Eduard Čech; Alfons Fišer; Vítězslav Jozífek; Karel Komínek; Jan Vyšín; Rudolf Zelinka

Geometrie pro třetí třídu středních škol

Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 93 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501372

GEOMETRIE

PRO TŘETÍ TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

ÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ UČEBNIC

GEOMETRIE

PRO TŘETÍ TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

1951

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ UČEBNIC

PRAHA

ÚVODNÍ POZNÁMKY.

Úkol geometrie ve třetí třídě střední školy je naučit žáky počítat obsahy rovinných útvarů, povrch a objem hranolu a rotačního válce a řešit jednoduché konstruktivní úlohy o kružnici užitím tak zvaných geometrických míst, učit je při probírání učiva správně usuzovat a logicky myslit. V úlohách konstruktivních uvažujeme o řešitelnosti úlohy a o počtu řešení, při početních úlohách sledujeme změnu výsledku výpočtu vyplývající ze změny určujících prvků, odhadujeme chybu vzniklou nepřesným měřením.

Vlastnosti a vztahy prvků odůvodňujeme a dbáme toho, aby žák sestrojoval nebo počítal uvědoměle.

Výklad učebnice je převážně souvislý. Některé části, jejichž osvojení není nezbytně nutné k pokračování, jsou vytištěny petitem. Cvičení za výkladem učiva jsou sestavena zpravidla podle obtížnosti. Nejobtížnější příklady, vyplývající z učiva vytištěného petitem, nebo příklady řešící složitější úlohy jsou označeny hvězdičkou. Ke cvičením jsou namnoze připojeny návody. Ty může učitel podle potřeby rozšířit. Učitel má pečlivě připravit výběr cvičení, ukládat je v předem promyšleném pořadí a přizpůsobit jim výklad učiva.

Žáci si z učebnice opakují, doplňují a prohlubují učivo a učí se tomu, co zameškali. Učitel vede žáky ke čtení textu učebnice, k jeho porozumění a k samostatnému studiu některých částí.

V proměnách má se žák naučit vycházet ze základních obrazců (trojúhelník, rovnoběžník) a odvodit si další konstrukce.

Pythagorovy věty se stále užívá k výpočtům ve třetí třídě. Proto musí obsahu věty každý žák rozumět. Odříkání věty bez porozumění vede k formalismu. Abychom se ho vystříhali, řešíme příklady, pokud je to možné, různými způsoby a přesvědčujeme se otázkami, zda žák rozumí tomu, o čem vypravuje.

Konstruktivní úlohy jsou příležitostí k procvičení pojmu geometrického místa.

Stereometrie, t. j. výpočet povrchu a objemu hranolu a rotačního válce, navazuje na učivo první třídy a prohlubuje je.

I když je učivo učebnice soustředěno na výklad vztahů a vzájemných souvislostí prvků, je třeba vždy, kdykoliv se k tomu naskytne příležitost, ukázat žactvu, že lze poznatků použít v praxi při výstavbě lidově demokratické vlasti. Úkoly v té jednoduchosti, jak jsou obsaženy v učebnici, se málokdy isolovaně v praxi vyskytují. Stávají se však nezbytnými články při řešení technických problémů ve všech oborech práce.

UPOZORNĚNÍ.

V tomto vydání byly provedeny opravy na str. 34 (závěr výpočtu), 58 (doplněno označení na obr. 81 a podle toho úkol 3), 65 (cvič. 175), 69, 82 (cvič. 235 a 251). Ve výsledcích byly opraveny údaje ve cvičeních 43, 50, 86, 95, 98, 214, 215, 230, 232, 240, 255 a 276.

Při výpočtu povrchu a objemu těles je vhodné žákům ukázat, jak se těchto znalostí užívá v technické praxi k určení spotřeby materiálu na př. při zhotovování dutých těles (jako jsou železné roury), při pokovování těles, k určení váhy těles a pod.

Rozvrh učiva.

ZÁŘÍ	Opakování. Obsah čtverce a obdélníka.
ŘÍJEN	Obsah trojúhelníka. Obsah čtyrúhelníka. Obsah mnohoúhelníka. Rovnost obsahů dvou obrazců.
LISTOPAD	Proměny obrazců.
PROSINEC	Pythagorova věta. Aplikace věty na obdélník a čtverec.
LEDEN	Užití věty na trojúhelníky. Shrnutí a procvičení na smíšených příkladech.
ÚNOR	Kružnice a přímka. Dvě kružnice.
BŘEZEN	Geometrická místa. Úlohy o tečnách kružnice. Další konstruktivní úlohy.
DUBEN	Délka kružnice a kruhového oblouku. Obsah kruhu a jeho částí.
KVĚTEN	Povrch, objem a síť kolmého hranolu a rotačního válce.
ČERVEN	Shrnutí učiva, doplňování, prohlubování a opakování.

ČEMU SE BUDETE UČIT.

Dříve než se počnete učiti podle této učebnice, řekneme si něco o jejím obsahu.

Chceme-li měřiti délku, zvolíme si určitou délku za jednotku míry (na př. metr, decimetr, centimetr a pod.); pak zkoušíme, kolikrát se naše jednotka dá nanést za sebou na úsečku, která má být změřena. Děláme to s pomocí nějakého měřítka: tak třeba v přírodě změříme přímou stranu pole nebo přímou vzdálenost dvou telegrafních tyčí u silnice pásmovou mírou. Chceme-li určit velikost plochy, musíme si také zvolit jednotku míry. Za tu bereme velikost jednoduchého obrazce — čtverce, který má stranu 1 m nebo 1 cm a pod. Taková jednotka se pak nazývá čtvereční metr, čtvereční centimetr. Ovšem velikost plochy neměříme tak, abychom zkoušeli jako u délek, kolikrát se jednotkový čtverec vejde do měřené plochy. To by bylo příliš zdlouhavé a často bezvýsledné. Představte si, že byste chtěli takovým způsobem změřit velikost zahrádky tvaru trojúhelníka. Velmi mnoho čtverců by leželo částečně uvnitř trojúhelníka a částečně vně; těmi čtverci, které jsou celé uvnitř trojúhelníka, by byla velikost plochy určena nedokonale. Proto musíme určovati velikost ploch jiným způsobem; jak to provádíme, je obsahem kapitoly druhé. Tam se dovíte, jak dovedeme daný obrazec proměniti v jiný obrazec stejné velikosti a konečně jak můžeme vypočítat velikost obrazce pomocí změřených délek.

Třetí kapitola je věnována jiné otázce. Některé délky nemůžeme nebo nechceme měřit přímo, t. j. třeba měřickým pásmem. Myslete si na příklad, že máte změřiti vzdálenost dvou stromů, mezi nimiž je rybník. Potřebujeme znát nějaký způsob, jak je možné hledanou délku vypočíst z jiných délek, které jsme změřili. Jedním takovým způsobem je výpočet podle prastaré poučky, zvané věta Pythagorova. Podle ní počítáme délku jedné strany pravoúhlého trojúhelníka, známe-li délky obou ostatních. Uvidíte všude dále v geometrii, jak rozmanitě lze této poučky použít v mnoha jiných úlohách.

Předešlé kapitoly pojednávaly o úlohách, které se týkají určování délek a velikosti ploch cestou početní. Tyto úlohy, které lidé musili řešiti, když chtěli vyměřovati povrch země, jsou velmi staré a daly vlastně vznik geometrii, jak ukazuje její jméno (gé značí řecky země, sloveso metrein znamená měřiti). Další čtyři kapitoly učebnice jsou věnovány hlavně konstruktivním úlohám. Při rýsování obrazů technických předmětů, při sestrojování plánů a nákresů všech druhů používáme většinou pravítka a kružítka. Těmito přístroji rýsujeme dvě nejdůležitější čáry: přímku a kružnici. Jsou vám známy již od dřívějška; v kapitole čtvrté se však seznámíte podrobněji s jejich některými vlastnostmi.

Obsahem další kapitoly je nový způsob řešení konstruktivních úloh, založený na pojmu geometrického místa. Nezalekněte se nového názvu: uvidíte, že jde o věc zcela jednoduchou, která je vám zčásti známa. Pojem geometrického místa zavedl do geometrie již starý řecký filosof Platon. Poznáte, jak lze s pomocí geometrických míst snadno řešiti mnoho konstruktivních úloh. Až budete v rýsování zobrazovati různé předměty, přesvědčíte se o tom znovu.

Již dříve jste počítali obvod a plošnou velikost (obsah) obrazce omezeného úsečkami (čtverce, trojúhelníka, lichoběžníka a j.). V téže kapitole budete řešit stejné úlohy i pro obrazce omezené také oblouky kružnice. Jak často nám podobné úlohy přicházejí, je viděti třeba z těchto několika příkladů: vzdálenost dvou míst na zeměkouli, dráha, kterou ujede kolo daného průměru, velikost kruhového průřezu roury, délka převodu na soukolí a j. Jiné úkoly z praktického života poznáte ve cvičeních.

Závěrečná kapitola učebnice si všímá jedné skupiny těles; jsou to hranoly a válce. Je často třeba znáti velikost jejich povrchu nebo velikost prostoru, který zaujímají, čili jejich objem. Objem měříme podobným způsobem, jako jsme měřili velikost plochy obrazce. Zvolíme si jednoduché těleso, tím je zpravidla krychle o hraně 1 m, 1 dm nebo 1 cm a pod., a prohlásíme je za jednotku objemu; jednotka se pak jmenuje krychlový metr, krychlový decimetr nebo krychlový centimetr. Nyní bychom měli zkoušet, kolikrát se jednotková krychle vejde do daného tělesa. To je však ještě obtížnější nežli při měření plochy. Zpravidla je tento způsob prakticky vůbec neproveditelný. Máme však cestu, jak dovedeme vypočítat ze změřených délek velikost objemu. Pro hranoly a válce budete takové výpočty provádět v závěrečné kapitole. Různá použití poznáte opět ve cvičeních.

Bude-li se vám někdy zdát, že všechno to, čemu se v geometrii učíte, je pro život nepotřebné, vzpomeňte si na všechny ty dělníky a techniky v továrnách, na stavbách, na polích a v lesích a uvědomte si, že bez znalosti aritmetiky i geometrie a bez řádného myšlení stěží by mohli připravovat nové technické vynálezy, podávat zlepšovací návrhy a lépe organisovat práci tak, aby se nám v naší lidově demokratické republice žilo stále lépe, kulturněji a bezpečněji. Vy pak máte být pokračovateli v jejich díle. Připravte se proto řádně na své úkoly!

I. OPAKOVÁNÍ.

1. Vyjádřete v decimetrech: a) 7 mm; b) 83 cm; c) 1 km; d) 7 m 3 cm.

2. a) Které znáte plošné míry? Udejte jejich měnitele!
b) Které znáte prostorové míry? Udejte jejich měnitele!

3. Vyjádřete ve čtverečních metrech: a) 57 a; b) 3 ha; c) 37 dm^2; d) 1 km^2; c) 3725 cm^2.

4. Vyjádřete v litrech: a) 3 m^3; b) 37 cm^3; c) 47 568 mm^3.

5. Vyjádřete ve stupních: a) $\frac{2}{5}$ R; b) $1\frac{1}{2}$ R; c) $\frac{5}{12}$ R; d) $7\frac{7}{8}$ R.

6. Vyjádřete ve zlomcích pravého úhlu: a) 75°; b) 22°30′; c) 33°45′; d) 3′15″.

7. Určete úhel, který je a) o 8° větší než doplňkový úhel; b) o 16° menší než výplňkový úhel!

8. Jaký je rozdíl mezi kružnicí a kruhem? Jsou-li A, B dva body na kružnici, jak se jmenuje úsečka AB? Jak se jmenují části, na které oba body A, B rozdělí kružnici? Jak se jmenují části, na které úsečka AB rozdělí kruh? Je-li S střed kružnice, jak se jmenují části, na které poloměry AS, BS rozdělí kruh?

9. Jak dělíme trojúhelníky podle stran? Jsou-li dvě strany trojúhelníka sobě rovny, jak nazýváme tyto strany a jak nazýváme stranu třetí?

10. Jedna strana trojúhelníka měří 5 dm, druhá 3 dm. Proč musí býti obvod menší než 2 m? Proč musí obvod býti větší než 1 m?

11. Jak dělíme trojúhelníky podle úhlů? Jak nazýváme strany pravoúhlého trojúhelníka?

12. Jeden úhel trojúhelníka měří 84°45′, druhý je o 22°30′ menší. Vypočtěte velikost třetího úhlu!

13. Co víte o úhlopříčkách obdélníka? kosočtverce? čtverce?

14. Co znamená, že dva trojúhelníky jsou shodné? Vyslovte základní věty o shodnosti trojúhelníků! Jakými značkami zapisujeme tyto věty?

15. Narýsujte dvě různoběžky s průsečíkem S; vzniknou vám čtyři úhly, které označte α, β, γ, δ tak, jak jdou za sebou. Jak říkáme úhlům α, γ? Co víte o jejich velikosti? Jak říkáme úhlům α, β? Co víte o jejich velikosti? Pojmenujte ostatní dvojice, které můžete utvořiti z těch čtyř úhlů.

16. Narýsujte pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC. Sestrojte pravidelné šestiúhelníky $ABDEFG$, $ACHELM$, $BCNPQR$ vně trojúhelníka ABC. Vypočtěte, čemu se rovnají úhly GAM, DBR, HCN.

17. Velikost $2\frac{1}{4}$ m jedné strany obdélníka je 20% obvodu. Určete obsah obdélníka!

18. Obsah čtverce o straně $\frac{2}{3}$ m je o 60% větší než obsah obdélníka, jehož větší rozměr je $\frac{5}{6}$ m. Určete druhý rozměr obdélníka!

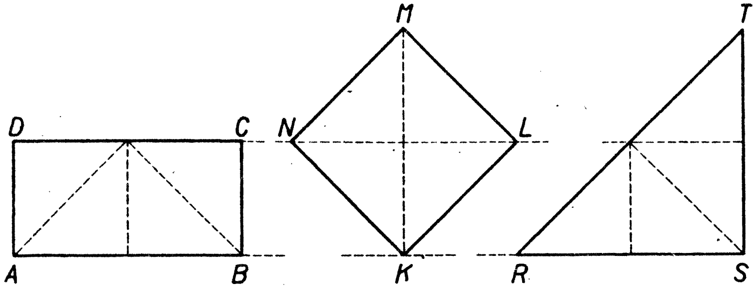
19. Trojúhelník ABC doplňte a) na rovnoběžník $ABCD$; b) na rovnoběžník $ABEC$; c) na rovnoběžník $AFBC$.

20. a) Co víte o velikosti stran rovnoběžníka? b) Co musíte vědět o velikosti stran čtyrúhelníka $ABCD$, aby z toho plynulo, že je to rovnoběžník? c) Víte-li, že ve čtyrúhelníku $ABCD$ je $AB \parallel CD$, co musíte ještě vědět o stranách AB, CD, aby z toho plynulo, že je to rovnoběžník? d) Co víte o úhlopříčkách rovnoběžníka? Jak zní obrácená věta?

II. OBSAHY A PROMĚNY OBRAZCŮ.

1. Obsah obdélníka.

Budeme se nyní zabývati úlohou, která měla vždy a má značný praktický význam, totiž určováním plošné velikosti neboli, jak se v geometrii říká, **určováním obsahu** jednoduchých rovných ploch. Z nižších tříd již známe, jak se vypočte obsah čtverce a obsah obdélníka, ale i to si stručně zopakujeme.



Obr. 1a, b, c.

Plochy, které jsou stejně veliké, nemusí míti stejný tvar. Na př. obdélník v obr. 1a, čtverec v obr. 1b a trojúhelník v obr. 1c jsou tři tvarově od sebe velmi odlišné plochy, jsou však všechny tři stejně veliké, jak je patrno z rozkladů naznačených čárkováním.

Délku čáry vyjadřujeme číselně v centimetrech, metrech a pod., srovnáváme ji se zvolenou **délkovou jednotkou.** Podobně velikost (obsah) plochy vyjadřujeme tak, že ji srovnáváme s velikostí **plošné jednotky.** Ke každé délkové jednotce patří určitá plošná jednotka, obsah čtverce, jehož stranou je příslušná jednotka délková. Tak na příklad k délkové jednotce 1 cm patří plošná jednotka 1 cm^2 (čtvereční centimetr), k délkové jednotce 1 mm nebo 1 dm nebo 1 m patří plošná jednotka 1 mm^2 nebo 1 dm^2 nebo 1 m^2. Základní délkové jednotky mají měnitele deset:

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm}, \quad 1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}, \quad 1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}.$$

Příslušný měnitel plošných jednotek je sto:

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2, \quad 1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2, \quad 1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2.$$

Sestrojte obrazec, který vysvětluje, proč na příklad 1 dm^2 = 100 cm^2. (Čtverec o straně 1 dm rozdělíte na čtverce o straně 1 cm.)

Větší délkové jednotky než metr jsou: dekametr (dkm), hektometr (hm), kilometr (km). Jejich měnitel je 10. Je tedy

$$1 \text{ dkm} = 10 \text{ m}, \quad 1 \text{ hm} = 10 \text{ dkm}, \quad 1 \text{ km} = 10 \text{ hm}.$$

Ale dekametru a hektometru se prakticky téměř neužívá. Pro příslušné čtverce plošné jednotky máme

$$1 \text{ dkm}^2 = 100 \text{ m}^2, \quad 1 \text{ hm}^2 = 100 \text{ dkm}^2, \quad 1 \text{ km}^2 = 100 \text{ hm}^2.$$

Je tedy 1 km² milion čtverečních metrů, což je pro praktické účely (vyměřování pozemků a pod.) jednotka příliš veliká, kdežto 1 m² je zase jednotka příliš malá. Proto se v praxi užívá jednotek 1 dkm² a 1 hm², ale dávají se jim stručnější jména: místo čtvereční dekametr říkáme ar (značka a), místo čtvereční hektometr říkáme hektar (značka ha). Tedy:

$$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2, \quad 1 \text{ ha} = 100 \text{ a}, \quad 1 \text{ km}^2 = 100 \text{ ha}.$$

Dosud užívané staré míry plošné jsou:

1 jitro katastrální $\doteq$ 5754,64 m² $\doteq$ 0,58 ha,
1 sáh čtverečný $\doteq$ 3,60 m²,
1 korec (strych) $\doteq$ 0,29 ha $\doteq$ 2877,32 m²,
1 měřice (míra) $\doteq$ 0,19 ha $\doteq$ 1918,21 m².

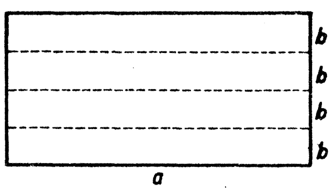
Známe již, že **obsah obdélníka je dán součinem délky a výšky.** Při tom musí býti ovšem délka i výška vyjádřena v téže délkové jednotce a obsah vyjde v příslušné plošné jednotce. Označíme-li obsah obdélníka písmenem P, délku písmenem a, výšku písmenem b, můžeme říci, že obsah obdélníka je dán vzorcem

$$P = ab. \tag{1}$$

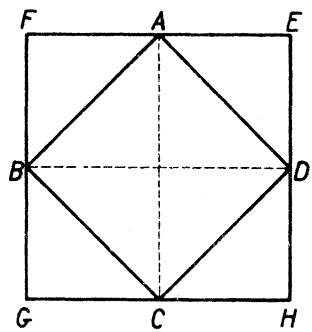
Je-li na příklad délka $a = 5$, šířka $b = 4$ (jednotka 1 cm), je obsah $P = 20$ (jednotka 1 cm²), t. j. obdélník délky 5 cm a výšky 4 cm má obsah 20 cm². (Sestrojte vysvětlující obrazec, ve kterém rozdělíte obdélník na 20 čtverců o straně 1 cm.)

Rozdělením na čtverce můžeme odvodit správnost vzorce $P = ab$ v případě, že čísla označená písmeny jsou **čísla celá.** Platnost tohoto vzorce není však omezena jen na případy, že délka a výška jsou vyjádřeny celými čísly. Odvodíme si vzorec pro případ, že čísla a, b znamenají **čísla lomená.** Stačí, když si uvědomíme: jestliže jeden rozměr obdélníka několikrát zvětšíme (nebo zmenšíme), také obsah obdélníka se tolikrát zvětší (nebo zmenší). Je to patrné z obr. 2. (Vysvětlete!)

Je-li dán na příklad obdélník o stranách $\frac{4}{5}$ cm a $\frac{2}{3}$ cm, vyjdeme od většího obdélníka s rozměry 4 cm a 2 cm, jehož obsah je $(4 . 2)$ cm^2 neboli 8 cm^2. Nyní usuzujeme: protože číslo $\frac{2}{3}$ je třikrát menší než číslo 2, má obdélník s rozměry 4 cm a $\frac{2}{3}$ cm obsah třikrát menší než $(4 . 2)$ cm^2, tedy má obsah $(4 . \frac{2}{3})$ cm^2. Dále: protože číslo $\frac{4}{5}$ je pětkrát menší než číslo 4, má obdélník s rozměry $\frac{4}{5}$ cm a $\frac{2}{3}$ cm obsah pětkrát menší než $(4 . \frac{2}{3})$ cm^2, tedy má obsah $(\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3})$ cm^2 neboli $\frac{8}{15}$ cm^2. Tím je odvozena správnost vzorce (1) pro případ $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{2}{3}$ a stejně se odvodí vzorec (1), když písmena a, b znamenají libovolná lomená čísla.



Obr. 2.



Obr. 3.

Protože čtverec je obdélník, jehož oba rozměry jsou stejné, rovná se **obsah čtverce druhé mocnině délky strany.** (Druhou mocninu čísla dostaneme, když číslo znásobíme jím samým.) Znamená-li P obsah čtverce, a délku jeho strany, máme vzorec:

$$P = a^2,$$

kde a^2 (čteno: a na druhou) znamená součin $a . a$.

