a tak dvojnásobok súčtu (9) sa rovná súčtu

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (99 + 2) + (100 + 1)$$

so 100 rovnakými sčítancami, rovnými 101. Teda číslo (9) rovná sa polovici súčinu $101 \cdot 100$, t. j. 5050.

Ak počítame tou istou metódou všeobecne súčet (8), dostaneme najprv:

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1). \tag{10}$$

Dva susedné sčítance napravo v (10) majú tvar

$$a_r + a_s;\ a_{r+1} + a_{s-1}.$$

Podľa definície aritmetickej postupnosti je však

$$a_{r+1} = a_r + d,\ a_{s-1} = a_s - d,$$

a preto

$$a_r + a_s = a_{r+1} + a_{s-1},$$

t. j. v súčte napravo v (10) všetky sčítance sa rovnajú. Pretože počet sčítancov rovná sa n, máme $2s_n = n(a_1 + a_n)$ alebo

$$s_n = \frac{1}{2} n (a_1 + a_n), \tag{11}$$

čo je žiadaný vzorec pre čiastočné súčty aritmetickej postupnosti.

Vzorec (11) môžeme ešte trošku zovšeobecniť, ak uvážime, že pri ľubovoľnom r, keď je (6) aritmetická postupnosť, je aj

$$a_r,\ a_{r+1},\ a_{r+2},\ \ldots$$

aritmetická postupnosť s prvým členom a_r; ak je $s > r$, je a_s potom $(s - r + 1)$-vý člen tejto postupnosti, takže

$$a_r + a_{r+1} + \ldots + a_s = \frac{1}{2}(s - r + 1) \cdot (a_r + a_s)$$

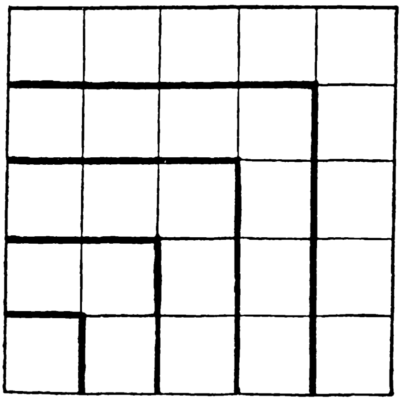
alebo slovami: **Súčet ľubovoľného počtu za sebou nasledujúcich členov aritmetickej postupnosti rovná sa polovici súčinu ich počtu so súčtom prvého a posledného z nich.** Napr. v hornom príklade (str. 8) súčet členov aritmetickej postupnosti s dvoma danými členmi

$$a_{10} = 15,\ a_{20} = -15 \text{ je } a_{10} + a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{20} = 0.$$

Zaujímavý je prípad postupnosti nepárnych čísel (4). Podľa (4) a (11) je

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2,$$

t. j. súčet prvých n nepárnych čísel rovná sa n^2. Pre $n = 5$ pozri obr. 1, ktorý jasne ukazuje, že $5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$.



Obr. 1.

Ak do vzorca (11) vsadíme za a_n zo vzorca (3), dostaneme po ľahkej úprave vzorec

$$s_n = na_1 + \frac{1}{2} n (n - 1) d. \qquad (12)$$

Vzorec (12) si však netreba pamätať.

Cvičenia.

13. Napíšte prvých desať členov aritmetickej postupnosti, ak je a) $a_1 = 3$, $d = 2$; b) $a_1 = 2$, $d = -\frac{1}{2}$; c) $a_1 = -3, d = 0{,}4$; d) $a_1 = 0, d = -1$.

14. Napíšte prvých desať členov aritmetickej postupnosti, ak je a) $a_2 = 5$, $d = 3$; b) $a_3 = 1$, $d = -7$; c) $a_{10} = 5$, $d = 0{,}8$; d) $a_1 = 3$, $a_2 = 7$; e) $a_4 = 9$, $a_5 = 6$.

15. Ak je v aritmetickej postupnosti dané a_r a d, vypočítajte a_s v prípadoch: a) $a_{10} = 12$, $d = 7$, $s = 5$; b) $a_6 = 8$, $d = -3$, $s = 12$; c) $a_5 = 4$, $d = -\frac{1}{2}$, $s = 1$; d) $a_{100} = 7$, $d = -0{,}01$, $s = 1\,000$.

16. Napíšte k-tý člen aritmetickej postupnosti, ak je a) $a_1 = 4, d=3$; b) $a_1 = -2, d = -2$; c) $a_5 = 7$, $d = 12$; d) $a_{10} = 10$, $d = -3$; e) $a_{100} = 1$, $d = 0{,}1$.

17. Ak je v aritmetickej postupnosti dané a_r a a_s, vypočítajte d a udajte k-tý člen v prípadoch: a) $a_5 = 7$, $a_9 = 9$; b) $a_6 = -2$, $a_{15} = -5$; c) $a_{10} = 1$, $a_{100} = 2$; d) $a_1 = 5$, $a_{20} = 2$; e) $a_r = x$, $a_s = y$, $r \neq s$.

18. Určite súčet prvých desať členov aritmetickej postupnosti, ak a) $a_1 = 3$, $a_{10} = 30$; b) $a_1 = 10$, $d = -2$; c) $a_4 = 5$, $d = -\frac{1}{2}$; d) $a_3 = -4, a_7 = 2{,}4$.

19. Aspoň koľko členov prirodzeného radu čísel treba sčítať, aby súčet presiahol: a) 100, b) 1 000, c) 1 000 000?

20. Súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti je daný výrazom $4n^2 - 3n$. Určite prvých päť členov tejto postupnosti a výraz pre k-tý člen.

21. Aritmetická postupnosť je určená týmito podmienkami: a) $a_1 = 3$, $d = -1$; b) $a_7 = 8$, $d = \frac{1}{3}$; c) $a_4 = 3$, $a_{10} = 12$. Určite výraz pre a_n a pre s_n.

22. Kedy je postupnosť čiastočných súčtov aritmetickej postupnosti: a) rastúca, b) klesajúca?

23. V aritmetickej postupnosti r-tý člen má hodnotu x, diferencia je d. Ktorý člen je y? Kedy má úloha riešenie?

24. V aritmetickej postupnosti je $a_1 = a$, $a_r = x$, $s_s = s$. Určite r. Kedy má táto úloha riešenie?

25. V aritmetickej postupnosti je $a_1 = 3$, $d = 2$. Koľko členov dáva súčet $s_r = 120$?

26. V aritmetickej postupnosti je daný r-tý člen x a súčet prvých r členov s. Určite prvý člen a diferenciu. Má úloha vždy riešenie?

27. V aritmetickej postupnosti súčet prvých r členov rovná sa x a súčet prvých s členov rovná sa y. Určite prvý člen, diferenciu, r-tý a s-tý člen.

28. Ak sa súčet prvých r členov aritmetickej postupnosti rovná nule, je $a_r = -a_1$. Dokážte!

29. n priamok v rovine, z ktorých nijaké dve nie sú rovnobežné a nijaké tri neprechádzajú tým istým bodom, delí rovinu na A_n častí. Dokážte, že pre číslo A_n platí rekurentný vzorec $A_{n+1} = A_n + n + 1$, a udajte vzorec pre k-tý člen tejto postupnosti.

3. Geometrické postupnosti.

Nech je dané ľubovoľné číslo q. Potom môžeme rekurentne definovať postupnosť $\{a_n\}$ takto: Prvý člen zvolíme ľubovoľne a všetky nasledujúce členy určíme predpisom

$$a_{n+1} = a_n q. \tag{1}$$

Taká postupnosť sa volá **geometrická postupnosť.** Číslo q sa menuje jej **kvocient** (latinský názov pre podiel), pretože v prípade $a_n \neq 0$ rovná sa podielu $a_{n+1} : a_n$ dvoch susedných členov postupnosti.

Ak je $a_1 = 0$, zrejme všetky členy a_n rovnajú sa nule a kvocient q je celkom neurčitý. Ak $q = 0$, všetky členy okrem prvého rovnajú sa nule. Ak $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$, nijaký člen nerovná sa nule, lebo podľa (1) člen a_{n+1} mohol by sa rovnať nule len vtedy, keby sa už predchádzajúci člen a_n rovnal nule. Teda v prípade $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$ je $a_{n+1} : a_n = q$ pre všetky indexy n. Vyzdvihnime si ešte prípad $q = 1$; v tomto prípade všetky členy postupnosti sa navzájom rovnajú.

Z (1) plynie (a to i v tom prípade, keď berieme do úvahy čísla komplexné), že

$$|a_{n+1}| = |a_n| \cdot |q|. \tag{2}$$

Teda: **Ak je $\{a_n\}$ geometrická postupnosť s kvocientom q, je $\{|a_n|\}$ geometrická postupnosť s kvocientom $|q|$.**

Ak prvý člen a_1 i kvocient q sú čísla kladné, plynie z (1), že všetky členy sú čísla kladné. Ak okrem toho je $q > 1$, plynie z (1), že $a_{n+1} > a_n$, takže v tomto prípade $\{a_n\}$ je **rastúca postupnosť.** Ak čísla a_1, q sú kladné, ale $q < 1$, plynie z (1), že $a_{n+1} < a_n$, takže v tom prípade $\{a_n\}$ je **klesajúca postupnosť.** Ak je q záporné a $a_1 \neq 0$ je reálne, majú členy postupnosti $\{a_n\}$ **striedavé znamienka,** a preto postupnosť nie je ani rastúca, ani klesajúca.

V prípade $a_1 > 0$, $q > 0$ sú všetky členy geometrickej postupnosti kladné čísla, ktoré môžeme logaritmovať. Podľa (1)

$$\log a_{n+1} = \log a_n + \log q,$$

takže logaritmovaním vznikne aritmetická postupnosť s diferenciou $d = \log q$.

Vráťme sa k ľubovoľnej geometrickej postupnosti. Ak sú r, s dva indexy a napr. $r < s$, je podľa rekurentného predpisu

$$a_s = a_r \, (q \cdot q \cdot q \ldots q),$$

kde počet činiteľov v zátvorke rovná sa $s - r$. Teda

$$a_s = a_r \cdot q^{s-r}. \tag{3}$$

Vzťah (3) bol odvodený za predpokladu $r < s$, ale je zrejmé, že platí i pri $r = s$. Ak je $q \neq 0$, je

$$q^{s-r} \cdot q^{r-s} = q^0 = 1,$$

takže z (3) plynie

$$a_s \cdot q^{r-s} = a_r,$$

čo znamená, že vzorec (3) platí i pre $r > s$. Teda (ak je $q \neq 0$) vzorec (3) platí pre ktorékoľvek dva indexy r, s.

Zvláštnym prípadom vzorca (3) je vzorec

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \tag{4}$$

pre výpočet n-tého člena geometrickej postupnosti na základe prvého člena a_1 a kvocienta q. Ak začiatočný člen označíme a_0, ako v poznámke na konci článku 1, máme pohodlnejší vzorec

$$a_n = a_0 q^n. \tag{5}$$

Ak sa prvý člen geometrickej postupnosti rovná jednej, súčet prvých n členov rovná sa

$$s_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1}.$$

Z toho však plynie, že

$$s_n q = q + q^2 + \ldots + q^n$$

a odčítaním vyjde

$$s_n \, (q - 1) = q^n - 1,$$

lebo všetky ostatné členy sa zrušia. Teda pre $q \neq 1$:

$$1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}, \tag{6}$$

čo môžeme písať aj vo tvare

$$1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{6'}$$

Ak je q záporné alebo kladné a menšie než 1, máme vo tvare (6') kladného menovateľa; ak je $q > 1$, máme kladného menovateľa vo tvare (6). Ak je $q = 1$, nemajú vzorce (6), (6') smyslu; ľavá strana potom rovná sa n.

Pre geometrickú postupnosť s ľubovoľným prvým členom a_1 máme

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Stačí však pamätať si vzorec (6) a (6').

Cvičenia.

30. Napíšte prvých desať členov geometrickej postupnosti, ak je a) $a_1 = 3$, $q = 2$; b) $a_1 = 1$, $q = -1$; c) $a_1 = -437{,}4$, $q = \frac{1}{3}$; d) $a_1 = -1$, $q = \sqrt{2}$; e) $a_1 = 3$, $q = 1 + i$.

31. Napíšte prvých desať členov geometrickej postupnosti, ak je a) $a_2 = \frac{1}{8}$, $q = 2$; b) $a_3 = 25$, $q = -0{,}2$; c) $a_{10} = -1$, $q = \frac{1}{2}$; d) $a_1 = 512$, $a_2 = 768$; e) $a_5 = 30$, $a_6 = -3$; f) $a_4 = 1 + i$, $a_5 = 1 - i$.

32. Ak je v geometrickej postupnosti dané a_r a d, vypočítajte a_s v prípadoch: a) $a_{10} = 243$, $q = \frac{3}{2}$, $s = 5$; b) $a_6 = 7$, $q = i$, $s = 12$; c) $a_6 = 2\,500$, $q = -2{,}5$, $s = 1$; d) $a_5 = 5$, $q = \frac{1}{2}(1 + i)\sqrt{2}$, $s = 13$.

33. Napíšte k-tý člen geometrickej postupnosti, ak je a) $a_1 = 3$, $q = 5$; b) $a_1 = -2$, $q = -2$; c) $a_5 = 96$, $q = -\frac{3}{2}$; d) $a_{100} = 1$, $q = -i$.

34. Ak je v geometrickej postupnosti dané a_r a a_s, vypočítajte q a udajte k-tý člen v prípadoch: a) $a_5 = 2$, $a_7 = 4$; b) $a_4 = 1$, $a_6 = -1$; c) $a_1 = 1$, $a_5 = 16$.

35. Určite súčet prvých desať členov geometrickej postupnosti, ak je a) $a_1 = 1$, $q = 2$; b) $a_1 = 19\,683$, $q = -\frac{1}{3}$; c) $a_5 = 9$, $q = \sqrt{3}$; d) $a_4 = 5$, $a_6 = 5$.

36. Určite (s použitím logaritmov) čiastočné súčty s_5, s_{10}, s_{20}, s_{50} geometrickej postupnosti, v ktorej $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$.

37. (Historická úloha.) Kupec chcel kúpiť koňa. Prehnaný predavač mu povedal: „Koňa ti dám zadarmo, zaplatíš mi iba klince v jeho podkovách. Každá podkova je pribitá šiestimi klincami, celkom je ich 24. Za prvý klinec mi dáš 1 kopejku, za druhý 2, za každý ďalší dvakrát toľko ako za predchádzajúci.“ Koľko mal podľa toho kupec zaplatiť?

38. Geometrická postupnosť je daná týmito podmienkami: a) $a_1 = 2$, $q = \frac{3}{2}$; b) $a_4 = 10$, $q = -1$; c) $a_3 = 10$, $a_4 = 9$; určite všeobecný výraz pre s_r.

39. Kedy je postupnosť čiastočných súčtov geometrickej postupnosti: a) rastúca, b) klesajúca?

40. V geometrickej postupnosti je r-tý člen x, kvocient je q. Koľký člen je y? Kedy má úloha riešenie?

41. V geometrickej postupnosti je kvocient 2, r-tý člen $5\frac{1}{3}$, súčet prvých r členov $10\frac{1}{2}$; určite r.

42. V geometrickej postupnosti s kvocientom $q = -\frac{1}{3}$ je súčet prvých osem členov rovný 14 760. Určite tieto členy.

43. V geometrickej postupnosti je prvý člen $\frac{4}{27}$, r-tý člen $\frac{81}{32}$, súčet prvých r členov $\frac{6305}{864}$; určite r.

44. Určite hodnoty súčtov a) $c_r = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos ra$; b) $s_r = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \ldots + \sin ra$. — Návod: počítajte $c_r + is_r$ a uvedomte si, že $\cos ka + i \cdot \sin ka = (\cos a + i \sin a)^k$.

45. Určite hodnotu súčtov: a) $\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \ldots + \cos (2n - 1) a$; b) $\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \ldots + \sin (2n - 1) a$.

4. Použitie geometrických postupností.

S geometrickými postupnosťami stretávame sa v úlohách, v ktorých ide o vzrast (alebo pokles) nejakej veličiny v stálom pomere. Predpoklad, že zmena veličiny sa deje v stálom pomere, v dôsledku ktorého postupné hodnoty skúmanej veličiny tvoria geometrickú postupnosť, nebýva v skutočnosti splnený presne, ale je často splnený približne, a na tomto základe urobené výpočty môžu viesť k cenným záverom, i keď sú tieto závery len zhruba správne.

Prakticky sa vzrast udáva najčastejšie v percentách nejakého základu Z; pri vzraste o p percent znamená vzrast zo základu Z na $Z + \frac{Zp}{100}$ a dá sa vyjadriť súčinom $Z\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Z toho:

$$q = 1 + \frac{p}{100}. \tag{1}$$

V ďalšom texte vzrastom o p percent sa myslí vzrast za jedno obdobie, obyčajne jeden rok. Ak začiatočná hodnota veličiny je a_0, zväčšená hodnota po n obdobiach je daná vzorcom

$$a_n = a_0 \cdot q^n. \tag{2}$$

Ak sú zo štyroch hodnôt

$$a_0;\ a_n;\ p\ (\text{alebo } q);\ n$$

dané ktorékoľvek tri, môžeme vypočítať štvrtú na základe vzorca (2). Výpočet (a_n) je priamo daný vzorcom (2); pre výpočet a_0 máme

$$a_0 = a_n \cdot q^{-n}. \tag{3}$$

Pre najčastejšie sa vyskytujúce hodnoty percentovej miery p sú čísla q^n, q^{-n} udané v tabuľkách. Pre iné hodnoty p počítame logaritmicky; z (2) a (3) plynie:

$$\log a_n = \log a_0 + n \cdot \log q, \tag{4}$$
$$\log a_0 = \log a_n - n \cdot \log q. \tag{5}$$

Ak pracujeme so štvormiestnymi logaritmami a ak je $n < 100$, treba k štvormiestnemu výpočtu súčinu poznať $\log q$ na 6 miest. Sedemmiestne hodnoty log q sú pre rad hodnôt p udané v nasledujúcej tabuľke.

	0,	1,	2,	3,	4,
0	0,000 000 0	0,004 321 4	0,008 600 2	0,012 837 2	0,017 033 3
1	0 434 1	4 751 2	9 025 7	3 258 7	7 450 7
2	0 867 7	5 180 5	9 450 9	3 679 7	7 867 7
3	1 300 9	5 609 4	9 875 6	4 100 3	8 284 3
4	1 733 7	6 038 0	0,010 300 0	4 520 5	8 700 5
5	2 166 1	6 466 0	0 723 9	4 940 3	9 116 3
6	2 598 0	6 893 7	1 147 4	5 359 8	9 531 7
7	3 029 5	7 321 0	1 570 4	5 778 8	9 946 7
8	3 460 5	7 747 8	1 993 1	6 197 4	0,020 361 3
9	3 891 2	8 174 2	2 415 4	6 615 5	0 775 5

Tabuľka udáva logaritmy hodnoty $q = 1 + \frac{p}{100}$ zaokrúhlené na 7 des. miest pre $p = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3 \ldots$ až po 4,9. Celá časť percent je udaná v záhlaví stĺpcov, desatiny percenta sú udané v záhlaví riadkov. Nasledujúca hodnota p by bola $p = 5$; príslušná hodnota $\log q = 0{,}021\ 189\ 3$.

Vo finančných tabuľkách sa zvykne miesto $\frac{p}{100}$ písať i (angl. interest = úrok), namiesto q písať r (angl. rate = pomer).

Logaritmovanie je nevyhnutné, ak neznáma je n alebo p. Neznáma n je daná z rovnice (2) výrazom

$$n = \frac{log\ a_n - log\ a_0}{log\ q}, \tag{6}$$

neznáma p sa určí takto:

$$log\ q = \frac{log\ a_n - log\ a_0}{n};\quad p = 100\,(q - 1). \tag{7}$$

Ale p môžeme určiť aj tak, že k vypočítanej hodnote $log\ q$ nájdeme jej najbližšiu tabuľkovú hodnotu $log\ q$ a z tabuľky vyčítame priamo p.

Netreba si pamätať vzorce (3) až (7); pamätajme si iba vzorec (2), ktorého úpravu urobíme vo vyšetrovanom numerickom príklade.

Poznámka. Ak číslo b vznikne z čísla a zmenšením o p percent, vznikne číslo a z čísla b zväčšením. O koľko percent?

Ak označíme x hľadaný počet percent, je

$$b = a\left(1 - \frac{p}{100}\right),\quad a = b\left(1 + \frac{x}{100}\right).$$

Ak z prvej podmienky vsadíme za b do druhej, dostaneme po skrátení číslom a:

$$1 = \left(1 - \frac{p}{100}\right) . \left(1 + \frac{x}{100}\right) = \frac{100 - p}{100}\left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

$$1 + \frac{x}{100} = \frac{100}{100 - p} = 1 + \frac{p}{100 - p},$$

teda

$$x = \frac{100\,p}{100 - p}.$$

Pretože $100 - p$ je menšie než 100, je

$$\frac{100\,p}{100 - p} > \frac{100\,p}{100},$$

t. j. číslo x je vždy o niečo väčšie než p. Ak je však p malé, je rozdiel medzi p a x nepatrný.

Príklad. Mesto má 87 000 obyvateľov. Za každý rok sa počet obyvateľov zvýši o 1,3%. a) Koľko obyvateľov bude mať mesto o 10 rokov? b) Za koľko rokov vzrastie počet obyvateľov o 25%?

Podľa vzorca (2) je $a_0 = 87\,000$, $q = 1{,}013$. Na 6 des. miest je $log\ q \doteq 0{,}005\,609$. V úlohe a) je $n = 10$, teda

$$a_n = a_0 \cdot q^{10};\ log\ a_n = log\ a_0 + 10\ log\ q,$$

teda $log\, a_n = 4{,}995\,6$; $a_n \doteq 99\,000$. Teda o 10 rokov bude mať mesto skoro 100 000 obyvateľov. V úlohe b) je $a_n : a_0 = 1{,}25$, teda

$$q^n = 1{,}25;\; n = \frac{log\, 1{,}25}{log\, q} \doteq 17{,}3.$$

Počet obyvateľov vzrastie skoro o 25% asi za 17 rokov.

Najčastejšie sa vyskytujúce úlohy tohto druhu sú úlohy peňažné. Ak je nejaká istina a_0 uložená na $p\%$, vynesie za každý rok úrok, ktorý, ak sa nevyzdvihne, pripočíta sa k istine, a za druhý rok už máme okrem úroku z pôvodnej istiny aj úrok z úroku. Po n rokoch konečná istina a_n má hodnotu (2), kde číslo q^n je dané vzorcom (1). Celkový úrok rovná sa $a_n - a_0$.

Vzhľadom na toto užitie geometrickej postupnosti na výpočet úroku sa čísla q^n nazývajú **úročitelia** a ich prevrátené hodnoty sa menujú **odúročitelia.**

Príklad. Ak uložím začiatkom každého roku 1 000 Kčs, koľko budem mať pri 2%-nom úrokovaní po 20 rokoch? Tu $q = 1{,}02$. $a = 1\,000$. Vklad a vzrastie po n rokoch na $a \cdot q^n$; takých vkladov máme vcelku 20; prvý je uložený 20 rokov, druhý 19, . . ., posledný jeden rok. Po 20 rokoch budeme mať

$$aq^{20} + aq^{19} + \ldots + aq = aq\,(1 + q + \ldots + q^{19}),$$

teda podľa vzorca (6), článku 3:

$$aq\,\frac{q^{20}-1}{q-1} = 1\,020 \cdot \frac{q^{20}-1}{0{,}02} = 51\,000\,(q^{20}-1).$$

Z tabuľky úročiteľov vyčítame $q^{20} \doteq 1{,}4859$. Teda po 20 rokoch budem mať 24 781 Kčs.

Cvičenia.

46. a) Ak zvýšime výrobu každoročne o 10%, o koľko percent ju zvýšime za celú päťročnicu? b) O koľko percent treba zvýšiť každoročne výrobu, aby sa za päťročnicu zdvojnásobila?
47. Ak prirastie drevo v lese každým rokom o 2%, za aký čas sa zdvojnásobí?
48. Počet obyvateľstva istého mesta vzrástol za 10 rokov o 10%. Koľko percentnému ročnému prírastku to odpovedá?
49. Akú dnešnú cenu má pohľadávka 10 000 Kčs, splatná: a) za rok, b) za 3 roky pri 2% celoročnom složenom úrokovaní?
50. JRD si vypožičalo 10 000 Kčs a zaviazalo sa, že ich splatí dvoma rovnakými splátkami, z ktorých prvá je splatná za 2 roky a druhá za 4 roky odo dňa vypožičania. Aké veľké budú splátky pri 2% složenom úrokovaní?

51. Svetelný lúč stráca pri prechode sklenou doskou určitej hrúbky 5% svojej intenzity. a) O koľko percent sa zoslabí intenzita svetla pri prechode piatimi takými doskami? b) Koľkými doskami sa zoslabí približne na polovicu?

52. Tlaku vzduchu ubúda so stúpajúcou výškou (pri stálej teplote) asi o 1,2% na 100 m. a) Ak je normálny tlak vzduchu na hladine morskej 760 mm Hg, aký je normálny tlak vzduchu na vrchole Kriváňa? b) Udajte vzorec, podľa ktorého možno z tlaku nameraného vo dvoch rôznych výškach určiť výškový rozdiel oboch pozorovacích miest. c) O koľko percent klesne tlak vzduchu, ak vystúpime o 1 000 m vyššie?

53. Rozdielom výšok dvoch tónov rozumieme pomer ich kmitočtov. Ak predpokladáme, že každé dva susedné poltóny majú rovnaký rozdiel výšok, a keď je kmitočet tónu $a_1 = 435$ kmitov za sek., nájdite kmitočet všetkých celých tónov od tónu c_1 po tón c_2 (tzv. temperované ladenie).

54. Tlmený pohyb kyvadla deje sa tak, že každé dve po sebe nasledujúce krajné výchylky od rovnovážnej polohy (zvanej rozkyv) sú v stálom pomere. a) O koľko percent sa zmenší každý nasledujúci rozkyv, ak sa po 100 kyvoch rozkyv zmenší na 0,01 pôvodného rozkyvu? b) Po koľkých kyvoch klesne rozkyv na polovicu pôvodného rozkyvu?

55. Ak je nejaká suma uložená vo sporiteľni len na časť roka, počíta sa úrok len za tú časť roka, za ktorú bola suma uložená (a to zaokrúhlene sostupne na polovice mesiacov). Ak uložíme kapitál K na $p\%$ medzi rokom, počíta sa úrok do konca roka za zvyšných m mesiacov takto: Najprv vypočítame, aký kapitál x treba uložiť začiatkom roka, aby za $12\ m$ mesiacov od začiatku roka vzrástol (jednoduchým úrokovaním) na hodnotu K. Potom vypočítame hodnotu y, na ktorú vzrastie kapitál x za jeden rok. Rozdiel $y - K$ je hľadaný úrok. Vypočítajte a stanovte vzorec, podľa ktorého sa vypočíta úrok z vkladu vloženého medzi rokom do konca roka za zvyšných m mesiacov.

56. Koľko musíme ukladať začiatkom každého roka za 10 rokov, ak chceme mať koncom 10. roka nasporené 10 000 Kčs pri 2% složenom úrokovaní?

57. Národný podnik zakúpil stroj za 1 000 000 Kčs, ktorý bude v prevádzke 10 rokov. Po uplynutí tohto času bude pre podnik bezcenný. O koľko Kčs ročne sa musí týmto strojom zlacniť prevádzka, ak má byť stroj rentabilný? (Počíta sa 3% úrok.)