V obr. 3 je čtverec $ABCD$, jehož úhlopříčka je rovna straně čtverce $EFGH$. Z obrazce je patrné, že obsah čtverce $ABCD$ se rovná polovině obsahu čtverce $EFGH$. Obsah čtverce $EFGH$ se rovná u^2, kde u je úhlopříčka čtverce $ABCD$. Tak je odůvodněno pravidlo: **obsah čtverce se rovná polovině druhé**

mocniny délky jeho úhlopříčky. Znamená-li P obsah čtverce, u délku úhlopříčky, dá se vyslovené pravidlo zapsati vzorcem

$$P = \tfrac{1}{2}\, u^2.$$

Cvičení.

21. Obdélníkové náměstí upraví Československý svaz mládeže v park. Na okrajové dláždění a cesty parkem připadne $22\,\%$ výměry. Jsou-li rozměry náměstí 160 m a 250 m, jaká bude výměra samotného parku?

22. Kolik litrů ječmene vyseje se na státním velkostatku na obdélníkový lán 1090 m dlouhý a 470 m široký, je-li potřebí 1,6 l osiva na jeden ar?

23. Jak se změní obsah čtverce, jestliže a) zvětšíme jeho stranu 3krát, b) zmenšíme jeho stranu 2,5krát, c) zvětšíme jeho stranu 7krát?

24. Jak musíme změnit stranu čtverce, aby se jeho obsah a) zvětšil 9krát, b) zmenšil 16krát, c) zmenšil 64krát, d) zvětšil 100krát?

25. Na katastrální mapě (v měřítku 1 : 1000) je zakreslen obdélníkový pozemek. Jeho obsah na mapě je 102,2 cm². Jak veliká je výměra pozemku v přírodě? Kolikrát je výměra pozemku větší než obsah obdélníka na mapě?

26. Obrazcem podobným obr. 3 odůvodněte pravidlo: Obsah kosočtverce je roven polovině součinu obou úhlopříček. Napište toto pravidlo ve tvaru vzorce.

27. Úhlopříčky kosočtverce jsou 3,72 m a 2,49 m dlouhé. Jak veliký je jeho obsah? (Užijte pravidla ze cvičení 26; výsledek zaokrouhlete na dm².)

28. Topná část kamen (t. j. část, která se při topení vyhřeje) podoby kvádru jest 100 cm dlouhá, 57 cm široká a 196 cm vysoká. Kolik m² je výhřevní plocha?

29. Tank váží 6880 kg. Šířka housenkového pásu je 35 cm, délka části housenkových pásů, jež je ve styku s terénem, je 2,1 m. Jakou vahou tlačí tank na plochu 1 dm²?

30. Narýsujte obdélník s rozměry 4 cm, 2 cm a dva obdélníky s rozměry 2 cm, 1 cm. Všecky tři obdélníky vystřihněte. Přesvědčte se výpočtem, že součet obsahů všech vystřižených obdélníků je týž jako obsah obdélníka s rozměry 4 cm, 3 cm nebo jako obsah obdélníka s rozměry 6 cm, 2 cm. Složte nyní vystřižené obdélníky tak, aby vznikl obdélník s rozměry 4 cm, 3 cm. Dále složte (a to dvěma způsoby) vystřižené obdélníky tak, aby vznikl obdélník s rozměry 6 cm, 2 cm.

31. Narýsujte obdélník s rozměry 9 cm, 8 cm a obdélník s rozměry 12 cm, 6 cm. Zjistěte výpočtem, že oba mají týž obsah. Nyní učiňte rovnost obsahů názornou tím, že oba obdélníky rozložíte (příčkami rovnoběžnými se stranami) každý na šest obdélníků s rozměry 4 cm, 3 cm.

32. Narýsujte znovu tytéž dva obdélníky jako ve cvičení 31. Přesvědčte se o rovnosti obsahů tím, že každý z nich rozdělíte:

a) na dva obdélníky s rozměry 6 cm, 4 cm a dva obdélníky s rozměry 4 cm, 3 cm;

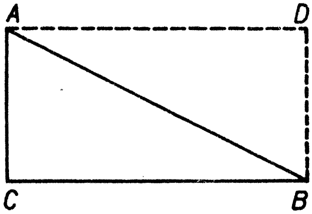
b) na dva obdélníky s rozměry 8 cm, 3 cm a dva obdélníky s rozměry 4 cm, 3 cm;

c) na obdélník s rozměry 8 cm, 3 cm, obdélník s rozměry 6 cm, 4 cm a dva obdélníky s rozměry 4 cm, 3 cm.

2. Obsah trojúhelníka.

Nyní se naučíme počítat obsah trojúhelníka. Počneme pravoúhlým trojúhelníkem. V obr. 4 je obdélník $ACBD$; jeho rozměry označme a, b; tedy

$$\overline{BC} = \overline{AD} = a,$$
$$\overline{AC} = \overline{BD} = b,$$



Obr. 4.

obsah obdélníka je tedy ab. Úhlopříčka AB rozdělí obdélník na dva pravoúhlé trojúhelníky, které se shodují v obou odvěsnách. Jsou tedy tyto dva pravoúhlé trojúhelníky shodné. To znamená, že je lze na sebe položiti tak, že se navzájem kryjí; takové **dva shodné trojúhelníky mají** ovšem **týž obsah,** který je v našem případě roven polovině obsahu obdélníka. Je-li dán jakýkoli pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, můžeme si jej vždy doplnit na obdélník $ACBD$ (viz čárkované úsečky v obr. 4). Tedy **obsah pravoúhlého trojúhelníka je polovina součinu obou odvěsen**; to můžeme zapsati vzorcem:

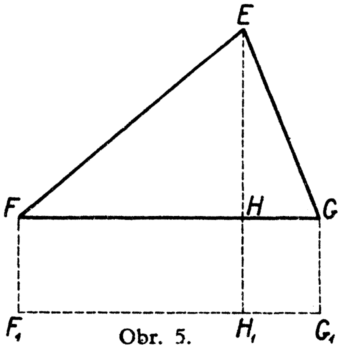
$$P = \frac{1}{2}\, ab. \tag{1}$$

Týž výsledek můžeme vysloviti také trochu jinak. Obsah pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami a, b je polovinou obsahu obdélníka s rozměry a, b; je tedy obsah trojúhelníka roven obsahu menšího obdélníka, který dostaneme, když původní obdélník zmenšíme na polovinu. Avšak na str. 10 jsme viděli, že obsah obdélníka se zmenší na polovinu, jestliže jeden rozměr zmenšíme na polovinu. Tedy pravoúhlý trojúhelník má týž obsah jako obdélník s rozměry $\frac{a}{2}$, b nebo jako obdélník s rozměry a, $\frac{b}{2}$. Tedy **obsah pravoúhlého trojúhelníka je součin jedné odvěsny s polovinou druhé odvěsny,** t. j. vzorec (1) můžeme také napsati ve tvaru

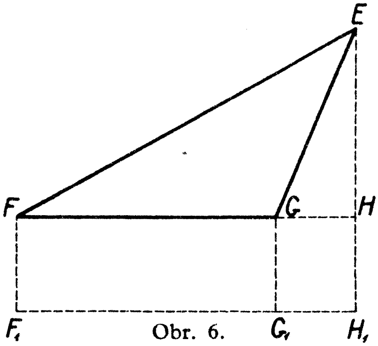
$$P = \frac{a}{2} \cdot b \tag{2}$$

nebo ve tvaru

$$P = a \cdot \frac{b}{2} \tag{3}$$



Obr. 5.



Obr. 6.

Nyní se naučíme počítat obsah libovolného trojúhelníka. V obr. 5 a 6 vidíme trojúhelník EFG; mimo to je tam vyznačena kolmice spuštěná z bodu E na přímku FG; pata této kolmice je označena H. Úsečka EH se jmenuje **výška trojúhelníka** EFG příslušná ke straně FG; položíme

$$\overline{EH} = v.$$

Dále jsou v obr. 5 a 6 v bodech F, G a H vztyčeny kolmice k přímce FG a na tyto kolmice jsou naneseny stejné délky

$$\overline{FF_1} = \overline{GG_1} = \overline{HH_1} = \frac{v}{2}\,.$$

V případě naznačeném v obr. 5 vidíme, že trojúhelník EFG se dá rozložit na dva pravoúhlé trojúhelníky EFH a EGH; obsah trojúhelníka EFG je tedy tak velký, jak velké jsou dohromady oba pravoúhlé trojúhelníky. Z toho, co předcházelo, však soudíme jednak, že pravoúhlý trojúhelník EFH je stejně velký jako obdélník FHH_1F_1, jednak, že pravoúhlý trojúhelník EGH je stejně velký jako obdélník GHH_1G_1. Je tedy původní trojúhelník EFG tak velký jako oba uvedené obdélníky dohromady, t. j. tak velký jako obdélník FGG_1F_1, neboli obsah trojúhelníka EFG je dán vzorcem

$$P = \frac{z\,.\,v}{2}\,, \tag{4}$$

kde

$$z = \overline{FG}.$$

K témuž vzorci dospějeme poněkud jinak i v případě naznačeném v obr. 6. Nyní trojúhelník EFG vznikne, když od pravoúhlého trojúhelníka EFH ubereme pravoúhlý trojúhelník EGH; pravoúhlý trojúhelník EFH je zase tak velký jako obdélník FHH_1F_1, pravoúhlý trojúhelník EGH je tak velký jako obdélník GHH_1G_1. Proto velikost trojúhelníka EFG dostaneme, když od obdélníka FHH_1F_1 ubereme obdélník GHH_1G_1, čímž vznikne obdélník FGG_1F_1, který je tedy stejně velký jako trojúhelník EFG, takže pro obsah trojúhelníka máme zase vzorec (4).

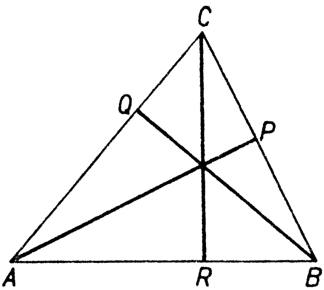
Podobně jako u pravoúhlého trojúhelníka můžeme také u libovolného trojúhelníka vzorec pro obsah zapsati ještě ve dvou jiných tvarech, totiž ve tvaru

$$P = \frac{z}{2} . v \tag{5}$$

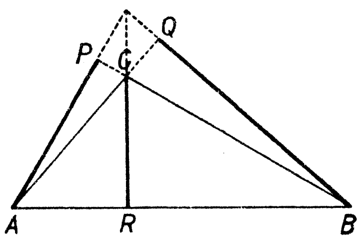
a ve tvaru

$$P = z . \frac{v}{2} . \tag{6}$$

Pravidlo pro výpočet obsahu trojúhelníka můžeme vysloviti kteroukoli z těchto vět: **Obsah trojúhelníka vypočteme, jestliže stranu znásobíme polovinou příslušné výšky. Obsah trojúhelníka vypočteme, znásobíme-li polovinu strany příslušnou výškou. Obsah trojúhelníka se rovná polovině součinu strany a příslušné výšky.**



Obr. 7.



Obr. 8.

Každé straně trojúhelníka přísluší jedna výška, takže trojúhelník má celkem tři výšky. V obr. 7 a 8 jsou vyznačeny všecky tři výšky trojúhelníka ABC. Při výpočtu obsahu můžeme užít **kterékoli** strany a příslušné výšky. Je tedy obsah trojúhelníka ABC v obr. 7 nebo 8 roven

$$\tfrac{1}{2}\,\overline{BC}.\overline{AP} = \tfrac{1}{2}\,\overline{AC}.\overline{BQ} = \tfrac{1}{2}\,\overline{AB}.\overline{CR}.$$

Trojúhelník v obr. 7 je ostroúhlý; v tomto případě lze dokázat, že všecky tři výšky procházejí jedním bodem uvnitř trojúhelníka. Trojúhelník v obr. 8 je tupoúhlý; v tomto případě **prodloužené výšky** procházejí jedním bodem vně trojúhelníka. Jak je tomu u pravoúhlého trojúhelníka?

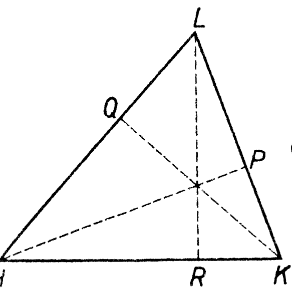
Cvičení.

33. Ocelová destička má tvar trojúhelníka, jehož jedna strana měří 1,2 dm a příslušná výška je 4 cm. Kolik váží destička, jestliže váha destičky o ploše 1 cm^2 je 0,8 g?

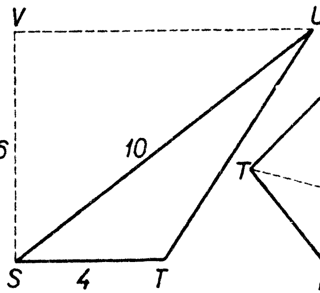
34. Čemu se rovná obsah pozemku, který je na plánu v měřítku 1 : 200 zobrazen trojúhelníkem, jehož jedna strana je 3 dm a výška 21 cm?

35. Měřte strany a příslušné výšky u trojúhelníků vyskytujících se na předmětech (také na dvoře, na louce a p.) a stanovte jejich obsahy. Shodují se výsledky výpočtů, vyjdeme-li od každé ze tří stran? Vysvětlete rozdíly.

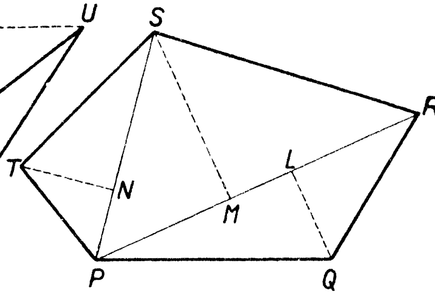
36. Vzduch tlačí silou 1,03 kg na 1 cm^2. Najděte celkovou sílu tlaku na trojúhelníkovou desku, jejíž základna je dlouhá 0,13 m a výška 0,18 m.



Obr. 9.



Obr. 10.



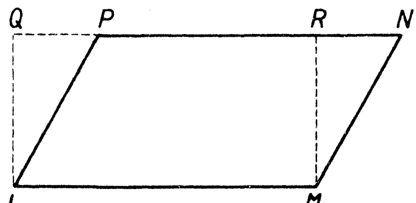
Obr. 11.

37. V obr. 9 jsou HP, KQ, LR výšky trojúhelníka HKL. a) Je-li $\overline{HK} = 12$ cm, $\overline{LR} = 18$ cm, čemu se rovná obsah trojúhelníka HKL? b) Má-li HKL obsah 112 cm^2 a je-li $\overline{KL} = 14$ cm, čemu se rovná $\overline{HP}$? c) Je-li $\overline{HP} = 5$ cm, $\overline{HL} = 6$ cm, $\overline{KQ} = 4$ cm, čemu se rovná $\overline{KL}$?

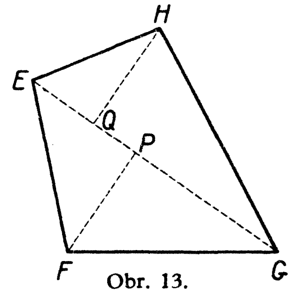
38. Narýsujte si podle obrazce 10 vlastní obrazec, ve kterém je jednotka 1 cm Vypočtěte, jaký je ve vašem obrazci obsah trojúhelníka STU. Potom vypočtěte, jaká má být ve vašem obrazci vzdálenost bodu T od přímky SU a přeměřte tuto vzdálenost. (V obrazci je $SV \perp VU$).

3. **Obsah mnohoúhelníka.**

Umíme-li vypočíst obsah trojúhelníka, můžeme také vypočíst obsah libovolného mnohoúhelníka, protože každý mnohoúhelník se dá rozdělit na trojúhelníky. Na př. pětiúhelník $PQRST$ v obr. 11 je rozložen na tři trojúhelníky a obsah každého z nich můžeme určit, změříme-li jednu stranu a příslušnou výšku. Obsah pětiúhelníka $PQRST$ je polovina součtu $\overline{PR}.\overline{QL} + \overline{PR}.\overline{SM} + \overline{PS}.\overline{TN}$.



Obr. 12.



Obr. 13.

Velmi jednoduše lze určit obsah rovnoběžníka. V obr. 12 vidíme rovnoběžník $LMNP$. Z bodů L, M spustíme kolmice na přímku NP a označíme Q, R jejich paty. Vznikne nám obdélník $LMRQ$. Ježto protější strany obdélníka a každého rovnoběžníka jsou si rovny, jest jednak

$$\overline{LQ} = \overline{MR},$$

jednak

$$\overline{QR} = \overline{LM},\ \overline{PN} = \overline{LM},$$

takže úsečky $\overline{QR}$ a $\overline{PN}$ jsou si rovny. Jestliže od obou těchto úseček ubereme touž úsečku $\overline{PR}$, budou zbývající úsečky také sobě rovny, t. j.

$$\overline{PQ} = \overline{RN}.$$

Z rovnosti úseček $\overline{LQ}$ a $\overline{MR}$, dále úseček $\overline{PQ}$ a $\overline{RN}$ vidíme, že pravoúhlé trojúhelníky LPQ a MNR se shodují v obou odvěsnách, takže jsou shodné a mají týž obsah. Jestliže nyní od čtyrúhelníka $LMNQ$ ubereme jednou trojúhelník LPQ (zbude rovnoběžník $LMNP$) a po druhé s ním stejně veliký trojúhelník MNR (zbude obdélník $LMRQ$), budou zbývající části míti týž obsah. Obsah rovnoběžníka $LMNP$ je tedy roven obsahu obdélníka $LMRQ$, t. j. je roven součinu strany $\overline{LM}$ s délkou

$$\overline{LQ} = \overline{MR};$$

tato délka se jmenuje **výška rovnoběžníka** příslušná ke straně LM (nebo také ke straně PN s ní rovnoběžné). Výška rovnoběžníka je tedy vzdálenost dvou rovnoběžných stran, kterou můžeme měřit na kterékoli společné kolmici.

Výsledek, ke kterému jsme dospěli, můžeme vysloviti takto: **Obsah rovnoběžníka je součin kterékoli strany s příslušnou výškou.** To můžeme zapsati vzorcem:

$$P = z \,.\, v,$$

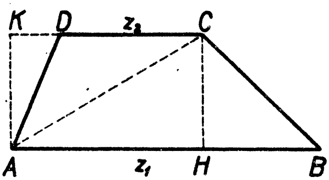
ve kterém P znamená obsah rovnoběžníka, z velikost jedné strany, v příslušnou výšku.

Obsah každého čtyrúhelníka $EFGH$ můžeme určit tak, že rozdělíme čtyrúhelník na př. úhlopříčkou EG na dva trojúhelníky EFG, EGH (viz obr. 13). Změříme délku společné strany EG, jakož i příslušné výšky $\overline{FP}$, $\overline{HQ}$. Na základě změřené strany a výšek vypočteme obsahy obou jejich trojúhelníků. Sečtením dostaneme obsah čtyrúhelníka.

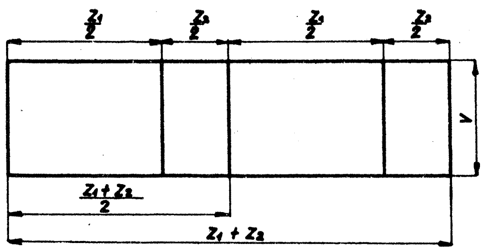
U lichoběžníka vede právě popsaný postup (rozdělit lichoběžník úhlopříčkou) k jednoduchému výsledku, který si odvodíme a zapamatujeme. V obr. 14a máme lichoběžník $ABCD$. Délky obou základen označíme z_1 a z_2, tedy položíme:

$$\overline{AB} = z_1, \ \overline{CD} = z_2.$$

Písmenem v označíme vzdálenost obou rovnoběžných základen AB, CD; nazveme ji **výškou lichoběžníka;** potom v obr. 14a je $\overline{CH} = v$, $\overline{AK} = v$.



Obr. 14a.



Obr. 14b.

Úhlopříčka AC rozdělí lichoběžník na dva trojúhelníky: ABC a ACD. Trojúhelník ABC má stranu $\overline{AB} = z_1$ a příslušnou výšku $\overline{HC} = v$; proto jeho obsah je $\frac{1}{2}\, z_1 . v$. Podobně obsah trojúhelníka ACD je $\frac{1}{2}\, z_2 . v$. Oba trojúhelníky dohromady dávají lichoběžník $ABCD$, jehož obsah je dán součtem

$$\frac{z_1}{2} \cdot v + \frac{z_2}{2} \cdot v.$$

Je tedy lichoběžník tak veliký, jak veliké jsou dohromady dva obdélníky se společným rozměrem v (třeba výškou), při čemž druhý rozměr je u jednoho obdélníku roven $\frac{z_1}{2}$, u druhého $\frac{z_2}{2}$, jak je naznačeno v obr. 14b. Avšak takové dva obdélníky dohromady jsou tak veliké jako jeden obdélník, jehož jeden rozměr je

$$\frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2} = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

a druhý rozměr je v, jak vidíte z obrazce 14b. Vzorec pro obsah lichoběžníka píšeme tedy také takto:

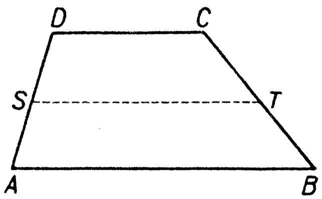
$$P = \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot v.$$

Vzorec můžeme vyslovit větou: **Obsah lichoběžníka vypočítáme, jestliže polovinu součtu obou základen znásobíme výškou.** Podobně jako u trojúhelníka můžeme také vzorec pro obsah lichoběžníka psáti ještě ve dvou poněkud jiných tvarech; jednak

$$P = (z_1 + z_2) \cdot \frac{v}{2},$$

jednak $P = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \cdot v$.

Slovní znění předposledního vzorce je toto: **Obsah lichoběžníka vypočítáme, jestliže součet obou základen znásobíme polovinou výšky.** Vyslovte sami podobně poslední vzorec!



Obr. 15.

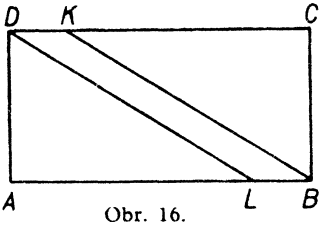
Jsou-li v obr. 15 S a T středy obou ramen AD a BC lichoběžníka $ABCD$, potom úsečka ST, která je rovnoběžná se základnami, je **střední příčka** lichoběžníka a její délka se rovná $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$, t. j. polovičnímu součtu obou základen. Proto můžeme vzorec $P = \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot v$ přečísti také takto: **Obsah lichoběžníka se rovná součinu střední příčky a výšky.**

Výpočet obsahu lichoběžníka je proto tak důležitý, že v praxi se velmi často obsah mnohoúhelníka počítá pomocí rozkladu na lichoběžníky (nebo na lichoběžníky a trojúhelníky), což je zpravidla pohodlnější a kratší než rozklad na trojúhelníky. Viz cv. 41.

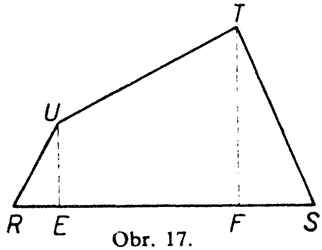
Cvičení.

39. Přes obdélníkový pozemek $ABCD$ (viz obr. 16) se povede železniční trať. Je-li $\overline{AB} = 125$ m, $\overline{BC} = 72{,}5$ m, $\overline{AL} = \overline{KC} = 114{,}6$ m, určete velikost pásu $BLDK$, o který se pozemek zmenší.

40. Změřte obě sousední strany nějakého rovnoběžníka a k nim příslušné výšky a vypočítejte dvojím způsobem obsah rovnoběžníka. Jak vysvětlíte případný rozdíl obou výsledků?



Obr. 16.

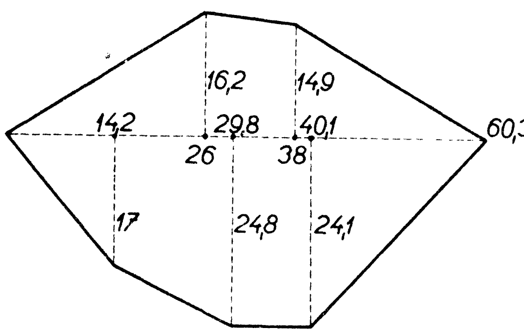


Obr. 17.

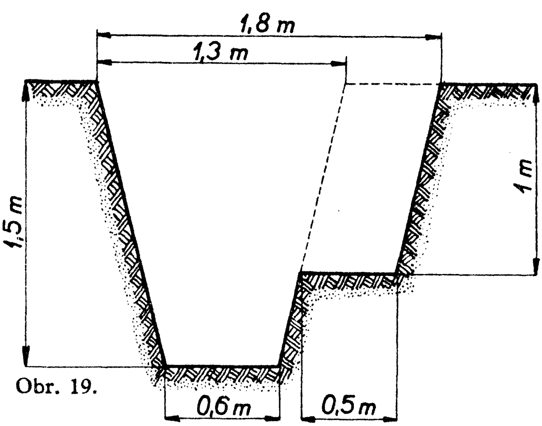
41. (Viz obr. 17, který jen vysvětluje označení.) Je-li $\overline{EU} = 238$ m, $\overline{FT} = 316$ m, $\overline{RE} = 95$ m, $\overline{EF} = 174$ m, $\overline{FS} = 82$ m, určete obsah čtyrúhelníka $RSTU$. (V obr. 17 je $EU \perp RS$, $TF \perp RS$.)

42. Narýsujte libovolný pětiúhelník (dosti veliký) a rozdělte jej aspoň dvěma způsoby na trojúhelníky a lichoběžníky (jako v obr. 17), změřte jejich rozměry a vypočtěte potom obsah narýsovaného pětiúhelníka. Přesvědčte se srovnáním výsledků, zda jste správně počítali.

43. Zeměměřičský inženýr zaměřoval při provádění pozemkové reformy pozemek tvaru sedmiúhelníku obr. 18. Změřil nejdříve vzdálenost mezi jeho nejvzdálenějšími vrcholy a vytyčil k ní kolmice ostatními vrcholy. Změřené délky na měřické přímce (přímce spojující oba koncové body) od jednoho krajního konce k druhému a délky kolmic zapsal do náčrtku a v kanceláři počítal plošnou výměru pozemku. Kolik mu vyšlo?



Obr. 18.

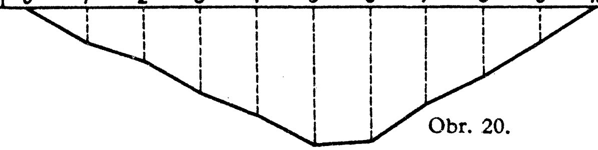


Obr. 19.

44. Příčný řez střeleckým zákopem je dán na obrazci 19. Vypočtěte obsah řezu, abyste mohli určit prostor tohoto zákopu, kdyby byla dána jeho délka.

45. Abychom mohli zjistit, kolik vody proteče za určitý čas řekou (pro potřebu elektrárny), potřebujeme znát obsah profilu (kolmého průřezu) vodního proudu a rychlost proudu. Podle údajů v tabulce u obr. 20 vypočtěte obsah profilu.

Vzdál.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Hloub.	0	0,65	0,9	1,5	1,85	2,4	2,35	1,7	1,2	0,6	0
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



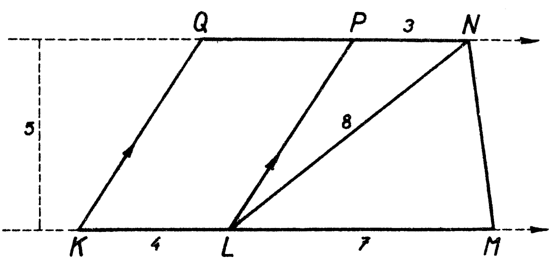
Obr. 20.

46. Na základě vzorce pro obsah rovnoběžníka odvozeného v tomto odstavci můžeme jiným způsobem než dříve odvoditi známý vzorec pro obsah trojúhelníka. Proveďte! (Trojúhelník ABC je polovina rovnoběžníka $ABDC$.)

47. Délky základen lichoběžníka jsou 34,8 cm a 25,6 cm. Výška lichoběžníka je 18,4 cm. Určete obsah lichoběžníka.

48. Délky základen lichoběžníka $EFGH$ jsou $\overline{EF} = 14$ cm, $\overline{GH} = 6$ cm. Obsah lichoběžníka je 72 cm^2. Určete obsah trojúhelníka FGH.

49. Výška lichoběžníka je 8 cm, obsah 200 cm^2. Vypočtěte délku střední příčky.

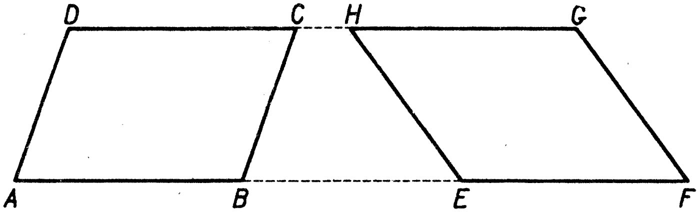


Obr. 21.

50. Narýsujte podle obr. 21 obrazec, ve kterém je jednotka 1 cm. Vypočtěte obsah lichoběžníka $KMNQ$. Dále vypočtěte obsah rovnoběžníka $KLPQ$ a trojúhelníků LMN, LPN. Určete, jaká má být vzdálenost bodů M a P od přímky LN a přeměřte obě vzdálenosti.

4. **Rovnost obsahů dvou obrazců.**

Již v prvním odstavci jsme si všimli, že dva stejně velké obrazce nemusí míti stejný tvar. Na základě odvozených vzorců pro obsah můžeme snadno v některých případech dokázat, že dané obrazce nestejného tvaru mají stejný obsah. **Jestliže** na př. **strana** *AB* (viz obr. 22) **rovnoběžníka** *ABCD* **je stejně veliká jako strana** *EF* **rovnoběžníka** *EFGH* a **jestliže také příslušné výšky jsou stejné, mají oba rovnoběžníky stejný obsah.**

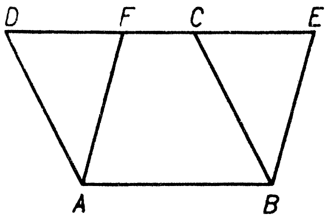


Obr. 22.

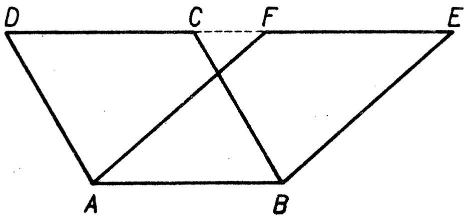
Neboť jestliže $\overline{AB} = \overline{EF} = z$ a jestliže v znamená příslušnou výšku, potom obsah každého z obou rovnoběžníků je dán týmž vzorcem: $P = z \,.\, v$.

Zvláštním případem předešlé poučky je tato poučka: **Mají-li dva rovnoběžníky** *ABCD*, *ABEF* **společnou stranu** *AB* **a leží-li protější strany** *CD*, *EF* **v téže přímce** *p*, **mají oba rovnoběžníky stejný obsah.**

Sledujte poučku na obr. 23a, b. K straně *AB* příslušná výška obou rovnoběžníků se rovná vzdálenosti obou rovnoběžných přímek *AB* a *p*.

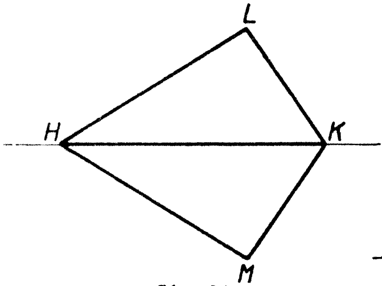


Obr. 23a.

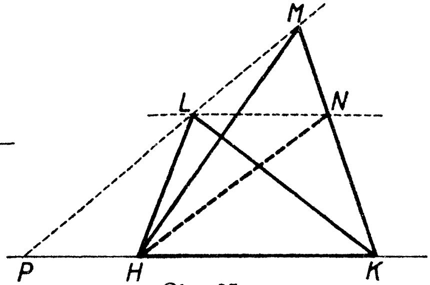


Obr. 23b.

Také o trojúhelnících platí skoro stejné poučky jako o rovnoběžnících. **Jestliže strana** *AB* **trojúhelníka** *ABC* **je stejně velká jako strana** *PQ* **trojúhelníka** *PQR* **a jestliže také obě výšky jsou si rovny, mají oba trojúhelníky stejný obsah.** Poučka plyne ze vzorce pro obsah trojúhelníka. Platí tedy jako zvláštní případ: **Mají-li dva trojúhelníky** *ABC*, *ABD* **společnou stranu** *AB* **a je-li** $CD \parallel AB$, **mají oba trojúhelníky týž obsah.** Narýsujte sami k udaným větám obrazce podle obrazců 22 a 23 a stejným postupem jako u rovnoběžníků sledujte na nich obě poslední věty.



Obr. 24.



Obr. 25.

Poučky, které jsme dosud poznali v tomto odstavci, se dají v jistém smyslu obrátit. Spokojíme se s poslední z pouček o rovnosti obsahů trojúhelníků.

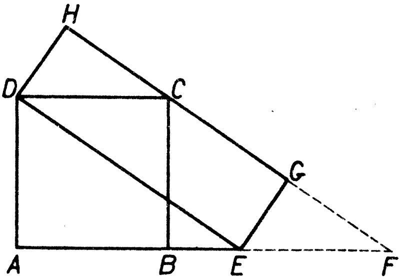
Mějme dva trojúhelníky HKL, HKM se společnou stranou HK, které mají stejný obsah. Můžeme tvrdit, že přímka LM je rovnoběžná s přímkou HK? Obr. 24 ukazuje, že nikoliv, neboť i když trojúhelníky HKL a HKM jsou shodné, není přesto $LM \parallel HK$. Platí tato poučka: **Mají-li dva trojúhelníky** HKL, HKM **společnou stranu** HK **a stejný obsah a leží-li oba body** L, M **na téže straně od přímky** HK, **jest** $LM \parallel HK$. Důkaz: Předpokládejme, že přímka LM je různoběžná s přímkou HK, takže obě přímky mají jako každé dvě různoběžné přímky společný bod, který označme P, stejně jako na obr. 25. Nyní máme dokázat, že oba trojúhelníky HKL a HKM nemohou mít tentýž obsah. Proč? Věta praví, že spojnice LM musí být rovnoběžná s HK, ale my předpokládáme, že není. Body L, M leží na téže straně od přímky HK. Bod P musí tedy ležet na prodloužení úsečky LM buď za bod L nebo za bod M. Neleží tedy mezi body L a M. Pro určitost (na našem obrazci) leží P třeba na prodloužení úsečky LM za bod L. Potom ovšem bod L leží uvnitř strany MP trojúhelníka PKM. Vedeme-li bodem L rovnoběžku s přímkou PK, protne tato rovnoběžka stranu KM v bodě N. Bod N je mezi body K, M, trojúhelník HKN je zřejmě menší než trojúhelník HKM. Ale trojúhelník HKN má stejný obsah s trojúhelníkem HKL, neboť oba trojúhelníky mají společnou stranu HK a mimo to je $LN \parallel HK$. Tedy trojúhelník HKL je menší než trojúhelník HKM. A to jsme chtěli dokázat.

Poučky o rovnosti obsahu dvou obrazců byly odvozeny na základě dříve odvozených vzorců pro jejich obsah. Je však také možné odvodit je přímo úvahou. Vezměme jako příklad rovnoběžníky $ABCD$, $ABEF$ se společnou stranou AB, při čemž všecky čtyři body C, D, E, F leží na jedné přímce. (Obr. 23ab.) Víme, že rovnoběžníky $ABCD$, $ABEF$ mají stejný obsah, chceme se však o tom přesvědčit názorně. Všimněme si tedy trojúhelníků ADF, BCE. $\sphericalangle ADF = \sphericalangle BCE$ (souhlasné úhly mezi rovnoběžkami) a z téhož důvodu $\sphericalangle AFD = \sphericalangle BEC$; mimo to $\overline{AD} = \overline{BC}$ (protější strany rovnoběžníka). Tedy

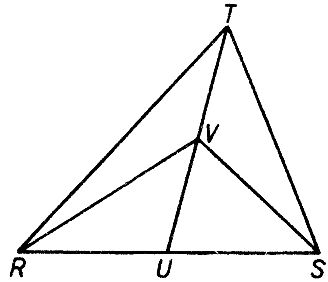
$$\triangle ADF \cong \triangle BCE \ (suu)$$

a proto trojúhelníky ADF, BCE mají stejný obsah. Nyní si všimněme lichoběžníka $ABED$. Ubereme-li od tohoto lichoběžníka trojúhelník BCE, vznikne rovnoběžník $ABCD$; ubereme-li však od téhož lichoběžníka trojúhelník ADF, vznikne rovnoběžník $ABEF$. Protože oba trojúhelníky, které jsme ubírali (BCE, ADF), mají stejný obsah a každý z nich byl ubrán od téhož lichoběžníka, mají rovnoběžníky $ABCD$, $ABEF$ stejný obsah, což jsme měli dokázat.

Poznámka. V obrazci 23a jsme místo lichoběžníka $ABED$ mohli užíti lichoběžníka $ABCF$. Připojíme-li k lichoběžníku $ABCF$ nejprve trojúhelník ADF, vznikne rovnoběžník $ABCD$; připojíme-li však k témuž lichoběžníku trojúhelník BCE téhož obsahu jako trojúhelník ADF, vznikne rovnoběžník $ABEF$. Proto mají oba rovnoběžníky v obr. 23a týž obsah. Pokuste se totéž provést v obr. 23b. Vidíte, že tento postup selže. Proč?



Obr. 26.



Obr. 27.

Cvičení.

51. V obr. 26 je $ABCD$ čtverec, $DEGH$ obdélník. Jak jej dostanete? (Zvolte bod E kdekoli na prodloužení úsečky AB za bod B. Další postup je zřejmý.) Dokažte, že oba mají týž obsah. (Porovnejte $DEGH$ s rovnoběžníkem $CDEF$ a rovnoběžník $CDEF$ se čtvercem $ABCD$.)

***52.** $KLMN$ je rovnoběžník; P je střed strany KN; bod Q leží na polopřímce KL a jest $\overline{KL} = \overline{LQ}$. Dokažte, že trojúhelník PQN se rovná polovině rovnoběžníka $KLMN$. (Návod: Trojúhelník PQN srovnejte s trojúhelníkem KQN, a ten zase s trojúhelníkem NKL.)

53. V obr. 27 je bod U středem úsečky RS a bod V je středem úsečky TU.

a) Dokažte, že trojúhelníky RUT, SUT mají stejný obsah.

b) Totéž dokažte o trojúhelnících RVU, SVU.

c) Na základě výsledků a), b) dokažte, že trojúhelníky RVT, SVT mají oba stejný obsah.

d) Dovedete dokázati c) bez užití a) a b)? (Vyjděte z toho, že oba trojúhelníky RVT, SVT mají společnou stranu TV; potom máte odůvodnit, že oba trojúhelníky mají příslušné výšky ke společné straně VT také stejné.)

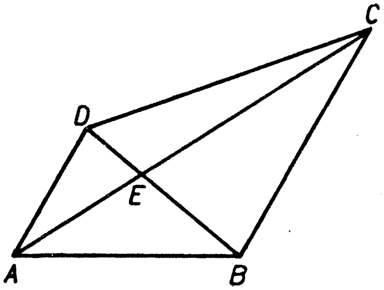
54. Narýsujte rovnoběžník $PQRS$. Zvolte bod X na straně PS a bod Y na prodloužení PQ za bod Q. Dokažte, že trojúhelníky QRX, RSY mají týž obsah. (Návod: Porovnejte oba trojúhelníky s trojúhelníkem QRS.)

***55.** Narýsujte obraz stejný, jako v obr. 28.

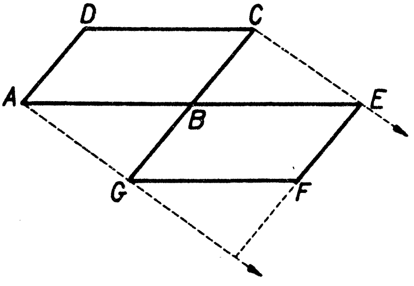
a) Jestliže je $AD \parallel BC$, který trojúhelník v obrazci má týž obsah jako trojúhelník ABC? (společná strana BC.)

b) Je-li $AD \parallel BC$ dokažte, že trojúhelníky ABE, CDE mají týž obsah.

c) Je-li E střed úsečky BD, dokažte, že trojúhelníky ABC, ACD mají týž obsah.



Obr. 28.



Obr. 29.

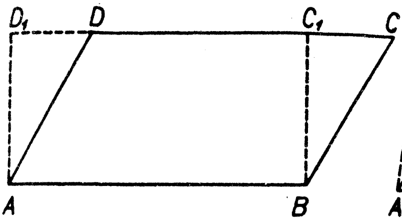
***56.** V obr. 29 jsou dva rovnoběžníky $ABCD$, $BEFG$. Dokažte, že mají týž obsah. (Návod: Veďte spojnice AC, EG; dokažte, že trojúhelníky AGE, AGC mají týž obsah. Od obou trojúhelníků uberte trojúhelník ABG.)

***57.** Narýsujte libovolný čtyrúhelník $KLMN$. Sestrojte bod H tak, aby bylo $KH \parallel MN, LH \parallel MK$. Dokažte, že lichoběžník $KHMN$ má týž obsah jako čtyrúhelník $KLMN$. (Návod: Dokažte, že trojúhelníky KLM a KHM mají stejný obsah, potom k nim připojte trojúhelník KMN).

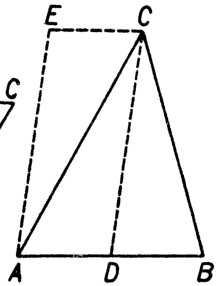
5. Proměna obrazců.

Tímto názvem označujeme úlohy, v nichž k danému obrazci máme sestrojiti obrazec téhož obsahu tak, aby nový obrazec měl předepsaný tvar, nebo aspoň do jisté míry předepsaný tak, že některá strana nebo úhlopříčka bude mít danou délku nebo polohu.

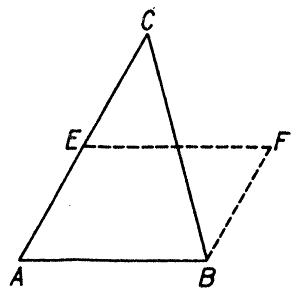
V obr. 30 vidíme, jak lze rovnoběžník $ABCD$ proměniti v obdélník ABC_1D_1. Obdélník má týž obsah jako rovnoběžník, protože oba mají společnou stranu AB a obě protější strany CD, C_1D_1 leží v téže přímce. O takových rovnoběžnících jsme již řekli, že mají stejný obsah. To je ukázka, jak lze konstruktivně proměnit rovnoběžník v obdélník.



Obr. 30.



Obr. 31a.



Obr. 31b.

1. úloha. Proměňte trojúhelník v rovnoběžník!

V obr. 31a a 31b jsou naznačeny způsoby proměny trojúhelníka *ABC* na rovnoběžník. V obr. 31a rozpůlíme stranu *AB*, střed označíme *D*. Trojúhelník *ADC* je polovinou rovnoběžníka *ADCE*; avšak trojúhelníky *ADC*, *DBC* mají stejný obsah, neboť mají stejnou základnu $\overline{AD} = \overline{DB}$ a stejnou výšku, takže trojúhelník *ADC* je také polovinou trojúhelníka *ABC*. Potom daný trojúhelník *ABC* má týž obsah jako rovnoběžník *ADCE*. Považujeme-li stranu *AD* za základnu rovnoběžníka, můžeme říci: Trojúhelník má týž obsah jako rovnoběžník o poloviční základně a stejné výšce.