58. Ak chceme zaistiť fond ročných 1 000 Kčs za čas 10 rokov, koľko sa musí uložiť začiatkom prvého roka? (Úrokovanie 2%.)

59. Ak mám v sporiteľni na začiatku prvého roka 10 000 Kčs, koľko môžem ročne za 10 rokov koncom každého roka vyberať, kým tento vklad vyčerpám? (Úrokovanie 2%.)

60. Pôžička má byť zaplatená rovnakými splátkami, platenými vždy koncom roka za 20 rokov. Prvá splátka sa platí rok po vypožičaní. Koľko percent z vypožičanej čiastky treba platiť ročne, ak sa počíta 3% úrokov?

61. Množstvo dreva v lese sa odhaduje na 50 000 m³. Ročný prírastok robí 2,5%. Koľko m³ dreva zostane v lese po 10 rokoch, ak sa vyrúbe 4 000 m³ ročne?

62. Výrobné družstvo si vypožičalo 1 000 000 Kčs na rozšírenie prevádzkového zariadenia a spláca svoj dlh každoročne sumou 50 000 Kčs (prvá splátka za rok po vypožičaní). Za koľko rokov bude dlh zaplatený? Aká veľká bude posledná splátka? (2,5% úroku.)

63. Starý človek dostával cez 10 rokov mesačne 950 Kčs starobného poistenia. Koľko Kčs ročne by musel ukladať za 20 rokov, aby si nasporil

sumu, ktorá by mu zaistila taký dôchodok, aký dostával zo starobného poistenia? (2% úrok.)

64. Novomanželia si prenajali byt so zariadením a platili mesačne 500 Kčs nájomného. Iní manželia si prenajali podobný byt bez zariadenia a platili nájomné 3 600 Kčs ročne; kúpili si nábytok za 80 000 Kčs a 5 rokov splácali rozdiel medzi nájomným so zariadením a bez zariadenia. Koľko Kčs dlhu mali ešte na konci piateho roku? (2% úrok.)

65. Objem valca vývevy rovná sa 0,1 objemu recipienta, objem škodlivého priestoru činí 0,01 objemu valca. Ak je tlak vzduchu pod recipientom pred n-tým ťahom piestu p_{n-1} a po n-tom ťahu p_n, platí rekurentný vzorec

$$(R + V + P)\, p_n = R p_{n-1} + P p_0,$$

kde R je objem recipienta, V objem valca, P objem škodlivého priestoru a p_0 atmosferický tlak. a) Vyjadrite p_n pomocou p_0. b) Stanovte, aký tlak je pod recipientom po 10, 50 ťahoch piestu, ak je $p_0 = 740$ mm Hg. c) Určite maximálne zriedenie, ktoré sa môže vývevou dosiahnuť pri $p_0 = 740$ mm Hg.

5. Matematická indukcia.

S náukou o postupnostiach úzko súvisí jedna veľmi dôležitá metóda matematických dôkazov, tzv. **matematická indukcia.** Touto metódou dokazujeme, že pre každé prirodzené číslo n platí nejaký výrok V_n. Ako príklad takého výroku V_n vezmeme známy vzorec

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d \tag{1}$$

pre n-tý člen aritmetického radu s prvým členom a_1 a s diferenciou d. Môžeme ho dokazovať tak, že podľa rekurentného pravidla $a_{n+1} = a_n + d$ súdime postupne:

$a_1 = a_1 + 0$ alebo $a_1 = a_1 + 0 \cdot d$,
$a_2 = a_1 + d$ alebo $a_2 = a_1 + 1 \cdot d$,
$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d$ alebo $a_3 = a_1 + 2d$,
$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d$ alebo $a_4 = a_1 + 3d$,
$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d$ alebo $a_5 = a_1 + 4d$,
$a_6 = a_5 + d = (a_1 + 4d) + d$ alebo $a_6 = a_1 + 5d$ atď.

Ak z takto vykonanného výpočtu pre niekoľko prvých n hodnôt posúdime správnosť dokazovanej vety pre všetky n, hovoríme o **neúplnej indukcii.** Na konci tohto článku si ukážeme na príkladoch, že neúplná indukcia môže mnohokrát viesť k prenáhlenému záveru. Preto neúplná indukcia nie je dôkazom správnosti, ale má veľkú cenu **heuristickú** (t. j. objaviteľskú; grécky heuriskein = nájsť, objaviť). Naproti tomu matematická indukcia, niekedy zvaná tiež **úplná indukcia,** je správny a dôležitý spôsob matematického dôkazu. Dôkaz všeobecnej platnosti vety V_n pre všetky prirodzené čísla n metódou matematickej indukcie prebieha v dvoch krokoch:

[1] dokáže sa, že veta V_n je správna pre $n = 1$;

[2] urobí sa všeobecný dôkaz, že ak pre nejaké prirodzené číslo n veta V_n je správna, pre to isté n je správna aj veta V_{n+1}.

Matematická indukcia je správna metóda dôkazu. Lebo ak sme pri nejakej vete V_n urobili oba kroky [1], [2] matematickej indukcie a predsa veta V_n nebola by správna pre všetky n, tu prebiehajúce vzostupne prirodzené čísla 1, 2, 3, 4, ..., museli by sme dospieť k **najmenšiemu** prirodzenému číslu k, pre ktoré veta V_k je nesprávna. To však nie je možné, lebo krok [1] zaručuje, že nemôže byť $k = 1$, keďže veta V_1 je správna. Musí preto prirodzené číslo k' byť väčšie než 1, a preto existuje také prirodzené číslo n, že $k = n + 1$. Pretože $n < k$, veta V_n je správna, naproti tomu veta V_{n+1} alebo veta V_k nie je správna. To nie je možné, ak bol správne urobený krok [2] dôkazu.

V prípade vzorca (1) dôkaz matematickou indukciou zneje takto:

Prvý krok. Ak vsadíme $n = 1$ do vzorca (1), dostaneme $a_1 = a_1 + 0 \cdot d$, čo je zaiste správne.

Druhý krok. Pre ľubovoľné prirodzené číslo n predpokladáme, že je vzorec (1) správny; máme dokázať, že je správny aj obdobný vzorec pre prirodzené číslo $n + 1$, t. j. máme na základe vzorca (1) odôvodniť vzorec:

$$a_{n+1} = a_1 + nd. \tag{2}$$

To je ľahké, lebo podľa rekurentnej definície aritmetickej postupnosti je

$$a_{n+1} = a_n + d. \tag{3}$$

Ak do vzorca (3) vsadíme za a_n podľa (1), dostaneme

$$a_{n+1} = [a_1 + (n - 1) d] + d,$$

z čoho ľahkou úpravou vychádza vzorec (2). Tak je všeobecná platnosť vzorca (1) dokázaná metódou matematickej indukcie.

Dokážme si matematickou indukciou pre aritmetickú postupnosť s prvým členom a_1 a s diferenciou d vzorec

$$s_n = na_1 + \frac{1}{2} n (n - 1) d, \tag{4}$$

ktorý sme mali v článku 2 pod číslom (12).

Prvý krok. Pre $n = 1$ vzorec (4) dáva $s_1 = a_1$, čo je správne.

Druhý krok. Zo vzorca (4) máme odvodiť obdobný vzorec

$$s_{n+1} = (n + 1) a_1 + \frac{1}{2} (n + 1) nd. \tag{5}$$

Podľa definície čiastočných súčtov je

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}. \tag{6}$$

Do (6) jednak vsadíme za s_n hodnotu (4), jednak vsadíme za a_{n+1} hodnotu (2). Dostaneme

$$s_{n+1} = na_1 + \frac{1}{2} n (n - 1) d + a_1 + nd$$

alebo

$$s_{n+1} = (na_1 + a_1) + \left[\frac{1}{2} n (n - 1) + n\right] d,$$

z čoho ľahkou úpravou plynie (5).

Teraz si udáme niekoľko príkladov na nedostatočnosť neúplnej indukcie.

I. Pre každé prirodzené číslo n položme

$$a_n = n^2 - n + 41.$$

Je teda

$$a_1 = 41,\ a_2 = 43,\ a_3 = 47,\ a_4 = 53,\ a_5 = 61,\ a_6 = 71,\ a_7 = 83,$$
$$a_8 = 97,\ a_9 = 113,\ a_{10} = 131.$$

Všetky vypočítané členy a_n sú prvočísla. Neúplná indukcia by viedla k domnienke, že sa naša postupnosť skladá zo samých prvočísel a pre všetky n až po $n = 40$ je a_n skutočne prvočíslo. Ale $a_{41} = 41^2$ nie je už prvočíslo.

II. Ak je $a_n = n^2 - n + 72\,491$, dá sa dokázať, že a_n je prvočíslo pre všetky n až po 11 000. Ale pre nijaké prirodzené číslo c nemôže byť

$$a_n = n^2 - n + c$$

prvočíslom pre všetky n, lebo pre $n = c$ je $a_n = c^2$.

III. Nech je $\{p_n\}$ rastúca postupnosť všetkých prvočísel (pozri str. 5). Definujeme novú postupnosť $\{M_n\}$ takto:

$$M_n = 2^{p_n} - 1, \text{ kde } p_n \text{ značí } n\text{-té prvočíslo.}$$

Čísla M_n sa volajú Mersennove čísla. Je

$$M_1 = 2^2 - 1 = 3,\ M_2 = 2^3 - 1 = 7,\ M_3 = 2^5 - 1 = 31,$$
$$M_4 = 2^7 - 1 = 127,$$

čo sú prvočísla. Ale už nasledujúce Mersennovo číslo $M_5 = 2^{11} - 1 = 2047 = 23.89$ nie je prvočíslo. Tento príklad je historicky veľmi zaujímavý. Predovšetkým ľahko dokázať, že ak p nie je prvočíslo, ani $2^p - 1$ nemôže byť prvočíslo. Lebo ak sa p rovná súčinu rs dvoch prirodzených čísel $r > 1$, $s > 1$, a keď položíme $q = 2^r$, je $2^p = 2^{rs} = q^s$, a tak podľa článku 3 číslo

$$\frac{2^p - 1}{2^r - 1} = \frac{q^s - 1}{q - 1} = 1 + q + \ldots + q^{s-1}$$

je číslo celé, t. j. číslo $2^p - 1$ je deliteľné menším číslom $2^r - 1$, ktoré je väčšie ako jedna: teda $2^p - 1$ nie je prvočíslo. Naproti tomu pre mnohé prvočísla p je $2^p - 1$ prvočíslom. R. 1644 tvrdil Mersenne, že pre $n < 258$ číslo $2^n - 1$ je prvočíslom presne v týchto prípadoch:

$$n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257.$$

Od toho času bolo však dokázané jednak, že pre $n = 67$ a pre $n = 257$ číslo $2^n - 1$ nie je prvočíslo, jednak že $2^n - 1$ je prvočíslom aj pre $n = 61$, 89, 107. Že číslo

$$2^{127} - 1 = 170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727$$

skutočne je prvočíslo, dokázal Lucas r. 1877. Je to najväčšie z čísel, o ktorých je známe, že sú prvočísla.

Cvičenia.

Pomocou matematickej indukcie dokážte správnosť viet:

66. Ak je $a_{n+1} = a_n \cdot q$, je a) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; b) $s_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, $q \neq 1$.

67. a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{1}{3} n (n+1) \cdot (n+2)$;

b) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

68. a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{1}{6} n (n+1) \cdot (2n+1)$;

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2$;

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{1}{3} n (2n+1) \cdot (2n-1)$.

69. a) Číslo $n^3 - n$ je deliteľné šiestimi pre každé prirodzené číslo n. b) Číslo $n^5 - n$ je deliteľné tridsiatimi pre každé prirodzené číslo n. c) Číslo $n^7 - n$ je deliteľné štyridsiatimi dvoma pre každé prirodzené číslo n.

70. a) Číslo $a^n - b^n$ je pre každé prirodzené číslo n deliteľné číslom $a - b$, b) Číslo $a^n + b^n$ je pre každé nepárne kladné n deliteľné číslom $a + b$.

71. a) Súčet uhlov vypuklého n-uholníka je $(n-2) \cdot 180^0$. b) Vypuklý n-uholník má $\dfrac{1}{2} n (n-3)$ uhlopriečok.

72. a) n priamok v rovine, z ktorých nijaké dve nie sú rovnobežné a nijaké tri sa nepretínajú v jednom bode, má $\dfrac{1}{2} n (n-1)$ priesečíkov. b) n bodmi v priestore, z ktorých nijaké tri neležia na jednej priamke, je určené $\dfrac{1}{2} n (n-1)$ priamok.

73. n bodmi v priestore, z ktorých nijaké tri neležia na jednej priamke a nijaké štyri na jednej rovine, je určené $\dfrac{1}{6} n (n-1) \cdot (n-2)$ rovín.

74. a) V postupnosti $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ platí $a_n a_{n+2} - a^2_{n+1} = (-1)^{n+1}$. b) V tej istej postupnosti je n-tý čiastočný súčet daný vzorcom $s_n = a_{n+2} - 1$.

75. a) $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \dfrac{x - (n+1)\,x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$,
pokiaľ $x \neq 1$.

b) $\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \ldots + \sin na = \dfrac{\sin \frac{1}{2} na \sin \frac{1}{2} (n+1)\, a}{\sin \frac{1}{2} a}$

pokiaľ $\sin \frac{1}{2} a \neq 0$.

II. LIMITY.

6. Nerovnosti.

V aritmetike sa po stáročia kládol veľký dôraz predovšetkým na náuku o rovniciach. Ale v modernej matematike sú veľmi dôležité aj nerovnosti. Základné pravidlá o nerovnostiach sme poznali v prvej triede a teraz si ich zopakujeme. Kým skoro všetky výsledky predchádzajúcich statí sú správne nielen pre čísla reálne, ale aj pre čísla komplexné, zatiaľ v tomto oddiele je podstatné, že všetky čísla sú reálne. Pravidlá, ktoré si chceme pripomenúť, znejú takto (v učebnici pre I. triedu, článok 13):

I. Ak v nerovnosti na oboch stranách zmeníme znamienko, platí obrátená nerovnosť. (Ak je $a < b$, je $-a > -b$.)

II. V nerovnosti je dovolené na oboch stranách pričítať to isté číslo (kladné, záporné alebo nulu).

III. V nerovnosti je dovolené obe strany násobiť tým istým kladným číslom.

IV. Ak obe strany nerovnosti znásobíme tým istým záporným číslom, platí obrátená nerovnosť.

Dve nerovnosti nazveme **súhlasné**, ak máme v oboch znamienko „menšie“ alebo v oboch znamienko „väčšie“. Už v I. triede sme si všimli, že z pravidla II. plynie nasledujúce pravidlo V. a z pravidla III. nasledujúce pravidlo VI.

V. Dve súhlasné nerovnosti je dovolené sčítať.

VI. Dve súhlasné nerovnosti medzi kladnými číslami je dovolené znásobiť.

Z pravidla II. nasleduje, že pre nerovnosti platí pravidlo, ktoré poznáme u rovníc: **Ktorýkoľvek člen nerovnosti môžeme previesť s jednej strany nerovnosti na druhú s opačným znamienkom.** Totiž previesť člen a s jednej strany na druhú s opačným znamienkom znamená to isté, ako na oboch stranách pričítať číslo $-a$.

V nasledujúcom bude užitočné aj toto pravidlo:

VII. Ak pre dve kladné čísla a, b platí nerovnosť $a < b$, potom pre ich prevrátené hodnoty $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ platí obrátená nerovnosť $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$,

lebo nerovnosť $a < b$ je dovolené znásobiť kladným číslom $\frac{1}{a \cdot b}$, z čoho vznikne nerovnosť $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, ktorá znamená to isté ako $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Príklad 1. Určiť, pre ktoré x platí nerovnosť:

$$\frac{3x-5}{4} + \frac{x+2}{3} < \frac{x}{2} + \frac{x+8}{5}. \tag{1}$$

Obe strany znásobme kladným číslom 60, aby sme odstránili zlomky

$$15\,(3x-5) + 20\,(x+2) < 30x + 12\,(x+8) \tag{2}$$

alebo

$$45x - 75 + 20x + 40 < 30x + 12x + 96. \tag{2'}$$

Členy obsahujúce x prevedieme naľavo, známe členy prevedieme napravo:

$$45x + 20x - 30x - 12x < 75 - 40 + 96 \tag{3}$$

alebo

$$23x < 131. \tag{3'}$$

Obe strany vynásobme kladným číslom $\frac{1}{23}$: $x < \frac{131}{23}$. (4)

Dokázali sme, že každé x, ktoré splňuje nerovnosť (1), splňuje aj nerovnosť (4). Obrátene každé x, ktoré splňuje nerovnosť (4), splňuje aj nerovnosť (1), lebo ak obe strany nerovnosti (4) znásobíme kladným číslom 23, dostaneme nerovnosť (3'), ktorú môžeme upraviť na tvar (3). Z nerovnosti (3) dostaneme prevodom niektorých členov s jednej strany na druhú nerovnosť (2'), ktorú môžeme upraviť na tvar (2). Ak obe strany nerovnosti (2) znásobíme kladným číslom $\frac{1}{60}$, dostaneme nerovnosť (1). Teda riešenie nerovnosti (1) je dané nerovnosťou (4). Všimnime si, že (4) platí aj vtedy, ak je x rovné nule alebo záporné.

Príklad 2. Určiť, pre ktoré x platí nerovnosť:

$$\frac{x+1}{x+3} < \frac{x+5}{x+6}. \tag{5}$$

Tu môžeme obe strany násobiť súčinom $(x + 3) \cdot (x + 6)$, pretože tento súčin je pre niektoré x kladný, pre niektoré x záporný, pre niektoré x rovný nule. Pravú stranu prevedieme naľavo:

$$\frac{x+1}{x+3} - \frac{x+5}{x+6} < 0 \tag{6}$$

alebo po úprave

$$\frac{-x-9}{(x+3)\cdot(x+6)} < 0. \tag{7}$$

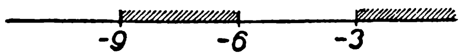
Podľa I. plynie zo (7)

$$\frac{x+9}{(x+3)\,.\,(x+6)} > 0. \tag{8}$$

Pretože podiel dvoch čísel má rovnaké znamienko ako ich súčin, plynie z (8)

$$(x + 9) \cdot (x + 3) \cdot (x + 6) > 0. \tag{9}$$

Obrátene sa ľahko presvedčíme, že každé x, ktoré splňuje nerovnosť (9), splňuje aj nerovnosť (5). Ostáva rozriešiť nerovnosť (9); na to



Obr. 2.

si vytýčime na číselnej osi tie body, ktoré anulujú mnohočlen

$$(x + 9) \cdot (x + 3) \cdot (x + 6), \tag{10}$$

t. j. body odpovedajúce číslam -9, -6, -3. Tieto tri body rozdelia číselnú os na štyri časti a skúmame postupne čísla x, zodpovedajúce bodom jednotlivých častí:

[1] $x < -9$; všetci traja činitelia sú čísla záporné, súčin (10) je záporný a nerovnosť (9) je splnená.

[2] $-9 < x < -6$ (takto píšeme stručne, aby sme naznačili, že platia zároveň obe nerovnosti $-9 < x$, $x < -6$); činiteľ $x + 9$ je kladný, činiteľ $x + 6$, $x + 3$ sú zápornė a nerovnosť (9) je splnená.

[3] $-6 < x < -3$; činiteľ $x + 9$, $x + 6$ sú kladné, činiteľ $x + 3$ je záporný, súčin (10) je záporný a nerovnosť (9) nie je splnená.

[4] $x > -3$; všetci traja činitelia sú kladní, súčin (10) je kladný a nerovnosť (9) je splnená.

Vcelku teda nerovnosť (5) má riešenia dvojakého druhu: $-9 < < x < -6$, $x > -3$. Na obr. 2 sú vyznačené čiarkovaním tie body na číselnej osi, ktoré sú obrazmi riešenia nerovnosti (5).

C v i č e n i a.

76. Ako treba voliť číslo x, aby boly splnené nerovnosti:
a) $12 + 3x < \frac{x}{3}$; b) $\frac{4x-3}{4} + \frac{3x-1}{4} \geqq \frac{1}{3}$;
c) $\frac{2x-3}{5} + \frac{3x-4}{6} < \frac{9x-5}{10}$; d) $\frac{4x-1}{3} - \frac{2x+1}{4} > x - \frac{x-2}{6}$.

77. Ktoré x vyhovujú súčasne nerovnostiam:
a) $5 - 7x < 3x + 2$, $7 - 5x > 3 + 2x$;
b) $x + 2 > 2x + 3 > 3x + 5$;
c) $2x + 6 > 3x + 2$, $5x - 3 > 3x - 4$, $x - 1 > 5x + 2$.

78. Pre ktoré x platí: a) $6x^2 - 7x + 2 > 0$; b) $2x^2 - 3x + 1 \leqq 0$; c) $x^2 - x + 1 > 0$; d) $2x^2 - 3x + 2 < 0$.

79. Ktoré x splňujú nerovnosti: a) $\frac{12-x}{x-4} > 0$; b) $\frac{5-2x}{x-7} \geqq 3$, c) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} > 0$; d) $1 + \frac{x-4}{x-3} < \frac{x-2}{x-1}$; e) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x+4}{x-4} \geqq 2$.

80. Čísla a, b sú kladné. Dokážte že, $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqq 4$. Kedy nastane rovnosť?

81. Ak je $|x| < 1$, je a) $\frac{1}{1-x} \geqq 1 + x$; b) $\frac{1}{1+x} \geqq 1 - x$. Dokážte.

82. Ak sú čísla a, b kladné a také, že $a \geqq b$, potom $a \geqq \frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \geqq \frac{2ab}{a+b} \geqq b$. Dokážte. Kedy nastáva niektorá rovnosť?

83. Matematickou indukciou dokážte: a) Ak je $a > 1$, potom aj $a^n > 1$ pre každé prirodzené n. b) Ak je $0 < a < 1$, potom aj $0 < a^n < 1$ pre každé prirodzené n.

84. Matematickou indukciou dokážte, že $(1 + x)^n \geqq 1 + nx$ pre $x > -1$ a n celé kladné. Kedy môže nastať rovnosť?

85. Matematickou indukciou dokážte: a) $2^n > n$ pre každé prirodzené n; b) $2^n > n^2$ pre každé celé $n \geqq 5$; c) $2^n > n^3$ pre každé celé $n \geqq 10$.

7. Absolútne hodnoty.

Zo strednej školy poznáte pojem absolútnej hodnoty $|a|$ reálneho čísla a.

Uvedomme si, že

$$|0| = 0, \quad |a| > 0 \text{ pre každé } a \neq 0. \tag{1}$$

Podľa známych pravidiel o násobení relatívnych čísel je

$$|ab| = |a| \cdot |b| \tag{2}$$

pre ktorékoľvek dve reálne čísla a, b. Keďže $|-1| = 1$, plynie zo (2)

$$|-a| = |a|.$$

Podľa pravidiel o sčítaní relatívnych čísel je

$$| a + b | \leqq | a | + | b | \tag{4}$$

pre ktorékoľvek dve reálne čísla a, b, pričom znamienko rovnosti platí, ak je niektoré z čísel a, b (alebo obe) rovné nule, ďalej ak sú obe čísla a, b kladné alebo obe záporné; znamienko menšie platí v (4), ak je z čísel a, b jedno kladné a jedno záporné.

V predchádzajúcej triede ste sa oboznámili (v učebnici pre II. triedu, článok 9) s pojmom absolútnej hodnoty komplexného čísla

$$X = x_1 + \mathrm{i}x_2, \tag{5}$$

ktorá sa rovná

$$| X | = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \tag{6}$$

alebo rovná sa $\sqrt{X\bar{X}}$, keď ako obvykle $\bar{X} = x_1 - \mathrm{i}x_2$ je komplexné číslo sdružené s X. Na pripomenutom mieste sme poznali, že i pre komplexné čísla platí pravidlo (2), a teda i pravidlo (3), ktoré je dôsledkom pravidla (2). Je zrejmé, že i pravidlo (1) je správne i pre čísla komplexné. Naším cieľom je dokázať správnosť pravidla (4) pre čísla komplexné. Preto si najprv dokážeme, že pre každé komplexné číslo (5) platí nerovnosť

$$| 1 + X | \leqq 1 + | X |. \tag{7}$$

Ak je $\bar{X}$ sdružené komplexné číslo s číslom X, je s číslom $1 + X$ sdružené číslo $1 + \bar{X}$, a teda

$$| 1 + X |^2 = (1 + X)(1 + \bar{X})$$

alebo

$$| 1 + X |^2 = 1 + (X + \bar{X}) + X\bar{X}.$$

Ale

$$X + \bar{X} = 2x_1, \quad X\bar{X} = | X |^2.$$

Teda

$$| 1 + X |^2 = 1 + 2x_1 + | X |^2. \tag{8}$$

Podľa (6) je však zrejmé, $x_1 \leqq | X |$, teda aj $2x_1 \leqq 2 | X |$. Ak v tejto nerovnosti na oboch stranách pričítame číslo $1 + | X |^2$, dostaneme

$$1 + 2x_1 + | X |^2 \leqq 1 + 2 | X | + | X |^2 = (1 + | X |)^2.$$

Z toho plynie podľa (8), že $| 1 + X |^2 \leqq (1 + | X |)^2$, a teda platí i (7).

Teraz ľahko dokážeme, že nerovnosť (4) je správna, ak obe písmená a, b znamenajú čísla komplexné. Nerovnosť (4) je zrejmá, ak

$a = 0$. Ak je však $a \neq 0$, možno určiť komplexné číslo X tak, aby bolo

$$b = aX.$$

Potom je

$$a + b = a(1 + X),$$

takže podľa pravidla (2) je

$$|a + b| = |a| \cdot |1 + X|. \tag{9}$$

Okrem toho je podľa toho istého pravidla aj $|b| = |a| \cdot |X|$, takže

$$|a| + |b| = |a|(1 + |X|). \tag{10}$$

Dokázanú nerovnosť (7) je však dovolené na oboch stranách znásobiť kladným číslom $|a|$; ak to urobíme, dostaneme

$$|a| \cdot |1 + X| \leqq |a|(1 + |X|),$$

z čoho podľa (9) a (10) plynie (4).

Matematickou indukciou sa ľahko dokáže, že pre ľubovoľné komplexné čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí jednak

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|, \tag{11}$$

jednak

$$|a_1 a_2 \ldots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \ldots |a_n|. \tag{12}$$

Ak v dokázanom vzorci (4) miesto b napíšeme $-b$, dostaneme podľa (3), že pre ľubovoľné komplexné čísla a, b je

$$|a - b| \leqq |a| + |b|. \tag{13}$$

Pri obvyklom geometrickom znázornení čísel (na číselnej osi pre čísla reálne, v rovine pre čísla komplexné) znamená číslo $|a|$ vzdialenosť začiatku od bodu, ktorý znázorňuje číslo a; číslo $|a - b|$ znamená vzdialenosť bodov znázorňujúcich čísla a, b. Pre reálne čísla je to jasné; pre komplexné čísla pozri učebnicu pre II. triedu, článok 11.

Cvičenia.

V cvičeniach 85—92 ide všade o reálne čísla.

86. Ktoré x splňujú nerovnosti: a) $|x + 1| > x$; b) $|x + 1| < x$; c) $x + 1 < |x|$; d) $x + 1 > |x|$?
87. Pre ktoré x platí: a) $|x| \leqq |x + 1|$; b) $|2x - 3| \geqq |3x - 2|$; c) $|x| + |x - 1| > 1$; d) $|x| + |2 - x| < 2$; e) $|x| + |2 - x| = 2$?
88. Ktoré x vyhovujú nerovnostiam: a) $1 < |x + 2| \leqq 3$; b) $3x - 1 < |x| < 3x + 1$; c) $|3x - 1| < |x| < |3x + 1|$?
89. Riešte rovnice: a) $|2x + 1| + |2x - 1| = 3$; b) $|2x + 1| - |2x| + 1 = 2x$.

90. Riešte sústavu rovníc: $|x + y| = 1$, $|x| + |y| = 2$.
91. Ktoré x splňujú nerovnosť $|2x^2 + 5x| > 3$?
92. Ak je $|x - a| < b$, kde $b > 0$, značí to presne to isté ako $a - b < x < a + b$. Dokážte.
93. Matematickou indukciou odvoďte, že

a) $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$;
b) $|a_1 a_2 \ldots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \ldots |a_n|$.

94. $|a + b| \leqq |a| + |b|$. Dokážte, že $|x - y| \geqq |x| - |y|$, používajúc vzťah $|a + b| \leqq |a| + |b|$.
95. Ak je $|x - a| < b$, kde $b > 0$, dokážte, že a) $|x| < |a| + b$; b) $|x| |>|a| - b$.
96. Čo znamená v obore komplexných čísel podmienka: a) $|x| < 1$; b) $|x - 2| > \sqrt{3}$; c) $1 < |x - 4| < 2$; d) $|x| = |x + 1|$; e) $\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| \geqq 1$? Znázornite graficky.
97. Riešte rovnice: a) $|x| - x = 1 + 2i$; b) $|x| + x = 2 + i$.
98. Ak je $|x| < \frac{1}{2}$, potom $|(1 + i)x^3 + ix| < \frac{3}{4}$. Dokážte.

8. Ohraničené a nulové postupnosti.

Postupnosť $\{a_n\}$, ktorej členy sú čísla reálne alebo komplexné, menuje sa **ohraničená,** ak existuje také kladné číslo K, že

$$|a_n| < K$$

pre všetky indexy n. O ohraničených postupnostiach ľahko dokážeme dve vety:

I. Ak sú obe postupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ohraničené, je aj postupnosť $\{a_n + b_n\}$ ohraničená.

Dôkaz. Keďže $\{a_n\}$ je ohraničená, existuje také kladné číslo K, že

$$|a_n| < K \tag{1}$$

pre všetky indexy n. Keďže $\{b_n\}$ je ohraničená, existuje také kladné číslo H, že

$$|b_n| < H \tag{2}$$

pre všetky indexy n. Nerovnosti (1), (2) je dovolené sčítať; preto

$$|a_n| + |b_n| < K + H$$

pre všetky indexy n. Ale podľa predchádzajúceho článku je

$$|a_n + b_n| \leqq |a_n| + |b_n|;$$

teda

$$|a_n + b_n| < K + H$$

pre všetky indexy n. Pretože súčet $K + H$ dvoch kladných čísel K, H je kladné číslo, je veta dokázaná.

II. Ak sú obe postupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ohraničené, je aj postupnosť $\{a_n \cdot b_n\}$ ohraničená.

Dôkaz. Podľa predpokladu existujú také kladné čísla K, H, že platí (1), (2). Ak je $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$, sú (1), (2) nerovnosti medzi kladnými číslami, ktoré je dovolené znásobiť; čo dáva nerovnosť

$$|a_n \cdot b_n| < KH; \tag{3}$$

pretože KH je kladné číslo, platí (3), i keď $a_n = 0$ alebo $b_n = 0$, t. j. (3) platí vždy, a teda $\{a_n \cdot b_n\}$ je ohraničená postupnosť.

Ak všetky členy postupnosti $\{b_n\}$ sú rovné tomu istému číslu c, je $\{b_n\}$ zrejme ohraničená postupnosť. Preto z vety II plynie:

III. Ak je $\{a_n\}$ ohraničená postupnosť a keď je c ľubovoľné číslo, je aj $\{ca_n\}$ ohraničená postupnosť.

O postupnosti $\{a_n\}$ hovoríme, že **skoro všetky členy** majú nejakú vlastnosť V, ak možno udať index r tak, že vlastnosť V majú všetky tie členy postupnosti $\{a_n\}$, ktorých index n je väčší než r. Napr. skoro všetky členy postupnosti $\{100 - n\}$ sú záporné; pre $r = 100$ platí, že $100 - n$ je záporné pre všetky $n > r$. Tiež skoro všetky členy postupnosti $\{100 - 0{,}001 \cdot n\}$ sú záporné, ale tu musíme voliť r omnoho väčšie než 100; $\{100 - 0{,}001 \cdot n\}$ je záporné až pre $n > 100\,000$.

Príklad. Nech je $q > 1$. Hoci zvolíme kladné číslo K akokoľvek, skoro všetky členy geometrickej postupnosti $\{q^n\}$ sú väčšie než K. Ak je q napr. číslo celé, je to jasné. Ak je však číslo q len o málo väčšie než 1, keď je napr. $q = 1\,000\,001$, nie je to také jasné, ale dá sa to ľahko dokázať logaritmovaním, lebo nakoľko $q > 1$, je $\log q > 0$. Okrem toho je $\log q^n = n \cdot \log q$. Zvolíme index r tak, že

$$r > \frac{\log K}{\log q}.$$

Pre všetky $n > r$ je tým skorej

$$n > \frac{\log K}{\log q}.$$

Túto nerovnosť je dovolené násobiť kladným číslom $\log q$.

Dostaneme

$$n \cdot \log q > \log K \quad \text{čiže} \quad \log q^n > \log K;$$

pretože z dvoch kladných čísel je to väčšie, ktoré má väčší logaritmus, je aj $q^n > K$. Teda $q^n > K$ pre všetky $n > r$, t. j. takmer pre všetky n.

Teraz si zavedieme dôležitú definíciu. Postupnosť $\{a_n\}$, ktorej členy sú ľubovoľné čísla reálne alebo komplexné, nazýva sa **nulová postupnosť,** keď, hoci sa zvolí kladné číslo k akokoľvek, vždy platí, že nerovnosť

$$| a_n | < k \tag{4}$$

je splnená takmer pre všetky n. Od ktorého indexu n začne platiť nerovnosť (4), záleží na tom, aké malé bude kladné číslo k. Čím menšie bude k, tým neskoršie začne platiť nerovnosť (4). Ak zvolíme k veľmi malé, začne (4) platiť veľmi neskoro, to záleží jednak na voľbe kladného čísla k, jednak na voľbe postupnosti $\{a_n\}$.

Je skoro samozrejmé, že postupnosti $\{0\}$ a $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ sú nulové. Pre nás je dôležitá veta:

IV. Ak je $| q | < 1$, je $| q^n |$ nulová postupnosť.

Dôkaz. To je zrejmé pre $q = 0$. Ak $q \neq 0$, je $| q | > 0$; okrem toho je $| q | < 1$, takže pre prevrátenú hodnotu $Q = 1 : | q |$ platí $Q > 1$. Zvoľme teraz ľubovoľné kladné číslo k; taktiež $K = 1 : k$ je kladné číslo, a pretože $Q > 1$, nerovnosť

$$Q^n > K \tag{5}$$

platí takmer pre všetky n. No z nerovnosti (5) nasleduje (pozri vetu VII na str. 27) nerovnosť

$$\frac{1}{Q^n} < \frac{1}{K} \text{ alebo } | q |^n < k.$$

Ale $| q |^n = | q^n |$, teda nerovnosť $| q^n | < k$ platí pre všetky n, pre ktoré platí (5), t. j. $| q^n | < k$ takmer pre všetky n.

Zrejmá je táto veta:

V. Každá nulová postupnosť je ohraničená.

O nulových postupnostiach ľahko dokážeme nasledujúce dve vety:

VI. Ak sú $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dve nulové postupnosti, je aj $\{a_n + b_n\}$ nulová postupnosť.

Dôkaz. Zvoľme kladné číslo k. Potom je aj $\frac{1}{2}k$ kladné číslo, a pretože $\{a_n\}$ je nulová postupnosť, môžeme udať index r_1 tak, že

$$| a_n | < \frac{1}{2}k \tag{6}$$

pre všetky $n > r_1$. Podobne môžeme udať index r_2 tak, že

$$| b_n | < \frac{1}{2} k \tag{7}$$

pre všetky $n > r_2$. Zvoľme teraz index r tak, aby bolo súčasne $r > r_1$, $r > r_2$. Ak $n > r$, platia obe nerovnosti (6), (7), ktoré je dovolené sčítať, čo dáva

$$| a_n | + | b_n | < k;$$

avšak

$$| a_n + b_n | \leqq | a_n | + | b_n |,$$

takže

$$| a_n + b_n | < k.$$

pre všetky $n > r$. Veta je dokázaná.

VII. Ak je $\{a_n\}$ nulová postupnosť a $\{b_n\}$ ohraničená postupnosť, je $\{a_n \cdot b_n\}$ nulová postupnosť.

Dôkaz. Podľa definície ohraničenej postupnosti existuje také kladné číslo K, že $| b_n | < K$ pre všetky indexy n. Ak zvolíme teraz ľubovoľné kladné číslo k, je tiež $k : K$ kladné číslo. Keďže postupnosť $\{a_n\}$ je nulová, môžeme udať index r tak, že $| a_n | < < k : K$ pre všetky $n > r$. Teda pre všetky $n > r$ platia obe nerovnosti

$$| a_n | < \frac{k}{K}, \quad | b_n | < K.$$

Ľahko uvážime, že tieto dve nerovnosti je dovolené znásobiť. Pretože $| a_n | \cdot | b_n | = | a_n b_n |$, vyjde $| a_n b_n | < k$ pre všetky $n > r$.

Dôsledok dokázanej vety:

VIII. Ak je $\{a_n\}$ nulová postupnosť a ak je c ľubovoľné číslo, je aj $\{c a_n\}$ nulová postupnosť, lebo postupnosť $\{c\}$ je zrejme ohraničená.

Cvičenia.

99. Dokážte vetu: Ak je $\{a_n\}$ ohraničená postupnosť, je i postupnosť $\{| a_n |\}$ ohraničená.

100. Dokážte vetu: Ak sú $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ohraničené postupnosti, je ohraničená i postupnosť $\{r a_n + s b_n\}$, kde r, s sú ľubovoľné čísla.

101. Ak je $| q | \leqq 1$, je postupnosť $\{q^n\}$ ohraničená. Dokážte.

102. Dokážte vetu: Ak je $\{a_n\}$ postupnosť ohraničená a ak je $| b_n | \leqq | a_n |$ pre skoro všetky n, potom je $\{b_n\}$ tiež postupnosť ohraničená.

103. Ak v postupnosti $\{a_n\}$ zmeníme konečný počet členov, dostaneme postupnosť $\{b_n\}$. Potom je $a_n = b_n$ pre takmer všetky n. Dokážte.

104. Dokážte, že postupnosť $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je nulová.

105. Dokážte vetu: Ak je $\{a_n\}$ nulová postupnosť, je i postupnosť $\{|a_n|\}$ nulová.

106. Dokážte vetu: Ak sú $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ nulové postupnosti, je nulová i postupnosť a) $\{ra_n + sb_n\}$, kde r, s sú ľubovoľné čísla; b) $\{a_n b_n\}$.

107. Dokážte, že každá nulová postupnosť je ohraničená.

108. Ak je $\{a_n\}$ postupnosť nulová, je i $\left\{a_n^r\right\}$, kde r je ľubovoľné prirodzené číslo, nulová. Dokážte matematickou indukciou.

109. Utvorte výrok, ktorý presne popiera to, čo tvrdí výrok:
a) Existuje také kladné číslo K, že $|a_n| < K$ pre všetky n.
b) Nerovnosť $|a_n| < k$ je splnená skoro pre každé n.
c) Hoci zvolíme kladné číslo k akokoľvek, vždy je splnená nerovnosť $|a_n| < k$ takmer pre všetky n.

110. Dokážte vetu: Ak je postupnosť $\{a_n\}$ ohraničená a ak je $a_n \neq 0$ pre všetky n, postupnosť $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ nie je nulová.

111. Dokážte vetu: Ak je postupnosť $\{a_n\}$ nulová a ak je $a_n \neq 0$ pre všetky n, potom postupnosť $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ nie je ohraničená.

112. Dokážte vetu: Ak je $\{a_n\}$ postupnosť nulová a ak je $|b_n| \leq |a_n|$ takmer pre všetky n, potom je i $\{b_n\}$ nulová postupnosť.

9. Konvergentné postupnosti.

Teraz sa oboznámime s pojmom, ktorý je azda najdôležitejším matematickým pojmom vôbec, okolo ktorého sa sústreďuje celá tzv. vyššia matematika. Je to pojem **limity.** Slovo l i m i t a je latinského pôvodu a znamená medzu alebo hranicu. V matematike sa veľmi často stretávame s číslami, ktoré nevieme vypočítať presne, ale len približne. Ak spôsob približného počítania je taký pružný, že ho možno upraviť tak, aby stupeň približnosti bol taký veľký, ako si prajeme, alebo tak, aby sa presná hodnota a približná hodnota líšily tak málo, ako je ľubovoľným spôsobom predpísané, hovoríme, že presná hodnota hľadaného čísla je limitou počítaných približných hodnôt. S takými číslami, ktoré vo vyloženom smysle môžeme počítať len približne, sme sa už stretli. Takto sa počítajú okrem iného druhé odmocniny, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ atď., Ludolfovo číslo π, ale aj logaritmy, goniometrické funkcie a i.

Základný druh limity je **limita postupnosti.** O postupnosti $\{a_n\}$ hovoríme, že má ako limitu číslo a, ak $\{a_n - a\}$ je nulová postupnosť. To práve znamená, že pri veľkých hodnotách indexu n číslo $|a_n - a|$ je veľmi malé, alebo že pre všetky veľké n je číslo a_n dobrým priblížením k číslu a.

Nie každá postupnosť má limitu. Zrejme napr. ani postupnosť $\{n\}$, ani postupnosť $\{(-1)^n\}$ nemá limitu. Keď však postupnosť $\{a_n\}$ má limitu, je táto limita **jediná,** lebo povedzme, že by postupnosť $\{a_n\}$ mala dve rôzne limity a, b, potom by boly $\{a_n - a\}$,

$\{a_n - b\}$ nulové postupnosti. Pre každé číslo c by aj $\{c(a_n - b)\}$ bola nulavá postupnosť. Pre $c = -1$ dostaneme, že $\{b - a_n\}$ je nulová postupnosť. Z nulových postupností $\{a_n - a\}$, $\{b - a_n\}$ by sme sčítaním dostali novú nulovú postupnosť

$$\{(a_n - a) + (b - a_n)\} \text{ alebo } \{b - a\}.$$

Keďže však $a \neq b$, zrejme $\{b - a\}$ nie je nulová postupnosť.

Ak postupnosť $\{a_n\}$ má limitu a, píšeme

$$lim\, a_n = a. \tag{1}$$

O postupnosti, ktorá má limitu, hovoríme, že je **konvergentná** (t. j. sbiehavá); o postupnosti, ktorá nemá limitu, hovoríme, že je **divergentná** (t. j. rozbiehavá). Užívame tiež slovesá: **konverguje, diverguje.** Ak platí (1), hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}$ **konverguje k číslu** a.

Zrejme

$$lim\, a_n = 0$$

znamená to isté, ako že postupnosť $\{a_n\}$ je nulová. Teda podľa vety IV článku 8 tejto kapitoly:

$$lim\, q^n = 0, \text{ ak je } |q| < 1. \tag{2}$$

Z viet článku 8 ľahko odvodíme základné vety o konvergentných postupnostiach.

I. Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.

Dôkaz. Ak platí (1), je $\{a_n - a\}$ ohraničená postupnosť podľa vety V článku 8. Zrejme aj $\{a\}$ je ohraničená postupnosť. Pretože $a_n = (a_n - a) + a$, je $\{a_n\}$ ohraničená postupnosť podľa vety VI článku 8.

II. Ak $lim\, a_n = a$, $lim\, b_n = b$, **je aj** $lim\, (a_n + b_n) = a + b$.

Dôkaz. Pretože postupnosti $\{a_n - a\}$, $\{b_n - b\}$ sú nulové a pretože $(a_n + b_n) - (a + b) = (a_n - a) + (b_n - b)$ je $\{(a_n + b_n) - (a + b)\}$ nulová postupnosť podľa vety I článku 8.

III. Ak $lim\, a_n = a$, **je** $lim\, ca_n = ca$ **pre každé číslo** c.

Dôkaz. Pretože postupnosť $\{a_n - a\}$ je nulová a pretože $ca_n - ca = c\,(a_n - a)$, je $\{ca_n - ca\}$ nulová postupnosť podľa vety VIII článku 8.

IV. Ak $lim\, a_n = a$, $lim\, b_n = b$, **je aj** $lim\, (a_n - b_n) = a - b$.

Dôkaz. Z predchádzajúcej vety súdime pre $c = -1$, že $lim\,(-b_n) = -b$, takže naša veta plynie z vety II tohto článku.

V. Ak $lim\, a_n = a$, $lim\, b_n = b$, **je aj** $lim\, a_n b_n = ab$.

Dôkaz. Podľa vety I tohto článku je $\{a_n\}$ ohraničená postupnosť, takže $\{a_n (b_n - b)\}$ je nulová postupnosť podľa vety VII článku 8. Podľa vety VIII toho istého článku je aj $\{b\,(a_n - a)\}$ nulová postupnosť. Lež

$$a_n b_n - ab = a_n (b_n - b) + b\,(a_n - a),$$

takže $\{a_n b_n - ab\}$ je nulová postupnosť podľa vety VI článku 8.

VI. Ak je $lim\, a_n = a$ **a ak je** $a_n \neq 0$ **pre všetky** n, $a \neq 0$, **je aj**

$$lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}. \tag{3}$$

Dôkaz. Pretože $a \neq 0$, je $|a|$ kladné číslo, teda aj $\frac{1}{2}|a|$ je kladné číslo. Pretože $\{a_n - a\}$ je nulová postupnosť, existuje taký index r, že

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}|a| \text{ pre všetky } n > r.$$

Potom

$$|a| = |-a| = |(a_n - a) + (-a_n)| \leqq$$

$$\leqq |a_n - a| + |-a_n| < \frac{1}{2}|a| + |a_n|,$$

takže

$$|a_n| > |a| - \frac{1}{2}|a| = \frac{1}{2}|a|.$$

Ztade

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{|a|} \text{ pre } n > r \tag{4}$$

podľa vety VII článku 6. Zo (4) usúdime ľahko, že $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ je ohraničená postupnosť. Podľa vety III článku 8 je teda aj $\left\{\frac{1}{aa_n}\right\}$ ohraničená postupnosť. Pretože $\{a^0 - a\}$ je nulová postupnosť a je

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{aa_n}(a_n - a),$$

je $\left\{\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right\}$ nulová postupnosť podľa vety VII článku 8.

VII. Nech je $lim\, a_n = a$, $lim\, b_n = b$. **Keď** $b_n \neq 0$ **pre všetky** n **a aj** $b \neq 0$, **je aj**

$$lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Dôkaz. Podľa predchádzajúcej vety je $lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.

Pretože $\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n}$, plynie naša veta z vety V.

Podľa (2) je postupnosť $\{q^n\}$ konvergentná pre $|q| < 1$. Môže byť postupnosť $\{q^n\}$ konvergentná i v prípade $|q| \geqq 1$? Pre $q = 1$ je $q^n = 1$ pre všetky n, teda $lim\, q^n = 1$. Ale:

VIII. Keď $|q| \geqq 1$ **alebo** $q \neq 1$, **potom postupnosť** $\{q_n\}$ **je divergentná.**

Dôkaz. Predpokladajme, že $|q| \geqq 1$ a že $lim\, q^n = c$. Máme dokázať, že $q = 1$. Keďže $|q| \geqq 1$ a $|q^n| = |q|^n$, je $|q^n| \geqq 1$ pre všetky n, preto je $|c| \geqq 1$, teda $c \neq 0$. Ak z nulovej postupnosti $\{q^n - c\}$ vynecháme prvý člen, dostaneme postupnosť $\{q^{n+1} - c\}$, ktorá je zrejme tiež nulová.

Teda

$$lim\, q^n = c, \quad lim\, q^{n+1} = c,$$

takže podľa vety IV je

$$lim\, (q^{n+1} - q^n) = 0.$$

Na druhej strane je $q^{n+1} - q^n = q^n (q - 1)$, takže podľa vety III je

$$lim\, (q^{n+1} - q^n) = (q - 1)\, c.$$

A teda $(q - 1)\, c = 0$, a pretože činiteľ c je od nuly rôzny, musí byť $q - 1 = 0$, t. j. $q = 1$.

IX. Ak $|q| < 1$, **potom**

$$lim\, (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = \frac{1}{1-q}. \tag{5}$$

Dôkaz. Podľa vzorca (6′) článku 3 je

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

takže

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} q^n.$$

Máme teda dokázať, že $\left\{ -\frac{1}{1-q} q^n \right\}$ je nulová postupnosť. To plynie z viet IV a VIII článku 8.

Vzorec (5) sa obyčajne píše vo tvare

$$1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q}. \tag{5'}$$

Bodky na ľavej strane naznačujú, že sa má v sčítaní pokračovať bez akéhokoľvek obmedzenia. Sčítať nekonečne mnoho čísel nemá, pravda, nijaký význam; ľavá strana neznamená vôbec **súčet,** ale **limitu súčtu.** Predsa sa prakticky (z historických dôvodov) často hovorí o **nekonečných radoch** a ich **konvergencii** alebo **divergencii** a v prípade konvergencie o ich **súčte.** Nekonečný rad

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{6}$$

neznamená nič iné než postupnosť čiastočných súčtov $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ postupnosti $\{a_n\}$; konvergencia alebo divergencia nekonečného radu (6) nie je nič iné než konvergencia postupností $\{s_n\}$; v prípade konvergencie súčet nekonečného radu (6) nie je nič iné než $\lim s_n$.

Cvičenia.

113. Ak je $\lim a_n = a$, potom $\lim |a_n| = |a|$. Dokážte.
114. Ak je $\lim a_n = a$ a $\lim b_n = b$, potom $\lim (ra_n + sb_n) = ra + sb$, kde r, s sú ľubovoľné čísla. Dokážte.
115. Ak je $\lim a_n = a$, potom $\lim a_n^r = a^r$, kde r je prirodzené číslo. Dokážte matematickou indukciou.
116. Z cvičenia 115 odvoďte, že $\lim a_n^r = a^r$ i pre $r \leqq 0$ celé, pravda, za predpokladu, že $a \neq 0$, $a_n \neq 0$ pre všetky n.
117. Dokážte, že $\lim \frac{1}{n} = 0$.
118. Ak je $a_n = a$ takmer pre všetky n, potom $\lim a_n = 2x$. Dokážte.
119. Ak v postupnosti $\{a_n\}$ zmeníme konečný počet členov, dostaneme postupnosť $\{b_n\}$. Ak je $\lim a_n = a$, potom aj $\lim b_n = a$. Dokážte.
120. Nech je $\lim a_n = a \neq 0$ a nech $a_n = 0$ najviac pre konečný počet členov. Utvorte postupnosť $\{b_n\}$ tak, že dáte $b_n = \frac{1}{a_n}$, ak je $a_n \neq 0$, ak je $a_n = 0$, b_n zvolíme ľubovoľne. Dokážte, že $\lim b_n = \frac{1}{a}$.
121. Na základe viet II—VII vypočítajte: a) $\lim \frac{n}{n+1}$; b) $\lim \frac{an+b}{cn+d}$ pre

$c \neq 0$; c) $\lim \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^r$, r celé; d) $\lim \dfrac{n^2+1}{n^2-1}$; e) $\lim \dfrac{2n^2+3n-1}{3n^2-2n+1}$;

f) $\lim \dfrac{2n}{n^2+1}$.*)

122. Dokážte vetu: Ak je $\lim a_n > \lim b_n$, je $a_n > b_n$ takmer pre všetky n.
123. Ak je $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a $a_n \leqq b_n$ takmer pre všetky n, potom $a \leqq b$. Dokážte. Návod: Čo by sa stalo, keby bolo $a > b$?
124. Pre ktoré x je postupnosť $\{x^n\}$ konvergentná?
125. Rozhodnite, ktorý z nasledujúcich radov je konvergentný, a keď je konvergentný, napíšte, aký má súčet:

a) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots$;

b) $1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \dots$;

c) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} \dots$;

d) $(1-\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^3 + \dots$;

e) $(1+\sqrt{2}) - (1+\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{2})^3 - (1+\sqrt{2})^4 + \dots$;

f) $1 + \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} + \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 + \dots$;

g) $1 + \dfrac{1-i}{2} + \left(\dfrac{1-i}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1-i}{2}\right)^3 + \dots$;

h) $1 - (1+i) + (1+i)^2 - (1+i)^3 + \dots$

126. Udajte, pre ktoré x sú konvergentné nasledujúce rady a aký je ich súčet:

a) $x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$; b) $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \dots$;

c) $x - 2x + 4x - 8x + \dots$; d) $-x - \frac{x}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \dots$

127. Pre ktoré reálne x sú konvergentné nasledujúce rady a aký je ich súčet:

a) $1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots$;

b) $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^4 x + \dots$;

c) $1 + (\cos x + i \cdot \sin x) + (\cos x + i \cdot \sin x)^2 + (\cos x + i \cdot \sin x)^3 + \dots$;

d) $1 - \dfrac{1-ix}{3} + \left(\dfrac{1-ix}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{1-ix}{3}\right)^3 + \dots$

10. Reálne čísla ako limity postupnosti desatinných zlomkov.

Pri praktickom počítaní nadradzujeme reálne čísla skoro vždy desatinnými zlomkami, im tak blízkymi, že chyba nemá praktického významu. Historicky je zaujímavé, že hoci desatinné zlomky boly známe omnoho prv, predsa sa sústavne používajú až od XVII. storočia. Zásluha o to patrí predovšetkým holandskému matemati-

*) Môže sa stať, že v postupnostiach tohto druhu má konečný počet členov v menovateli nulu. Tieto členy môžeme nahradiť inými, ktoré zvolíme ľubovoľne, čo nemá vplyv na limitu — pozri cvič. 119 a 120.

kovi Simonovi Stevinovi (1584—1620). Naša generácia, ktorá sa s desatinnými zlomkami oboznamuje už na národnej škole, nemá náležitú predstavu o tom, ako nepohodlné boly výpočty v dobe, keď ešte nepoznali desatinné zlomky. Konečne plné využitie výhod, ktoré poskytujú desatinné zlomky, mohlo nastať až po zavedení desiatkovej sústavy mier a váh; jej potreby pre pokrok vedy si bol dobre vedomý už Stevin, uskutočnila ju však až veľká revolúcia francúzska.