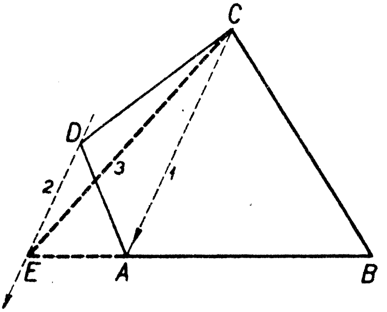
Trojúhelník můžeme proměnit v rovnoběžník i jinak. V obr. 31b je *E* střed strany *AC*. Trojúhelník *BAE* doplníme na rovnoběžník *ABFE*. Potom je trojúhelník *ABE* polovinou rovnoběžníka *ABFE*, neboť vznikl rozdělením rovnoběžníku úhlopříčkou, a zároveň je polovinou daného trojúhelníka *ABC*, neboť má poloviční základnu ($\overline{AE} = \overline{EC}$) a stejnou výšku. Proto trojúhelník *ABC* má týž obsah jako rovnoběžník *ABFE*, při čemž trojúhelník a rovnoběžník mají společnou základnu (*AB*) a rovnoběžník má poloviční výšku. Trojúhelník má tedy týž obsah jako rovnoběžník o stejné základně a poloviční výšce.

2. úloha. Proměňte čtyrúhelník na trojúhelník!

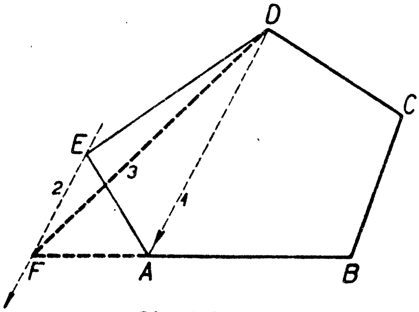
V obr. 32a máme narýsovaný čtyrúhelník *ABCD*. Tam je také naznačeno, jak jej proměníme na trojúhelník. Bodem *D* vedeme rovnoběžku s úhlopříčkou *AC* čtyrúhelníka. Bod *E* je průsečík této rovnoběžky s prodloužením úsečky *AB* za bod *A*. Trojúhelníky *ACD*, *ACE* mají společnou stranu *AC* a protější vrcholy *D*, *E* leží na rovnoběžce s touto společnou stranou *AC*; proto tyto trojúhelníky mají stejný obsah. Připojíme-li k trojúhelníku *ABC* trojúhelník *ACD*, vznikne daný čtyrúhelník; připojíme-li k témuž trojúhelníku *ABC* trojúhelník ACE, který má stejný obsah jako trojúhelník ACD, vznikne trojúhelník EBC. Jaký obsah mají daný čtyrúhelník $ABCD$ a trojúhelník EBC?

3. úloha. Proměňte pětiúhelník na trojúhelník!

V obr. 32b je daný pětiúhelník $ABCDE$ proměněn na čtyrúhelník $FBCD$. Konstrukce je naznačena. Proveďte ji sami a popište! Návod: Jednou úhlopříčkou daného pětiúhelníka (v našem případě AD) rozdělíme obrazec na čtyr-



Obr. 32a.



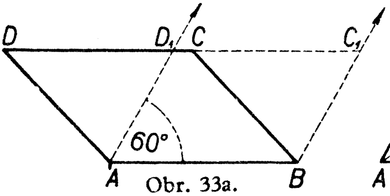
Obr. 32b.

úhelník $ABCD$ a trojúhelník ADE. Podobným postupem jako u předešlého obrazce proměníme trojúhelník na jiný tak, aby jedna jeho strana byla v prodloužené straně čtyrúhelníka. Tak proměníme pětiúhelník na čtyrúhelník. Ten dále stejným postupem (provedeno již v předcházející úloze) na trojúhelník. Proměňte výsledný trojúhelník na rovnoběžník!

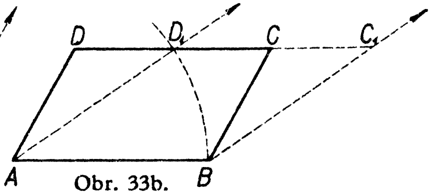
Podobně můžeme každý mnohoúhelník proměnit na jiný, který bude mít počet stran o jednu menší. Tak pokračujeme dále, až dostaneme trojúhelník. Poněvadž umíme již trojúhelník proměnit v rovnoběžník, a ten v obdélník, umíme tak každý mnohoúhelník proměnit v obdélník.

4. úloha. Daný rovnoběžník proměňte na jiný s daným úhlem při základně.

V obr. 33a je dán rovnoběžník $ABCD$ a je v něm naznačen postup proměny. Návod: Úhel 60° je úhel BAD_1. Sestrojíme jej tak, aby jeho vrcholem byl bod A, jedním ramenem strana AB. Vrcholem B sestrojíme rovnoběžku s AD_1, buď posunutím pravítka, nebo kružítkem a pravítkem, a doplníme na rovnoběžník.



Obr. 33a.

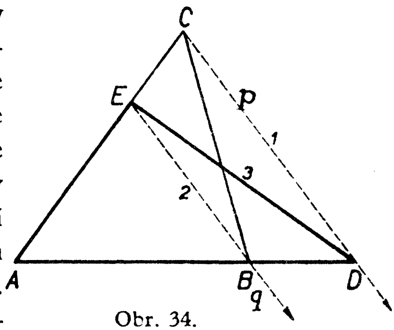


Obr. 33b.

Podobně v obr. 33b je řešen úkol proměnit rovnoběžník $ABCD$ na kosočtverec o straně AB. Jak je v obrazci naznačeno, opíše se oblouk poloměrem AB o středu A a určí se jeho průsečík D_1 se stranou CD. AD_1 je druhou stranou hledaného kosočtverce. Konstrukce je v obr. 33b naznačena, dokončete ji sami.

5. úloha. Proměňte daný trojúhelník na jiný o dané délce strany.

V obr. 34 je naznačena konstrukce proměny trojúhelníka ABC na jiný trojúhelník ADE, u kterého $\overline{AD}$ je daná délka větší než $\overline{AB}$. Nejdříve spojíme body CD spojnicí p a potom vedeme bodem B rovnoběžku q s přímkou p. Ta protne stranu AC v bodě E. Odůvodnění: Trojúhelníky EBD, EBC mají společnou stranu EB a protější vrcholy C, D leží na rovnoběžce s touto společnou stranou. Proto mají tyto trojúhelníky stejný obsah. Připojíme-li nyní k trojúhelníku ABE jednou trojúhelník EBC, dostaneme daný trojúhelník ABC; připojíme-li po druhé k témuž trojúhelníku ABE trojúhelník EBD, dostaneme trojúhelník ADE. Poněvadž oba připojované trojúhelníky mají stejný obsah, je obsah výsledných trojúhelníků (kterých?) týž, a to odůvodnit bylo naším úkolem.



Obr. 34.

Kdybychom měli trojúhelník ADE proměnit na jiný o kratší základně AB, postupovali bychom stejně jako v případu v obr. 34. Konstrukci popište sami!

Cvičení.

58. Sestrojte libovolný trojúhelník ABC. Proměňte jej na obdélník a) o základně AB, b) o základně, která se rovná polovině strany BC.

59. Sestrojte trojúhelník ABC. Proměňte jej na kosočtverec o výšce, která se rovná výšce daného trojúhelníka příslušné ke straně AC. Kolik řešení může nastat? $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm.

60. Narýsujte pravidelný šestiúhelník s délkou strany 4 cm. Proměňte jej na obdélník alespoň dvěma způsoby.

61. Narýsujte libovolný pětiúhelník a proměňte jej alespoň dvěma způsoby na trojúhelník. U každého výsledného trojúhelníku změřte jednu stranu a k ní příslušnou výšku a srovnejte obsahy obou trojúhelníků.

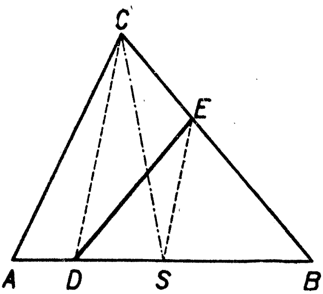
62. Narýsujte libovolný čtyrúhelník. Proměňte jej dvojím způsobem na obdélník. Vypočtěte a srovnejte obsahy obou obdélníků.

63. Narýsujte trojúhelník ABC tak, aby bylo $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm.
a) Na polopřímce AB určete body D, E tak, že $\overline{AD} = 5$ cm, $\overline{AE} = 7$ cm. Sestrojte trojúhelníky ADF, AEG, které mají stejný obsah jako daný trojúhelník.

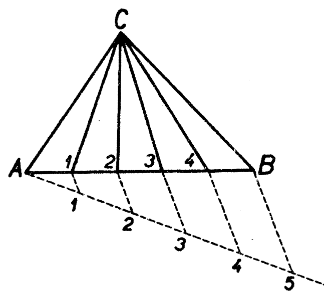
b) Sestrojte trojúhelníky ABH, ABK o stejném obsahu, jako má trojúhelník ABC tak, aby byl $\sphericalangle BAH = 75°$, $\sphericalangle AKB = \sphericalangle KAB$.

c) Sestrojte trojúhelník ALM o stejném obsahu, jako má trojúhelník ABC tak, aby bylo $\overline{AL} = 8$ cm, $\overline{AM} = 4$ cm. (Nejprve proměňte daný trojúhelník ABC na ALP, kde L leží na AB, $\overline{AL} = 8$ cm, a potom trojúhelník ALP na ALM, kde $MP \parallel AL$, $\overline{AM} = 4$ cm).

64. Rovnostranný trojúhelník o straně 6 cm proměňte na kosočtverec o straně 5 cm. (Nejprve proměňte trojúhelník na jiný o straně 5 cm.)



Obr. 35.

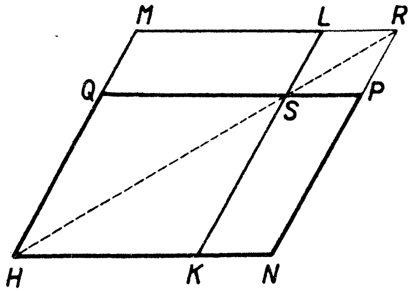


Obr. 36.

***65.** V obrazci 35 je znázorněno, jak se dá libovolný trojúhelník ABC rozdělit na dva stejné díly úsečkou DE, jejíž jeden krajní bod D je dán na straně AB a jejíž druhý krajní bod E se má určit na straně BC. (Určíme střed S strany AB.) Trojúhelník CDS proměníme na trojúhelník CDE o společné straně CD, proto $CD \parallel ES$. Trojúhelník ASC je polovina trojúhelníku ABC. K trojúhelníku ADC přidáme jednou trojúhelník CDS, po druhé trojúhelník CDE. Zvolte jednou D mezi A a S, v druhém obrázku D mezi S a B. Na které straně bude bod E?

***66.** V obr. 36 je naznačeno, jak se dá trojúhelník ABC rozdělit na pět stejných dílů. Základnu AB jsme rozdělili na pět stejných dílů a dělicí body spojili s vrcholem C. Každý z těch dílčích trojúhelníků má stejnou základnu a stejnou výšku.

Narýsujte podobný trojúhelník a rozdělte jej na dva díly tak, aby jeden jeho díl byl $1\frac{1}{2}$krát větší než druhý.



Obr. 37.

*67. a) V obr. 37 je naznačeno, jak můžeme rovnoběžník *HKLM* proměnit na jiný rovnoběžník *HNPQ*. Rovnoběžník *HNPQ* má základnu *HN* delší než je základna daného rovnoběžníka. Odůvodněte tuto konstrukci. Návod: Uvažujte nejdříve rovnoběžník *HNRM* a v něm oba trojúhelníky vzniklé rozdělením rovnoběžníka *HNRM* úhlopříčkou *HR*. Potom srovnejte trojúhelníky v rovnoběžníku *HKSQ* vzniklé rozdělením úhlopříčkou *HS*. Jaké obsahy budou mít rovnoběžníky *QSLM* a *KNPS*? Jak vznikly z obou uvažovaných rovnoběžníků rovnoběžníky *HNRM*, *HKSQ*?

b) Narýsujte rovnoběžník a proměňte jej na jiný jednou s delší základnou, po druhé s kratší základnou než je základna původního rovnoběžníka.

*68. Obdélník o stranách 5 cm a 3 cm proměňte na rovnoběžník o základně 3,5 cm a úhlu 75°! Užijte výsledku cvičení 67.

*69. Narýsujte rovnoběžník a dokažte, že jej půlí každá přímka jdoucí jeho středem. (Na jaké obrazce rozdělí rovnoběžník přímka jdoucí jeho středem? Srovnejte výšky a střední příčky lichoběžníků.)

*70. Zvolte bod vně rovnoběžníku. Tímto bodem veďte přímku, která daný rovnoběžník půlí. Užijte výsledku cvičení 69.

III. PYTHAGOROVA VĚTA.

1. Odvození Pythagorovy věty.

Mezi nejjednodušší rovinné geometrické obrazce patří trojúhelník. Na něm měříme šest základních prvků: délky tří stran a velikosti tří vnitřních úhlů. Třemi z právě vyjmenovaných prvků může být trojúhelník určen. Nesmí to být ovšem tři vnitřní úhly. Proč? Jsou však možné čtyři trojice základních prvků, kterými je trojúhelník určen; ve druhé třídě byly tyto čtyři možnosti vysloveny větami o určenosti trojúhelníků.

Z trojúhelníků budeme nyní probírat trojúhelník pravoúhlý. V každém pravoúhlém trojúhelníku známe jeden úhel — je to úhel pravý. Proto je pravoúhlý trojúhelník určen dalšími dvěma prvky — dvěma stranami nebo stranou a jedním ostrým úhlem.

Z obou odvěsen můžeme sestrojit trojúhelník pravoúhlý, a to jediný. Délka přepony je tedy určena jednoznačně délkami obou odvěsen. Sestrojte trojúhelník pravoúhlý z odvěsen o délkách 3 cm a 4 cm. Změřte přeponu. Je dlouhá 5 cm?

Změřte odvěsnu v trojúhelníku pravoúhlém, který je určen druhou odvěsnou, dlouhou 5 cm, a přeponou, dlouhou 13 cm. Je dlouhá 12 cm?

Později poznáme, že skutečně musí být přepona v pravoúhlém trojúhelníku o odvěsnách dlouhých 3 cm a 4 cm dlouhá 5 cm a odvěsna v trojúhelníku o přeponě 13 cm a odvěsně 5 cm dlouhá 12 cm. A naopak; každý trojúhelník, který má strany dlouhé 3, 4, 5 jednotkových délek nebo 5, 12, 13 jednotkových délek, je trojúhelník pravoúhlý.

Úloha.

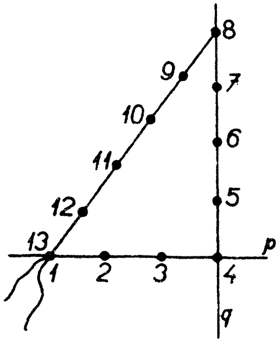
Na pevném motouzu udělejte 13 stejně od sebe vzdálených uzlů. Tuto vzdálenost volte raději větší, na př. aspoň 50 cm. Na podlaze nebo na dvoře narýsujte přímku a podle ní napněte část motouzu mezi prvním a čtvrtým uzlem (obr. 38). K podlaze upevněte první a čtvrtý uzel. Potom upevněte třináctý uzel v témž místě jako první a motouz napněte tak, aby v osmém uzlu měnil směr a vracel se k prvnímu uzlu. (Napněte motouz v osmém uzlu tak, aby byl všude stejně napjatý.) Upevněte nyní osmý uzel a podél části motouzu mezi čtvrtým a osmým uzlem veďte přímku. Je kolmá k původní přímce (mezi prvním a čtvrtým uzlem).

Již dávno, snad více než 1000 let př. n. l. byli si předchůdci dnešních zeměměřičských inženýrů vědomi toho, že trojúhelník o stranách 3, 4, 5 délkových jednotek je pravoúhlý. Z rozluštěných zápisů starých Egypťanů se dovídáme, že užívali motouzu takto zauzleného k vytyčování pravého úhlu při vyměřování polí po pravidelných povodních v krajině podél Nilu. Podobně vytyčovali pravé úhly v Číně, Indii a Babylonii. Snad si též všimli, že čísla 3, 4, 5 nebo 5, 12, 13 vyhovují vztahům:

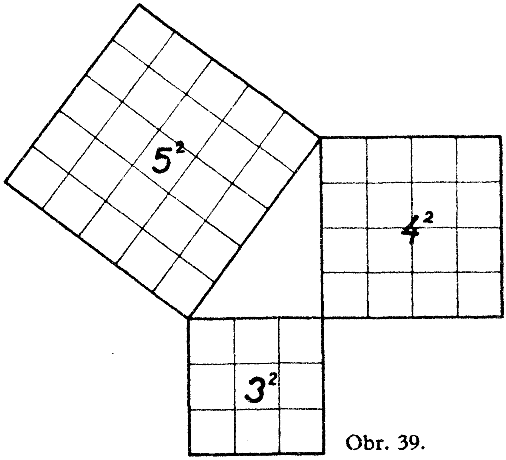
$$3^2 + 4^2 = 5^2; \qquad 5^2 + 12^2 = 13^2.$$

Čtverec o straně 3 jednotky délkové má obsah 3^2 příslušné plošné jednotky. Náš vztah říká, že obsah čtverce o straně rovné 3 jednotkám dohromady s obsahem čtverce o straně rovné 4 stejným jednotkám se rovná obsahu čtverce o straně rovné 5 týmž délkovým jednotkám. Podobně i vztah druhý ($5^2 + 12^2 = 13^2$).

V obr. 39 jsou nad stranami trojúhelníka o stranách rovných 3, 4, 5 jednotkám sestrojeny čtverce a provedena síť čtverečků o straně rovné 1 jednotce.



Obr. 38.

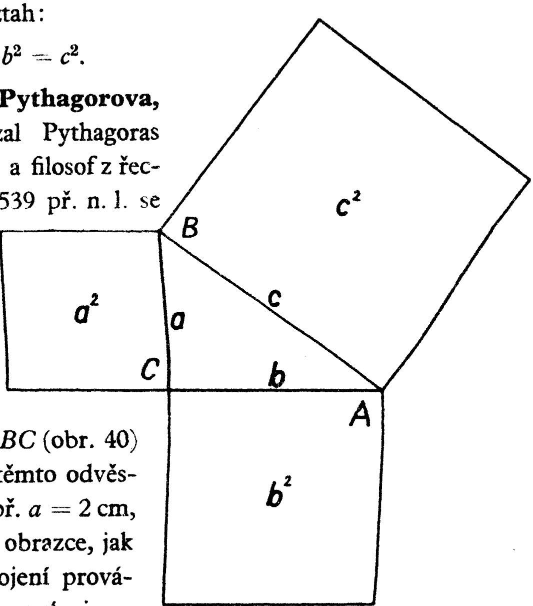


Obr. 39.

Vyjádřete slovy pozorování o vztazích obsahů narýsovaných čtverců. Dokážeme nyní, že mezi délkami odvěsen (a, b) a délkou přepony (c) každého trojúhelníka pravoúhlého, platí vztah:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

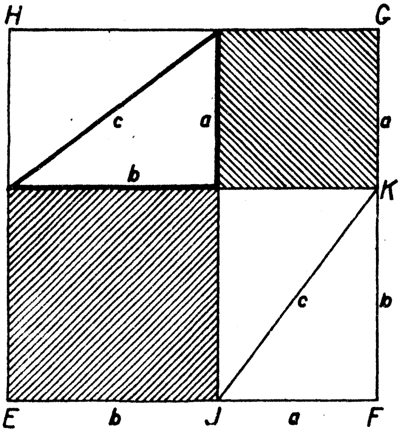
Vyslovenému vztahu se říká **věta Pythagorova,** protože prý ji objevil a dokázal Pythagoras (asi 569—500 př. n. l.), matematik a filosof z řeckého ostrova Samos. Kolem roku 539 př. n. l. se vystěhoval Pythagoras z politických důvodů do jižní Italie, jež patřila tehdy k Velkému Řecku, a založil tam známou školu vědců. Tato škola proslula matematickými a fysikálními pracemi a objevy.



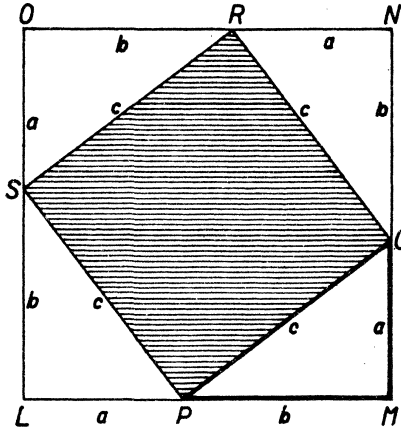
Obr. 40.

V pravoúhlém trojúhelníku ABC (obr. 40) označme odvěsny a, b, úhly proti těmto odvěsnám α, β a přeponu c (zvolme na př. $a = 2$ cm, $b = 3{,}5$ cm). Nyní narýsujme oba obrazce, jak vidíme na obr. 41ab. Jejich sestrojení provádějme v tomto pořadí: Nejdříve narýsujeme dva shodné čtverce $EFGH$, $LMNO$ o straně dlouhé $a + b$ (opět na př. $a + b = 2 + 3{,}5 = 5{,}5$; 5,5 cm). Ve čtverci $EFGH$ naneseme na stranu EF úsečku EJ dlouhou b jednotek a na stranu FG

úsečku FK stejně dlouhou (b jednotek). Pak vedeme body J a K vnitřkem čtverce $EFGH$ rovnoběžky se stranami tohoto čtverce. Tím se tento čtverec rozdělil na dva menší čtverce o stranách a, b a dva shodné obdélníky o stranách a, b (délka b, šířka a). V každém ze vzniklých obdélníků vedeme po jedné úhlopříčce, která neprochází vrcholem F nebo H. Tak vzniknou čtyři shodné trojúhelníky pravoúhlé o odvěsnách a, b. Jsou to trojúhelníky shodné s trojúhelníkem v obr. 40. V levém horním obdélníku o vrcholu H narýsujeme barevně (třeba červeně) trojúhelník ležící proti tomuto vrcholu a vyšrafujeme barevně (třeba modře) oba čtverce ležící při jeho odvěsnách.



Obr. 41a.



Obr. 41b.