Teoreticky je dôležité presne odôvodniť, že všetko počítanie s reálnymi číslami sa dá previesť na počítanie s desatinnými zlomkami. Nebudeme sa zaoberať všetkými podrobnosťami tohto odôvodnenia. Za **základnú vetu** v tejto súvislosti možno považovať vetu, že ku každému reálnemu číslu a možno udať takú postupnosť $\{a_n\}$ desatinných zlomkov, že $a = lim\, a_n$. Pomocou viet II, IV, V a VII článku 9 sa potom odôvodní, že základné počtové výkony s reálnymi číslami sa dajú nahradiť základnými počtovými výkonmi s konečnými desatinnými zlomkami tak, že chyba, ktorej sa pri tom dopustíme, je taká malá, ako je vopred predpísané. Tým sa nebudeme podrobnejšie zapodievať. Zato si však stručne pohovoríme o najjednoduchšom spôsobe, ako napísať ľubovoľné reálne číslo a vo tvare $a = lim\, a_n$, kde každé a_n je desatinné číslo. Tento najjednoduchší spôsob je v tom, že za a_n volíme najväčší n-miestny desatinný zlomok, ktorý je alebo rovný alebo menší než a. Ak je napr. $a = \pi$, je

$$a_1 = 3{,}1;\ a_2 = 3{,}14;\ a_3 = 3{,}141;\ a_4 = 3{,}1415;\ a_5 = 3{,}14159.$$

Všetky rozdiely $\pi - a_1$, $\pi - a_2$, $\pi - a_3$, ... sú kladné a je

$$\pi - a_1 < \frac{1}{10};\ \pi - a_2 < \frac{1}{10^2};\ \pi - a_3 < \frac{1}{10^3}, \ldots$$

takže skutočne $lim\, a_n = \pi$. Stručne píšeme

$$\pi = 3{,}141592653589793\ldots, \tag{1}$$

kde bodky znamenajú, že sa môže napravo bez obmedzenia pokračovať ďalej a ďalej; pravá strana v (1) je teda stručné označenie pre limitu postupnosti $\{a_n\}$, ktorej n-tý člen a_n sa dostane, ak necháme napravo len n prvých desatinných miest. V tom istom smysle máme pre každé reálne číslo a:

$$a = c, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5, \ldots \tag{2}$$

kde c je ľubovoľné celé číslo (kladné, záporné alebo rovné nule), kým c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, ... sú číslice, z ktorých každá má jednu z hodnôt 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Teda (2) znamená, že

$$a = lim\, a_n,$$

kde

$$a_n = c + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_n}{10^n}. \tag{3}$$

Výraz (2) sa menuje **desatinný rozvoj čísla** a.

Ak číslo a samo je r-miestny desatinný zlomok, t. j. ak

$$a = c + \frac{c_1}{10} + \frac{c^2}{10^2} + \ldots + \frac{c_r}{10^r},$$

kde opäť c je celé číslo a $c_1, c_2, \ldots, c_r$ sú číslice, potom rozvoj (2) má tvar

$$a = c, c_1\, c_2 \ldots c_r\, 00000\ldots,$$

t. j. všetky číslice c_n pre $n > r$ sú rovné nule.

Pristúpme k prípadu, že a je kladné racionálne číslo, teda $a = \frac{m}{n}$, kde m, n sú prirodzené čísla, o ktorých môžeme predpokladať, že sú nesúdelné. Ak číslo n nemá iných prvočiniteľov ako 2 a 5, napr. $a = \frac{13}{250} = \frac{12}{2 \cdot 5^3}$, môžeme rozšírením uviesť a na tvar zlomku s menovateľom 10^r, napr.

$$\frac{13}{2 \cdot 5^3} = \frac{13 \cdot 2^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{13 \cdot 4}{10^3} = \frac{52}{10^3} = 0{,}052 = 0{,}05200000\ldots;$$

a je v tomto prípade r-miestny desatinný zlomok. Ak n má iných prvočiniteľov než 2 a 5, ak napr. $a = \frac{5}{14}$, môžeme rozvoj (2) určiť obyčajným delením.

```
5 : 14 ≐ 0,3571428571
80
100
   20
     60
       40
       120
          80
          100
             20
```

Všetky zvyšky, 8, 10, 2, 6, 4, 12 atď., pri tomto delení sú menšie než 13; je teda len 14 možných zvyškov:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.$$

Z toho plynie, že musí raz nastať okamih, keď sa znovu vyskytne zvyšok, ktorý sa vyskytol už prv; v danom príklade taký prvý raz sa opakujúci zvyšok je 8. Keď sa raz opakuje zvyšok, musia sa opakovať tiež všetky nasledujúce zvyšky a musí sa tiež opakovať číslica podielu; v danom príklade je

$$\frac{5}{14} = 0{,}357142857142857142 8\ldots, \tag{4}$$

t. j. skupina číslic 571428 sa stále opakuje. Hovoríme, že desatinný rozvoj (4) je **periodický** (perióda je slovo gréckeho pôvodu a znamená cestu dookola); číslice 571428 tvoria **periódu** rozvoja, číslica 3 tvorí **predperiódu.** Je jasné, že takýto periodický rozvoj musíme dostať, kedykoľvek číslo a je racionálne, i keď je záporné. Ak je však a iracionálne, potom desatinný rozvoj (2) nie je periodický, lebo, ak je desatinný rozvoj

$$a = c,\ \overbrace{p_1 \ldots p_k}\ \overbrace{q_1 \ldots q_h}\ \overbrace{q_1 \ldots q_h} \ldots$$

periodický, číslo a musí byť racionálne.

Vskutku zrejme

$$a = \lim a_{k+nh},$$

kde

$$a_{k+nh} = c,\ \overbrace{p_1 \ldots p_k}\ \overbrace{q_1 \ldots q_h} \ldots \overbrace{q_1 \ldots q_h},$$

pričom skupina číslic $q_1 \ldots q_h$ sa n-krát za sebou opakuje. Ak položíme

$$\frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \ldots + \frac{p_k}{10^k} = u,$$

$$\frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \ldots + \frac{q_h}{10^h} = v,$$

je

$$a_{k+nh} = c + u + \frac{v}{10^k} + \frac{v}{10^{k+h}} + \ldots + \frac{v}{10^{k+(n-1)h}}$$

alebo

$$a_{k+nh} = c + u + \frac{v}{10^k}\left(1 + \frac{1}{10^h} + \ldots + \frac{1}{10^{(n-1)h}}\right).$$

Podľa vety IX článku 9 je však

$$lim\left(1 + \frac{1}{10^h} + \ldots + \frac{1}{10^{(n-1)h}}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{10^h}} = \frac{10^h}{10^h - 1},$$

teda

$$a = lim\, a_{k+nh} = c + u + \frac{v}{10^k} \cdot \frac{10^h}{10^h - 1} = c + u + \frac{v \cdot 10^{h-k}}{10^h - 1};$$

z toho vidno, že číslo a je racionálne.

Periodičnosť desatinného rozvoja racionálneho čísla a je zaujímavým dôsledkom vety IX článku 9, má však nepatrný praktický význam.

Cvičenia.

128. Každé reálne číslo a možno písať vo tvare $a = c + u$, kde c je celé číslo a u vyhovuje nerovnostiam $0 \leqq u < 1$. Podobne číslo $10u = c_1 + u_1$, kde c_1 je celé a u_1 vyhovuje nerovnostiam $0 \leqq u_1 < 1$. Ďalej $10u_1 = c_2 + u_2$, kde c_2 je celé a $0 \leqq u_2 < 1$. Ak pokračujeme takto bez obmedzenia, dostaneme postupne ďalšie čísla $c_3, c_4, \ldots, u_3, u_4, \ldots$ tých istých vlastností. Dokážte, že $c{,}c_1c_2c_3c_4\ldots$ je desatinný rozvoj čísla a.
129. Každé reálne číslo a možno písať vo tvare $a = d + v$, kde d je celé číslo a v vyhovuje nerovnostiam $0 < v \leqq 1$. Podobne číslo $10v = d_1 + v_1$, kde d_1 je celé a v_1 vyhovuje nerovnostiam $0 < v_1 \leqq 1$. Ďalej $10v_1 = d_2 + v_2$, kde d_2 je celé a $0 < v_2 \leqq 1$. Ak pokračujeme takto bez obmedzenia, dostaneme postupne ďalšie čísla $d_3, d_4, \ldots, v_3, v_4, \ldots$ tých istých vlastností. Dokážte, že $d{,}d_1d_2d_3d_4\ldots$ je desatinný rozvoj čísla a.
130. Pokiaľ ani jedno z čísel $u, u_1, u_2, u_3, \ldots$ v cvič. 128 nerovná sa 0, ani jedno z $v, v_1, v_2, v_3, \ldots$ v cvič. 129 nie je rovné 1 a oba rozvoje sú totožné. Dokážte.
131. Ak je v cvičení 128 číslo $u_{k-1} \neq 0$ a $u_k = 0$, je v cvič. 129 číslo $v_{k-1} \neq 1$ a $v_k = 1$, pričom $c_k = d_k + 1$, $c_n = 0$, $d_n = 9$ pre všetky $n > k$. Potom je číslo a vyjadrené dvoma rôznymi rozvojmi
$$a = c{,}c_1c_2c_3\ldots c_k\underbrace{000\ldots}_{\text{samé nuly}} = c{,}c_1c_2c_3\ldots(c_k - 1)\underbrace{999\ldots}_{\text{samé deviatky}}$$ Dokážte.
132. Ak nepripustíme, že $c_n = 9$ skoro pre všetky n, potom každé reálne číslo a má práve jeden desatinný rozvoj. Dokážte. Návod: Že má aspoň jeden desatinný rozvoj, plynie z cvič. 128. Že má najviac jeden, dokážeme matematickou indukciou takto: [1]. Nech $a = c{,}c_1c_2c_3\ldots = d{,}d_1d_2d_3\ldots$ sú dva rozvoje čísla a, t. j. $c + u = d + v$, kde $0 \leqq u < 1$, $0 \leqq v < 1$. Potom $c - d = v - u$ je celé číslo. Ale $-1 < v - u < 1$, preto $v - u = 0$. [2.] Ak je $c = d$, $c_k = d_k$ pre všetky $k < n$, musí $c_n \cdot 10^{-n} + u_n = d_n \cdot 10^{-n} + v_n$, kde $0 \leqq u_n < 10^{-n}$, $0 \leqq v_n < 10^{-n}$. Potom $c_n - d_n = (v_n - u_n) \cdot 10^n$ je celé číslo. Ale $-1 < (v_n - u_n) \cdot 10^n < 1$, preto $v_n - u_n = 0$.
133. Pomocou súčtu nekonečného radu preveďte na obyčajné zlomky: a) $0{,}58\overline{3}$; b) $0{,}2\overline{27}$; c) $0{,}\overline{259}$.

134. Ak v periodickom rozvoji niet predperiódy, hovoríme, že rozvoj je rýdzo periodický; ak je v ňom predperióda, rozvoj je nerýdzo periodický. Ktoré zlomky v základnom tvare vedú k rozvojom rýdzo periodickým a ktoré k rozvojom nerýdzo periodickým?

135. Ktoré zlomky v základnom tvare vedú k rýdzo periodickým rozvojom s periódou: a) jednocifernou, b) dvojcifernou, c) trojcifernou, d) h-cifernou?

136. Ktoré zlomky v základnom tvare vedú k nerýdzo periodickým rozvojom s predperiódou h-cifernou?

137. Dokážte správnosť viet: a) Rýdzo periodický rozvoj je rovný zlomku, ktorého čitateľom je perióda a menovateľom číslo, ktoré má toľko deviatok, koľko má perióda číslic. b) Nerýdzo periodický rozvoj rovná sa zlomku, ktorého čitateľa utvoríme tak, že napíšeme predperiódu, za ňu pripíšeme periódu a od vzniknutého čísla odčítame predperiódu; menovateľa potom utvoríme tak, že napíšeme toľko deviatok, koľko číslic má perióda, a k nim pripíšeme toľko núl, koľko číslic má predperióda.

III. KOMBINATORIKA.

11. Variácie a permutácie.

Na začiatku 1. triedy sme podrobne hovorili o sčítaní predmetov nejakého súboru. V tomto oddiele pojednávame stručne o sčítavaní **skupín predmetov.** Ak sa daný súbor skladá z r ľubovoľných predmetov a keď je n prirodzené číslo, potom utvoríme **skupinu** n**-tej triedy** z daných r predmetov, ak si z nich akýmkoľvek spôsobom vyberieme n rôznych predmetov, čo je, pravda, možné len vtedy, keď $n \leqq r$, lebo z r predmetov nemožno vybrať viac než r rôznych predmetov. Pri tom môžeme vyberané predmety voliť v určitom poriadku a všímať si tento poriadok; také skupiny, pri ktorých záleží na poriadku vybraných predmetov, nazývajú sa **variácie.** Ale môžeme si tiež myslieť celú skupinu vybranú naraz a vôbec nehľadieť na poriadok vybraných predmetov; takéto skupiny sa menujú **kombinácie.** V tomto článku si budeme všímať len variácie; kombináciami sa budeme zaoberať v článku 12. Variácia a kombinácia sú slová latinského pôvodu; variácia = zmena, kombinácia = spojovanie, skladanie.

Nech je daný ľubovoľný súbor r predmetov; jednotlivé predmety súboru môžeme označiť ľubovoľnými značkami; najpohodlnejšie sú značky

$$(1); (2); (3); \ldots; (r). \tag{1}$$

Každý jednotlivý predmet tvorí sám osebe variáciu prvej triedy; je teda zrejmé, že počet variácií prvej triedy súboru r predmetov sa rovná r.

Napr. pre $r = 5$ máme 5 variácií 1. triedy:

$$(1); (2); (3); (4); (5). \tag{2}$$

Pri variáciách 2. triedy máme postupne zvoliť dva rôzne prvky z daného súboru, pričom si všímame poriadok vybraných predmetov. Ak je už určitým spôsobom zvolený prvý predmet, potom druhým predmetom variácie 2. triedy je ktorýkoľvek z daných r predmetov, vyjmúc už zvolený prvý predmet, t. j. ak je prvý predmet nejako zvolený, máme pre druhý predmet ešte $r - 1$ možností; napr. pre $r = 5$ máme pri určitej voľbe prvého predmetu ešte $r - 1 = 4$ možnosti pre voľbu druhého predmetu, t. j. z každej z piatich variácií (2) prvej triedy vzniknú 4 variácie druhej triedy a celkový počet variácií druhej triedy je pre $r = 5$ rovný $5 \cdot 4 = 20$; všetky tieto variácie sú:

$$\left.\begin{array}{llll} (1), (2); & (1), (3); & (1), (4); & (1), (5); \\ (2), (1); & (2), (3); & (2), (4); & (2), (5); \\ (3), (1); & (3), (2); & (3), (4); & (3), (5); \\ (4), (1); & (4), (2); & (4), (3); & (4); (5); \\ (5), (1); & (5), (2); & (5), (3); & (5), (4); \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Všeobecne máme pre každé $r > 1$ celkom $r(r - 1)$ variácií 2. triedy r predmetov.

Tak ako sme z každej variácie 1. triedy utvorili všeobecne $r - 1$ variácií druhej triedy, teda 4 variácie druhej triedy pre $r = 5$, utvoríme z každej variácie 2. triedy určitý počet variácií tretej triedy. Pri variácii 2. triedy sme už zvolili dva z daných r predmetov; aby sme utvorili variáciu 3. triedy, musíme k obom zvoleným predmetom pridať tretí predmet, ktorý musí byť rôzny od oboch predmetov už zvolených, takže v každom prípade máme pre tretí predmet voľbu z $r - 2$ ešte nevybraných predmetov, t. j. z každej variácie 2. triedy vznikne pridaním tretieho predmetu $r - 2$ variácií 3. triedy. Počet všetkých variácií 3. triedy teda vznikne, keď počet všetkých variácií 2. triedy znásobíme číslom $r - 2$. Pre $r = 5$ sme mali celkom 20 variácií 2. triedy; z každej z nich dostaneme 3 variácie 3. triedy, napr. z variácie 2. triedy (4), (2) dostaneme variácie 3. triedy:

$$(4), (2), (1); \quad (4), (2), (3); \quad (4), (2), (5);$$

celkový počet variácií 3. triedy z 5 predmetov je teda $3 \cdot 20$, t. j. 60.

Počet variácií n-tej triedy z r predmetov označme $V_n(r)$. Je zrejmé, že

$$V_n(r) = 0, \text{ ak } n > r, \qquad (4)$$

lebo z r predmetov nemôžeme vybrať vôbec nijakú skupinu viac než r predmetov. Už sme si všimli, že

$$V_1(r) = r, \qquad (5)$$

$$V_2(r) = r(r - 1), \qquad (6)$$

(6) platí i pre $r = 1$. Ďalej platí rekurentný vzorec

$$V_{n+1}(r) = (r - n) \cdot V_n(r). \qquad (7)$$

D ô k a z vzorca (7). Ak je $n > r$, je aj $n + 1 > r$, a teda podľa (4) $V_n(r) = 0$, $V_{n+1}(r) = 0$, takže v tomto prípade (7) platí.

Ak $n = r$, je $V_{n+1}(r) = 0$, ale tiež $r - n = 0$, takže i v tomto prípade platí (7). Nech je konečne $n < r$. Z každej variácie n-tej triedy dostaneme variácie $(n + 1)$-vej triedy pridaním takého z n-predmetov, ktorý ešte nebol vybraný do variácie n-tej triedy. Takýchto predmetov je $r - n$, a preto z každej n-tej variácie vznikne vcelku $r - n$ variácií $(n + 1)$-vej triedy, z čoho plynie (7).

Počet variácií n-tej triedy r predmetov rovná sa súčinu n činiteľov, z ktorých prvý rovná sa r a každý nasledujúci je o jedničku menší než predchádzajúci. (To platí i pre $n = 1$, ak pod súčinom s jedným činiteľom, rovným r, rozumieme číslo r.) Prv, než si túto vetu dokážeme, vyslovme ju vzorcom. Preto uvážme, že činitelia nášho súčinu tvoria aritmetickú postupnosť s prvým členom r a s diferenciou rovnou -1, takže podľa vzorca (3) článku 2 r-tý (posledný) činiteľ sa rovná $r - (n - 1)$ alebo $r - n + 1$, takže veta je vyjadrená vzorcom

$$V_n(r) = r\,(r - 1)\,\ldots\,(r - n + 1), \tag{8}$$

ktorý pre $n = 1$ znamená (5), pre $n = 2$ znamená (6). Pre $n = 1$ vieme, že vzorec je správny. Aby sme ho dokázali matematickou indukciou, stačí dokázať, že ak pre nejaké n platí vzorec (8), potom platí aj vzorec, ktorý má naľavo $n + 1$ miesto n a napravo má o jedného činiteľa viac, pričom tento nový činiteľ je o jedničku menší než $r - n + 1$, čiže nový činiteľ sa rovná $r - n$. To je však zrejmé podľa (7).

Pozoruhodný osobitný prípad variácií máme pre $r = n$. Tu máme z n rôznych predmetov postupne vybrať n rôznych predmetov, všímajúc si poriadok vybraných predmetov. V tomto prípade vyberieme postupne všetky dané predmety v nejakom poriadku, t. j. v danom prípade variácia znamená jednoducho akékoľvek usporiadanie všetkých predmetov. Miesto slova variácia sa v tomto prípade obyčajne používa slovo **permutácia**; to je opäť slovo latinského pôvodu, ktoré znamená premeňovanie. Podľa všeobecnej vety o počte variácií **počet všetkých permutácií n predmetov sa rovná $n!$**, pričom $n!$ (čítame n f a k t o r i á l, z latinského slova faktor = činiteľ) znamená súčin všetkých prirodzených čísel od jedničky až po n včítane, teda

$$1! = 1; \quad 2! = 2; \quad 3! = 6; \quad 4! = 24; \quad 5! = 120 \text{ atď.}$$

Je teda pre každé prirodzené číslo n:

$$(n + 1) = (n + 1)\, n! \tag{9}$$

Je účelné položiť

$$0! = 1. \tag{10}$$

Vzorec (9) platí potom aj pre $n = 0$. Pre iné čísla n než prirodzené čísla a nulu značku $n!$ nedefinujeme.

Pomocou faktoriálov môžeme vyjadriť počet variácií $V_n(r)$ aj pre $n < r$. Potom je $r - n$ prirodzené číslo, a keď obe strany vzorca (8) znásobíme číslom $(r - n)!$, dostaneme $(r - n)!\, V_n(r) = r!$, takže

$$V_n(r) = \frac{r!}{(r - n)!} \tag{11}$$

pre $n < r$. Podľa (10) platí (11) aj pre $n = r$. Pre $n > r$ sa v (11) ľavá strana rovná nule a pravá nie je definovaná.

Cvičenia.

138. Dokážte, že r predmetov možno umiestiť na n miest (predpokladajte, že $r > n$, takže $r - n$ predmetov zostane neumiestených) práve toľkokrát, koľkokrát možno umiestiť n predmetov na r miest (pričom $r - n$ miest zostane voľných).

139. Koľko rôznych (jedno- až päťciferných) čísel možno napísať číslicami 0, 1, 2, 3, 4, ak sa nemá ani v jednom čísle číslica opakovať?

140. V rovine je dané n bodov, z ktorých nijaké tri neležia v priamke. Koľko je nimi určených rôznych uzavretých lomených čiar, ktorých vrcholy sú vo všetkých daných bodoch? ($n \geqq 3$.)

141. Ak sa zväčší počet predmetov o dva, zväčší sa počet permutácií dvanásťkrát. Koľko je predmetov?

142. Dokážte, že a) $n\,[n! + (n - 1)!] = (n + 1)!$; b) $n! + n^2\,(n - 1)! = (n + 1)!$; c) $(n + 1)! - n! = n \cdot n!$.

143. Vypočítajte: a) $\dfrac{(n + 1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n - 1)!}$;

$$\text{b)}\ \frac{(n + 2)!}{n!} - 2 \cdot \frac{(n + 1)!}{(n - 1)!} + \frac{n!}{(n - 2)!}.$$

144. Ak značí $V_n(r)$ počet variácií n-tej triedy r predmetov, dokážte, že platí rekurentný vzorec: a) $V_n(r) = r \cdot V_{-n_1}(r - 1)$; b) $V_n(r + 1) = V_n(r) + n \cdot V_{n-1}(r)$. — [Návod: a) Počítajte, koľko variácií má určitý pevne zvolený predmet na prvom mieste. b) Počítajte, o koľko sa zväčší počet variácií, ak pridáme k r predmetom ešte ďalší predmet.]

145. Dokážte, že a) $V_n(r) = (V_m(r) \cdot V_{n-m}(r - m)$;
b) $V_n(r) = V_m(r - n + m) \cdot V_{n-m}(r)$.

[Návod: a) Počítajte, koľko variácií má m určitých pevne zvolených predmetov na prvých m miestach. b) Počítajte, koľko variácií vznikne, keď k určitej pevne zvolenej variácii $(n - m)$-tej triedy pridáme ďalších m predmetov.]

146. Ak značí $P(r)$ počet permutácií r predmetov, dokážte, že platí rekurentný vzorec $P(r+1) = (r+1) \cdot P(r)$. Odvoďte odtiaľ matematickou indukciou, že $P(r) = r!$.

147. Ak je medzi r predmetmi k predmetov rovnakých ($k \leqq r$), možno z nich utvoriť $\frac{r!}{k!}$ permutácií; ak je okrem toho ešte ďalších h predmetov rovnakých ($k + h \leqq r$), ale rôznych od predchádzajúcich k predmetov, možno z nich utvoriť $\frac{r!}{k!h!}$ permutácií. Dokážte.

148. Ak tvoríme z r predmetov skupiny po n predmetoch, ale tak, že sa každý predmet môže v každej skupine ľubovoľne mnohokrát opakovať, ak dbáme pritom na poriadok predmetov, vznikajú tzv. variácie s opakovaním. Ich počet označíme $V'_n(r)$. Dokážte, že platí rekurentný vzorec $V'_n(r) = r \cdot V'_{n-1}(r)$. Odtiaľ odvoďte (matematickou indukciou), že $V'_n(r) = r^n$.

149. Koľko štvorciferných čísel možno sostaviť z číslic 0, 1, 2?

150. Koľkoraké vrhy možno urobiť: a) dvoma, b) troma kockami?

151. Každá značka slepeckého písma sa skladá z jedného až šiestich hmateteľných bodov, ktoré sa sostavujú najviac do dvoch stĺpcov, z ktorých v každom je najviac po troch bodoch. Koľkoraké značky sú možné?

152. Koľkoraké značky možno utvoriť, ak sostavujeme body a čiarky v skupinách po 1 až n prvkoch? Prepočítajte pre $n = 4$.

12. Kombinácie.

Z článku 11 vieme, že utvoriť z r predmetov kombináciu n-tej triedy znamená z daných r predmetov vybrať nejakým spôsobom n-predmetov, pričom na poriadku vybraných predmetov nezáleží. Počet všetkých kombinácií n-tej triedy r predmetov je zvykom značiť

$$\binom{r}{n}, \tag{1}$$

čo čítame r nad n. Čísla (1) sa menujú **kombinačné čísla**; dôvod poznáme v článku 13; menujú sa tiež **binomické koeficienty.**

Pre $n = 1$ niet rozdielu medzi kombináciami a variáciami; je

$$\binom{r}{1} = r \tag{2}$$

pre každé prirodzené číslo r. Zrejme

$$\binom{r}{n} = 0 \text{ pre } n > r; \tag{3}$$

práve tak je zrejmé, že

$$\binom{r}{r} = 1 \tag{4}$$

pre každé prirodzené číslo r.

Ak $1 < n \leqq r$, počet kombinácií je menší než počet variácií; aby sme dostali všetky kombinácie n-tej triedy predmetov označených

$$(1), (2), (3), \ldots, (r), \tag{5}$$

stačí napísať všetky také variácie n-tej triedy tých istých predmetov, v ktorých vyberané predmety idú za sebou napr. vo vzostupnom poriadku príslušných číslic. Napr. pre $r = 5$ všetky kombinácie druhej triedy sú:

$$\begin{array}{llll} (1), (2); & (1), (3); & (1), (4); & (1), (5); \\ (2), (3); & (2), (4); & (2), (5); & \\ (3), (4); & (3), (5); & & \\ (4), (5); & & & \end{array}$$

vcelku ich je 10. Kombinácie tretej triedy tých istých predmetov sú:

$$\begin{array}{lll} (1), (2), (3); & (1), (2), (4); & (1), (2), (5); \\ (1), (3), (4); & (1), (3), (5); & (1), (4), (5); \\ (2), (3), (4); & (2), (3), (5); & \\ (2), (4), (5); & (3), (4), (5); & \end{array}$$

je ich zasa desať.

Z každej kombinácie r predmetov dostaneme všetky tie variácie, ktoré obsahujú práve predmety obsiahnuté v danej kombinácii, ak predmety obsiahnuté v tejto kombinácii všetkými možnými spôsobmi usporiadame. Napr. z kombinácie (2), (3), (5) dostaneme vcelku 6 variácií:

$$\begin{array}{ll} (2), (3), (5); & (2), (5), (3), \\ (3), (2), (5); & (3), (5), (2), \\ (5), (2), (3); & (5), (3), (2). \end{array}$$

Všeobecne z každej kombinácie n-tej triedy r prvkov vznikne vcelku $n!$ variácií tejže triedy týchže prvkov, takže počet $V_n(r)$ všetkých variácií sa rovná súčinu čísla $n!$ s počtom $\binom{r}{n}$ všetkých kombinácií, t. j.

$$V_n(r) = n! \binom{r}{n}.$$

Podľa vzorca (8) článku 11 je teda

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}, \tag{6}$$

kde v čitateli je súčin n postupne o jedničku sa zmenšujúcich činiteľov. Pre $n > r$ sú obe strany v (6) rovné nule; pozri (3); pre $n \leq r$ môžeme podľa vzorca (11) článku 11 písať tiež

$$\binom{r}{n} = \frac{r!}{n!\,(r-n)!}. \tag{7}$$

Ak je prirodzené číslo n menšie než prirodzené číslo r, je aj $r - n$ prirodzené číslo menšie než r; keďže

$$r - (r - n) = n,$$

plynie zo (7), že

$$\binom{r}{n} = \binom{r}{r-n}. \tag{8}$$

O správnosti vzorca (8) sa môžeme ľahko presvedčiť bez akéhokoľvek počítania, keď si uvedomíme význam oboch strán vzorca (8). Myslime si napísané všetky kombinácie n-tej triedy predmetov (5) vedľa seba do riadkov. Pod každú napísanú kombináciu môžeme napísať do druhého riadku práve tie z predmetov (5), ktoré sa nevyskytujú v kombinácii, napísanej v riadku prvom. Potom máme v druhom riadku zapísané všetky kombinácie $(r - n)$-tej triedy predmetov (5) a vidíme, že počet kombinácií $(r - n)$-tej triedy sa rovná počtu kombinácií n-tej triedy, čo je práve vyjadrené vzorcom (8).

Význam značky $\binom{r}{n}$ sme definovali pre prirodzené čísla r, n; ak je r prirodzené číslo, je účelné definovať aj

$$\binom{r}{0} = 1; \tag{9}$$

nakoľko $0! = 1$, je to v súhlase so vzorcom (7). Vzorec (8), odvodený za predpokladu, že $0 < n < r$, platí podľa (4) a (9) aj pre $n = 0$ a pre $n = r$.

Keď však $r = 0$ a n je prirodzené číslo, definujeme

$$\binom{0}{n} = 0 \tag{3'}$$

a pre $r = 0$, $n = 0$ položíme ešte

$$\binom{0}{0} = 1 \tag{9'}$$

zasa v súhlase so vzorcom (7).

Okrem vzorca (8) platia o kombinačných číslach ešte iné vzorce, o správnosti ktorých sa tiež môžeme ľahko presvedčiť bez akéhokoľvek počítania. Najvýznamnejší zo vzorcov tohto druhu je vzorec

$$\binom{r+1}{n+1} = \binom{r}{n} + \binom{r}{n+1}, \tag{10}$$

platný pre ľubovoľné prirodzené čísla n, r. Ak je $n > r$, zneje vzorec (10): $0 = 0 + 0$, čo je správne. Ak je $n = r$, vzorec (10) podľa (3) a (4) hovorí, že $1 = 1 + 0$, čo je tiež správne. V prípade $n < r$ sa o správnosti vzorca (10) presvedčíme takto: Ľavá strana znamená počet kombinácií $(n + 1)$-vej triedy $r + 1$ predmetov

$$(0), (1), \ldots, (r). \tag{11}$$

Tieto kombinácie určené počtom $\binom{r+1}{n+1}$ rozdelíme na dve skupiny: Do prvej skupiny zadelíme tie z kombinácií, ktoré všetky obsahujú určitý predmet, označený hoci (0). Všetky takéto kombinácie dostaneme, keď z $r + 1$ predmetov vylúčime predmet označený (0), sostavíme všetky možné kombinácie po n predmetoch z ostávajúcich r predmetov a ku každej z týchto kombinácií nakoniec pripojíme aj predmet označený (0); takýchto kombinácií je $\binom{r}{n}$. V druhej skupine sú kombinácie $(n + 1)$-vej triedy z r predmetov, ktoré neobsahujú prv vylúčený predmet, označený (0); týchto kombinácií je $\binom{r}{n+1}$. Oba druhy kombinácií vyčerpávajú všetky možné kombinácie $(n + 1)$-vej triedy z pôvodného počtu $r + 1$ predmetov, pričom sa ani nijaká kombinácia nevyskytuje v obidvoch skupinách. Z toho vyplýva rovnosť (10).

Vzorec (10) sme dokázali pre prirodzené čísla r, n. Pre každé prirodzené číslo r je vzorec (10) správny, i pre $n = 0$, čo plynie ihneď z (2) a (9).

Kombinačné čísla môžeme sostaviť do trojuholníkovej tabuľky, ktorej každý riadok odpovedá určitému r a obsahuje za sebou $r + 1$ čísel:

$$\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \ldots, \binom{r}{r}.$$

Prvých desať riadkov tabuľky, ktorá sa nazýva **Pascalov trojuholník,** je

$r = 0$	1
$r = 1$	1 1
$r = 2$	1 2 1
$r = 3$	1 3 3 1
$r = 4$	1 4 6 4 1
$r = 5$	1 5 10 10 5 1
$r = 6$	1 6 15 20 15 6 1
$r = 7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$r = 8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1
$r = 9$	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
$r = 10$	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Podľa (4) a (9) každý riadok Pascalovho trojuholníka začína a končí číslom 1. Podľa (8) každý riadok zostane nezmenený, ak napíšeme jeho čísla v obrátenom poriadku. Konečne podľa (10) môžeme z čísel r-tého riadku vypočítať čísla $(r + 1)$-ho riadku: až na jedničky na začiatku a na konci dostaneme každé číslo $(r + 1)$-ho riadku sčítaním oboch šikmo nad ním stojacich čísel r-ho riadku.

Pascalov trojuholník má rad zaujímavých vlastností, z ktorých si uvedieme iba jednu. Zvoľme prirodzené čísla n, r $(n < r)$ a v každom riadku, začínajúc n-tým a končiac r-tým, vyberme n-té číslo riadku. Ak sčítame všetky vybrané čísla, dostaneme číslo, ktoré stojí v Pascalovom trojuholníku šikmo vpravo pod posledným z nich. Príklad:

$$(n = 4, r = 9)\colon 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 = 210.$$

Všeobecne

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{r}{n} = \binom{r+1}{n+1}. \tag{12}$$

Vzorec (12) dokážeme takto: Pravá strana znamená počet kombinácií $(n + 1)$-vej triedy predmetov

$$(1), (2), \ldots, (r), (r + 1). \tag{13}$$

Tieto kombinácie si rozdelíme na druhy tak, že každý sčítanec naľavo v (12) bude znamenať počet kombinácií jedného z tých druhov; tak bude vzorec (12) dokázaný. Konkrétne urobíme dôkaz takto: Prvky (predmety) rozdelíme na dve skupiny a označíme ich a_1, a_2, a_3, a_4, $\ldots$, a_n v prvej skupine a a_{n+1}, a_{n+2}, $\ldots$, a_{n+h} v druhej skupine; v prvej skupine je ich zrejme n, v druhej h, pričom $n + h = r + 1$. Z prvej skupiny utvoríme všetky možné kombinácie n-tej triedy a ku každej z nich pridáme prvok a_{n+1}. Takýchto soskupení je $\binom{n}{n}$. Potom utvoríme všetky možné kombinácie n-tej triedy z prvkov a_1, $\ldots$, a_{n+1} a ku každej z nich pridáme prvok a_{n+2};

týchto soskupení je $\binom{n+1}{n}$. Takto pokračujeme až do vyčerpania prvkov z druhej skupiny. Počty soskupení sa rovnajú členom na ľavej strane rovnice (12), pričom nijaké soskupenie z počtu zahrnutého v člene $\binom{n+k}{n}$ nie je obsiahnuté ani v jednom z predchádzajúcich členov. Soskupenia $n + 1$ prvkov takto sostavované sa neopakujú a vyčerpávajú všetky možné kombinácie $(n + 1)$-vej triedy z pôvodného počtu $r + 1$ prvkov. Tým je správnosť rovnice (12) dokázaná.

Cvičenia.

153. a) V koľkých bodoch sa pretína n priamok roviny, z ktorých nijaké dve nie sú spolu rovnobežné a nijaké tri neprechádzajú jedným bodom? b) Koľko priamok je určených n bodmi v rovine, z ktorých nijaké tri neležia v jednej priamke?

154. a) V koľkých bodoch sa pretína n rovín priestoru, z ktorých nijaké dve nie sú spolu rovnobežné, nijaké tri neprechádzajú jednou priamkou a nijaké štyri jedným bodom? b) Koľko rovín je určených n bodmi v priestore, ak neležia nijaké tri z nich v priamke a nijaké štyri v rovine?

155. Je dané n priamok roviny, z ktorých žiadne dve nie sú spolu rovnobežné. k týchto priamok ($k < n$) sa pretína v jednom bode a z ostatných $n - k$ priamok sa nijaké tri nepretínajú v jednom bode. Koľko priesečíkov je týmito priamkami určené?

156. Je dané n bodov v rovine, z ktorých nijaké tri neležia na jednej priamke. Nimi je určené $\binom{n}{2}$ priamok. Môžu tieto priamky okrem daných bodov mať ešte ďalšie priesečíky? Ak môžu, koľko najviac?

157. Je dané 5 bodov v rovine, z ktorých nijaké tri neležia v priamke a nijaké štyri na kružnici. a) Koľko kružníc je nimi určených? b) Koľko zo zmienených kružníc prechádza každým z daných bodov? c) Majú tieto kružnice okrem daných bodov ešte iné priesečíky, a koľko?

158. Výraz $(a + b)^r$, kde r je prirodzené číslo, môžete vypočítať tak, že utvoríte súčin $(a + b_1) \cdot (a + b_2) \cdot (a + b_3) \ldots (a + b_r)$ a do výsledku vsadíte $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_r = b$. Urobte to! Aký koeficient bude pri člene, ktorý obsahuje výraz $a^{r-n} b^n$? $(0 \leqq n \leqq r.)$

159. Dokážte, že a) $\binom{r-1}{n-1} = \frac{n}{r}\binom{r}{n}$; b) $\binom{r}{n} = \frac{r-n+1}{n}\binom{r}{n-1}$.

[Návod: a) Počítajte, koľko je kombinácií n-tej triedy, ktoré obsahujú určitý pevne zvolený predmet. b) Počítajte, koľko vznikne kombinácií, keď k určitej pevne zvolenej kombinácii $(n - 1)$-vej triedy pridáme ďalší predmet.]

160. Dokážte, že

a) $\binom{r-m}{n-m} = \dfrac{\binom{n}{m}}{\binom{r}{m}} \binom{r}{n}$; b) $\binom{r}{n} = \dfrac{\binom{r-n+m}{m}}{\binom{n}{m}} \binom{r}{n-m}$.

[Návod: a) Počítajte, koľko je kombinácií n-tej triedy, ktoré obsahujú určitú pevne zvolenú skupinu m predmetov. b) Počítajte, koľko vznikne kombinácií, keď k určitej pevne zvolenej kombinácii $(n - m)$-tej triedy pridáme ďalších m predmetov.]

161. a) Dokážte, že

$$\binom{r+s}{n} = \binom{r}{n}.\binom{s}{0} + \binom{r}{n-1}.\binom{s}{1} + \binom{r}{n-2}.\binom{s}{2} + \ldots +$$
$$+ \binom{r}{1}.\binom{s}{n-1} + \binom{r}{0}.\binom{s}{n}.$$

b) Z predchádzajúceho odvoďte, že

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2.$$

162. Počet kombinácií $(n + 1)$-vej triedy $r + 1$ predmetov (0), (1), (2),.., (r) môžeme spočítať takto: Najprv vezmeme všetky kombinácie, ktoré obsahujú predmet (0), potom tie, ktoré neobsahujú predmet (0), ale obsahujú predmet (1), ďalej tie, ktoré neobsahujú predmety (0) a (1), ale obsahujú predmet (2) atď., až nakoniec tie, ktoré neobsahujú predmety (0), (1), (2),.., $(r - n)$, ale obsahujú predmet $(r - n + 1)$. Urobte to! ($r \geqq n$.)

163. Ak tvoríme z r predmetov skupiny po r predmetoch, ale tak, že sa každý predmet v každej skupine môže vyskytovať ľubovoľne mnohokrát, pričom nedbáme na poriadok predmetov, vznikajú tzv. k o m b i n á c i e s o p a k o v a n í m. Ich počet označíme $C'_n(r)$. Dokážte, že platí rekurentný vzorec

$$\frac{n \cdot C'_n(r)}{r} = C'_{n-1}(r) + \frac{(n-1) \cdot C'_{n-1}(r)}{r}.$$

[Návod: Skúmajte, koľkokrát sa vyskytne určitý predmet, hoci predmet (1), vo v š e t k ý c h kombináciách n-tej triedy. Dostanete číslo $\dfrac{n \cdot C'_n(r)}{r}$. Keď vynecháme v každej kombinácii, ktorá obsahuje predmet (1), tento predmet, ostanú všetky kombinácie s opakovaním $(n - 1)$-vej triedy, ktorých je $C'_{n-1}(r)$ a v ktorých sa podľa predchádzajúceho prvok (1) vyskytuje ešte $\dfrac{(n-1)\, C'_{n-1}(r)}{r}$ krát.]

164. Z rekurentného vzorca, odvodeného v predchádzajúcom cvičení, dokážte matematickou indukciou, že počet kombinácií s opakovaním n-tej triedy r predmetov je $C'_n(r) = \binom{r+n-1}{n}$.

165. Koľko podstatne rôznych početných spojov obsahuje malá násobilka?

166. Koľko kameňov obsahuje hra domina, keď počet bodov na každom poli rovná sa niektorému z čísel od 0 do a) 7, b) 8, c) 9?

167. Názvom Apolloniovej úlohy sa označujú úlohy, v ktorých sa žiada sostrojiť kružnica, vyhovujúca daným trom podmienkam, z ktorých každá môže znieť: Kružnica prechádza daným bodom alebo kružnica sa dotýka danej priamky alebo kružnica sa dotýka danej kružnice. Koľko je týchto úloh?

168. Mnohočlen, t. j. výraz vzniknutý sčítaním niekoľkých členov tvaru $Ax^k y^l z^m \ldots$, nazýva sa homogenným, keď súčet mocniteľov $k + l + m + \ldots = n$ je pri všetkých členoch ten istý; čísla $x, y, z, \ldots$ sa menujú premenné a číslo n je stupeň homogenného mnohočlena. Koľko členov má homogenný mnohočlen n-tého stupňa s r premennými?

169. Ak nie je mnohočlen homogenný, jeho stupeň rovná sa najväčšiemu súčtu $k + l + m + \ldots$ a) Koľko členov má nehomogenný mnohočlen n-tého stupňa s r premennými? b) Dokážte vetu: Mnohočlen n-tého stupňa s r premennými má práve toľko členov ako úplný mnohočlen r-tého stupňa s n premennými.

170. Rovnica $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = n$, kde n je prirodzené číslo, má spolu $\binom{r+n-1}{n-1}$ riešení celými nezápornými číslami. Dokážte.

13. Binomická veta.

Binomická veta dáva výraz pre r-tú mocninu $(a + b)^r$ dvojčlena $a + b$, kde r je číslo prirodzené. Pre najnižších šesť hodnôt $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ mocniteľa r zneje binomická veta

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a + b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
(a+b)^6 &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.
\end{aligned}$$

Na pravej strane všeobecného vzorca pre $(a + b)^r$ je $r + 1$ členov, z ktorých prvý obsahuje a^r (alebo $a^r b^0$), druhý obsahuje $a^{r-1}b$ (alebo $a^{r-1}b^1$), tretí obsahuje $a^{r-2}b^2$ atď.; mocniteľ pri a klesá o jedničku a zároveň mocniteľ pri b vzrastá o jedničku. **Koeficienty jednotlivých členov tvoria r-tý riadok Pascalovho trojuholníka,** takže všeobecná binomická veta pre mocniteľa r znie:

$$(a + b)^r = a^r + \binom{r}{1} a^{r-1}b + \binom{r}{2} a^{r-2}b^2 + \ldots + \binom{r}{r-1} ab^{r-1} + b^r. \tag{1}$$

Dôkaz správnosti binomickej vety môžeme urobiť matematickou indukciou. Správnosť vety pre $r = 1$ je zrejmá. Je teda potrebné len pri ľubovoľne danom prirodzenom čísle r zo vzorca (1) odviesť vzorec

$$(a+b)^{r+1} = a^{r+1} + \binom{r+1}{1} a^r b + \binom{r+1}{2} a^{r-1} b + \ldots +$$
$$+ \binom{r+1}{r} ab^r + b^{r+1}. \tag{2}$$

Aby sme to urobili, uvážme, že $(a+b)^{r+1} = (a+b)^r \cdot (a+b)$ alebo $(a+b)^{r+1} = (a+b)^r \cdot a + (a+b)^r b$. Podľa (1) teda je $(a+b)^{r+1}$ rovné výrazu

$$a^{r+1} + \binom{r}{1} a^r b + \binom{r}{2} a^{r-1} b^2 + \ldots + \binom{r}{r-1} a^2 b^{r-1} + ab^r +$$
$$+ a^r b + \binom{r}{1} a^{r-1} + \binom{r}{2} a^{r-2} b^3 + \ldots + \binom{r}{r-1} ab^r + b^{r+1},$$

ktorý sa rovná

$$a^{r+1} + \left[\binom{r}{1} + \binom{r}{0}\right] a^r b + \left[\binom{r}{2} + \binom{r}{1}\right] + a^{r-1} b^2 + \ldots +$$
$$+ \left[\binom{r}{r-1} + \binom{r}{r-2}\right] a^2 b^{r-1} + \left[\binom{r}{r} + \binom{r}{r-1}\right] ab^r + b^{r+1},$$

čo sa po úprave rovná pravej strane v (2) podľa vzorca (10) článku 12.

Ak počítame koeficienty v (1) postupne pre rad hodnôt r, je najkratšie užiť vlastnosti Pascalovho trojuholníka, založené na vzorci (10) článku 12. Ak máme však počítať $(a+b)^r$ pre jedinú hodnotu r, použijeme na výpočet koeficientov $\binom{r}{n}$ vzorec (6) článku 12. Podľa tohto vzorca počítame $\binom{r}{n}$ postupne pre $n = 1, 2, 3, \ldots$, ak prejdeme od n k $n+1$, pripojí sa v tomto vzorci napravo v čitateli činiteľ $r - n$, v menovateli činiteľ $n + 1$, takže máme rekurentný vzorec

$$\binom{r}{n+1} = \frac{r-n}{n+1} \binom{r}{n}, \tag{3}$$

ktorý je na výpočet najvýhodnejší. Pomocou vzorca (3) však počítame len polovicu koeficientov $\binom{r}{n}$, druhá polovica je určená vzorcom (8) článku 12.

Už v článku 12 sme hovorili, že kombinačné čísla $\binom{r}{n}$ sa tiež menujú binomické koeficienty; dôvod je teraz už jasný.

V druhej triede sme poznali vzorec

$$(\cos a + i \cdot \sin a)^n = \cos na + i \cdot \sin na. \tag{4}$$

V učebnici pre 2. triedu, str. 55, vzorec (10). Na základe tohto vzorca môžeme nájsť pomocou binomickej vety pre každé prirodzené číslo n vyjadrenie $\cos na$, $\sin na$ pomocou $\cos a$, $\sin a$. Napr. pre $n = 4$ je podľa binomickej vety

$$\cos 4a + i \cdot \sin 4a = \cos^4 a + 4i \cdot \cos^3 a \sin a - 6 \cos^2 a \sin^2 a - \\ - 4i \cdot \cos a \sin^3 a + \sin^4 a.$$

Ak porovnáme na oboch stranách najprv reálne a potom imaginárne časti, dostaneme jednak

$$\cos 4a = \cos^4 a - 6 \cdot \cos^2 a \sin^2 a + \sin^4 a,$$

jednak

$$\sin 4a = \sin a\,(4 \cdot \cos^3 a - 4 \cdot \cos a \sin^2 a).$$

Ako je známe, je

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a,$$

teda

$$\sin^4 a = (1 - \cos^2 a)^2 = 1 - 2 \cdot \cos^2 a + \cos^4 a.$$

Preto z predchádzajúcich vzorcov dostaneme po ľahkej úprave

$$\cos 4a = 8 \cos^4 a - 8 \cos^2 a + 1,$$
$$\sin 4a = \sin a\,(8 \cos^3 a - 4 \cos a).$$

Podobne sa dajú odviesť vzorce tvaru

$$\cos na = T_n, \quad \sin na = \sin a \cdot S_n,$$

kde T_n, S_n sú výrazy obsahujúce len $\cos a$.

V praxi sa často užíva približných vzorcov

$$(1 + x)^r \doteq 1 + rx \tag{5}$$

alebo

$$(1 + x)^r \doteq 1 + rx + \frac{1}{2} r (r - 1) x^2 \tag{6}$$

pre ten prípad, že číslo $|x|$ je malé. Vzorec (5) je jednoduchší než (6); vzorec (6) je presnejší než (5).

Príklad. Podľa binomickej vety je

$$1{,}03^5 = \left(1 + \frac{3}{10^2}\right)^5 = 1 + 5 \cdot \frac{3}{10^2} + 10 \cdot \frac{3^2}{10^4} = 10 \cdot \frac{3^3}{10^6} + 5 \cdot \frac{3^4}{10^8} + \\ + \frac{3^5}{10^{10}} = 1 + 0{,}15 + 0{,}009 + 0{,}00027 + 0{,}0000005 + 0{,}000000043.$$

Ak sčítame iba prvé dva členy, máme $1{,}03^5 \doteq 1{,}15$ s chybou menšou než 10^{-2}; ak sčítame prvé tri členy, máme $1{,}03^5 \doteq 1{,}159$ s chybou menšou než $\frac{1}{2}\,10^{-3}$.

Aby sme odhadli chybu vo vzorcoch (5), (6), uvážme najprv, že z (1) plynie pre $a = 1$, $b = 1$:

$$1 + \binom{r}{1} + \binom{r}{2} + \ldots + \binom{r}{r-1} + 1 = 2^r. \tag{7}$$

Presná hodnota $(1 + x)^r$ je podľa binomickej vety

$$(1 + x)^r = 1 + rx + \frac{1}{2} r\,(r - 1)\,x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \ldots + \binom{r}{r-1} \cdot x^{r-1} + x^r.$$

Vo vzorci (5) sa teda dopúšťame chyby

$$\binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \ldots + \binom{r}{r-1} x^{r-1} + x^r,$$

ktorej absolútna hodnota je podľa vzorca (11) článku 7 najviac rovná

$$\binom{r}{2} |x|^2 + \binom{r}{3} |x|^3 + \ldots + \binom{r}{r-1} |x|^{r-1} + |x|^r.$$

Ak $|x| < 1$, je

$$|x|^2 > |x|^3 > |x|^4 > \ldots,$$

takže absolútna hodnota chyby v (5) je menšia než

$$x^2 \left[\binom{r}{2} + \binom{r}{3} + \ldots + \binom{r}{r-1} + 1\right],$$

a teda podľa (7) je menšia než $2^r\,|x|^2$. Podobne absolútna hodnota chyby vo vzorci (6) je pre $|x| < 1$ menšia než $2^r\,|x|^3$.

Cvičenia.

171. Určte a) absolútny člen vo výraze $\left(2x^2 - \frac{2}{x}\right)^{12}$;

b) najväčší koeficient vo výraze $(5a + 3b)^{20}$.

172. Vypočítajte na 5 desatinných miest: a) $1{,}025^{15}$; b) $0{,}99^{10}$.

173. S použitím binomickej vety vyjadrite $\cos 7a$, $\sin 7a$.

174. Ak označíme $\cos a + \mathrm{i} \cdot \sin a = S$, $\cos a - \mathrm{i} \cdot \sin a = \overline{S}$ je $\cos a = \frac{1}{2}(S + \overline{S})$. Odtiaľ možno vyjadriť mocninu výrazu $\cos a$ ako lineárnu funkciu kosínov násobkov uhla a. Urobte to pre a) $\cos^4 a$; b) $\cos^5 a$; c) $\cos^r a$, kde r je prirodzené číslo.

175. Dokážte: a) $\binom{r}{0} + 2\binom{r}{1} + 2^2\binom{r}{2} + 2^3\binom{r}{3} + \ldots + 2^r\binom{r}{r} = 3^r$;

b) $\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \ldots + (-1)^r\binom{r}{r} = 0.$

176. Dokážte: a) $\binom{r}{0} + \binom{r}{2} + \binom{r}{4} + \binom{r}{6} + \ldots + = 2^{r-1}$;

b) $\binom{r}{1} + \binom{r}{3} + \binom{r}{5} + \binom{r}{7} + \ldots = 2^{r-1}$.

177. Dokážte: a) $\binom{r}{0} - \binom{r}{2} + \binom{r}{4} - \binom{r}{6} + \ldots = 2^{\frac{r}{2}} \cdot \cos\frac{1}{4}r\pi$;

b) $\binom{r}{1} - \binom{r}{3} + \binom{r}{5} - \binom{r}{7} + \ldots = 2^{\frac{r}{2}} \cdot \sin\frac{1}{4}r\pi$;

[Návod: Počítajte výraz $(1 + i)^r$.]

178. Ak označíme $s_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$, môžeme zo vzorca pre $(h + 1)^r$, ktorý napíšeme pre $h = 1, 2, 3, \ldots, n$ a všetky takto vzniknuté rovnice sčítame, odviesť rekurentný vzorec

$$(n + 1)^r = 1 + \binom{r}{1}s_{r-1} + \binom{r}{2}s_{r-2} + \binom{r}{3}s_{r-3} + \ldots + \binom{r}{r-1}s_1 + n.$$

Urobte to a vypočítajte z toho: a) s_1; b) s_2; c) s_3.

179. Ak vyhovuje číslo x podmienke $0 < \frac{1}{2}(n - 1)\,x < q < 1$, kde q je vhodné číslo, potom $(1 + x)^n < 1 + \frac{nx}{1 - q}$. Dokážte a odhadnite podľa toho chybu, ktorej sa dopúšťame, keď miesto $(1 + x)^n$ približne položíme $1 + nx$.

IV. POČET PRAVDEPODOBNOSTI.

14. Úvod.

V histórii matematiky je mnoho príkladov, že matematici dlho študovali nejakú skupinu problémov len pre jej teoretickú zaujímavosť, a len o mnoho neskoršie sa ukázalo, že výsledky ich úvah majú veľký praktický význam. Jeden z najpoučnejších príkladov je **počet pravdepodobnosti,** ktorého predmetom je **štúdium zákonitostí, ktoré sa podľa skúsenosti vyskytujú medzi náhodnými zjavmi.** Na prvý pohľad sa zdá, že zákonitosť a náhodnosť sa navzájom celkom vylučujú, ale v skutočnosti je to naopak, a počet pravdepodobnosti sa ukázal veľmi dôležitým vo fyzike, v biologii, vo výrobe pôdohospodárskej i priemyselnej a inde. Počiatky počtu pravdepodobnosti naproti tomu, ako sa o tom v ďalšom zmienime, sú v matematickom rozbore pravidelnosti, ktoré boly zistené pri hazardných hrách.