Ve čtverci $LMNO$ naneseme na stranu LM úsečku $\overline{LP}$, na stranu MN úsečku $\overline{MQ}$, na stranu NO úsečku $\overline{NR}$, na stranu OL úsečku $\overline{OS}$, vesměs rovné a délkových jednotek. Spojením bodů, které jsme takto dostali, obdržíme čtyrúhelník $PQRS$.

V rozích čtverce $LMNO$ vznikly tak čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky o odvěsnách a, b. Strany čtyrúhelníka $PQRS$ jsou stejně dlouhé.

Vypočítejme si ještě velikosti vnitřních úhlů tohoto čtyrúhelníka. Přímý úhel LPM s vrcholem P a rameny ve straně LM se rozdělil na tři úhly, které si značme $\sphericalangle LPS = \beta$, $\sphericalangle SPQ$, $\sphericalangle MPQ = \alpha$. Je tedy: $\beta + \sphericalangle SPQ + \alpha = 2R$. Úhly α, β jsou doplňkové úhly, neboť jsou to ostré úhly v pravoúhlém trojúhelníku. Potom je ovšem úhel SPQ pravý. Čtyrúhelník $PQRS$ je rovnostranný s jedním vnitřním pravým úhlem, je to tedy čtverec.

Vytáhněme nyní barevně (červeně) na př. trojúhelník PMQ a vyšrafujme barevně (modře) čtverec nad jeho přeponou PQ.

Z obou shodných čtverců $EFGH$, $LMNO$ ubereme po čtyřech shodných pravoúhlých trojúhelnících (shodných s $\triangle\ ABC$). Zbývající části mají stejný obsah. Jsou to: ze čtverce $EFGH$ dva čtverce o straně jednak a, jednak b, ze čtverce $LMNO$ čtverec o straně c. Poněvadž a, b jsou odvěsny pravoúhlého trojúhelníka a c je přepona téhož trojúhelníka, platí poučka:

Součet čtverců nad oběma odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka se rovná čtverci nad jeho přeponou. Tuto větu nazýváme **větou Pythagorovou.**

Početně je Pythagorova věta vyjádřena vztahem

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Známe-li délky odvěsen a, b, vypočteme jejich druhé mocniny a sečteme je. Součet s je podle Pythagorovy věty roven druhé mocnině délky přepony: $s = c^2$. Tedy číslo c samo je číslem, jehož druhá mocnina je rovna s, neboli c je druhá odmocnina čísla s; t. j. $c = \sqrt{s}$, a v původním označení

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Je tedy k výpočtu přepony z odvěsen třeba určit druhou odmocninu, což provádíme podle tabulek.

Pythagorovy věty užíváme také k výpočtu odvěsny, je-li známa přepona a druhá odvěsna. Budiž dána přepona c a odvěsna a. Platí $a^2 + b^2 = c^2$; tedy $b^2 = c^2 - a^2$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Odmocninu určíme opět z tabulek.

Procvičme si výpočty na několika příkladech:

1. V pravoúhlém trojúhelníku jsou délky odvěsen $m = 7$ cm, $n = 24$ cm. Vypočtěte délku přepony.

V tomto případě napíšeme Pythagorovu větu ve tvaru: $m^2 + n^2 = p^2$, kde p je přepona trojúhelníka.

Z tohoto vzorce dostaneme po dosazení: $7^2 + 24^2 = p^2$, $p^2 = 625$. Je tedy $p = \sqrt{625}$, což je 25, jak snadno zjistíme z tabulek.

Dané délky jsou často vyjádřeny zlomky a při užití Pythagorovy věty musíme počítat druhou odmocninu zlomku. Je proto užitečné vědět, že druhá odmocnina zlomku se rovná druhé odmocnině čitatele lomené druhou odmocninou jmenovatele. Víte, že na příklad

$$\left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{6^2}{7^2} = \frac{36}{49}\,.$$

Avšak $6^2 = 36$ znamená totéž jako $\sqrt{36} = 6$,

$7^2 = 49$ znamená totéž jako $\sqrt{49} = 7$,

$\left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{36}{49}$ znamená totéž jako $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$;

tedy skutečně

$$\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}}.$$

2. Přepona pravoúhlého trojúhelníka $x = \frac{16}{7}$ cm; jedna odvěsna $y = \frac{9}{5}$ cm. Označme druhou odvěsnu z.

Jest: $z^2 = x^2 - y^2 = \left(\frac{16}{7}\right)^2 - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{16^2}{7^2} - \frac{9^2}{5^2} = \frac{16^2 \,.\, 5^2 - 9^2 \,.\, 7^2}{7^2 \,.\, 5^2} =$

$$= \frac{6400 - 3969}{(7\,.\,5)^2} = \frac{2431}{35^2}\,;$$

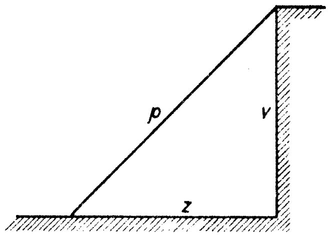
tedy $z = \frac{\sqrt{2431}}{35}$ a podle tabulek $z \doteq \frac{49}{35}$.

(Neprovedli jsme výpočet $35^2 = 1225$, neboť bychom potom podle tabulek teprve určovali, že $\sqrt{1225} = 35$, a je zřejmé bez tabulek, že $\sqrt{35^2} = 35$.)

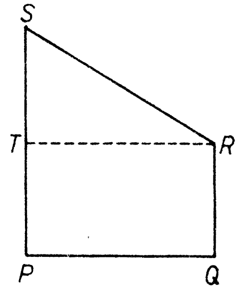
V praxi není vždy přímo dán pravoúhlý trojúhelník. Často ho musíme hledat nebo do dané úlohy graficky vyznačené doplnit. Tak na př.: Žebřík právě dosáhne horní hrany svislé zdi vysoké 9 m, je-li jeho spodní konec vzdálen 2,5 m od zdi. Jak dlouhý je žebřík?

Představme si situaci: Svislou zeď znázorníme svislou úsečkou dlouhou 9 jednotek (na př. cm), na kolmici k ní v dolením krajním bodě vztyčené naneseme 2,5 jednotek a máme tak znázorněn dolení konec žebříku. Délka žebříku je přeponou vzniklého trojúhelníku pravoúhlého. Označíme výšku zdi v, vzdálenost žebříku od paty z, délku žebříku p (obr. 42).

Platí: $p^2 = z^2 + v^2$. Po dosazení daných hodnot: $p^2 = 9^2 + 2{,}5^2 = 87{,}25$. Po vyhledání hodnoty odmocniny v tabulkách a po zaokrouhlení na dvě platné cifry zjistíme, že $p \doteq 9{,}3$ m. Žebřík je dlouhý 9,3 m.



Obr. 42.



Obr. 43.

V obr. 43 je znázorněna jednoduchá stavební konstrukce. V pravoúhlém lichoběžníku $SRQP$ je $SP \perp PQ$, $RQ \perp PQ$; $\overline{PS} = 3$ m, $\overline{PQ} = 24$ dm, $\overline{QR} = 12$ dm. Máme určiti $\overline{RS}$.

$PQRS$ je lichoběžník pravoúhlý. Sestrojíme-li bodem R rovnoběžku se stranou PQ, získáme trojúhelník pravoúhlý SRT, kde T je průsečík strany SP s přímkou $TR \parallel PQ$. V tomto trojúhelníku platí: $\overline{RS}^2 = \overline{ST}^2 + \overline{RT}^2$. Po dosazení: $\overline{RS}^2 = 18^2 + 24^2 = 324 + 576 = 900$. $\overline{RS} = 30$.

Cvičení.

71. V trojúhelníku pravoúhlém vypočítejte přeponu, jsou-li dány v cm·
a) odvěsny $a = 8$, $b = 15$; b) odvěsny $m = 5$, $n = 12$;
c) odvěsny $p = 2{,}4$, $q = 3{,}2$; d) odvěsny $u = 18$, $v = 25$.

72. V trojúhelníku pravoúhlém vypočítejte odvěsnu, jsou-li dány v cm
a) přepona $c = 18$, odvěsna $a = 15$; b) přepona $q = 75$, odvěsna $r = 45$;
c) přepona $r = 57$, odvěsna $s = 49$; d) přepona $1 = 17$, odvěsna $m = 10$.

73. Žebřík dlouhý 10 m je opřen o zeď tak, že jeho spodní okraj je vzdálen 6 m ode zdi. Jak vysoko sahá žebřík?

74. Letadlo letělo od letiště 150 km k severu a potom 50 km k západu. Jak je vzdáleno od letiště?

75. V obr. 43, v němž $SP \perp PQ$, $RQ \perp PQ$, jest $\overline{PS} = 8{,}4$ m, $\overline{QR} = 3{,}6$ m, $\overline{RS} = 7{,}2$ m. Určete $\overline{PQ}$.

76. Vypočítejte obvod a obsah pravoúhlého trojúhelníka, jsou-li dány: a) odvěsny $p = 51$ cm, $q = 14$ dm; b) odvěsna $h = 7{,}2$ dm, přepona $k = 97$ cm.

77. Jak dlouhé je zábradlí nad schodištěm ze 17 schodů, z nichž každý je 32 cm široký a 14,5 cm vysoký?

78. Pravoúhlý lichoběžník má základny dlouhé 92 cm, 76 cm a výšku 63 cm. Vypočítejte délku kosého ramene, obvod lichoběžníka, délky jeho úhlopříček a jeho obsah!

79. V pravoúhlém lichoběžníku jsou základny dlouhé 12,4 dm, 7,6 dm, a kosé rameno 7,3 dm. Určete obvod a obsah lichoběžníka.

2. Úhlopříčka obdélníka a čtverce.

a) Úhlopříčka obdélníka.

Úhlopříčka obdélníka rozdělí jej na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Je-li obdélník dán svými stranami $a = 5{,}3$ m, $b = 2{,}8$ m, vypočítáme jeho úhlopříčku z trojúhelníka: $u^2 = a^2 + b^2 = 5{,}3^2 + 2{,}8^2 = 35{,}93$. Po určení odmocniny z tabulek je $u \doteq 5{,}99$ m (zaokrouhleno na tři platné cifry).

Jestliže budeme rýsovat obrazec, vyjde i při přesném rýsování úhlopříčka dlouhá 6 m (na př. při ocelové konstrukci). Uvažte, že měřítko je 1 : 100. Přesnost grafického určení délky u je omezena měřítkem plánu, dále prostředky, jichž užíváme k rýsování, a osobními chybami nepřesného rýsování a odhadování délky. Výpočtem můžeme najít délku s takovou přesností, jakou vyžaduje daný technický úkol, nebo s takovou přesností, s jakou byly opatřeny dané veličiny.

b) Úhlopříčka čtverce.

Úhlopříčka dělí čtverec na dva shodné pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky. Odvěsna je a, přepona je úhlopříčka u. Podle Pythagorovy věty je $u^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. Délka úhlopříčky: $u = \sqrt{2a^2}$.

Znásobíme-li $(a\sqrt{2}) \cdot (a\sqrt{2})$ tak, že zaměníme pořadí činitelů, dostaneme $a \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, což je $2a^2$. Je tedy $(a\sqrt{2})^2 = 2a^2$, neboli $\sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

Vyhledáme z tabulek hodnotu $\sqrt{2}$ na čtyři cifry: $\sqrt{2} \doteq 1{,}414$. Úhlopříčku čtverce vypočítáme, znásobíme-li délku strany číslem 1,414. Tento výpočet je jen přibližný, neboť jsme hodnotu druhé odmocniny zaokrouhlili na čtyři platné číslice.

Naopak z délky úhlopříčky vypočítáme délku strany čtverce tak, že hodnotu délky úhlopříčky dělíme druhou odmocninou dvou: $a = \frac{u}{\sqrt{2}}$. To vyplývá ze vzorce: $u = a\sqrt{2}$.

c) Výška pravoúhlého trojúhelníka.

Výška pravoúhlého trojúhelníka příslušná k přeponě se vypočítá z obsahu trojúhelníku. Výškou rozumíme vždy jen výšku k přeponě, neboť ostatní dvě výšky jsou odvěsnami trojúhelníku.

Obsah trojúhelníku vypočítáme jednak jako poloviční součin obou odvěsen, jednak jako poloviční součin přepony a příslušné výšky;

$P = \frac{1}{2}\,ab = \frac{1}{2}\,cv$. Z obou napsaných rovnic plyne, že se rovnají také součiny: $ab = cv$. Z této rovnice vypočteme pak výšku $v = \frac{ab}{c}$.

Známe-li dvě strany pravoúhlého trojúhelníka, vypočteme třetí stranu užitím Pythagorovy věty a ze všech tří stran podle napsaného vzorce výšku příslušnou k přeponě.

Cvičení.

80. V obdélníku dlouhém 3,4 m měří úhlopříčka 4,1 m. Jak veliký je jeho obsah?

81. Určete délku úhlopříčky obdélníka s rozměry 5,2 dm, 6,8 dm.

82. Strana čtverce je dlouhá 23 cm. Vypočtěte délku jeho úhlopříčky.

83. Strana čtverce je 1,7 dm dlouhá. Vypočtěte délku poloměru kružnice čtverci opsané a vepsané.

84. Potřebujeme vysoustruhovat čtvercovou hlavici o straně dlouhé 72 mm. Jak veliký musí býti alespoň průměr kruhového odlitku vhodného k této práci?

85. Průměr kmene je 27 cm. Lze z něho vytesat kládu čtvercového průřezu o straně 18,2 cm?

86. V obdélníku je šířka o 30 m kratší než délka, obvod je 300 m. Určete délky stran, úhlopříček a obsah obdélníka.

87. Ve čtverci má příčka spojující vrchol se středem protější strany délku 4 cm. Určete délku strany a úhlopříčky čtverce.

88. Do kružnice o průměru 99 cm je vepsán čtverec. Vypočtěte jeho obsah!

89. V obdélníkovém sadě širokém 27 m zabraňují keře změřit délku sadu. Protější rohy sadu jsou spojeny cestou dlouhou 143 m. Určete plošnou výměru sadu v arech.

90. Obdélník je 23 cm dlouhý a 14 cm široký. Určete poloměr opsané kružnice!

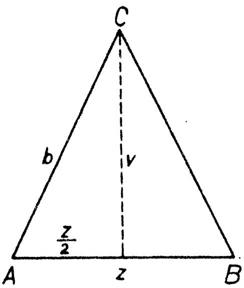
***91.** Strany obdélníka jsou v poměru 1 : 2. Spojnice středů sousedních stran je dlouhá 20 cm. Vypočtěte délky stran.

***92.** Normalisovaný kancelářský papír má strany v poměru $1 : \sqrt{2}$. Šířka je 210 mm. Vypočtěte jeho délku!

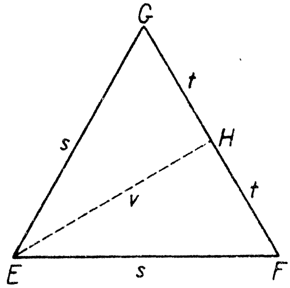
***93.** Vypočtěte délku všech úseček v obr. 41, je-li $\overline{JK} = 26$ cm, $\overline{JF} = 10$ cm.

3. Trojúhelník rovnoramenný a rovnostranný.

Pythagorovy věty můžeme užíti také na rovnoramenný trojúhelník. Výška příslušná k základně rozdělí rovnoramenný trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky, z nichž každý má za přeponu rameno daného trojúhelníka a za odvěsny polovinu základny a výšku příslušnou k základně. Jsou to tedy trojúhelníky shodné. Označme podle obr. 44 základnu z, rameno b, výšku v. Potom můžeme zapsat vztah mezi polovinou základny, ramenem a výškou podle Pythagorovy věty: $b^2 = v^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2$. (Proč dáváme $\frac{z}{2}$ do závorky? Jaká bude druhá mocnina tohoto členu?) Je-li na př. rovnoramenný troj-



Obr. 44.



Obr. 45.

úhelník určen základnou a ramenem, vypočítáme jeho výšku s pomocí Pythagorovy věty: $v^2 = b^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2$. Potom můžeme určit obsah daného trojúhelníka rovnoramenného ze vzorce $P = \frac{z \,.\, v}{2}$, kam dosadíme za v výraz již naznačený.

Co jsme řekli o trojúhelníku rovnoramenném, platí také pro trojúhelník rovnostranný. V obr. 45 máme rovnostranný trojúhelník EFG rozdělený výškou na dva shodné trojúhelníky pravoúhlé EFH, EGH. Položme

$$\overline{EF} = s, \quad \overline{EH} = v, \quad \overline{FH} = t.$$

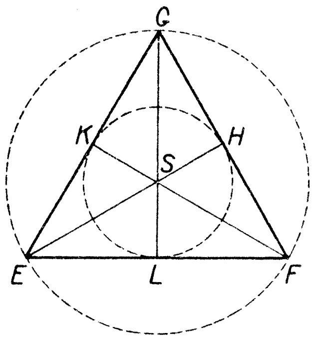
Z obrázku vidíme, že $s = 2t$. Podle Pythagorovy věty platí $t^2 + v^2 = s^2$; Z aritmetiky víme, že $s^2 = s.s$ a tedy také $(2t)^2 = 2t.2t = 4t^2$.

Potom po dosazení do rovnice: $t^2 + v^2 = s^2$ platí: $t^2 + v^2 = 4t^2$. Výraz $4t^2$ vznikne, přičteme-li k v^2 jedno t^2. Je tedy $4t^2$ o jedno t^2 větší než v^2, neboli $v^2 = 4t^2 - t^2$; $v^2 = 3t^2$. Odtud $v = \sqrt{3}.t$ (odmocnili jsme obě strany).

Poněvadž t je polovina strany s, platí také: $v = \sqrt{3} \cdot \frac{s}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$, což je vzorec, podle kterého můžeme počítat výšku rovnostranného trojúhelníku, známe-li délku strany.

Poznámka. Všimněme si znovu trojúhelníka EFH. Jeho úhly jsou 30°, 60° a 90°. Protilehlé strany jsou označeny t, v, s. Vezměme za základ t. Jest $v = \sqrt{3} \cdot t$; $s = 2t$. Utvoříme-li poměr z těchto tří délek vyjádřených pomocí t, máme $t : v : s = 1 : \sqrt{3} : 2$. Tento poměr není vůbec závislý na délkách, neboť se v něm žádná délka nevyskytuje; platí proto pro každý trojúhelník rovnostranný, ať je délka strany jakákoli. Trojúhelník rovnostranný dostaneme z trojúhelníka EFH, připojíme-li k němu trojúhelník shodný, aby měly oba společnou stranu EH. Při této příležitosti si ukažme, jaký by byl poměr stran v trojúhelníku pravoúhlém rovnoramenném. Jaké jsou vnitřní úhly tohoto trojúhelníka? Protější strany k úhlům 45° jsou a, strana protější k pravému úhlu je u a je to úhlopříčka čtverce; rovná se $a \cdot \sqrt{2}$. Je tedy poměr dvou stejných odvěsen k přeponě $a : a : u = 1 : 1 : \sqrt{2}$. Tento vztah platí opět pro každý rovnoramenný trojúhelník pravoúhlý.

V obr. 46 máme znovu trojúhelník rovnostranný EFG, ve kterém jsou tentokrát vyznačeny tři výšky EH, FK, GL. Jaké jsou tyto tři výšky? Víme, že se protínají v jednom bodě (S). Výšky rozdělí trojúhelník EFG na šest shodných trojúhelníků pravoúhlých. To vidíme i z toho, uvažujeme-li souměrnost osovou podle tří výšek. Všimněme si nyní jednoho trojúhelníka, třeba $\triangle ELS$. Ostrý vnitřní úhel LES je 30° (ze souměrnosti podle výšky EH platí, že výška půlí vnitřní úhel při vrcholu, kterým prochází). Potom $\sphericalangle ESL$ je 60°.



Obr. 46.

Odtud: $\overline{SE} = \overline{SF} = \overline{SG} = \frac{2}{3} v$, $\overline{SH} = \overline{SK} = \overline{SL} = \frac{1}{3} v$ kde v je společná délka všech tří výšek trojúhelníka. Proto je bod S středem kružnice opsané i středem kružnice vepsané. Poloměr kružnice opsané je: $\frac{2}{3} v = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot s$ $\left(\text{vzniklo z } \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s\right)$. Poloměr kružnice vepsané je: $\frac{1}{3} v = \frac{\sqrt{3}}{6} s$ $\left(\text{vzniklo z } \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} s\right)$, kde s je délka strany trojúhelníka.

V této úvaze se vyskytlo několikrát číslo $\sqrt{3}$; zaokrouhleno na čtyři platné cifry je $\sqrt{3} \doteq 1{,}732$. Určeme nyní výraz pro obsah rovnostranného trojúhelníka s použitím strany.

Víme, že $P = \frac{z \cdot v}{2}$. Po dosazení výrazu pro v našeho trojúhelníka máme: $P = s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2$.

Obrácení Pythagorovy věty.

Dokažme si ještě tak zvanou obrácenou Pythagorovu větu. Pythagorova věta zněla: Součet čtverců nad oběma odvěsnami trojúhelníka pravoúhlého se rovná čtverci nad přeponou. Věta obrácená bude znít: Platí-li o třech stranách a, b, c nějakého trojúhelníka vztah: $c^2 = a^2 + b^2$, je tento trojúhelník pravoúhlý s odvěsnami a, b, a s přeponou c.

Sestrojme pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách p, q. Jeho přepona je podle věty Pythagorovy $r^2 = p^2 + q^2$. Položme $p = a$, $q = b$, a dosaďme do výrazu pro $r^2 = p^2 + q^2$ za p a q, máme: $r^2 = a^2 + b^2$. Tedy r^2 je táž hodnota jako $c^2 = a^2 + b^2$, a odtud $r = c$. Bude tedy trojúhelník o stranách p, q, r shodný s trojúhelníkem o stranách a, b, c podle poučky (*sss*). Je proto také trojúhelník o stranách a, b, c pravoúhlý.

Cvičení.