Začneme s jednoduchým príkladom, aby sme si objasnili, akú pravidelnosť možno očakávať pri náhodných javoch. Príkladom náhodného javu, ktorý si najprv rozoberieme, je hádzanie kockou. Ak hádžeme kockou, vyjde pri každom vrhu jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ktoré z týchto čísel vyjde pri jednom vrhu, nedá sa vôbec predvídať. Ak urobíme rad vrhov za sebou a zapisujeme čísla, ktoré vychádzajú, zdá sa na prvý pohľad, že jednotlivé čísla nasledujú za sebou bez ladu a skladu. Ak je počet vrhov malý, nepozorujeme ani po podrobnejšom štúdiu nijakú pravidelnosť. Ale celkom inak sa nám to javí, keď skúmame výsledky dlhého radu vrhov. Tu pozorujeme okrem iného, že všetky čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 vychádzajú približne v rovnakom počte, stupeň približnosti je pri nepríliš veľkom počte vrhov málo uspokojivý, ale pri veľmi značnom počte vrhov je pozoruhodne presný. Všimnime si niektoré z možných výsledkov vrhu, napr. skúmajme ten **náhodný jav,** že padne šestorka. Keď urobíme k vrhov, tu pri každom z nich alebo padne šestorka, alebo nepadne. Počet h-tých vrhov, pri ktorých skúmaný jav nastane (pri ktorých padne šestorka), nazveme **absolútna početnosť** skúmaného náhodného javu. Dôležitejšia je **relatívna počet-**

nosť. To je zlomok $\frac{h}{k}$, ktorý vyjadruje pomer počtu prípadov, v ktorých skúmaný jav nastane, k celkovému počtu všetkých urobených pokusov (v našom prípade vrhov kockou). Keby sa v celkovom počte každé zo šiestich čísel, 1, 2, 3, 4, 5, 6, vyskytovalo v rovnakom počte, rovnala by sa relatívna početnosť $\frac{1}{6}$. Toto číslo $\frac{1}{6}$ nazveme **pravdepodobnosť** skúmaného javu. Skúsenosť ukazuje, že i pri veľmi veľkom počte pokusov sa relatívna početnosť len celkom výnimočne presne rovná pravdepodobnosti, že však pri veľkom počte pokusov sa relatívna početnosť skoro vždy približne rovná pravdepodobnosti. Odchýlku relatívnej početnosti c od pravdepodobnosti p je účelné vyjadriť v percentách pravdepodobnosti p. Počet percent rovná sa

$$100\frac{|c-p|}{p}. \tag{1}$$

Počtu pravdepodobnosti najlepšie porozumieme, keď si urobíme pokusy sami a zistíme veľkosť odchýlky relatívnej početnosti od pravdepodobnosti.

R. 1938 urobil jeden z autorov tejto učebnice 1 800 vrhov kockou. V nasledujúcej tabuľke 1. sú vrhy soskupené do 20 rímskymi číslicami označených skupín po 90 vrhov. Pre každú skupinu je v tabuľke zaznamenaná absolútna početnosť jedničky, dvojky, ..., šesťky.

Tabuľka 1.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
1	11	21	13	23	17	8	14	22	19	19	20	15	18	16	16	18	21	20	17	12
2	23	11	15	13	20	11	20	14	13	18	16	11	20	17	18	14	15	13	16	14
3	10	11	20	9	11	13	10	16	9	10	17	20	13	8	12	19	10	12	14	10
4	12	14	13	15	11	14	13	14	15	13	11	17	10	16	12	9	12	16	10	22
5	16	18	18	15	11	21	18	7	16	11	14	11	10	18	17	17	18	11	15	17
6	18	15	11	15	20	23	15	17	18	19	12	16	19	15	15	13	14	18	18	15

Tabuľka 1 jasne ukazuje, že pri 90 pokusoch odchýlky relatívnej početnosti od pravdepodobnosti sú často ešte značné. Relatívnej početnosti rovnej pravdepodobnosti by zodpovedala absolútna početnosť rovná číslu 15. V tabuľke sa však vyskytujú aj absolútne početnosti rovné 7 alebo 23, pre ktoré percentná odchýlka (1) je asi 53,3%, teda veľmi značná. Tieto najnepriaznivejšie prípady sú však celkom riedke (zo 120 prípadov popísaných v tabuľke 1 sa vyskytuje absolútna početnosť 7 len raz, absolútna početnosť 23 len tri razy). Ale i keď v tabuľke 1 zanedbáme 25% všetkých 120 prípadov, budú sa ešte v tabuľke 1 vyskytovať absolútne početnosti rovné číslam 11 a 19, pre ktoré percentná odchýlka (1) je asi 26,7%, teda stále ešte značná.

Väčšia pravidelnosť sa už javí, keď vykonaných 1800 vrhov rozdelíme len na štyri skupiny po 450 vrhov, t. j. keď každých 5 predchádzajúcich malých skupín shrnieme v jednu väčšiu skupinu.

Tabuľka 2.

	I	II	III	IV
1	85	82	85	88
2	82	76	82	72
3	61	58	70	65
4	65	69	66	69
5	78	73	70	78
6	79	92	77	78

Miesto tabuľky 1 máme teraz tabuľku 2. Keby boly relatívne početnosti rovné pravdepodobnosti, boly by absolútne početnosti zaznamenané v tabuľke 2 všetky rovné číslu 75. Nie je to tak. Ba čo viac — číslo 75 sa v tabuľke 2 vôbec nevyskytuje. Ale pomerné odchýlky, relatívnych početností od pravdepodobnosti sú už menšie než v predchádzajúcom prípade. Prv najväčšia odchýlka presahovala 50%, teraz činí 22,7%. Veľkosť jednotlivých odchýlok v tabuľke 2 a počet prípadov, koľkokrát ktorá odchýlka nastane, uvádza tabuľka 3. V prvom riadku sú uvedené jednotlivé odchýlky v percentách, v druhom počet prípadov, koľkokrát sa ktorá odchýlka vyskytuje v tabuľke 2.

Tabuľka 3.

22,7	18,7	17,3	13,3	12	9,3	8	6,7	5,3	4	2,7	1,3
2	1	1	4	1	3	2	2	1	4	2	1

Ak shrnieme konečne všetkých 1 800 pokusov, dostávame pre percentné odchýlky relatívnej početnosti od pravdepodobnosti pre čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 tieto hodnoty: 13,3%, 4%, 15,3%, 10,3%, 0,3%, 8,7%. Aby sme dostali podstatne menšie percentné odchýlky, museli by sme počet pokusov značne zväčšiť. Dá sa dokázať, že pri stonásobnom zväčšení počtu pokusov sa percentné odchýlky asi desaťkrát zmenšia.

Cvičenia.

180. Niekto urobil 257 pokusov, pri ktorých nastal jav o pravdepodobnosti $\frac{1}{3}$ celkom 92-krát. Vypočítajte relatívnu početnosť a jej percentnú odchýlku od pravdepodobnosti.
181. Pri pokuse s pravdepodobnosťou 0,426, urobenou vcelku 100-krát, percentná odchýlka relatívnych početností od pravdepodobnosti bola 12,9. Koľkokrát sa pokus zdaril?
182. Jav, ktorého pravdepodobnosť je $\frac{2}{7}$, má sa zopakovať 100-krát. V koľkých asi prípadoch jav nastane, ak očakávame, že percentná odchýlka relatívnej početnosti od pravdepodobnosti nepresiahne 10%?
183. Pravdepodobnosť, že nejaký dej nastane, je 0,328. Koľkokrát asi musíme dej zopakovať, ak chceme aby nastal 100-krát, a keď očakávame, že percentná odchýlka relatívnej početnosti od pravdepodobnosti nepresiahne 10%?
184. Určitý dej sa opakoval celkom 1000-krát, pričom kladný výsledok bol vcelku v 346 prípadoch. Čo možno povedať o pravdepodobnosti tohto deja, ak percentná odchýlka relatívnej početnosti od pravdepodobnosti nečiní viac než 12%?

15. Výpočet pravdepodobnosti v jednoduchých prípadoch.

Najjednoduchšia partia počtu pravdepodobnosti, na ktorú sa v podstate obmedzíme, dá sa opísať takto: Robíme opätovne nejaký pokus, ktorého výsledok je náhodný. Celkove je možné k rôznych výsledkov pokusu, a máme dôvody predpokladať, že pri robení veľkého radu pokusov každý z možných k prípadov sa uskutoční v rovnakom počte. Tento predpoklad vyjadrujeme slovami, že **všetky možné prípady sú rovnako pravdepodobné.** Teraz si všímame určitý **náhodný jav,** ktorý v niektorých z k možných prípadov nastane, v iných nenastane. Tie případy, v ktorých skúmaný jav nastane, nazveme **očakávané (priaznivé) prípady.** Ak je h počet očakávaných prípadov a ak je, ako už bolo povedané, k počet všetkých možných prípadov, číslo

$$p = \frac{h}{k}$$

voláme **pravdepodobnosťou** skúmaného náhodného javu. Očakávame potom, že pri veľkom počte pokusov relatívna početnosť skúmaneho javu bude sa približne rovnať p, v tom je práve význam čísla p. Že toto očakávanie je oprávnené, to sa historicky dokázalo na hazardných hrách. Výpočet čísla p nie je vždy celkom jednoduchý, a tzv. kombinatorika, predmet predchádzajúceho oddielu tejto učebnice, vznikla práve z potrieb počtu pravdepodobnosti.

Keď napr. hádžeme kockou, máme šesť možných výsledkov pokusu, t. j. máme $k = 6$. Náhodný jav, ktorý skúmame, môže byť v tom, že padne určité z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, napr. že padne šestorka. Zo 6 rovnako možných prípadov je jediný očakávaný, t. j. máme $h = 1$ a pravdepodobnosť sa rovná $\frac{1}{6}$. Môžeme však pri hádzaní kockou skúmať aj iné javy. Napríklad vezmime ten náhodný jav, že pri hádzaní kockou vyjde číslo nepárne; tu je $k = 6$, $h = 3$, a teda pravdepodobnosť $p = \frac{1}{2}$. Smysel rovnice $p = \frac{1}{2}$ je v tom, že pri veľkom počte vrhov asi v polovici všetkých prípadov vyjde nepárne číslo. V príklade znázornenom v tabuľke 1. článku 14 v jednotlivých 20 skupinách, I až XX, máme tieto absolútne početnosti skúmaného javu v 2. riadku nasledujúcej tabuľky; v 3. riadku tej istej tabuľky sú udané v percentách odchýlky relatívnej početnosti od pravdepodobnosti $p = \frac{1}{2}$.

Tabuľka 4.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
37	50	51	47	39	42	42	45	44	40	51	46	41	42	45	54	49	43	46	39
17,8	11,1	13,3	4,4	13,3	6,7	6,7	0	2,2	11,1	13,3	2,2	8,9	6,7	0	20	8,9	4,4	2,2	13,3

Pozorujeme, že odchýlky sú o niečo menšie než odchýlky skúmané v článku 14 pre výskyt určitého z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6; dá sa dokázať, že pri veľkom počte pokusov odchýlky relatívnych početností od pravdepodobnosti sú pre $p = \frac{1}{2}$ menšie než v ktoromkoľvek inom prípade. Ak podobne, ako v tabuľke 2, shrnieme 1 800 pokusov len do štyroch skupín po 450 kusov, dostaneme miesto tabuľky 4 tabuľku 5. Odchýlky v tabuľke 5 opäť sú menšie než tie, ktoré máme zaznamenané v tabuľke 3.

Tabuľka 5.

I	II	III	IV
224	213	225	231
0,4%	5,3%	0%	2,7%

Keď hádžeme dvoma kockami, môžeme výsledok každého pokusu zaznamenať vo tvare (a, b), kde a znamená číslo, ktoré padne na prvej kocke, b znamená číslo, ktoré padne na druhej kocke. Číslo a môže nadobúdať ktorúkoľvek zo 6 hodnôt 1, 2, 3, 4, 5, 6; to isté platí o čísle b. Máme teda celkom $k = 6 \cdot 6 = 36$ možných prípadov, ktoré právom považujeme za rovnako pravdepodobné. Skúmajme náhodný jav, keď súčet $a + b$ nadobudne určitú hodnotu s. Číslo s musí sa rovnať aspoň $1 + 1 = 2$ a nanajvýš rovná sa $6 + 6 = 12$. Prichádza teda v úvahu 11 hodnôt čísla s; pre každú z týchto 11 hodnôt je v nasledujúcej tabuľke uvedené v prvom riadku číslo s, v druhom príslušný počet h možných prípadov, v treťom na stotiny zaokrúhlená pravdepodobnosť $p = h : 36$.

Tabuľka 6.

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
p	0,03	0,06	0,08	0,11	0,14	0,17	0,14	0,11	0,08	0,06	0,03

Podobne pri hádzaní troma kockami môžeme výsledok každého pokusu zapísať vo tvare (a, b, c), kde a znamená číslo, ktoré padne na prvej kocke, b číslo, ktoré padne na druhej kocke, c číslo, ktoré padne na tretej kocke. Všetkých možných prípadov je $k = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ a každý z týchto prípadov je rovnako pravdepodobný. Opäť skúmajme ten náhodný jav, keď súčet $a + b + c$ nadobudne určitú hodnotu s, ktorá sa musí rovnať aspoň $1 + 1 + 1 = 3$ a nanajvýš sa rovná $6 + 6 + 6 = 18$. Aby sme pri danom s určili počet h všetkých priaznivých prípadov, sostavíme si všetky rozklady čísla s na tri sčítance, pričom každý sčítanec rovná sa jednému z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6. Skusmo ľahko nájdeme:

$$
\begin{aligned}
3 &= 1+1+1,\\
4 &= 2+1+1,\\
5 &= 3+1+1 = 2+2+1,\\
6 &= 4+1+1 = 3+2+1 = 2+2+2,\\
7 &= 5+1+1 = 4+2+1 = 3+2+2 = 3+3+1,\\
8 &= 6+1+1 = 5+2+1 = 4+2+2 = 4+3+1 = 3+3+2,\\
9 &= 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3,\\
10 &= 6+3+1 = 6+2+2 = 5+4+1 = 5+3+2 = 4+4+2 = 4+3+3,\\
11 &= 6+4+1 = 6+3+2 = 5+5+1 = 5+4+2 = 5+3+3 = 4+4+3,\\
12 &= 6+5+1 = 6+4+2 = 6+3+3 = 5+5+2 = 5+4+3 = 4+4+4,\\
13 &= 6+6+1 = 6+5+2 = 6+4+3 = 5+5+3 = 5+4+4,\\
14 &= 6+6+2 = 6+5+3 = 6+4+4 = 5+5+4,\\
15 &= 6+6+3 = 6+5+4 = 5+5+5,\\
16 &= 6+6+4 = 6+5+5,\\
17 &= 6+6+5,\\
18 &= 6+6+6.
\end{aligned}
$$

Pritom napr. súčet $2 + 1 + 1$ vzniká z troch prípadov (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2). Súčet $3 + 2 + 1$ vzniká zo šiestich prípadov atď. V nasledujúcej tabuľke je udaný jednak počet h očakávaných prípadov, jednak na tisíciny zaokrúhlená pravdepodobnosť $p = h : 216$. V poslednom riadku čísla p^* znamenajú na tisíciny zaokrúhlené relatívne početnosti pri 1 000 vrhov troma kockami, urobených jedným z autorov tejto učebnice.

Tabuľka 7.

s	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25
p	0,005	0,014	0,028	0,046	0,069	0,097	0,116	0,125	0,125	0,116
p^*	0,009	0,019	0,028	0,054	0,073	0,116	0,101	0,109	0,148	0,114

s	13	14	15	16	17	18
h	21	15	10	6	3	1
p	0,097	0,069	0,046	0,028	0,014	0,005
p^*	0,096	0,049	0,036	0,029	0,013	0,006

Čísla h v tabuľke 6 i v tabuľke 7 (a teda aj pravdepodobnosti p) majú tú zaujímavú vlastnosť, že ostanú bezo zmeny, ak ich napíšeme v obrátenom poriadku. Prečo je to tak, môžeme si ľahko vysvetliť takto: Na hracej kocke máme proti číslu 1 číslo 6, proti číslu 2 číslo 5, proti číslu 3 číslo 4. Všeobecne súčet dvoch protiľahlých čísel sa vždy rovná 7. Keď napr. na troch kockách padnú čísla a, b, c so súčtom s, máme na protiľahlých stranách čísla a',

b', e' so súčtom s', pričom $a + a' = 7$, $b + b' = 7$, $c + c' = 7$, a preto $s + s' = 21$. Počet očakávaných prípadov pre súčet s je teda ten istý ako pre súčet s'. Veľmi obľúbená bola kedysi hra passe-dix (francúzsky znamená prekročenie desiatky). Stavalo sa na to, že pri vrhu troma kockami vyjde súčet $s = a + b + c$ väčší ako 10. Je to tzv. **spravodlivá hra**; to znamená, že pravdepodobnosť výhry je $\frac{1}{2}$ alebo že počet prípadov priaznivých rovná sa počtu prípadov nepriaznivých. Spravodlivosť plynie zo súmernosti tabuľky 7, o ktorej sme práve hovorili.

Cvičenia.

185. Aká je pravdepodobnosť, že pri hádzaní kockou vyjde číslo a) deliteľné troma, b) nedeliteľné troma?

186. Aká je pravdepodobnosť, že pri hre dvoma kockami vyjde súčet a) deliteľný troma, b) nedeliteľný troma?

187. Aká je pravdepodobnosť, že pri hre troma kockami vyjde súčet a) deliteľný štyrmi, b) nedeliteľný štyrmi?

188. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne napísané číslo celé je a) párne, b) nepárne?

189. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne napísané dvojciferné číslo je a) deliteľné troma, b) deliteľné štyrmi, c) deliteľné siedmimi?

190. Aká je pravdepodobnosť, že číslo náhodne sostavené z číslic 1, 2, 3, 4, 5 bude deliteľné štyrmi?

191. Pri hre troma kockami môže každý zo súčtov 11 a 12 padnúť vcelku šiestimi spôsobmi (pozri str. 68). Predsa je pravdepodobnosť každého z týchto dvoch súčtov iná. Vysvetlite prečo?

192. Aká je pravdepodobnosť, že a) pri vrhu mincou padne líce, b) pri vrhu dvoma mincami padne na oboch minciach líce, c) pri vrhu troma mincami padne práve na dvoch minciach líce?

193. Aká je pravdepodobnosť, že pri hre dvoma kockami padne a) práve jedna šestorka, b) aspoň jedna šestorka, c) najviac jedna šestorka, d) nijaká šestorka, e) obe šestorky?

194. Aká je pravdepodobnosť, že pri hre troma mincami padne a) práve jedno líce, b) aspoň jedno líce, c) najviac jedno líce, d) nijaké líce?

195. V mešci je 12 guľôčok červených a 8 modrých. Aká je pravdepodobnosť, že z piatich vytiahnutých guľôčok sú a) 3 červené a 2 modré, b) 2 červené a 3 modré, c) všetky červené, d) všetky modré?

196. Z hry 32 karát boly náhodne vytiahnuté 4 karty. Aká je pravdepodobnosť, že je medzi nimi a) jedno eso, b) dve esá, c) tri esá, d) štyri esá, e) nijaké eso?

197. Z hry 32 karát bolo rozdaných 5 karát. Aká je pravdepodobnosť, že sú medzi nimi a) štyri esá, b) tri esá, c) dve esá, d) jedno eso, e) nijaké eso?

198. Ak je vopred zaručené, že nejaký jav nastane (jav je istý), je jeho pravdepodobnosť 1; ak je zaručené, že jav nenastane (jav je nemožný), je jeho pravdepodobnosť 0. Dokážte.

199. Ak sa počet priaznivých prípadov rovná počtu nepriaznivých prípadov, má jav pravdepodobnosť $\frac{1}{2}$. Dokážte.

200. Ak je p pravdepodobnosť, že nejaký jav nastane, pravdepodobnosť, že jav nenastane, sa rovná $1 - p$. Dokážte.

16. Pravdepodobnosť úhrnná a složená.

Výpočet pravdepodobnosti náhodného javu sa dá niekedy uľahčiť pomocou všeobecne platných viet, ktoré si dokážeme v tomto článku. K týmto vetám dospejeme, ak pri jednom a tom istom druhu pokusov skúmame niekoľko náhodných javov súčasne. O dvoch náhodných javoch J_1, J_2 hovoríme, že sa **navzájom vylučujú**, ak je nemožné, aby pri nejakom pokuse oba javy J_1, J_2 súčasne nastaly. Potom platí nasledujúca **veta o úhrnnej pravdepodobnosti**:

I. Ak náhodné javy J_1, J_2, ktoré sa navzájom vylučujú, majú pravdepodobnosti p_1, p_2, a ak náhodný jav J je to, že nastane jeden z oboch javov J_1, J_2, potom pravdepodobnosť javu J sa rovná $p_1 + p_2$.

Dôkaz. Ak je k počet všetkých možných prípadov a keď je h_1 počet prípadov priaznivých pre jav J_1, h_2 počet prípadov priaznivých pre J_2, je

$$p_1 = \frac{h_1}{k}, \quad p_2 = \frac{h_2}{k}. \tag{1}$$

Prípady priaznivé pre jav J sú jednak tie, ktoré sú priaznivé pre jav J_1, jednak tie, ktoré sú priaznivé pre jav J_2. Keďže nijaký prípad nemôže byť súčasne priaznivý i pre jav J_1, i pre jav J_2, počet h prípadov priaznivých pre jav J sa rovná

$$h = h_1 + h_2. \tag{2}$$

Jav J má však pravdepodobnosť

$$p = \frac{h}{k}. \tag{3}$$

Z (1), (2), (3) plynie $p = p_1 + p_2$, čo sme mali dokázať. Ak nie je pravda, že javy J_1, J_2 sa navzájom vylučujú, nemôže rovnica (2) platiť, ale platí zrejme nerovnosť $d < h_1 + h_2$, z ktorej plynie podľa (1) a (3) nerovnosť $p < p_1 + p_2$. Teda:

II. Ak náhodné javy J_1, J_2 majú pravdepodobnosť p_1, p_2 a keď náhodný jav J je to, že nastane aspoň jeden z oboch javov, J_1, J_2, potom pre pravdepodobnosť p javu J platí vzťah p $\leqq p_1 + p_2$.

Ak je J ľubovoľný náhodný jav, nazveme **opačným javom** ten jav J_2, keď jav J_1 nenastane. Oba javy J_1, J_2 sa navzájom vylučujú, takže podľa I pre ich pravdepodobnosť p_1, p_2 platí $p_1 + p_2 = p$, kde p znamená pravdepodobnosť toho javu J, keď nastane aspoň jeden z oboch javov J_1, J_2.

Zrejme však je **istý jav**, ktorého pravdepodobnosť $p = 1$. Teda zvláštnym prípadom vety I je nasledujúca veta III, v ktorej znení pre jednoduchosť je vynechaný index 1.

III. Ak je p pravdepodobnosť náhodného javu J, pravdepodobnosť opačného javu sa rovná $1 - p$.

Miesto dvoch náhodných javov J_1, J_2 môžeme vyjsť od viac ako dvoch a dostáneme tou istou cestou všeobecnejšie vety:

I'. Ak náhodné javy $J_1, J_2, \ldots, J_n$, z ktorých každé dva sa navzájom vylučujú, majú pravdepodobnosti $p_1, p_2, \ldots, p_n$, a ak náhodný jav J je to, že nastane jeden z javov $J_1, J_2, \ldots, J_n$, potom pravdepodobnosť javu J sa rovná

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$

II'. Ak náhodné javy $J_1, J_2, \ldots, J_n$ majú pravdepodobnosti $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a ak náhodný jav J je to, že nastane aspoň jeden z javov $J_1, J_2, \ldots, J_n$, potom pre pravdepodobnosť p javu J platí vzťah $p \leqq p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

Teraz je potrebné, aby sme si vysvetlili pojem **podmienenej pravdepodobnosti.** Skúmajme opäť pri tom istom druhu pokusov dva náhodné javy J_1, J_2. Označme opäť k počet všetkých prípadov možných, h_1 počet prípadov, v ktorých nastane jav J_1, h_2 počet prípadov, v ktorých nastane jav J_2, ďalej p_1, p_2 pravdepodobnosti oboch javov, takže

$$p_1 = \frac{h_1}{k}, \quad p_2 = \frac{h_2}{k}. \tag{1}$$

Označme ešte h_{12} alebo h_{21} počet tých prípadov, v ktorých nastanú oba javy J_1 i J_2. Teraz budeme definovať podmienenú pravdepodobnosť javu J_2 za hypotézy J_1 tak, že odtrhneme všetky prípady, v ktorých nenastane jav J_1, a ponecháme len prípady, v ktorých nastane J_1. Počet všetkých možných prípadov bude teda len h_1 a počet prípadov priaznivých pre jav J_2 bude h_{12}, takže podmienená pravdepodobnosť $p_2(J_1)$ javu J_2 za hypotézy J_1 sa rovná:

$$p_2(J_1) = \frac{h_{12}}{h_1}. \tag{4}$$

Podobne bude

$$p_1(J_2) = \frac{h_{12}}{h_2} \tag{5}$$

podmienená pravdepodobnosť javu J_1 za hypotézy J_2. Napr. pri hádzaní kockou nech jav J_1 pozostáva v tom, že nepadne šestorka a jav J_2 nech pozostáva v tom, že padne číslo párne. Nepodmienené pravdepodobnosti sú $p_1 = \frac{5}{6}$, $p_2 = \frac{1}{2}$. Podmienená pravdepodobnosť javu J_2 za hypotézy J_1 je $p_2(J_1) = \frac{2}{5}$. Podmienená pravdepodobnosť javu J_1 za hypozéty J_2 je $p_1(J_2) = \frac{2}{3}$.

Teraz ľahko dokážeme nasledujúcu vetu o složenej pravdepodobnosti:

IV. Ak sú J_1, J_2 ľubovoľné dva náhodné javy a ak náhodný jav J_{12} je to, že nastanú oba javy J_1, J_2 súčasne, pravdepodobnosť javu J_{12} sa rovná súčinu

$$p_1 \cdot p_2(J_1), \tag{6}$$

ktorého prvý činiteľ je (nepodmienená) pravdepodobnosť javu J_1 a druhý činiteľ je podmienená pravdepodobnosť javu J_2 za hypotézy J_1.

Dôkaz. Pravdepodobnosť javu J_{12} sa rovná

$$\frac{h_{12}}{k} \text{ alebo } \frac{h_1}{k} \cdot \frac{h_{12}}{k_1},$$

čo sa podľa (1) a (4) rovná výrazu (6).

Veta IV sa dá zovšeobecniť na ľubovoľný počet $J_1, J_2, \ldots, J_n$ náhodných javov. Obmedzíme sa na prípad $n = 3$: Pravdepodobnosť, aby nastaly všetky tri javy J_1, J_2, J_3 súčasne, rovná sa súčinu

$$p_1 \cdot p_2(J_1) \cdot p_3(J_1 \cdot J_2), \tag{7}$$

kde $p_3(J_1, J_2)$ je podmienená pravdepodobnosť javu J_3 za hypotézy, že nastanú oba javy J_1, J_2, lebo jav, ktorého pravdepodobnosť hľadáme, je v tom, že nastanú súčasne oba javy J_{12} a J_3, kde J_{12} má ten istý význam ako vo vete IV. Teda hľadaná pravdepodobnosť sa rovná súčinu $p_{12} \cdot p_3(J_1, J_2)$, kde p_{12} je pravdepodobnosť javu J_{12}, ktorá sa rovná výrazu (6). Z toho plynie (7).

Hovoríme, že náhodný jav J_2 je **nezávislý** od náhodného javu J_1, ak podmienená pravdepodobnosť javu J_2 za hypotézy J_1 sa rovná nepodmienenej pravdepodobnosti tohože javu J_2. Ak k, h, h_2, h_{12} majú ten istý význam ako na str. 71, potom podľa (1) a (4) nezávislosť javu J_2 od javu J_1 je vyjadrená podmienkou

$$\frac{h_2}{k} = \frac{h_{12}}{h_1},$$

ktorú môžeme napísať aj v tvare

$$k \cdot h_{12} = h_1 \cdot h_2.$$

Z tohto tvaru podmienky vidno, že **keď jav J_2 je nezávislý od javu J_1, je aj jav J_1 nezávislý od javu J_2**; hovoríme tiež, že oba javy J_1, J_2 sú od seba nezávislé.

Pre nezávislé javy znie veta IV jednoducho takto:

IV′. Ak sú p_1, p_2 pravdepodobnosti dvoch nezávislých javov J_1, J_2, je pravdepodobnosť, že oba javy J_1, J_2 nastanú súčasne, rovná súčinu p_1p_2.

S nezávislými javmi sa stretávame najmä pri opakovaných pokusoch. Nech sú pri určitom druhu pokusov nejakým spôsobom definované náhodné javy J_1, J_2, J_3, ... a nech p_1, p_2, p_3, ... sú ich pravdepodobnosti. Myslime si teraz, že urobíme ľubovoľný počet n pokusov a označme P_n pravdepodobnosť toho, že pre každé k od jednej až po n pri k-tom pokuse nastane jav J_k. Zrejme

$$P_1 = p_1. \tag{8}$$

Na druhej strane, keď urobíme ešte $(n+1)$-ý pokus, je pravdepodobnosť toho, že pri $(n+1)$-om pokuse nastal jav J_{n+1}, zrejme nezávislá od akejkoľvek hypotézy, týkajúcej sa predchádzajúcich n pokusov. Z toho plynie podľa vety IV′, že

$$P_{n+1} = P_n \cdot p_{n+1}. \tag{9}$$

Na základe (8) a (9) sa ľahko dokáže matematickou indukciou, že pre každé n je

$$P_n = p_1p_2 \ldots p_n. \tag{10}$$

Všimnime si najmä ten prípad, že všetky javy J_1, J_2, ... sú totožné. Potom z (10) plynie: **Pravdepodobnosť, že v každom z n urobených pokusov nastane jav J, ktorého pravdepodobnosť je p, rovná sa p^n.** Z toho vyplýva: Pravdepodobnosť, aby pri nijakom z urobených n pokusov nenastane jav J, ktorého pravdepodobnosť je p, sa rovná $(1-p)^n$. To, že pri nijakom pokuse nenastane jav J, znamená to isté, ako to, že pri každom pokuse nastane jav opačný k javu J, ktorého pravdepodobnosť je $1-p$. Všeobecnejšie platí:

V. Nech je p pravdepodobnosť náhodného javu J. Nech $0 \leqq k \leqq n$ (n je prirodzené číslo, k prirodzené číslo alebo nula). **Pravdepodobnosť, že pri n urobených pokusov jav J nastane práve k-krát, sa rovná**

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Dôkaz. Pre $k = n$ a pre $k = 0$ je veta už dokázaná. Jav, ktorého pravdepodobnosť máme počítať, sa rozpadá na $\binom{n}{k}$ čiastočných javov odpovedajúcich $\binom{n}{k}$ kombináciám k-tej triedy z n pokusov; čiastočný jav je to, že jav J nastane pre každý pokus, patriaci do zvolenej kombinácie, a súčasne nenastane pre nijaký pokus, nepatriaci do zvolenej kombinácie. Pravdepodobnosť každého čiastočného javu sa rovná súčinu (10), v ktorom k činiteľov (patriacich do zvolenej kombinácie) sa rovná p, kým ostatní činitelia sa rovnajú $1 - p$, takže pravdepodobnosť čiastočného javu je $p^k (1 - p)^{n-k}$. Všetky čiastočné javy sa navzájom vylučujú, a preto podľa vety I′ hľadaná pravdepodobnosť sa rovná súčtu $\binom{n}{k}$ sčítancov, všetkých rovných $p^k (1 - p)^{n-k}$, t. j. sa rovná

$$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Cvičenia na opakovanie.

201. Aká je pravdepodobnosť, že pri hre dvoma kockami padne súčet 5 alebo 6?
202. Aká je pravdepodobnosť, že pri hre troma kockami nepadne ani súčet 10 ani 11?
203. Z hry 32 karát bolo náhodne rozdané 7 karát. Aká je pravdepodobnosť, že medzi nimi: a) nie je nijaké eso; b) je aspoň jedno eso; c) je najviac jedno eso; d) sú aspoň dve esá?
204. V tombole je 100 žrebov a 10 výher. a) Mám 2 žreby, aká je pravdepodobnosť, že vyhrám aspoň na jeden? b) Ako je to, keď mám 3 žreby? c) Akú by som mal pravdepodobnosť, že vyhrám aspoň na jeden žreb, keby som ich mal 10?
205. V mešci je 8 guľôčok modrých, 10 červených, 12 zelených. Aká je pravdepodobnosť, že vytiahnem odtiaľ 3 guľôčky a) rovnakej farby, b) dvojakej farby, c) trojakej farby?
206. Aká je pravdepodobnosť, že pri hre s troma kockami padne súčet deliteľný dvoma alebo troma?
207. Ak je p_1 pravdepodobnosť, že nastane jav J_1, p_2 pravdepodobnosť, že nastane jav J_2, p_{12} pravdepodobnosť, že nastanú oba javy, potom pravdepodobnosť p, že nastane jav J_1 alebo jav J_2, sa rovná výrazu $p = p_1 + p_2 - p_{12}$. Dokážte.
208. Aká je pravdepodobnosť, že pri dvoch hodoch dvoma kockami padne a) najprv párne a potom nepárne číslo, b) raz párne a raz nepárne číslo?
209. Aká je pravdepodobnosť, že pri hre s kockou padne a) pri prvom hode 6 a pri druhom hode iné číslo, b) raz číslo 6 a raz iné číslo?
210. Aká je pravdepodobnosť, že pri dvoch hodoch kockou padne a) aspoň jedna šestorka, b) najviac jedna šestorka, c) práve jedna šestorka?
211. Ak sú J_1, J_2 dva javy, ktoré sú navzájom nezávislé a ktorých pravdepodobnosti sú p_1, p_2, potom pravdepodobnosť, a) že nastane práve jeden z oboch javov, je $p_1 + p_2 - 2p_1p_2$; b) že nastane aspoň jeden z oboch javov, je $p_1 + p_2 - p_1p_2$; c) že nastane nanajvýš jeden, je $1 - p_1p_2$; d) že nenastane nijaký, je $1 - p_1 - p_2 + p_1p_2$. Dokážte.

212. Ak sú J_1, J_2, J_3 tri javy, ktoré sú navzájom nezávislé a ktorých pravdepodobnosti sú p_1, p_2, p_3, potom pravdepodobnosť, a) že nastane práve jeden z nich, je $p_1 + p_2 + p_3 - 2p_1p_2 - 2p_1p_3 - 2p_2p_3 + 3p_1p_2p_3$; b) že nastanú práve dva, je $p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - 3p_1p_2p_3$; c) že nastane aspoň jeden, je $p_1 + p_2 + p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 + p_1p_2p_3$; d) že nastanú aspoň dva, je $p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - 2p_1 p_2 p_3$; e) že nenastane nijaký, je $1 - p_1 - p_2 - p_3 + p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - p_1p_2p_3$; f) že nastane najviac jeden, je $1 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 + 2p_1p_2p_3$; g) že nastanú najviac dva, je $1 - p_1p_2p_3$.

213. V predajni sa vysypalo 10 párov rovnakej obuvi zo škatúľ. Predavačka ich náhodne zasa urovnala do škatúľ. Aká je pravdepodobnosť, že v každej škatuli je jedna pravá a jedna ľavá topánka?

214. 5 mužov a 10 žien má utvoriť skupiny po troch. Aká je pravdepodobnosť, že pri celkom náhodnom soskupení bude v každej skupine práve jeden muž?

215. Dvaja priatelia, A a B, si dohovorili túto hru s jednou kockou: vyhráva ten, komu prv padne šestorka, pričom hádzať začne A. Akú pravdepodobnosť má každý z oboch hráčov, že vyhrá a) pri prvom hode, b) pri druhom hode, c) pri niektorom z prvých troch hodov, d) vôbec?

216. Na jednej hromádke je 20 orechov, z ktorých sú 2 červivé; na druhej hromádke je 19 orechov, z ktorých sú tri červivé. Jeden orech z prvej hromádky bol preložený na druhú. Keď vezmem teraz z druhej hromádky jeden orech, aká je pravdepodobnosť, že nebude červivý?

217. a) Vo vrecku mám štyri mince, nie je známe aké; je možné, že medzi nimi je alebo jediná koruna alebo dve alebo tri alebo štyri alebo tiež nijaká, a predpokladáme, že všetky tieto monžosti sú rovnako pravdepodobné. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vytiahnutá minca je koruna? b) Urobte tú istú úvahu pre n mincí.

218. Ak je p_1 pravdepodobnosť javu J_1, p_2 pravdepodobnosť javu J_2, p_{12} pravdepodobnosť, že nastanú oba javy súčasne, potom podmienená pravdepodobnosť javu J_1 za hypotézy J_2 je $p_1(J_2) = \frac{p_{12}}{p_2}$ a podmienená pravdepodobnosť javu J_2 za hypotézy J_1 je $p_2(J_1) = \frac{p_{12}}{p_1}$. Dokážte.

219. Keď hádžeme kockou, aká je pravdepodobnosť, že pri desiatich hodoch padne šestorka a) práve raz, d) práve dvakrát, c) práve trikrát, d) práve štyrikrát, e) práve päťkrát, f) práve šesťkrát, g) práve sedemkrát, h) práve osemkrát, i) práve deväťkrát, j) práve desaťkrát, k) vôbec nepadne?

220. Pravdepodobnosť, že niektorý deň bude pršať, je $\frac{1}{2}$. Aká je pravdepodobnosť, že zo siedmich dní budú aspoň 3 dni bez dažďa?

221. Aká je pravdepodobnosť, že pri piatich hodoch troma kockami padne súčet 12 a) aspoň dvakrát, b) najviac dvakrát?

222. Koľkokrát treba hodiť dvoma kockami, aby pravdepodobnosť, že padne aj súčet 12, bola väčšia ako a) 0,5, b) 0,7, c) 0,9?

223. a) Keď hádžeme kockou 90-krát, pre aký počet šestoriek dostaneme najväčšiu pravdepodobnosť? b) Ktorá je tá pravdepodobnosť? c) Odhadnite pravdepodobnosť pre prípad, že počet, koľkokrát padne šestorka, odchýli sa od najpravdepodobnejšieho počtu najviac o 7%.

224. a) Pri 900 vrhoch kockou má najväčšiu pravdepodobnosť prípad, že šestorka padne 150-krát. Vypočítajte túto pravdepodobnosť tak, že

použijete približný vzorec $n! \doteq \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} \cdot n^n$, kde π je Ludolfovo číslo a $e \doteq 2{,}71828$ je základ prirodzených logaritmov. b) Odhadnite pravdepodobnosť pre prípad, že počet, koľkokrát padne šestorka, odchýli sa od najpravdepodobnejšieho počtu najviac o 7%, a porovnajte s výsledkom predchádzajúceho cvičenia.

225. Ak opakujeme pokus r-krát, je isté, že sa podarí alebo 0-krát, alebo raz alebo dvakrát atď. až r-krát. Z toho môžeme dokázať binomickú vetu. Urobte to!

VÝSLEDKY CVIČENÍ.

I. Postupnosti.

1. a) 1, 1, 1, . . ., 1; b) 0, -1, -2, . . ., -9; c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{10}{11}$; d) 2, 6, 12, . . ., 110; e) 0, 1, 0, . . ., 1; f) $1 + i$, 0, $1 - i$, 2, . . ., 0. — **2.** a) 1, 2, 3, . . ., 10; b) $a, a^2, a^3, \ldots, a^{10}$; c) 0, 0, 0, . . ., 0; d) 1, i, -1, $-i$, . . ., i; e) a, $a + d$, $a + 2d, \ldots, a + 9d$; f) $a, aq, aq^2, \ldots, aq^9$; g) 1, 2, 1, -1, -2, -1, . . ., -1; h) 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985. — **3.** a) na; b) a^n; c) $\frac{n}{n+1}$; d) $\frac{n+1}{n}$; e) $(-1)^{n-1}$; f) $3n - 2$; g) 2^{n-1}; h) $2 \cdot (-3)^{4-n}$. — **4.** a) $(-1)^{n-1}$; b) n; c) -1; d) $a + (n-1)d$; e) q^{n-1}; f) $\frac{1}{2}[1 + (-1)^{n-1}]$. — **5.** a) $a_{n+1} = a_n$; b) $a_{n+1} = a_n - 1$; c) $a_{n+1} = -a_n$; d) $a_{n+1} = a_n + d$; e) $a_{n+1} = a_n \cdot q$; f) $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$; g) $a_{n+1} = 2 - a_n$. — **6.** a) $a_{n+2} = a_n$; b) $a_{n+2} = a_n - 4$; c) $a_{n+2} = a^2 \cdot a_n$; d) $a_{n+2} = 2 - a_n$. — **7.** a) Rastúci pre $x > 0$, klesajúci pre $x < 0$; b) rastúci pre $x > 1$, klesajúci pre $0 < x < 1$. — **8.** Spočítajte výraz pre a_{n+1} a pre a_n. — **9.** Uvedomte si, že $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$; $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. — **10.** Z rovníc $1 = k(x - y)$, $1 = k(x^2 - y^2)$, $2 = k(x^3 - y^3)$ vypočítajte k, x, y; ďalej pozri cvič. 9.

11. a) Spočítajte výraz pre a_{n+3} a pre a_{n+2}; b) Užite dvakrát po sebe výsledok a). — **12.** Z rovníc $1 = k(x - y)$, $1 = k(x^2 - y^2)$, $0 = k(x^3 - y^3)$ vypočítajte k, x, y; výsledok $a_n = \frac{i}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right]$. Presvedčte sa, že skutočne $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$. — **13.** a) 3, 5, 7, . . ., 21; b) 2, $1\frac{1}{2}$; 1, . . ., $-2\frac{1}{2}$; c) -3, $-2,6$, -2, 2, . . ., 0, 6; d) 0, -1, -2, . . ., -9. — **14.** a) 2, 5, 8, . . ., 29; b) 15, 8, 1, . . ., -48; c) $-2,2$, $-1,4$, $-0,6$, . . ., 5; d) 3, 7, 11, . . ., 39; e) 18, 15, 12, . . ., -9. — **15.** a) -23; b) -10; c) 6; d) -2. — **16.** a) $1 + 3n$; b) $-2n$; c) $12n - 53$; d) $40 - 3n$; e) $0,1n - 9$. — **17.** a) $\frac{1}{2}, \frac{9}{2} + \frac{1}{2}n$; b) $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}n$; c) $\frac{1}{90}, \frac{1}{90}n + \frac{8}{9}$; d) $-\frac{3}{19}, \frac{98}{19} - \frac{3}{19}n$; e) $\frac{y-x}{s-r}, \frac{sx - ry}{s-r} + \frac{y-x}{s-r} \cdot n$. — **18.** a) 165; b) 10; c) $42\frac{1}{2}$; d) 0. — **19.**

a) 14; b) 45; c) 1 414. — 20. 1, 9, 17, 25, 33; $8n-7$. —
21. a) $4-n, \frac{7}{2}n-\frac{1}{2}n^2$; b) $\frac{17}{3}+\frac{1}{3}n, \frac{35}{6}n+\frac{1}{6}n^2$; c) $\frac{3}{2}n-3, \frac{3}{4}n^2-\frac{9}{4}n$. — 22. a) Keď $S_{n+1} > S_n$ čiže $a_{n+1} > 0$ pre každé (prirodzené) n, t. j. keď $d > 0$, $a_1 > -d$; b) keď $d < 0$, $a_1 < -d$. — 23. $r - \frac{x-y}{d}$; úloha má jediné riešenie, keď $d \neq 0$ a $x - y = ds$, kde s je celé číslo menšie ako r. — 24. $2s : (a + x)$; úloha má riešenie, keď $a + x \neq 0$, $s \neq 0$, obidve tieto čísla majú to isté znamenie a podiel $2s : (a + x)$ je celé číslo. — 25. 10. — 26. $a_1 = \frac{2s}{r} - x$, $d = \frac{2(rx-s)}{r(r-1)}$; úloha má riešenie pokiaľ $r \neq 1$. — 27. $a_1 = \frac{r(r-1)y - s(s-1)x}{rs(r-s)}$, $d = \frac{2(sx-ry)}{rs(r-s)}$, $a_r = \frac{s(2r-s-1)x - r(r-1)y}{rs(r-s)}$, $a_s = \frac{s(s-1)x - r(2s-r-1)y}{rs(r-s)}$; $r \neq s$. — 29. $(n+1)$-á priamka pretína každú z predchádzajúcich n priamok, ktoré ju teda rozdelia na $n+1$ častí; $A_n = 2+2+3+4+\ldots+n = 1+\frac{1}{2}n(n+1)$. — 30. a) 3, 6, 12, ..., 1 536; b) 1, -1, 1, ..., -1; c) -437, 4, -145, 8, -48, 6, ..., $-\frac{1}{45}$; d) -1, $-\sqrt{2}$, -2, ..., $-16\sqrt{2}$; e) 3, $3+3i$, $6i$, ..., $48+48i$. —
31. a) $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}$, ..., 32; b) 625, -125, 25, ..., $-0{,}00032$; c) -512, -256, -128, ..., -1; d) 512, 768, 1 152, ..., 19 683; e) 300 000, $-30\,000$, 3 000, ..., $-0{,}0003$; f) $1-i$, $1-i$, $-1+i$, ..., $-1-i$. — 32. a) 32; b) -7; c) $-25{,}6$; d) 5. — 33. a) $0{,}6 \cdot 5^n$; b) $(-2)^n$; c) $-\frac{1024}{81}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^n$; d) $(-i)^n$. — 34. a) $\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2^{n-1}}$ alebo $-\sqrt{2}, \frac{1}{2}(-\sqrt{2})^{n-1}$; b) i, i^n alebo $-i$, $(-i)^n$; c) 2, $\frac{1}{2}\cdot 2^n$ alebo -2, $-\frac{1}{2}\cdot(-2)^n$ alebo $2i$, $-\frac{1}{2}i\cdot(2i)^n$ alebo $-2i$, $\frac{1}{2}i\cdot(-2i)^n$. —
35. a) 1 023; b) 14 762; c) $121(1+\sqrt{3})$; d) 50 alebo 0. — 36. 1,9375, 1,99805, 1,99999809, 1,9999999999999983. — 37. $2^{24}-1$. — 38. a) $4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n - 4$; b) $5[(-1)^n - 1]$; c) $123\frac{37}{81}\cdot(1-0{,}9^n)$. — 39. a) je $a_1q^n > 0$ pre každé (prirodzené) n, t. j. pre $a_1 > 0$, $q > 0$; b) $a_1 < 0$, $q > 0$. — 40. $r - (\log|x| - \log|y|) : \log|q|$ pre $|q| \neq 1$; úloha má riešenie, keď $x : y = q^s$, kde $s < r$ je celé číslo. —
41. 6. — 42. 19 683, $-6\,561$, 2 187, ..., -9. — 43. 8. — 44. $\frac{\sin\frac{1}{2}ra\cos\frac{1}{2}(r+1)a}{\sin\frac{1}{2}a}$, $\frac{\sin\frac{1}{2}ra\sin\frac{1}{2}(r+1)a}{\sin\frac{1}{2}a}$. — 45. a) $\frac{\sin 2na}{2\sin a}$; b) $\frac{\sin^2 na}{\sin a}$. — 46. a) 61,1%; b) 14,9%. — 47. Za 35 rokov. — 48. 0,96%. — 49. a) 9 804 Kčs; b) 9 423 Kčs. — 50. 53 050 Kčs. —
51. a) 22,7%; b) 13 alebo 14. — 52. a) 627 mm; b) 19 070 $(\log b_0 - \log b_1)$ m; c) 11,3%. — 53. 258,7, 290,3, 325, 9, 345,3, 387,5, 435,0, 488,3,

517,3. — **54.** a) 4,5%; b) po 15 kyvoch. — **55.** $Kpm : [1\,200 + p\,(12 - m)]$. — **56.** 895,30 Kčs. — **57.** 117 230 Kčs. — **58.** 8 982,60 Kčs. — **59.** 1 113 Kčs. — **60.** 6,72%. —

61. 19 190 m³. — **62.** Za 29 rokov, posledná splátka je 3 593 Kčs. — **63.** 5 091 Kčs. — **64.** Zvýšilo by 9 181 Kčs. —

65. $p_n = p_0\left[\frac{V}{V+P}\left(\frac{R}{R+V+P}\right)^n + \frac{P}{V+P}\right]$; b) 281 mm, 13,3 mm; c) 7,3 mm. — **69.** — V čísle b) $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n = n(n+1)(n^2 + n + 1)$; c) $n^6 + 3n^5 + 5n^4 + 5n^3 + 3n^2 + n = n(n+1)(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1)$ je vždy jeden z činiteľov deliteľný dvoma a jeden troma. — **70.** Použite vzťah a) $a^{n+1} - b^{n+1} = a^n(a-b) + b(a^n - b^n)$; b) $a^{n+2} + b^{n+2} = a^n(a^2 - b^2) + b^2(a^n + b^n)$. —

71. Prvý krok pre $n = 3$. — **72.** Prvý krok pre $n = 2$. — **73.** Prvý krok pre $n = 3$. — **74.** a) $a_{n+1}a_{n+3} - a_{n+2}{}^2 = a_{n+1}(a_{n+2} + a_{n+1}) - (a_{n+1} + a_n)\,a_{n+2} = a_{n+1}{}^2 - a_na_{n+2}$; b) $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = a_{n+2} - 1 + a_{n+1} = a_{n+3} - 1$. — **75.** a) $s_{n+1} = s_n + (n+1)\,x^{n+1}$; b) $s_{n+1} = s_n + \sin\,(n+1)\,a$. —

II. Limity.

76. a) $x < -4{,}5$; b) $x \geqq \frac{5}{6}$; c) splnené pre každé x; d) nemá riešenie. — **77.** a) $0{,}3 < x < \frac{4}{7}$; b) $x < -2$; c) nemá riešenie. — **78.** a) $x > \frac{2}{3}$ alebo $x < \frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$; c) pre každé x; d) pre nijaké x. — **79.** a) $4 < x < 12$; b) $5{,}2 \leqq x < 7$; c) $x > 1$ alebo $x < -1$; d) $2 - \sqrt{3} < x < 1$, alebo $3 < < 3 < 2 + \sqrt{3}$; e) $x > 4$ alebo $3 < x \leqq 3\frac{3}{7}$. — **80.** Vyjdite z nerovnosti $(a-b)^2 \geqq 0$.

81. Platí $1 \geqq 1 - x^2$. — **82.** Z nerovnosti $a \geqq b$ plynie $2a \geqq a + b$; $(a-b)^2 \geqq 0$ a vtedy aj $(a+b)^2 \geqq 4ab$; ďalej $2a \geqq a + b$. Rovnosť nastane na všetkých miestach súčasne vtedy a len vtedy, keď $a = b$. — **83.** a) Z nerovnosti $a^n > 1$ plynie $a^{n+1} > a > 1$; b) z nerovnosti $a^n < 1$ plynie $a^{n+1} < a < 1$ a z nerovnosti $a^n > 0$ plynie $a^{n+1} > 0$. — **84.** $(1+x)^{n+1} \geqq (1+nx)(1+x) \geqq 1 + (n+1)\,x$; rovnosť nastane buď pre $x = 0$, buď pre $n = 1$. — **85.** a) $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geqq 2n \geqq n + 1$; b) $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2$, ale $n \geqq 5$, preto $n^2 \geqq 5n = 2n + 3n > 2n + 1$, lebo $3n > 1$, takže $2n^2 > n^2 + 2n + 1$; c) $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^3$, ale $n \geqq 10$, preto $n^3 \geqq 10n^2 = 3n^2 + 7n^2 > 3n^2 + 3n + 1$, lebo $7n^2 \geqq 70n > 3n + 1$, takže $2n^3 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. — **86.** a) Každé x (rozoznávajte prípady: $x \geqq -1$, $x < -1$); b) žiadne x; c) $x < -\frac{1}{2}$; d) $x > -\frac{1}{2}$. — **87.** a) $x \geqq \frac{1}{2}$ (rozoznávajte prípady: $x \geqq 0$, $-1 \leqq x < 0$, $x < -1$); b) $-1 \leqq x \leqq 1$; c) $x > 1$ alebo $x < 0$; d) pre žiadne x; e) $0 < x \leqq 2$. — **88.** a) $-1 < x \leqq 1$ alebo $-5 < < x < -3$; b) $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$. — **89.** a) $\frac{3}{4}$ alebo $-\frac{3}{4}$; b) 1. — **90.** $\frac{3}{2}$ a $-\frac{1}{2}$ alebo $-\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{2}$ alebo $\frac{1}{2}$ a $-\frac{3}{2}$ alebo $-\frac{3}{2}$ a $\frac{1}{2}$. —

91. $x > \frac{1}{2}$ alebo $-\frac{3}{2} < x < -1$ alebo $x < -3$. — **92.** Treba dokázať:

[1] z podmienky $|x - a| < b$ plynie $a - b < x < a + b$; [2] z podmienky $a - b < x < a + b$ plynie $|x - a| < b$. — **93.** Použijú sa vzťahy a) $|x + y| \leqq |x| + |y|$; b) $|xy| = |x| \cdot |y|$. — **94.** Položte $a + b = x$, $b = y$ a rozoznávajte prípady: [1] $|x| \geqq |y|$, [2] $|x| < |y|$. — **95.** Podľa cvič. 94 $|x - a| \geqq |x| - |a|$ a zároveň $|x - a| \geqq |a| - |x|$. — **96.** a) Vnútro kruhu o strede [0] a polomere 1; b) vonkajšok kruhu o strede [2] a polomere $\sqrt{3}$; c) vnútrajšok medzikružia o strede [4] obmedzeného kružnicami o polomeroch 1 a 2; d) os úsečky s krajnými bodmi [0] a [—1]; e) ľavá polrovina obmedzená osou poradníc. — **97.** a) $\frac{3}{2} - 2i$; b) $\frac{3}{4} + i$. — **98.** Použite nerovnosť (4). — **99.** $||a_n|| = |a_n|$. — **100.** Z nerovnosti $|a_n| < K$, $|b_n| < H$ plynie $|ra_n + sb_n| \leqq |ra_n| + |sb_n| < |r| \cdot K + |s| \cdot H$. —

101. Ak je $|q| \leqq 1$, je $|q|^n \leqq 1$ (cvič. 83) a aj $|q^n| \leqq 1$ (cvič. 93b). — **102.** Ak je $|a_n| < K$ a ak je $|b_n| \leqq |a_n|$ pre každé $n > r$, je $|b_n| < H$, kde H je väčšie než najväčšie z čísel $|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_n|, K$. — **103.** Ak je r najväčší index, pre ktorý ešte $a_r \neq b_r$, potom $a_n = b_n$ pre každé $n > r$. — **104.** $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$; ak zvolíme ľubovoľné číslo $k > 0$, je $\left|\frac{1}{n}\right| < k$ pre každé $n > \frac{1}{k}$. — **105.** $||a_n|| = |a_n|$. — **106.** a) Postupnosti $\{ra_n\}$, $\{sb_n\}$ sú nulové (veta VIII), preto aj $\{ra_n + sb_n\}$ je nulová (veta VI); b) Postupnosť $\{b_n\}$ je ohraničená (veta V), $\{a_n b_n\}$ je teda nulová (veta VII). — **107.** Ak si zvolíme ľubovoľné kladné číslo k, existuje taký index r, že $|a_n| < k$ pre všetky $n > r$. Označme K ľubovoľné číslo väčšie než najväčšie z čísel $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_r|, k$; potom $|a_n| < K$ pre všetky n. — **108.** Postupnosť $\{a_n\}$ je ohraničená (veta V). [1] $\{a^2{}_n\} = \{a_n \cdot a_n\}$ je nulová (veta VII). [2] Ak je $\{a^r{}_n\}$ nulová, je $\{a_n{}^{r+1}\} = \{a^r{}_n \cdot a_n\}$ tiež nulová (veta VII). — **109.** a) Keď zvolíme kladné číslo K akokoľvek, existuje taký index n, že $|a_n| \geqq K$. b) Ku každému prirodzenému číslu r existuje taký index $n > r$, že $|a_n| \geqq k$. c) Existuje také kladné číslo k, že ku každému prirodzenému číslu r existuje taký index $n > r$, že $|a_n| \geqq k$. — **110.** Ak existuje také kladné číslo K, že $|a_n| < K$ pre všetky n, potom $\left|\frac{1}{a_n}\right| > \frac{1}{K}$ pre všetky n. —

111. Ak pre každé kladné číslo k platí $|a_n| < k$ pre skoro všetky n, potom $\left|\frac{1}{a_n}\right| > \frac{1}{k}$ pre skoro všetky n. — **112.** Ak je $|a_n| < k$ pre všetky $n > r$ a ak je $|b_n| \leqq |a_n|$ pre všetky $n > s$, potom $|b_n| < k$ pre všetky n, ktoré sú väčšie než väčšie z čísel r a s. — **113.** $|a_n - a| \geqq ||a_n| - |a||$ (cvič. 94). — **114.** $\lim (ra_n + sb_n) = \lim ra_n + \lim sb_n = r \lim a_n + s \lim b_n$. — **115.** $\lim a_n{}^{r+1} = \lim (a_n{}^r \cdot a) = \lim a_n{}^r \cdot \lim a_n$. — **116.** Pre $r = 0$ je $\{a_n{}^o - 1\}$ nulová postupnosť. Pre $r < 0$ je $-r = s > 0$ a $\lim a_n{}^s = a^s$. Potom $\lim a_n{}^r = \lim \frac{1}{a_n{}^s} = \frac{1}{a^s} = a^r$. — **117.** Pozri cvič. 104. — **118.** $a_n - r = 0$ pre skoro všetky n; keď zvolíme akokoľvek kladné číslo k, je $|a_n - r| < k$ pre skoro všetky n. — **119.** Keď zvolíme kladné číslo k akokoľvek, existuje taký index r, že $|a_n - a| < k$ pre všetky $n > r$. Nech s je najväčší index, pre ktorý $a_s \neq b_s$, ale $a_n = b_n$ pre všetky $n > s$. Potom $|b_n - a| < k$ pre všetky n, ktoré sú väčšie než väčšie z oboch čísel r, s. — **120.** Utvorme postupnosť c_n, kde $c_n = \frac{1}{b_n}$ pre také n, pre ktoré je $b_n \neq 0$; pre to n, pre ktoré je $b_n = 0$, volíme $c_n \neq 0$ ľubovoľne. Je $c_n \neq 0$ pre každé n a pre to n, pre ktoré je $a_n \neq 0$, je $c_n = a_n$. Je teda $c_n \neq a_n$ nanajvýš pre konečný počet členov. Preto $\lim c_n = \lim a_n = a$ (cvič. 119) a $\lim \frac{1}{c_n} = \frac{1}{a}$ (veta VI). Ale $\frac{1}{c_n} \neq$ $\neq b_n$ tiež nanajvýš pre konečný počet členov; preto $\lim b_n = \lim \frac{1}{c_n} = \frac{1}{a}$ (cvič. 119).