94. Vypočtěte obsah rovnoramenného trojúhelníka, jehož základna je dlouhá 12 cm a rameno 8 cm.

95. a, b jsou odvěsny, c přepona pravoúhlého trojúhelníka, v je výška příslušná přeponě. a) Je-li $a = 8$ cm, $b = 6$ cm, určete v. b) Je-li $a = 2{,}3$ m, $c = 5{,}2$ m, určete v. c) Je-li $\alpha = 45°$, $a = 36$ cm, určete c, v. d) Je-li $\alpha = 45°$, $c = 5{,}8$ cm, určete a, v. e) Je-li $\alpha = 60°$, $a = 4$ cm, určete b, c.

96. Určete délku výšky a obsah rovnostranného trojúhelníka o straně dlouhé 7 cm (na tři platné cifry).

97. Délka strany pravidelného šestiúhelníka je 23 cm. Určete poloměr vepsané kružnice.

98. $ABCDEF$ je pravidelný šestiúhelník; $\overline{AB} = 13$ mm. a) Určete obsah šestiúhelníka. b) Dokažte, že trojúhelník ACE je rovnostranný, určete délku jeho strany a obsah.

99. Rozhodněte, zda trojúhelník je pravoúhlý či není, jsou-li při určité volbě jednotky délkové dány délky stran těmito trojicemi čísel:

a) 4—5—6, b) 3—5—6, c) 5—12—13, d) 8—9—12, e) 12—35—37,
f) 25,5—25,7—3,2.

100. Odvěsny pravoúhlého trojúhelníka jsou dlouhé 16 cm, 12 cm. Určete poloměr opsané kružnice.

101. Základna rovnoramenného trojúhelníka je dlouhá 40 mm, úhel při základně 45°. Určete délku ramene.

Smíšené příklady.

102. Dvě strany trojúhelníka jsou dlouhé 25 cm, 30 cm. Výška ke třetí straně je dlouhá 24 cm. Určete délku třetí strany. (2 řešení.)

103. Jeden úhel při základně trojúhelníka je 45°. Výška k základně rozdělí ji na úseky 20 cm a 21 cm dlouhé. Určete délky stran trojúhelníka! (2 řešení.)

104. Délky úhlopříček kosočtverce jsou v poměru 3 : 4, obvod kosočtverce je 1 m. Určete délky úhlopříček.

105. V rovnoramenném lichoběžníku je rameno dlouhé 41 cm, výška dlouhá 4 dm a střední příčka dlouhá 45 cm. Určete délky základen.

106. Rovnoběžně se železnicí ve vzdálenosti 500 m od ní zalehlo družstvo kulometčíků. Vzdálenost krajních kulometů je 120 m, účinný dostřel je 2,8 km. Jak dlouhý úsek železnice je pod účinným dostřelem družstva?

107. Obsah rovnostranného trojúhelníka je 12 cm. Určete délku strany!

108. Odvěsny pravoúhlého trojúhelníka jsou dlouhé 8 dm, 12 dm. Určete délku těžnice vedené z vrcholu pravého úhlu.

109. Mezi dvěma továrními budovami je nad zemí zavěšeno potrubí pro přívod surovin. Vodorovná vzdálenost míst, kde potrubí vyúsťuje ze zdí budov je 21 m, potrubí vyúsťuje nad zemí ve výškách 9 m a 15 m. Určete délku potrubí.

110. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a v něm výšku AD. Dokažte, že $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2$.

111. Dokažte, že v pravoúhlém lichoběžníku je rozdíl druhých mocnin úhlopříček roven rozdílu druhých mocnin základen!

112. V pravoúhlém lichoběžníku delší rameno a kratší úhlopříčka jsou stejně dlouhé, na př. b. Je-li kratší základna dlouhá c, vypočtěte jak je dlouhá delší úhlopříčka.

113. Délky úhlopříček rovnoběžníka jsou 5 cm a 12 cm. Délka jedné strany je 65 mm. Dokažte, že je to kosočtverec.

114. Do vzorců $a^2 = m^2 - n^2$, $b = 2\,m\,.\,n$, $c^2 = m^2 + n^2$ dosazujte za m, n celá kladná čísla, m větší než n, na př. $m = 2$, $n = 1$ nebo $m = 3$, $n = 2$ a pod.. Ukažte, že taková trojice čísel a, b, c vyhovuje rovnici $a^2 + b^2 = c^2$.

115. Úhlopříčka čtverce je dlouhá 7 cm. Určete délku strany čtverce!

116. Topol se zlomil za vichřice ve výši 6 m nad zemí. Vršek visí ve zlomu tak, že se špička stromu dotýká půdy ve vzdálenosti 8 m od kmene stromu. Jak byl topol vysoký?

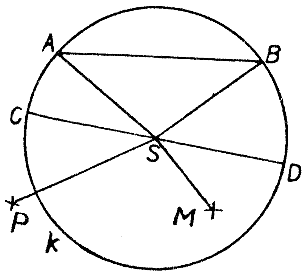
117. Vrchol továrního komínu vidíme ze vzdálenosti 32 m měřené od paty komínu pod výškovým úhlem 60°. Jak vysoký je komín? (Úhloměrný přístroj je postaven na stojanu 1,3 m nad zemí. Výškový úhel je úhel mezi spojnicí přístroje s vrcholem továrního komínu a vodorovnou rovinou.)

118. Pole tvaru pravoúhlého trojúhelníka má plošnou výměru 13 arů 20 m², jedna odvěsna je 33 m dlouhá. Vypočtěte obvod pole!

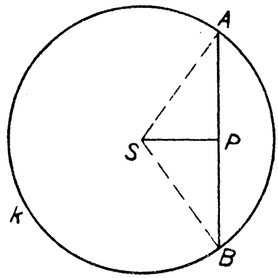
IV. KRUŽNICE.

1. Kružnice a přímka.

Na obr. 47 vidíte kružnici k se středem S a poloměrem r. Kružnici dovedeme narýsovat, je-li dán její střed a poloměr nebo střed a jeden její bod. Bod A na obr. 47 leží na kružnici; má od středu S vzdálenost $\overline{SA} = r$. Bod M je **vnitřní bod kružnice,** má od středu S vzdálenost $\overline{SM} < r$. Bod P je **vnější bod kružnice,** má od středu S vzdálenost $\overline{SP} > r$. Úsečka AB je tětiva kružnice, CD je průměr kružnice. Tětiva, která není průměrem, je kratší než průměr, neboť podle známé poučky o trojúhelníku je v trojúhelníku ABS strana AB kratší než součet stran AS a BS, čili $\overline{AB} < \overline{AS} + \overline{BS} = 2r$.



Obr. 47.



Obr. 48.

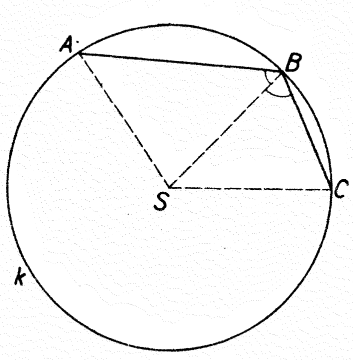
Obr. 48. **Pata kolmice spuštěné ze středu S kružnice na tětivu AB je střed úsečky AB.**

Vyslovenou poučku odůvodníme takto: osa o úsečky AB jest kolmice k ní vztyčená v jejím středu; osa o obsahuje bod S, neboť vzdálenosti $\overline{AS}$, $\overline{BS}$ jsou stejné. Uvažte, platí-li naše poučka i tehdy, je-li tětiva AB průměrem.

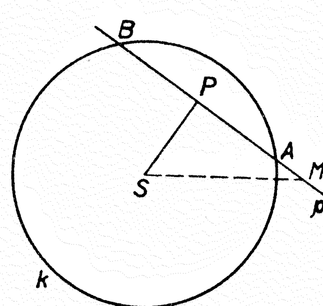
Na obr. 48 vznikly dva pravoúhlé trojúhelníky SAP, SBP, které jsou shodné podle věty *sus*. V trojúhelníku SAP je přepona AS poloměrem kružnice k (označíme jej r), odvěsna AP poloviční délkou tětivy (délku tětivy označíme d). Odvěsna SP je vzdálenost tětivy AB od středu S kružnice k; tu vzdálenost označíme písmenem v. Užijeme-li Pythagorovy věty pro trojúhelník SAP, dostaneme rovnici $r^2 = v^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$. Z této rovnice dovedeme vypočíst na př. vzdálenost tětivy od středu kružnice, známe-li délku tětivy ($d = 16$) a poloměr kružnice ($r = 17$). Vypočítejte!

Na obr. 49 jest kružnice k se středem S a na ní tři různé body A, B, C. Z obrazce vidíte, že ty tři body neleží v přímce. Ale to si dovedeme odůvodnit i úsudkem: trojúhelníky ABS, BCS jsou rovnoramenné; úhly $\sphericalangle ABS$ a $\sphericalangle SBC$, ležící při jejich základnách, jsou tedy oba ostré a jejich součet, t. j. úhel ABC není přímý. Proto body A, B, C neleží v přímce. Kdyby snad body A, B, S ležely v přímce (netvořily trojúhelník), pak bod C neleží na této přímce.

Můžeme tedy vyslovit výsledek:



Obr. 49.



Obr. 50.

Žádné tři body kružnice neleží v přímce.

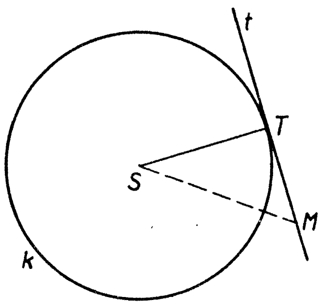
Vzájemná poloha přímky a kružnice záleží na tom, jaká je vzdálenost přímky od středu kružnice ve srovnání s poloměrem. Mohou nastati tři případy: buď je ta vzdálenost menší než poloměr, nebo se rovná poloměru, nebo je větší než poloměr. Probereme si postupně jednotlivé případy.

Vzdálenost přímky od bodu měříme na kolmici spuštěné z bodu na přímku. Na obr. 50 máme kružnici k se středem S a poloměrem r a dále přímku p, která má od středu S vzdálenost SP menší než poloměr r. Bod P je vnitřní bod kružnice k.

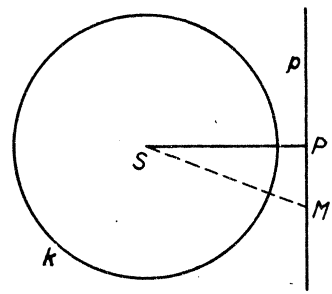
Na témž obrázku je dále bod M. Vznikl tak, že na přímku p byla od bodu P nanesena úsečka délky r. Trojúhelník SMP je pravoúhlý, SM je jeho přepona. Proto je $\overline{SM} > \overline{PM}$, čili $\overline{SM} > r$. To znamená, že bod M je vnějším bodem kružnice. Z názoru je patrno, že na přímce p leží mezi vnitřním bodem P a vnějším bodem M jeden bod kružnice k; na obrázku je označen A. Přímka p

je rozdělena bodem P na dvě polopřímky; na polopřímce PM leží bod A kružnice k. Stejně odvodíme, že na opačné polopřímce leží také jistý bod B kružnice k. Přímka p má tedy s kružnicí k společné dva body A, B; jmenuje se **sečna kružnice** (neboť ji seče). Body A, B se nazývají **průsečíky přímky** p **s kružnicí** k.

Přímka, která prochází středem kružnice, je také její sečnou. Sečna má s kružnicí společné jen dva body; to souhlasí s poučkou, že žádné tři body kružnice neleží v přímce. Sečna dělí rovinu ve dvě poloroviny; body kružnice leží v obou těch polorovinách.



Obr. 51.



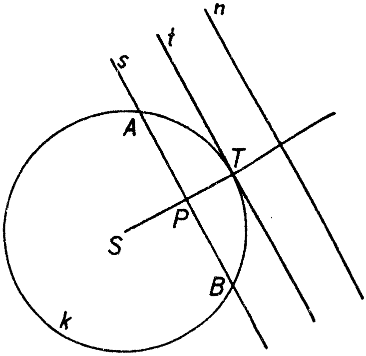
Obr. 52.

Druhá možná vzájemná poloha přímky a kružnice je znázorněna na obr. 51, v němž přímka t má od středu S vzdálenost $\overline{ST} = r$ (r je poloměr kružnice k). Pata T je bod kružnice k. Každý jiný bod M přímky t je vnější bod kružnice k, neboť v trojúhelníku SMT je $\overline{SM} > \overline{ST} = r$ (proč?).

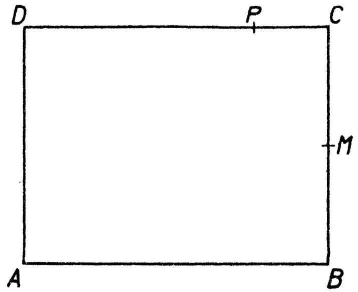
Přímka t, která má od středu kružnice vzdálenost rovnou poloměru, má tedy s kružnicí společný jediný bod T. Taková přímka se jmenuje **tečna kružnice** a T je její **bod dotyku** neboli **dotykový** (nikoli dotyčný).

Každá tečna kružnice je kolmá ke spojnici středu se svým bodem dotyku. Pomocí této její vlastnosti dovedeme sestrojiti tečnu kružnice v daném bodě. Proveďte!

Obr. 52 znázorňuje poslední možnou polohu přímky vzhledem ke kružnici. Přímka p má v tomto případě od středu S kružnice k vzdálenost $\overline{SP}$ delší než poloměr. Názor ukazuje, že každý bod přímky p je vnější bod kružnice. Taková přímka, jejíž vzdálenost od středu kružnice je větší než poloměr, nemá tedy s kružnicí společný vůbec žádný bod a jmenuje se **nesečna kružnice.**



Obr. 53.



Obr. 54.

To, že každý bod M přímky p je vnější bod kružnice, dovedeme odůvodnit podobně jako v předchozích případech z trojúhelníka SMP (obr. 52): Platí totiž opět $\overline{SM} > \overline{SP} > r$. Tečna i nesečna dělí rovinu ve dvě poloroviny. Všecky body kružnice leží v té polorovině, v které leží její střed.

Obr. 53. Je tedy možná trojí vzájemná poloha přímky a kružnice:

a) sečna s má s kružnicí společné dva body A, B; její vzdálenost od středu kružnice je menší než poloměr;

b) tečna t má s kružnicí společný jediný bod T (bod dotyku); její vzdálenost od středu kružnice se rovná poloměru;

c) nesečna n nemá s kružnicí společný žádný bod; její vzdálenost od středu kružnice je větší než poloměr kružnice.

Kružnice omezuje na sečně tětivu AB; pata P kolmice spuštěné ze středu S kružnice na tětivu je střed tětivy. Tečna t je kolmá k spojnici bodu dotyku T se středem kružnice S.

Cvičení.

119. Jakou délku má tětiva, jejíž vzdálenost od středu je polovina poloměru? Zvolte na př. $r = 4$, 6, 7 cm.

120. Strana čtverce délky 36 mm je tětivou kružnice, jejíž střed leží na protější straně čtverce. Sestrojte tu kružnici a vypočtěte její poloměr.

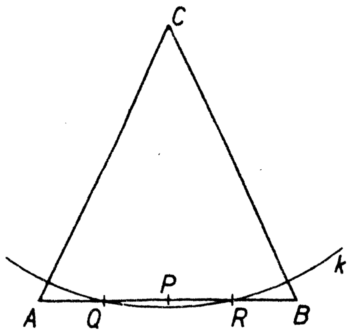
121. Trám obdélníkového průřezu má šířku 3 dm. Jak může být nejvýš vysoký (v cm), aby prošel kruhovým otvorem o průměru 38 cm?

122. Obr. 54. Je dán obdélník $ABCD$ o stranách $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 3$ cm. Bod M je střed strany BC, bod P leží ve třech čtvrtinách strany CD. Sestrojte kružnici se středem A a poloměrem $4\frac{1}{4}$ cm. Rozhodněte o bodech M, P, zda leží na kružnici, či jsou-li vnitřní nebo vnější. Rozhodněte podle názoru i výpočtem: co je spolehlivější?

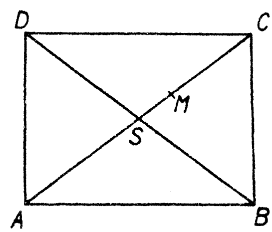
123. Obr. 55. Je dán rovnoramenný trojúhelník se základnou $\overline{AB} = 36$ mm a ramenem $\overline{AC} = 41$ mm. Body Q, P, R dělí základnu na čtyři stejné díly. Sestrojte kružnici k se středem C procházející bodem Q. a) Dokažte, že kružnice k jde také bodem R, že body A, B jsou její vnější body, bod P její vnitřní bod. b) Vypočtěte délku poloměru kružnice k.

124. Bodem A daným uvnitř kružnice veďte tětivu tak, aby tím bodem byla půlena. Kolik řešení má úloha? Což je-li bod A středem dané kružnice?

125. Dokažte, že stejně dlouhé tětivy jsou stejně vzdáleny od středu kružnice, a že kratší tětiva je více vzdálena od středu kružnice než delší. Použijte k tomu Pythagorovy věty!



Obr. 55.



Obr. 56.

126. Obr. 56. Sestrojte obdélník $ABCD$ o rozměrech $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 45$ mm. Na úhlopříčce AC sestrojte bod M tak, aby bylo $\overline{AM} = 2 \cdot \overline{MC}$. Opište kružnici k se středem A procházející bodem M. a) Zjistěte výpočtem, které z bodů B, D jsou vnitřní nebo vnější body kružnice k. b) Jakou polohu ke kružnici k mají přímky BC, CD, BD, DM?

127. Narýsujte kružnici se středem S a s poloměrem 3 cm. a) Sestrojte takovou sečnu s_1, aby měla od středu S vzdálenost 20 mm. b) Sestrojte takovou sečnu s_2, aby na ní kružnice vymezila tětivu délky 45 mm. Kolik je sečen s_1, kolik sečen s_2?

128. Je dána přímka p a bod S vzdálený 25 mm od přímky p. Sestrojte kružnici se středem S tak, aby se dotýkala přímky p.

129. Je dána přímka p a bod S vzdálený 2 cm od přímky p. Sestrojte kružnici se středem S tak, aby na přímce p vymezila tětivu délky 3 cm.

130. Je dána přímka p a na ní bod K. Sestrojte kružnici s poloměrem 2 cm, která se dotýká přímky p v bodě K. Kolik řešení má úloha?

131. Kružnice k se dotýká dvou rovnoběžných přímek m, p. Dokažte, že průměr kružnice je roven vzdálenosti obou rovnoběžek. Co rozumíme vzdáleností dvou rovnoběžek?

132. Jsou dány dvě rovnoběžky r, s a na přímce r bod T. Sestrojte kružnici tak, aby se dotýkala obou přímek r, s, a to přímky r v bodě T. Použijte výsledku cvičení 130 a 131.

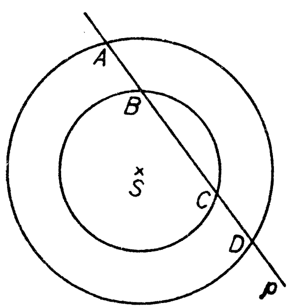
133. A je bod kružnice s poloměrem $r = 3$ cm. Na tečně této kružnice sestrojené v bodě A vytne soustředná kružnice k' tětivu délky r. Sestrojte kružnici k' a vypočtěte její poloměr.

134. Obr. 57. Přímka p protne dvě soustředné kružnice v bodech A, B, C, D. Dokažte, že $\overline{AC} = \overline{BD}$. Návod: dokažte, že úsečky AD, BC mají společný střed.

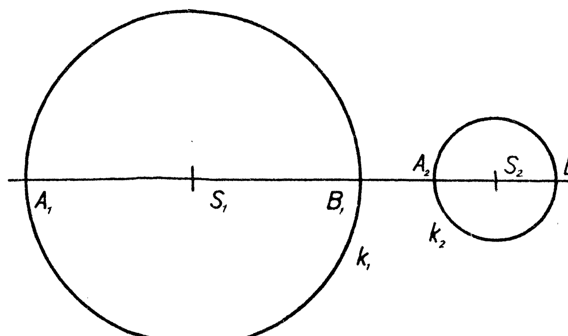
2. **Dvě kružnice.**

Začneme s nejjednodušším případem dvou soustředných kružnic. Takové dvě kružnice mají vždy různé poloměry, jedna leží uvnitř druhé a nemají společný bod.

Více možností je u kružnic s různými středy. Na obr. 58 jsou narýsovány takové dvě kružnice k_1, k_2 se středy S_1, S_2. Přímka $S_1 S_2$ — někdy také úsečka S_1S_2 — nazývá se **střednou** těch dvou kružnic. Délka této úsečky je tak zv. **délka středné.**

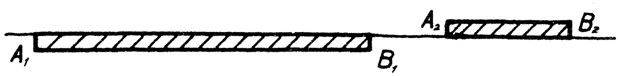


Obr. 57.

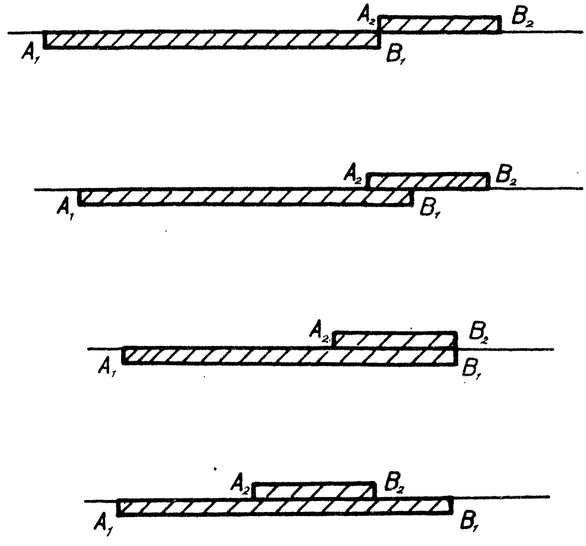


Obr. 58.