121. a) 1; b) $\frac{a}{c}$; c) 1; d) 1; e) $\frac{2}{3}$; f) 0. — **122.** Označme $\lim a_n = a$, $\lim b_n =$ $= b$; potom postupnosť $\{(a_n - a) - (b_n - b)\} = \{(a_n - b_n) - (a - b)\}$ je nulová, pričom $a - b > 0$. To znamená, že pre každé kladné k je $|(a_n -$ $- b_n) - (a - b)| < k$, čiže $a_n - b_n > a - b - k$ pre skoro všetky n (pozri cvič. 92). Zvoľme kladné $k < a - b$. Potom $a_n - b_n > 0$ pre skoro všetky n. — **123.** Keby bolo $a > b$, bolo by $a_n > b_n$ pre skoro všetky n (cvič. 122). — **124.** Pre $|x| < 1$ a pre $x = 1$; ak je $|x| < 1$, je $\lim x^n = 0$ (veta IV čl. 3), ak je $x = 1$, je $\lim x^n = 1$ (veta VIII čl. 4). — **125.** a) 3; b) diverguje; c) $-\frac{2}{9}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1$; e) diverguje; f) diverguje; g) $1 - i$; h) diverguje. — **126.** a) $|x| < 1$, $x : (1 - x)$; b) $|x| > 1$, $x : (x + 1)$; c) $x = 0$, 0; d) pre každé x, $-2x$. — **127.** a) $x \neq \frac{1}{2}(2k - 1)\pi$, k celé; $1 : (1 - \sin x)$; b) $\frac{1}{4}(4k - 1)\pi < \frac{1}{4}(4k + 1)\pi$, k celé; $\sin x : \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$; c) diverguje pre každé x; d) $|x| < 2\sqrt{2}$; $\frac{3}{17}(4 + ix)$. — **128.** Rovnice $a = c + u$, $10u = c_1 + u_1$, $10u_1 = c_2 + u_2, \ldots, 10u_{n-1} = c_n + u_n$ násobíme postupne číslami $10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-n}$ a spočítajme. Ak je $a_n = c, c_1 c_2 \ldots c_n$, je $a - a_n < 10^{-n}$. — **129.** Rovnice $a = d + v$, $10v = d_1 + v_1$, $10v_1 =$ $= d_2 + v_2, \ldots, 10v_{n-1} = d_n + v_n$ násobíme postupne číslami $10^0, 10^{-1}$, $10^{-2}, \ldots, 10^{-n}$ a spočítajme. Ak je $b_n = d, d_1 d_2 \ldots d_n$, je $a - b_n \leq 10^{-n}$. — **130.** [1] Ak je $a = c + u = d + v$, je $c - d = v - u$ celé číslo. Ak je $u \neq 0$, nie je u celé, nie je teda ani v celé, t. j. $v \neq 1$. Pretože $0 < u < 1$, $0 < v < 1$, je $-1 < v - u < 1$; tomu vyhovuje jediné celé číslo $v - u =$ $= 0$. Potom $c = d$. [2] Ak je $u_n = v_n$, je $c_{n+1} + u_{n+1} = d_{n+1} + v_{n+1}$, takže $c_{n+1} - d_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$ je opäť celé číslo. Pretože $u_{n+1} \neq 0$, preto aj $v_{n+1} \neq 1$, takže $-1 < v_{n+1} - u_{n+1} < 1$. Preto $v_{n+1} - u_{n+1} =$ $= 0$, $c_{n+1} = d_{n+1}$. —

131. Ak je $u_{k-1} \neq 0$, je na ľavej strane rovnice $c_{k-1} + u_{k-1} = d_{k-1} +$ $+ v_{k-1}$ (cvič. 130) číslo, ktoré nie je celé, preto na pravej strane musí byť číslo, ktoré nie je celé, t. j. $v_{k-1} \neq 1$. Ak je $u_k = 0$, potom v rovnici $c_k +$ $+ u_k = d_k + v_k$ je na ľavej strane celé číslo, preto musí byť i na pravej strane celé číslo, t. j. $v_k = 1$. Je teda $c_k = d_k + 1$. Potom pre každé $n > k$ je $c_n + u_n = 0$, z čoho plynie $c_n = 0$, $u_n = 0$; $d_n + v_n = 10$, $d_n = 9$, $v_n = 1$. — **133.** a) $\frac{7}{12}$; b) $\frac{5}{22}$; c) $\frac{7}{27}$ — **134.** Predpokladajme, že v zlomku $\frac{x}{y}$ sú x, y celé čísla také, že $0 < x < y$. Ak je rozvoj zlomku rýdzo periodický s h-cifernou periódou q, dostaneme pri delení $x : y$ po pripísaní h núl k delencu podiel q a zvyšok x, t. j. $10^h \cdot x = qy + x$. Odtiaľ $\frac{x}{y} = \frac{q}{10^h - 1}$. Číslo

$10^h - 1$ nie je deliteľné prvočíslom 2 alebo 5. Ak je rozvoj nerýdzo periodický s k-ciferným predperiodím p a s h-cifernou periódou q, dostaneme po pripísaní k-núl k delencu podiel p a zvyšok z a po pripísaní h núl ku zvyšku z podiel q a opäť aj zvyšok z, t. j. $10^k \cdot x = py + z$, $10^h \cdot z = qy + z$. Odtiaľ $\frac{x}{y} = \frac{p}{10^k} + \frac{q}{10^k(10^h - 1)}$. Pretože $0 < p < 10^k$, po skrátení treba prvý zlomok uviesť na tvar $\frac{p}{10^k} = \frac{r_1}{s_1}$, kde $s_1 \neq 1$ obsahuje len prvočísla 2 alebo 5 (vo vhodných mocninách); vedľa toho je $0 < q < 10^h$, a pretože q nie je zložené zo samých deviatok (pozri cvič. 132), je dokonca $q < 10^h - 1$; po skrátení treba teda druhý zlomok uviesť na tvar $\frac{q}{10^k(10^h - 1)} = \frac{r_2}{s_2 t}$, kde s_2 je buď rovné jednej, buď obsahuje len prvočiniteľa 2 alebo 5 a $t \neq 1$ neobsahuje ani prvočiniteľa 2 ani 5. Potom $\frac{x}{y} = \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2 t} = \frac{1}{s}\left(\frac{r_1}{s_1'} + \frac{r_2}{s_2' t}\right)$, kde s je najväčší spoločný deliteľ čísel s_1 a s_2 a z čísel s_1', s_2' je aspoň jedno rovné jednej. Zlomky v zátvorkách majú nesúdeľných menovateľov, preto ich súčet nemôžeme krátiť a dospejeme k zlomku s menovateľom $s't$, ktorý obsahuje aspoň jedno z prvočísel 2 alebo 5 a aspoň jedno prvočíslo rôzne od 2 a od 5. — **135.** Ide o zlomky tvaru $\frac{x}{y} = \frac{q}{10^h - 1}$ (cvič. 134). a) Ak je $h = 1$, je $\frac{x}{y} = \frac{q}{9}$; k jednocifernej perióde vedú zlomky, ktoré v základnom tvare majú menovateľa 3 alebo 9 (lebo len tieto sa môžu písať s menovateľom 9). b) Ak je $h = 2$, je $\frac{x}{y} = \frac{q}{99}$; k dvojcifernej perióde vedú zlomky, ktoré v základnom tvare majú menovateľa 11 alebo 33 alebo 99 (lebo menovatelia 3 a 9 vedú k perióde jednocifernej). c) Pre $h = 3$ je $\frac{x}{y} = \frac{q}{999}$; k trojcifernej perióde vedú zlomky, ktoré v základnom tvare majú menovateľa 27, 37, 111, 333 alebo 999. d) k h-cifernej perióde vedú zlomky, ktorých menovatelia sú deliteľmi čísla $10^h - 1$, ale nie sú deliteľmi nijakého čísla tvaru $10^l - 1$, kde $l < h$. — **136.** Ide o zlomky tvaru $\frac{x}{y} = \frac{p(10^h - 1) + q}{10^k(10^h - 1)}$ (cvič. 134). Po skrátení musí v menovateli zostať aspoň jeden z prvočiniteľov 2 alebo 5 v mocnine práve k-tej; keby totiž bolo treba uviesť zlomok $\frac{x}{y}$ na tvar $\frac{x}{y} = \frac{p'(10^h - 1) + q'}{10^l(10^h - 1)}$, kde $l < k$, znamenalo by to, že $10^l \cdot x = p'y + \frac{q'y}{10^h - 1}$. Posledný člen je však celé číslo; označme ho z'. Je teda $10^l \cdot x = p'y + z'$, $q'y = (10^h - 1)z'$, čiže $10^h \cdot z' = q'y + z'$. To však značí, že zlomok $\frac{x}{y}$ vedie k predperiodiu l-cifernému proti predpokladu. — **137.** a) $\frac{q}{10^h - 1} + \frac{q}{10^k(10^h - 1)}$; b) $\frac{p}{10^k} = \frac{10^h \cdot p + q - p}{10^k(10^h - 1)}$. —

138. V oboch prípadoch sa tvoria variácie n-tej triedy r predmetov. — **139.** $4 + 4 \cdot V_1(4) + 4 \cdot V_2(4) + 4 \cdot V_3(4) + 4 \cdot V_4(4)$ alebo $4 + V_2(5) - V_1(4) + V_3(5) - V_2(4) + V_4(5) - V_3(4) + V_5(5) - V_4(4) = 260$. — **140.** $\frac{1}{2}(n-1)!$ —

141. 2. — **143.** a) 1; b) 2. — **146.** Počítajte, koľko permutácií vznikne, ak pridáme k r predmetom ešte ďalší predmet. — **147.** Keď meníme poradie rovnakých predmetov, nemení sa permutácia. — **148.** Koľko variácií s opakovaním má určitý pevne zvolený predmet na prvom mieste? — **149.** $V'_4(3) = V'_3(3)$ alebo $2 \cdot V'_3(3) = 54$. — **150.** a) $V'_2(6) = 36$; b) $V'_3(6) = 216$. —

151. $V'_6(2) - 1 = 63$. — **152.** $V'_1(2) + V'_2(2) + \ldots + V'_n(2) = 2(2^n - 1)$; 30. — **153.** $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$. — **154.** $\binom{n}{3} = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$. — **155.** $\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1 = \frac{1}{2}(n-k)(n+k-1) + 1$. — **156.** Môžu mať najviac $\frac{1}{2}\binom{n}{2}\left[\binom{n}{2} - 1\right] - n\binom{n-1}{2} = \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ ďalších priesečíkov. — **157.** a) $\binom{5}{3} = 10$; b) $\binom{4}{2} = 6$; c) $2\binom{10}{2} - 5\binom{6}{2} = 35$. — **158.** $\binom{r}{n}$. — **159.** a) Všetkých predmetov vo všetkých kombináciách dohromady je $n\binom{r}{n}$; každý predmet je v nich zastúpený v rovnakom počte. b) Ku každej kombinácii $(n-1)$-nej triedy môžeme pridať ktorýkoľvek z $r - (n-1)$ predmetov, ktoré v nej nie sú zastúpené; každú kombináciu n-tej triedy tak dostaneme celkove n-spôsobmi. — **160.** a) Z každej kombinácie n-tej triedy možno utvoriť $\binom{n}{m}$ skupín po m predmetov; celkom teda je $\binom{n}{m}\binom{r}{n}$ takých skupín, v každej je každá skupina zastúpená v rvonakom počte, a to $\binom{r}{m}$-krát; b) Ku každej kombinácii $(n-m)$-tej triedy možno pridať ktorúkoľvek skupinu m predmetov vybraných zo zvyšných $r - (n-m)$ predmetov; každú kombináciu n-tej triedy dostaneme toľkými spôsobmi, koľko možno utvoriť kombinácií m-tej triedy n prvkov, t. j. $\binom{m}{n}$ spôsobmi. —

161. a) Majme r predmetov, ktoré nazveme „biele", a s predmetov, ktoré nazveme „červené". Všetky kombinácie n-tej triedy, ktoré z týchto predmetov možno utvoriť, obsahujú alebo n-predmetov bielych a nijaký červený, alebo $n-1$ predmetov bielych a 1 červený, alebo $n-2$ predmety biele a 2 červené atď. až nijaký predmet biely a n červených. Musí pritom $r \geqq n$, $s \geqq n$? b) Položte $n = r = s$. — **162.** $\binom{r+1}{n+1} = \binom{r}{n} + \binom{r-1}{n} +$

$+\binom{r-2}{n}+\ldots+\binom{n}{n}$. — **164.** [1] $C'_1(r) = r = \binom{r}{1}$. [2] Platí $C'_{n+1}(r) = \frac{r+n}{n+1}\cdot C'_n(r)$ (cvič. 163). Ak je $C'_n(r) = \binom{r+n+1}{n}$, je $C'_{n+1}(r) = \frac{r+n}{n+1}\binom{r+n-1}{n} = \binom{r+n}{n+1}$. — **165.** $C'_2(10) = 55$. — **166.** a) $C'_2(8) = 36$; b) $C'_2(9) = 45$; c) $C'_2(10) = 55$. — **167.** $C'_3(3) = 10$. — **168.** $C'_n(r) = \binom{r+n-1}{n}$. — **169.** a) Ak je u niektorého člena súčet mocniteľov $k+l+m+\ldots=h<n$, doplníme tento člen činiteľom 1^{n-h}; dostaneme tak mnohočlen, ktorý má práve toľko členov, ako úplný homogenný mnohočlen v $r+1$ premenených $x, y, z, \ldots, t$, t. j. $C'_n(r+1) - \binom{n+r}{n}$. b) $\binom{n+r}{n} = \binom{n+r}{r}$. — **170.** Ak považujeme neznáme za mocniteľa v homogennom mnohočlene, vidíme, že rovnica má práve toľko riešení, koľko členov má úplný homogenný mnohočlen n-tého stupňa v r premenených (cvič. 168). —

171. a) $2^4\cdot3^{10}\cdot5\cdot11$; b) $2^4\cdot3^8\cdot5^{14}\cdot17\cdot19$. — **172.** a) 1,44830; b) 0,90438. — **173.** a) $\cos 7a = \cos a(64\cos^6 a - 112\cos^4 a + 56\cos^2 a - 7)$, $\sin 7a = \sin a(64\cos^6 a - 80\cos^4 a + 24\cos^2 a - 1)$. — **174.** a) $\frac{1}{8}(\cos 4a + 4\cos 2a + 3)$; b) $\frac{1}{16}(\cos 5a + 5\cos 3a + 10\cos a)$; c) $\frac{1}{2r}\left[\cos ra + \binom{r}{1}\cos(r-2)a + \binom{r}{2}\cos(r-4)a + \ldots + \binom{r}{r}\cos(r-2r)a\right]$. — **175.** a) $(1+2)^r$; b) $(1-1)^r$. — **176.** Plynie z rovnice (7) a z cvič. 175b. — **177.** $1+i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{1}{4}\pi + i\sin\frac{1}{4}\pi)$. — **178.** a) pre $r=2$ je $(n+1)^2 = 1 + 2s_1 + n$, $s_1 = \frac{1}{2}n(n+1)$; b) pre $r=3$ je $(n+1)^3 = 1 + 3s_2 + 3s_1 + n$, $s_2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; c) pre $r=4$ je $(n+1)^4 = 1 + 4s_3 + 6s_2 + 4s_1 + n$, $s_3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$. — **179.** Vo výraze $(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$ je pomer dvoch po sebe idúcich členov $\binom{n}{k+1}x^{k+1}, \binom{n}{k}x^k = \frac{n-k}{k+1}x < q$ pre $k \geqq 1$. Pre $(1+x)^n < 1 + nx + nxq + nxq^2 + \ldots + nxq^{n-1} < 1 + \frac{nx}{1-q}$. Chyba je menšia než $\frac{nxq}{1-q}$.

180. 0,358, 7,39%. — **181.** 48-krát, alebo 37-krát. — **182.** Asi 26-krát až 31-krát. — **183.** Asi 278 až 338-krát. — **184.** $0{,}309 < p < 0{,}393$. — **185.** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{3}$. — **186.** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{3}$. — **187.** a) $\frac{55}{216}$; b) $\frac{161}{216}$. — **188.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$. — **189.** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{11}{45}$; c) $\frac{13}{90}$. — **190.** $\frac{1}{5}$. —

191. Súčet 11 môže padnúť 27 spôsobmi, kdežto súčet 12 len 25, treba vziať do úvahy, ktoré číslo padne na každej kocke, a nie, z ktorých sčítancov sa súčet skladá. — **192.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{3}{8}$. — **193.** a) $\frac{10}{36}$; b) $\frac{11}{36}$; c) $\frac{35}{36}$; d) $\frac{25}{36}$; e) $\frac{1}{36}$ — **194.** a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{7}{8}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{8}$. — **195.** a) $\binom{12}{3}\binom{8}{2}:\binom{20}{5} \doteq 0{,}397$; b) $\binom{12}{2}\binom{8}{3}:\binom{20}{5} \doteq 0{,}238$; c) $\binom{12}{5}:\binom{20}{5} \doteq 0{,}051$; d) $\binom{8}{5}:\binom{20}{5} \doteq 0{,}007$. — **196.** a) $4 \cdot \binom{28}{3}:\binom{32}{4} \doteq 0{,}364$; b) $\binom{4}{2}\binom{28}{2}:\binom{32}{4} \doteq 0{,}064$; c) $\binom{4}{3} \cdot 28 : \binom{32}{4} \doteq 0{,}003$; d) $1 : \binom{32}{4} \doteq 0{,}00003$; e) $\binom{28}{4}:\binom{32}{4} \doteq 0{,}569$. — **197.** a) $28 : \binom{32}{5} \doteq 0{,}0001$; b) $\binom{4}{3}\binom{28}{2}:\binom{32}{5} \doteq 0{,}008$; c) $\binom{4}{2}\binom{28}{3}:\binom{32}{5} \doteq 0{,}097$; d) $4 \cdot \binom{2}{4}:\binom{32}{5} \doteq 0{,}407$; e) $\binom{28}{5}:\binom{32}{5} \doteq 0{,}488$. — **198.** Ak je $h = k$, je $p = 1$; ak je $h = 0$, je $p = 0$. — **199.** Ak je $h = k - h$, je $p = \frac{1}{2}$. — **200.** Ak je $p = \frac{h}{k}$, je $\frac{k-h}{k} = 1 - p$. —

201. $\frac{1}{4}$. — **202.** $\frac{3}{4}$. — **203.** a) $\binom{28}{7}:\binom{32}{7} \doteq 0{,}352$; b) 0,648; c) $\left[\binom{28}{7} + 4 \cdot \binom{28}{6}\right] : \binom{32}{7} \doteq 0{,}799$; d) 0,201. — **204.** a) $1 - p = \binom{90}{2}:\binom{100}{2}$, $p \doteq 0{,}191$; b) $1 - p = \binom{90}{3}:\binom{100}{3}$, $p \doteq 0{,}273$; c) $1 - p = \binom{90}{10}:\binom{100}{10}$, $p \doteq 0{,}670$. — **205.** a) $\left[\binom{8}{3} + \binom{10}{3} + \binom{12}{3}\right] : \binom{30}{3} \doteq 0{,}098$; b) $\left[\binom{8}{2}(10 + 12) + \binom{10}{2}(8 + 12) + \binom{12}{2}(8 + 10)\right] : \binom{30}{3} \doteq 0{,}666$; c) $8 \cdot 10 \cdot 12 : \binom{30}{3} \doteq 0{,}236$. — **206.** $\frac{2}{3}$. — **207.** $p_1 = \frac{h_1}{k}$, $p_2 = \frac{h_2}{k}$, $p_{12} = \frac{h_{12}}{k}$, $p = \frac{h_1}{k} \cdot \left(1 - \frac{h_{12}}{h_1}\right) + \frac{h_2}{k}\left(1 - \frac{h_{12}}{h_2}\right) + \frac{h_{12}}{k}$. — **208.** a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. — **209.** a) $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$; b) $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$. — **210.** a) $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$;

b) $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$ alebo $1-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$; c) $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$. — **213.** $\frac{10\cdot 10}{\binom{20}{2}}\cdot\frac{9\cdot 9}{\binom{18}{2}}\cdot\frac{8\cdot 8}{\binom{16}{2}}\cdots\frac{2\cdot 2}{\binom{4}{2}}\cdot\frac{1\cdot 1}{\binom{2}{2}} \doteq 0{,}0055$. — **214.** $\frac{5\cdot\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}}\cdot\frac{4\cdot\binom{8}{2}}{\binom{12}{3}}\cdot\frac{3\cdot\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}}\cdot\frac{2\cdot\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}}\cdot\frac{1\cdot\binom{2}{2}}{\binom{3}{3}} \doteq 0{,}0809$. — **215.** a) $\frac{1}{6}, \frac{5}{36}$; b) $\frac{25}{216}, \frac{125}{1296}$; c) $\frac{1}{6}\left(1+\frac{25}{36}+\frac{625}{1296}\right) \doteq 0{,}362$, $\frac{5}{36}\left(1+\frac{25}{36}+\frac{625}{1296}\right) \doteq 0{,}302$; d) $\frac{6}{11}, \frac{5}{11}$. — **216.** $\frac{2}{20}\cdot\frac{16}{20}+\frac{18}{20}\cdot\frac{17}{20} = 0{,}845$. — **217.** a) $\frac{1}{5}\left(0+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}\right)=\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{n+1}\left(0+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n}{n}\right)=\frac{1}{2}$. — **218.** Plynie z vety IV. — **219.** $\binom{10}{n}\cdot\frac{5^{10-n}}{6^{10}}$; a) 0,32301; b) 0,29071; c) 0,15505; d) 0,05427; e) 0,01302; f) 0,00217; g) 0,00625; h) 0,00002; i) 0,0000008; j) 0,00000002; k) 0,16151. — **220.** 0,773. —

221. a) $1-\left[\left(\frac{191}{216}\right)^5+5\cdot\frac{25}{216}\cdot\left(\frac{191}{16}\right)^4\right] \doteq 0{,}116$; b) $\left(\frac{191}{216}\right)^5+5\cdot\frac{25}{216}\cdot\left(\frac{191}{216}\right)^4+10\cdot\left(\frac{25}{216}\right)^2\cdot\left(\frac{191}{216}\right)^3 \doteq 0{,}987$. — **222.** $1-\left(\frac{35}{36}\right)^n > p$; a) asi 25-krát; b) asi 43-krát; c) asi 82-krát. — **223.** a) $\binom{90}{n}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{90-n} > \binom{90}{n-1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{91-n}$, $\binom{90}{n}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{90-n} > \binom{90}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{89-n}$; $n = 15$; b) $p_{15} \doteq 0{,}112$; c) $\binom{90}{14}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{14}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{76}+\binom{90}{15}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{15}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{75}+\binom{90}{16}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{16}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{74} = \frac{889}{304}\cdot p_{15} \doteq 0{,}328$. — **224.** a) $\binom{900}{150}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{150}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{750} \doteq \frac{1}{5\sqrt{10\pi}} \doteq 0{,}0357$; b) dovolenú odchýlku spĺňa 21 prípadov, keď šestka padne 140-krát až 160-krát; najmenšiu pravdepodobnosť má prípad, že šestka padne 140-krát, a to $\binom{900}{140}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{140}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{760} \doteq \frac{3}{\sqrt{2\pi\cdot 14\cdot 76}}\cdot\left(\frac{15}{14}\right)^{140}\cdot\left(\frac{75}{76}\right)^{760} \doteq 0{,}027$; je teda $0{,}57 < p < 0{,}75$. — **225.** $1 = (1-p)^r + \binom{r}{1}p(1-p)^{r-1}+\binom{r}{2}p^2(1-p)^{r-2}+\ldots+p^r$; dosadíme $p = \frac{b}{a+b}$, $1-p=\frac{a}{a+b}$, kde a, b sú kladné čísla.

Obsah.

ARITMETIKA
pre III. triedu gymnázií

Vydalo Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave
Šéfredaktor Viktor Šándor
Vedúca redaktorka Božena Vaníková
Redaktorka Elena Horná
Technická redaktorka Margita Pecíková

301-16-521 — Č. PIO 4767/53-III/1 — Číslo publikácie 54 — Druhé opravené vydanie — Náklad 2500 — Rukopis zadaný 17. marca 1953 — Vytlačené v júli 1953 — 2·75 PH, 5,222 AH — Papier 222-02, 61×86, 70 g — Tlač: Pravda, vydavateľstvo ÚV KSS, Bratislava — Tlačené zo sadzby Mono — Typ písma garmond — Strán 88.
Cena broš. Kčs 6·30

Čkm 771

Po Kčs 6·30

301-16-521