Obr. 58. Obě kružnice k_1, k_2 vytínají na středné průměry A_1B_1, A_2B_2. Na obrázku leží každý z průměrů A_1B_1, A_2B_2 vně druhého. Průměry však mohou mít také jinou polohu. Na obr. 59 a 60 jsou narýsovány všecky možné vzájemné polohy průměrů A_1B_1, A_2B_2; přitom délka průměrů je stále táž.



Obr. 59.

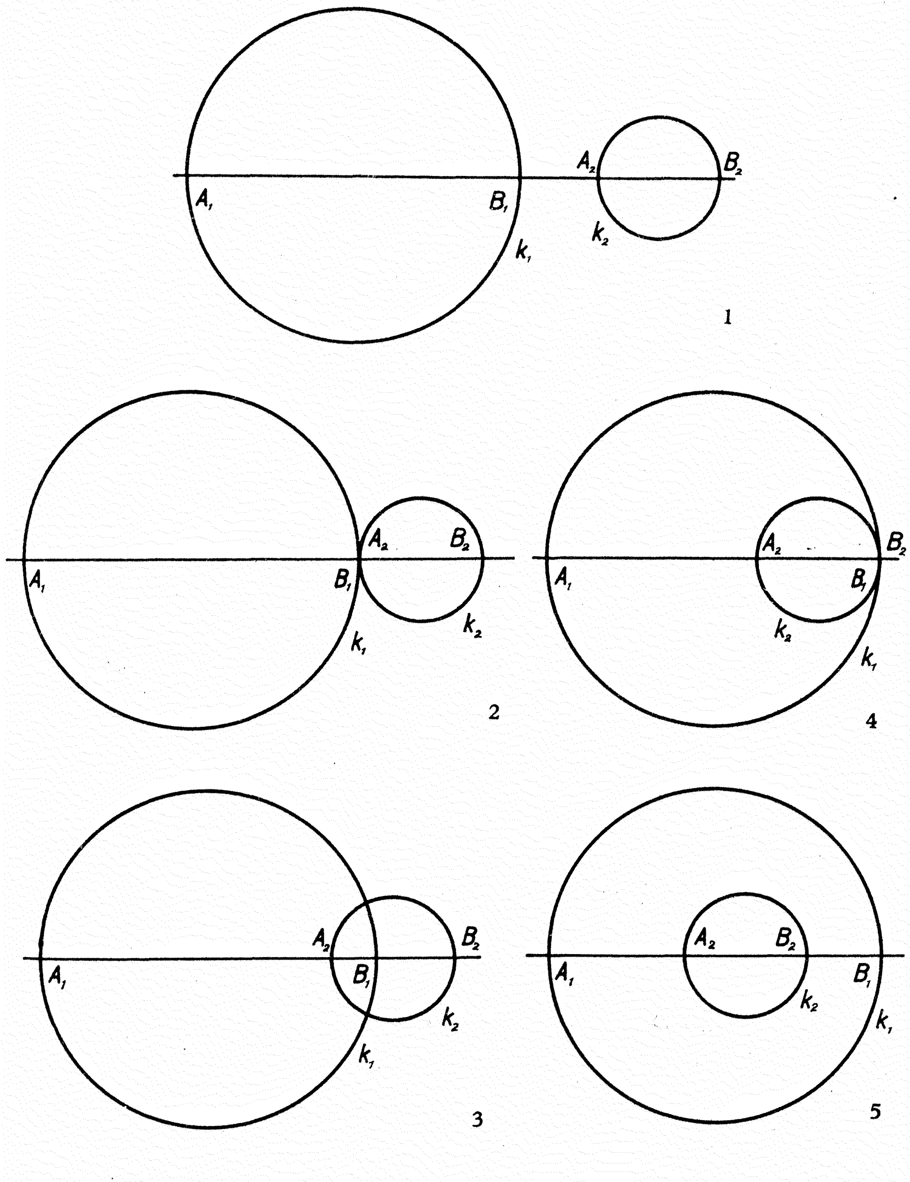


Obr. 60.

Jsou-li poloměry kružnic k_1, k_2 stejné, jsou také úsečky A_1B_1, A_2B_2 stejně dlouhé. Pak jsou jen tři možné vzájemné polohy. Načrtněte je!

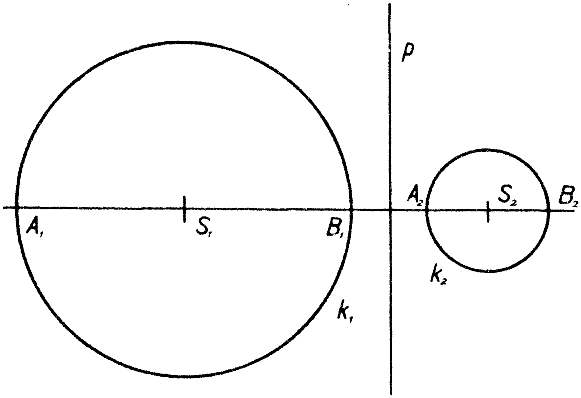
Mají-li průměry A_1B_1, A_2B_2 určitou z pěti možných poloh, je tím stanovena také vzájemná poloha obou kružnic. Na obr. 61 je narýsováno všech pět možných vzájemných poloh dvou kružnic a jsou označeny čísly 1 až 5. Popište je stručně. Kolik společných bodů mají kružnice podle názoru v jednotlivých případech?

Naším úkolem nyní bude: nejprve odůvodniti některé vlastnosti, které poznáváme z názoru, pak najíti vztahy mezi délkou středné a oběma poloměry, z nichž dovedeme početně zjistiti vzájemnou polohu obou kružnic, aniž je musíme rýsovat.



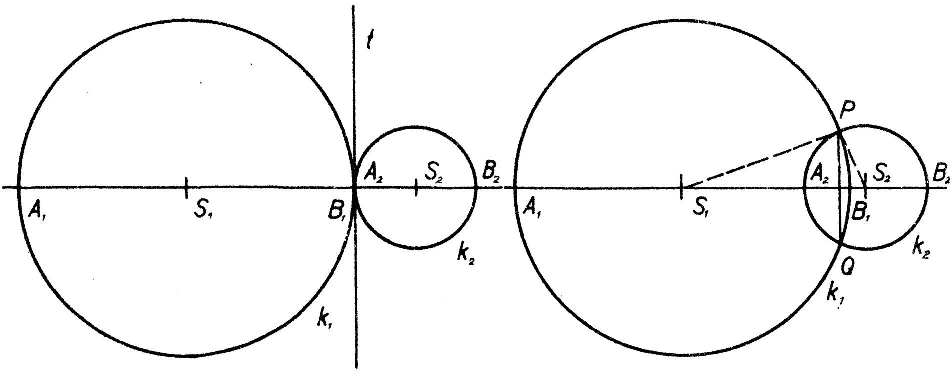
A₁
B₁
A₂
B₂
k₁
k₂
1
A₁
B₁
A₂
B₂
k₁
k₂
2
A₁
B₁
A₂
B₂
k₁
k₂
4
A₁
B₁
A₂
B₂
k₁
k₂
3
A₁
B₁
A₂
B₂
k₁
k₂
5

Obr. 61.



Obr. 62.

Na obr. 62 jsou dvě kružnice v poloze 1; přímka p je osa úsečky A_2B_1; p je nesečna obou kružnic. Každá z kružnic k_1, k_2 leží tedy v jiné polorovině vyťaté přímkou p; každá z obou kružnic leží vně druhé.

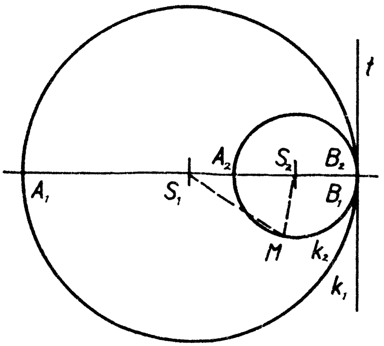


Obr. 63. Obr. 64.

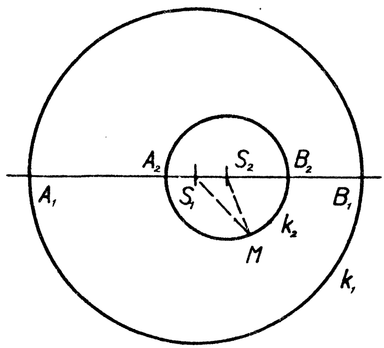
Na obr. 63 vidíme dvě kružnice v poloze 2. Kolmice t ke středné, vedená bodem $B_1 \equiv A_2$, je společná tečna obou kružnic. Lze dokázat pomocí přímky t jako v předchozím případě, že vyjímajíc bod A_2 leží každý bod jedné kružnice vně druhé.

Nastane-li případ 2, říkáme, že se obě kružnice **dotýkají zevně** (že mají vnější dotyk).

Na obr. 64 jsou dvě kružnice v poloze 3. Podle názoru mají tyto kružnice dva společné body (průsečíky) P, Q. Středná je osou úsečky PQ, neboť obě kružnice jsou souměrně položeny podle středné. Kružnice k_1, k_2 nemají — jak ukazuje názor — mimo body P, Q už žádný další společný bod. To si později odůvodníme i úsudkem.



Obr. 65.



Obr. 66.

Na obr. 65 jsou dvě kružnice v poloze 4. Kolmice t ke středné, vedená bodem $B_1 \equiv B_2$, je opět společná tečna obou kružnic (proč?).

Podle názoru jsou všechny body kružnice k_2 vyjímajíc bod B_2, vnitřními body kružnice k_1. Proto říkáme v tomto případě, že se kružnice k_2 **dotýká zevnitř** kružnice k_1 (že mají vnitřní dotyk).

Vzájemná poloha 5 je znázorněna na obr. 66. Názor ukazuje, že kružnice k_2 leží uvnitř kružnice k_1.

Nyní přistoupíme k druhému úkolu: máme rozlišiti jednotlivé polohy podle vztahů mezi délkou středné c a poloměry r_1, r_2. Projdeme si znovu obrázky 62 až 66.

Z obrázku 62 vyčteme, že platí: $\overline{S_2A_2} + \overline{S_1B_1} < \overline{S_1S_2}$ čili $c > r_1 + r_2$. Podobně z obr. 63 a 65 zjistíme, že při vnějším dotyku obou kružnic platí $c = \overline{S_1B_1} + \overline{S_2A_2} = r_1 + r_2$, při vnitřním dotyku $c = \overline{S_1B_1} - \overline{S_2B_2} = r_1 - r_2$. V případě 3 (obr. 64) vznikne trojúhelník S_1S_2P o stranách $\overline{S_1S_2} = c$, $\overline{S_1P} = r_1$, $\overline{S_2P} = r_2$. Podle známé vlastnosti trojúhelníka je $r_1 - r_2 < c < r_1 + r_2$. (Užíváme při tom této vlastnosti trojúhelníka: libovolná strana trojúhelníka je kratší než součet druhých dvou a delší než jejich rozdíl.)

Podle obr. 66 porovnáme úsečky $\overline{S_1B_1}$ a $\overline{S_1B_2}$; zřejmě je $\overline{S_1B_1} > \overline{S_1B_2} = \overline{S_1S_2} + \overline{S_2B_2}$, čili $r_1 > c + r_2$. Jinak můžeme napsat $c < r_1 - r_2$.

Na kružnici k_2 si zvolíme bod M mimo střednou. Z trojúhelníka S_1S_2M plyne podle známé vlastnosti stran $\overline{S_1M} < \overline{S_1S_2} + \overline{S_2M} = c + r_2$. Avšak $c + r_2 < r_1$; tedy že $\overline{S_1M} < r_1$, bod M je vnitřní bod kružnice k_1. Každý bod kružnice k_2 leží tedy uvnitř k_1; kružnice k_2 leží uvnitř k_1.

Podle toho, co jsme si odvodili, lze sestaviti přehlednou tabulku o vzájemné poloze dvou kružnic:

Případ čís.	Počet spol. bodů	Dotyk: ano či ne, jakého druhu	Vztahy mezi c, r_1, r_2
1	0	žádný	$c > r_1 + r_2$
2	1	vnější	$c = r_1 + r_2$
3	2	žádný	$r_1 - r_2 < c < r_1 + r_2$
4	1	vnitřní	$c = r_1 - r_2$
5	0	žádný	$c < r_1 - r_2$

Úloha. Je dáno $c = 6$ cm, $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 3$ cm. Máme rozhodnout o vzájemné poloze obou kružnic, aniž bychom je rýsovali. Porovnáme délky $r_1 - r_2$, $r_1 + r_2$, c. Protože je $r_1 - r_2 = 1$, $r_1 + r_2 = 7$, je $r_1 - r_2 < c < r_2 + r_2$, může z případů 1 až 5 nastati jen jediný; je to případ 3. Obě kružnice se tedy protínají.

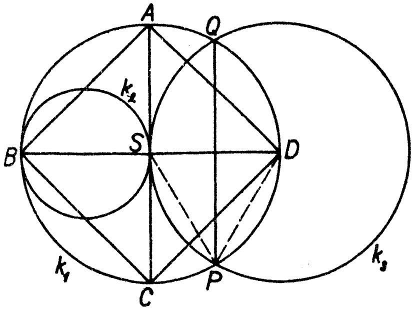
Všimněme si ještě, že v případech 2, 4, **kdy se kružnice dotýkají, leží bod dotyku na jejich středné.** Této vlastnosti užíváme velmi často při různých konstruktivních úlohách o kružnicích.

Cvičení.

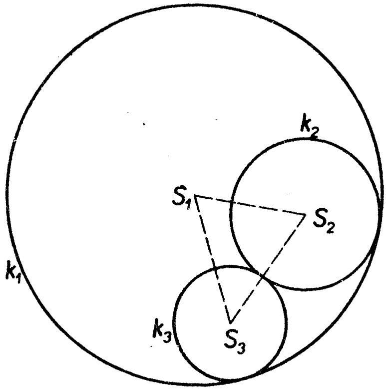
135. Určete výpočtem vzájemnou polohu dvou kružnic (r_1, r_2, poloměry, c délka středné): a) $r_1 = 5$, $r_2 = 8$, $c = 10$; b) $r_1 = 8$, $r_2 = 9$, $c = 18$; c) $r_1 = 7$, $r_2 = 10$, $c = 3$; d) $r_1 = 8$, $r_2 = 11$, $c = 2$; e) $r_1 = 7$, $r_2 = 11$, $c = 18$. Všecky rozměry jsou v cm.

136. Sestrojte obr. 67: $ABCD$ je čtverec o straně 50 mm, S je průsečík jeho úhlopříček. Kružnice k_1 má střed v bodě S a prochází body A, B, C, D. Kružnice k_2 má průměr BS. Kružnice k_3 má střed D a prochází bodem S. a) Dokažte, že se kružnice k_2 dotýká zevnitř kružnice k_1 a zevně kružnice k_3. b) Kružnice k_1, k_3 se protínají v bodech P, Q. Vypočtěte vzdálenost PQ. Návod: rozhodněte, jaký je trojúhelník DPS.

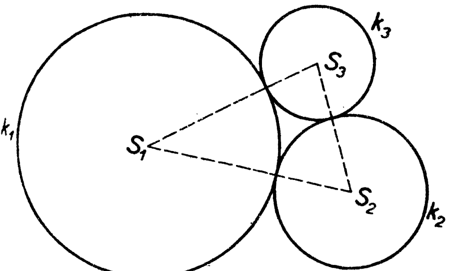
137. Je dána kružnice k o poloměru 35 mm, a na ní bod T. Sestrojte kružnici o poloměru 25 mm, která se dotýká kružnice k v bodě T a) zevně, b) zevnitř.



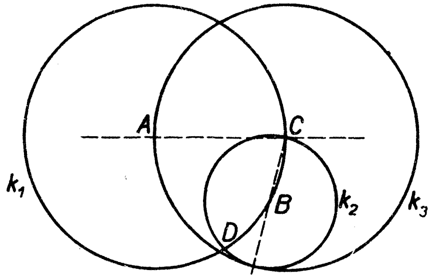
Obr. 67.



Obr. 69.



68.



Obr. 70.

138. Narýsujte kružnici k_1 (střed S_1, poloměr $r_1 = 25$ mm) a kružnici k_2 (střed S_2, poloměr $r_2 = 4$ cm, $\overline{S_1S_2} = 45$ mm). Sestrojte všechny kružnice, které mají střed na přímce S_1S_2 a dotýkají se obou kružnic k_1, k_2. Jaké jsou jejich poloměry? (4 řešení.)

139. Jsou dány kružnice k_1, k_2 jako ve cvičení 138. a) Jak by se musil změnit poloměr r_2 (bez změny středu), aby se nová kružnice dotýkala kružnice k_1? (2 řešení.) b) Jak by se musel posunout střed kružnice k_1 po přímce S_1S_2 (bez změny r_1), aby se nová kružnice dotýkala kružnice k_2? (4 řešení.)

140. Sestrojte obr. 68. Kružnice k_1, k_2, k_3 mají po řadě poloměry 35 mm, 2 cm, 1,5 cm. Návod: sestrojte nejprve trojúhelník, jehož vrcholy jsou středy kružnic.

141. Sestrojte obr. 69. Kružnice k_1, k_2, k_3 mají po řadě poloměry 5 cm, 2 cm, 15 mm. Návod jako v cvičení 140.

142. *a)* Sestrojte obr. 70. Kružnice k_1, k_3 mají stejné poloměry a středy A, C; kružnice k_2 má poloviční poloměr a střed B. b) Rozhodněte úsudkem: leží bod D na kružnici k_3 nebo uvnitř? Návod: užijte toho, že v trojúhelníku BCD je $\overline{CD} < \overline{BC} + \overline{BD}$. c) Jakou vzájemnou polohu mají kružnice k_2, k_3?

143. Kružnice k má střed S a poloměr 2 cm, bod A je od středu S vzdálen 3 cm. Sestrojte kružnici se středem A, která půlí kružnici k (t. j. protíná kružnici k tak, že ji dělí ve dvě polokružnice). Návod: čím bude společná tětiva pro kružnici k?

144. Kružnice k má střed S a poloměr 3 cm, bod A je od středu S vzdálen 2 cm. Sestrojte kružnici k' se středem A, která je kružnicí k půlena (t. j. k protíná k' tak, že ji dělí ve dvě polokružnice). Návod: čím bude společná tětiva pro kružnici k'?

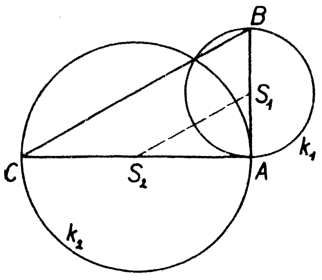
145. Obr. 71. Narýsujte pravoúhlý trojúhelník ABC. Nad odvěsnami AB, AC jako průměry sestrojte kružnice k_1, k_2. Dokažte, že k_1, k_2 se protínají na přeponě. Návod: užijte toho, že středná kružnic k_1, k_2 je střední příčka trojúhelníka ABC a že druhý průsečík kružnic k_1, k_2 je souměrně položen k bodu A podle středné.

3. Geometrická místa.

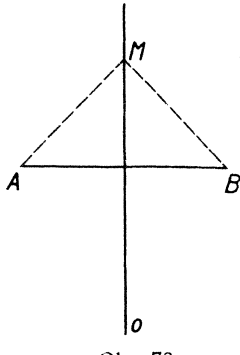
V tomto odstavci se seznámíme se způsobem, kterým v geometrii často řešíme konstruktivní úlohy. Probereme si nejprve několik příkladů, které se týkají úloh známých aspoň z části již ze druhé třídy.

Úlohy.

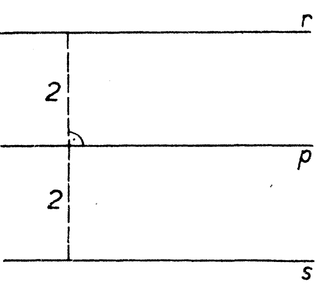
1. Obr. 72. Jsou dány dva různé body A, B. Máme zjistiti, kde leží všechny body, které mají od bodů A, B stejnou vzdálenost. Víme již, že všechny takové body leží na ose o úsečky AB. Obráceně každý bod M osy má tu vlastnost, že je stejně vzdálen od obou bodů A, B. Jak sestrojíme přímku o? Které její vlastnosti při tom užíváme?



Obr. 71.



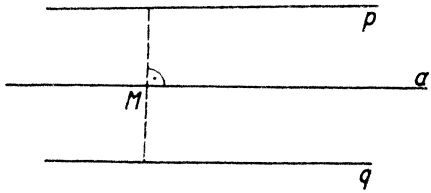
Obr. 72.



Obr. 73.

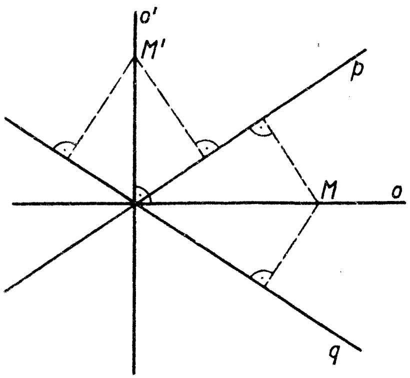
2. Obr. 73. Je dána přímka p; máme nalézti všechny body, které mají od přímky p vzdálenost 2 cm. Je známo, že tyto body leží na dvou přímkách r, s rovnoběžných s přímkou p, vedených ve vzdálenosti 2 cm. Sestrojte je. Obráceně každý bod přímky r nebo s má od přímky p vzdálenost 2 cm.

3. Obr. 74. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q; máme nalézti všechny body, které mají od obou přímek stejnou vzdálenost. Všecky hledané body leží na jisté přímce a; která je to přímka? Sestrojte ji. Mimo přímku a neleží žádný bod stejně vzdálený od přímek p, q. Je na přímce a nějaký bod, který není stejně vzdálen od přímek p, q?

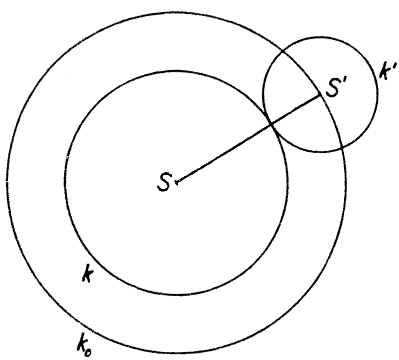


Obr. 74.

4. Obr. 75. Jsou dány dvě různoběžky p, q; máme najíti všechny body, které mají od přímek p, q stejné vzdálenosti. Jak již víme, leží všechny takové body na osách o, o' úhlů sevřených přímkami p, q. Která přímka se jmenuje osa úhlu? Jak se sestrojí? Osy o, o' jsou k sobě kolmé, neboť osy o, o' jsou osy dvou vedlejších úhlů; úhel přímek o, o' je součet polovin těch vedlejších úhlů, je tedy pravý. Každý bod osy o nebo o' má tu vlastnost, že je stejně vzdálen od obou různoběžek p, q.



Obr. 75.



Obr. 76.

5. Obr. 76. Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 3 cm. Máme zjistiti, kde leží středy všech kružnic, které se dotýkají zevně kružnice k a mají poloměr 15 mm. Označíme S' střed takové jedné kružnice k; úsečka $\overline{SS'}$ má délku 3 cm + 15 mm. Bod S' tedy leží na kružnici k_0 o poloměru 45 mm, soustředné s k. Obráceně každý bod kružnice k_0 je středem určité kružnice, která má poloměr 15 mm, a dotýká se zevně kružnice k. Jak ji sestrojíme?

Ve všech pěti předcházejících úlohách jsme hledali souhrn bodů s jistou danou vlastností. Vždycky se ukázalo, že ty body leží na nějaké čáře (přímce nebo kružnici). Ale obráceně také každý bod té čáry měl žádanou vlastnost. Takové dva výsledky shrnujeme stručně do jedné věty a říkáme na příklad:

Geometrické místo bodů, které mají od dvou bodů A, B stejnou vzdálenost, je osa o úsečky AB.

Tato věta vyjadřuje tedy dvě věci: jednak, že každý bod stejně vzdálený od A i B leží na ose o; za druhé, že každý bod osy o je stejně vzdálen od bodů A, B.

Kdykoli použijeme názvu: „geometrické místo bodů“, musíme si uvědomit, že jde o spojení dvou vět: 1. Všechny body geometrického místa mají určitou vlastnost (zde na příklad body osy jsou stejně vzdáleny od koncových bodů úsečky). 2. Každý bod, který má zmíněnou vlastnost, patří geometrickému místu. (Máme-li bod, jehož vzdálenosti od obou koncových bodů úsečky jsou stejné, pak leží na ose úsečky, t. j. na geometrickém místu.)

Vyslovte s použitím názvu „geometrické místo bodů“ výsledky úloh 2, 3, 4, 5 tohoto odstavce.

Cvičení.

146. Je dán poloměr r a bod A. Co je geometrické místo středů kružnic s poloměrem r, které procházejí bodem A?

147. Je dán poloměr r a přímka p. Co je geometrické místo středů kružnic, které mají poloměr r a dotýkají se přímky p?

148. Je dána úsečka AB. Sestrojíme pravoúhlé rovnoběžníky se stranou AB. Co je geometrické místo průsečíků jejich úhlopříček?

149. Jsou dány dva body A, B. Co je geometrické místo středů kružnic, které procházejí těmi dvěma body?

150. Je dána přímka p a na ní bod T. Co je geometrické místo středů kružnic, které se dotýkají přímky p v bodě T? Náleží bod T také tomu geometrickému místu?

151. Je dána kružnice k se středem S a na ní bod T. Co je geometrické místo středů kružnic, které se dotýkají kružnice k v bodě T? Patří body T, S také tomu geometrickému místu?

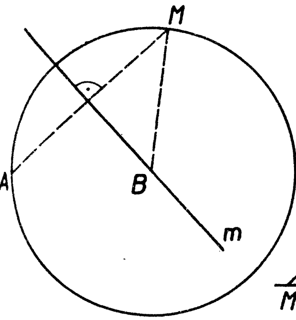
152. Je dána kružnice k o poloměru 3 cm. Co je geometrické místo středů kružnic, které mají poloměr a) 2 cm, b) 3,5 cm a mají s kružnicí k vnitřní dotyk?

153. Je dána kružnice k o poloměru r a úsečka délky $d < 2r$. Dokažte, že geometrické místo středů tětiv délky d je kružnice soustředná s kružnicí k. Jak je tomu v případě $d = 2r$? Návod: vyjádřete vzdálenost středu tětivy od středu kružnice k.

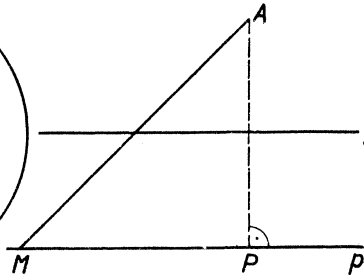
154. Co je geometrické místo středů tětiv kružnice rovnoběžných s danou přímkou p?

155. Je dán trojúhelník ABC. a) Co je geometrické místo vrcholů trojúhelníků, které mají s daným trojúhelníkem společnou stranu AB a stejný obsah? Co je geometrické místo vrcholů trojúhelníků, které mají s daným trojúhelníkem společnou některou stranu a stejný obsah?

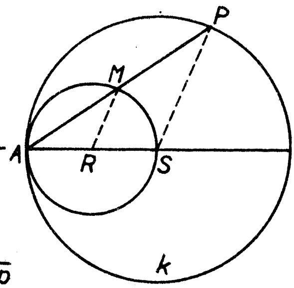
156. Obr. 77. Jsou dány dva různé body A, B. Bodem B vedeme přímku m a sestrojíme k bodu A bod M souměrně položený podle přímky m. Co je geometrické místo bodů M, otáčí-li se přímka m kolem bodu B? Návod: určete vzdálenost $\overline{BM}$.



Obr. 77.



Obr. 78.



Obr. 79.

***157.** Obr. 78. Je dána přímka p a bod A, který na ní neleží. Co je geometrické místo středů úseček AM, probíhá-li bod M přímku p? Návod: sestrojte úsečku $AP \perp p$ a užijte vlastnosti střední příčky trojúhelníka AMP.

***158.** Je dán rovnoběžník $ABCD$. Sestrojujeme všecky rovnoběžníky, které mají tutéž stranu AB a stejný obsah jako rovnoběžník $ABCD$. Co je geometrické místo průsečíků jejich úhlopříček? Použijte výsledku cvičení 157.

***159.** Obr. 79. Je dána kružnice k se středem S a na ní bod A. Co je geometrické místo středů úseček AP, probíhá-li bod P kružnici k? Návod k řešení: spojte střed M úsečky AP se středem R úsečky AS a dokažte, že $\overline{RM} = \frac{1}{2}\,\overline{SP}$.

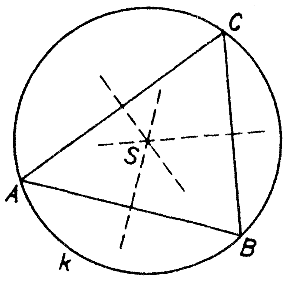
4. Konstruktivní úlohy.

Nyní si ukážeme na několika příkladech, jak pomocí pojmu geometrického místa bodů řešíme konstruktivní úlohy.

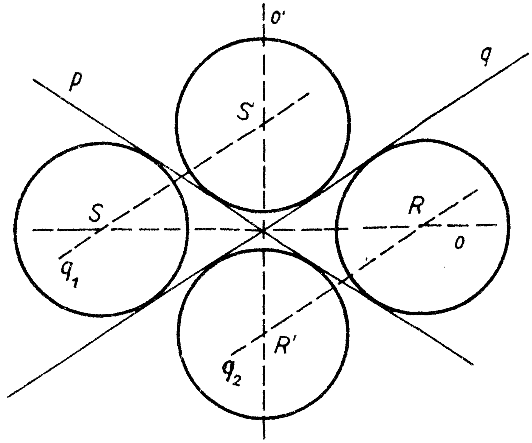
Úlohy.

1. Jsou dány dva různé body A, B a přímka p. Máme sestrojiti kružnici k tak, aby měla střed na přímce p a procházela body A, B. Geometrické místo středů všech kružnic, které procházejí body A, B, je osa úsečky AB (cv. 149).

Střed hledané kružnice leží tedy jednak na přímce p, jednak na ose o úsečky AB. Řešení úlohy bude záviset na tom, jakou vzájemnou polohu mají přímky p, o. Jaké jsou tu možnosti? Úloha může býti neřešitelná, jsou-li přímky p, o různé rovnoběžky. Jaké je řešení, splynou-li přímky p, o? Jaké je řešení, splynou-li přímky p, AB? Zvolte si A, B, p a rozřešte úlohu.



Obr. 80.



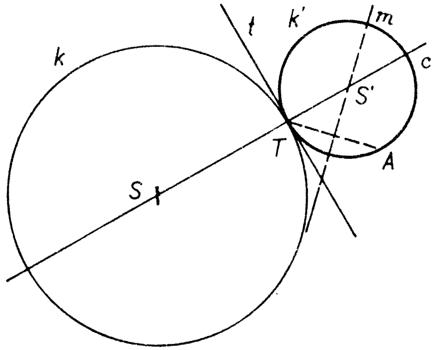
Obr. 81.

2. Obr. 80. Je dán trojúhelník ABC. Máme sestrojiti kružnici k, která prochází všemi jeho vrcholy. Jak se jmenuje taková kružnice? Abychom sestrojili její střed, použijeme dvou geometrických míst bodů: osy úsečky AB a osy úsečky BC; jejich průsečík je střed hledané kružnice. Úloha má vždy jediné řešení. Také osa strany AC jde středem opsané kružnice. Sestrojte kružnici opsanou trojúhelníku o stranách $\overline{AB} = 3{,}5$ cm, $\overline{BC} = 2$ cm, $\overline{CA} = 2{,}5$ cm.

3. Obr. 81. Jsou dány dvě různoběžky p, q a délka r. Máme sestrojiti kružnici, která se dotýká obou přímek p, q a má poloměr r. Geometrické místo středů kružnic, které se dotýkají obou přímek p, q, jsou dvě kolmé přímky o, o'. (Viz úlohu 4 kapitoly 3.) Střed hledané kružnice má však od přímky q vzdálenost r, neboť přímka q se hledané kružnice dotýká. Geometrické místo bodů, které mají od přímky q vzdálenost r, jsou dvě přímky q_1, q_2. Střed hledané kružnice leží tedy jednak na ose o nebo o', jednak na přímce q_1 nebo q_2. Úloha má 4 řešení. Zvolte si přímky p, q svírající úhel 60°, poloměr $r = 16$ mm a rozřešte úlohu. Dříve než sestrojíte kružnice, určete jejich body dotyku s přímkami p, q.

Středy všech čtyř kružnic dostaneme také jinak pomocí přímek p_1, p_2, q_1, q_2. Vysvětlete to podrobně!

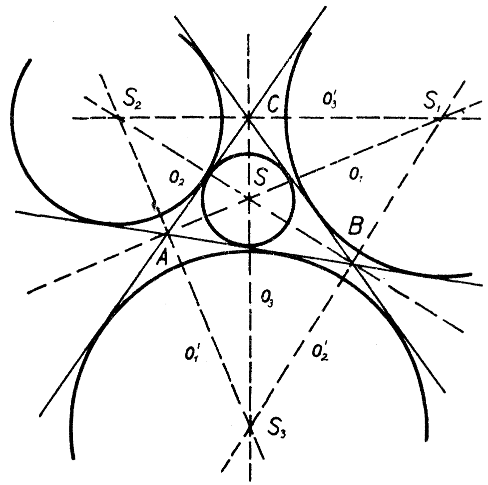
4. Obr. 82. Je dána kružnice k, na ní bod T a dále její vnější bod A. Máme sestrojiti kružnici, která se dotýká kružnice k v bodě T a prochází bodem A. Dokážeme si, že střed S' hledané kružnice je průsečík dvou geometrických míst: přímek c, m. (Viz cvičení 149, 151.) Kolik řešení má úloha? Jak je tomu, když leží bod A na tečně kružnice k sestrojené v bodě T? Může být dotyk obou kružnic také vnitřní? Zvolte polohu bodu A tak, aby nastal vnitřní dotyk.



Obr. 82.

Na obr. 83 vidíme trojúhelník ABC, jehož strany jsou prodlouženy v přímky. Chceme sestrojit všecky takové kružnice, které se dotýkají všech tří přímek AB, BC, CA. Protože se má každá hledaná kružnice dotýkat přímek AB, AC, leží její střed na jedné z obou os o_1, o_1' (viz úloha 3 této kapitoly). Protože se má každá hledaná kružnice dotýkat přímek BA, BC, leží její střed na jedné z os o_2, o_2'. Přímky o_1, o_1', o_2, o_2' se protnou mimo body A, B ve čtyřech bodech S, S_1, S_2, S_3. Jsou to středy hledaných kružnic. Jeden z nich, bod S, leží uvnitř trojúhelníka ABC: je to střed **vepsané kružnice.** Tři ostatní body, S_1, S_2, S_3, leží vně trojúhelníku ABC; to jsou středy tak zvaných **kružnic vně vepsaných** trojúhelníku ABC.

Jak určíme poloměry těch čtyř kružnic? Také obě osy o_3, o_3' jdou body S, S_1, S_2, S_3, neboť každý z bodů S, S_1, S_2, S_3 je stejně vzdálen od přímek CA, CB.



Obr. 83.

Cvičení.

160. Je dán trojúhelník KLM ($\overline{KL} = 5$ cm, $\overline{LM} = 2{,}5$ cm, $\overline{MK} = 36$ mm). Na přímce KL najděte body, které mají od vrcholu M vzdálenost 4 cm. Kolik řešení má úloha?

161. Je dána přímka p, na ní bod T a mimo ni bod A. Sestrojte kružnici tak, aby procházela bodem A a dotýkala se přímky p v bodě T. Návod: hledejte střed kružnice. Užijte výsledků cvičení 150, 149.

162. V dané kružnici o poloměru 3 cm sestrojte tětivy délky 42 mm rovnoběžné s danou přímkou. Návod: hledejte krajní body těch tětiv.

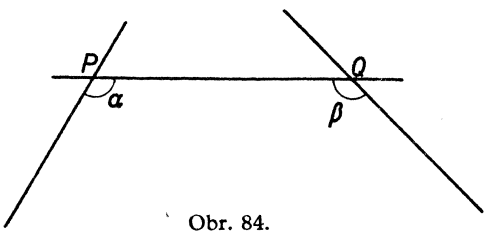
163. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q a mezi nimi bod A. Sestrojte kružnici, která se dotýká obou přímek p, q a prochází bodem A. Kolik řešení má úloha? Kdyby ležel bod A na přímce p, kolik by měla úloha řešení? Návod k řešení: určete poloměr kružnice podle cvičení 131 a pak hledejte její střed. Použijte výsledku cvičení 147.

164. Je dán bod A a přímka p, která je od něho vzdálena 3 cm. Dvě kružnice o poloměrech 4 cm mají středy na přímce p a procházejí bodem A. Jak jsou vzdáleny jejich středy? Sestrojte a vypočtěte!

165. Je dán trojúhelník o stranách 40, 35 a 28 mm. Sestrojte kružnici vepsanou i kružnice vně vepsané. Než budete kružnice rýsovati, sestrojte jejich body dotyku. Kružnice vně vepsané nemusíte rýsovati celé.

166. Narýsujte kruhový oblouk (poloměrem aspoň 4 cm), aniž jste předem označil i střed kružnice. Na oblouku zvolte tři body a s jejich pomocí najděte střed kružnice. Hledejte jej jako střed kružnice opsané trojúhelníku.

167. Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 3 cm a bod A, $\overline{AS} = 4$ cm. Sestrojte kružnici o poloměru 2 cm, která jde bodem A a má s kružnicí k a) vnější dotyk, b) vnitřní dotyk. Kolik řešení má každá úloha? Návod: hledejte střed kružnice a použijte výsledků o geometrických místech: úlohy 5 a cvičení 149.

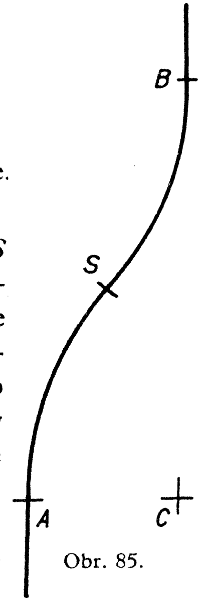


Obr. 84.

168. Na obr. 84 jsou tři přímé úseky trati. Jsou dány úhly $\alpha = 120°$, $\beta = 135°$ a délka $\overline{PQ} = 300$ m. Přímé úseky se mají spojiti kruhovými oblouky o poloměru 200 m. Sestrojte v měřítku 1 : 10 000.

169. Na obr. 85 jsou dva přímé rovnoběžné úseky trati s koncovými body A, B. Ty dva body mají být spojeny dvěma kruhovými oblouky dotýkajícími se navzájem ve středu S úsečky AB. Je dáno $\overline{AC} = 80$ m, $\overline{BC} = 220$ m. $AC \perp BC$. Sestrojte řešení ve vhodném měřítku. Návod: Užijte výsledku cvičení 161.

5. Úlohy o tečnách kružnice. Euklidovské konstrukce.

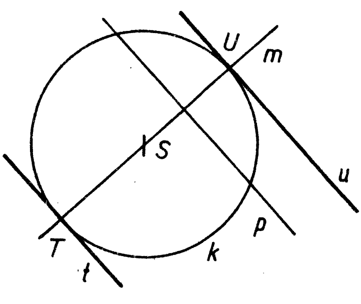


Obr. 85.

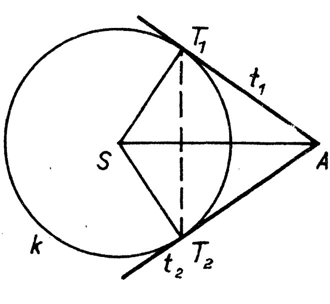
Poznali jsme, jak se sestrojuje tečna v bodě kružnice. Nyní si rozřešíme další dvě důležité úlohy o tečnách.

1. úloha. Obr. 86. Je dána kružnice k se středem S a přímka p. Máme sestrojit všecky tečny kružnice k rovnoběžné s přímkou p. Podle názoru jsou zřejmě dvě. Sestrojíme jejich body dotyku. Tyto body dotyku jsou paty kolmic spuštěných ze středu S na hledané tečny. Avšak geometrické místo pat kolmic spuštěných ze středu S na všecky rovnoběžky s přímkou p je přímka m kolmá k p, vedená bodem S. Hledané body dotyku jsou tedy průsečíky kružnice k s přímkou m. Zvolte si kružnici k, přímku p a rozřešte úlohu.

2. úloha. Obr. 87. Je dána kružnice k se středem S a její vnější bod A. Máme sestrojit všecky tečny kružnice k, které procházejí bodem A. Krátce říkáme, že vedeme tečny z bodu A ke kružnici k. Podle názoru jsou takové tečny dvě. Sestrojíme jejich body dotyku T_1, T_2.

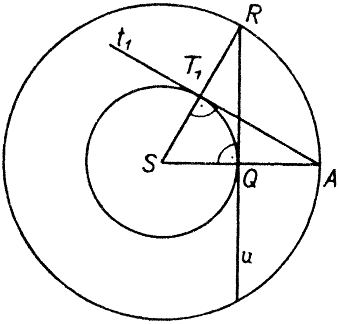


Obr. 86.

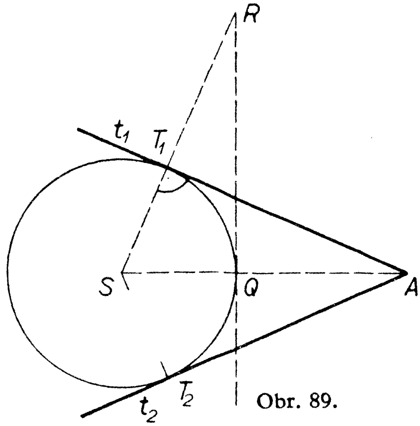


Obr. 87.

Trojúhelníky AST_1, AST_2 jsou pravoúhlé, mají společnou přeponu AS a stejně dlouhé odvěsny $\overline{ST_1} = \overline{ST_2}$. Jsou tedy shodné podle věty *ssu*. Určíme-li si délku zbývající odvěsny $\overline{AT_1} = \overline{AT_2}$, budeme moci sestrojit body



Obr. 88.



Obr. 89.

dotyku T_1, T_2. Délku odvěsny AT_1 dostaneme takto (obr. 88): v průsečíku Q úsečky AS s kružnicí k sestrojíme tečnu u ke kružnici k; kolem středu S opíšeme kružnici poloměrem $\overline{SA}$ a jeden z jejích průsečíků s tečnou u označíme R. Podle věty *ssu* je $\triangle AST_1 \cong \triangle RSQ$; proto je $\overline{AT}_1 = \overline{AT}_2 = \overline{RQ}$. Nyní stačí opsati kolem středu A kružnici poloměrem $\overline{RQ}$; její průsečíky s danou kružnicí k jsou hledané body dotyku T_1, T_2.

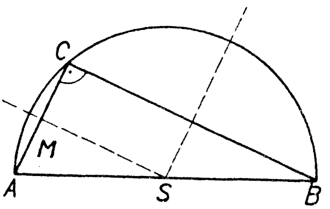
Zvolte si kružnici k a bod A a veďte z bodu A tečny ke kružnici k. Celá konstrukce je provedena na obr. 89.

Obr. 87. Z vyložené konstrukce bodů dotyku vyplývá, že přímka AS je osou úsečky T_1T_2. Neboť přímka AS je střednou kružnice k a kružnice opsané kolem středu A poloměrem $\overline{AT}_1$; body T_1 a T_2 jsou průsečíky obou těchto kružnic. Délka $d = \overline{AT}_1 = \overline{AT}_2$ se nazývá **délkou tečny** vedené z bodu A ke kružnici k. Označíme $\overline{AS} = v$ a použijeme Pythagorovy věty pro trojúhelník AST: vyjde $v^2 = d^2 + r^2$. Z této rovnice můžeme na příklad vypočíst délku tečny vedené z bodu ke kružnici, známe-li vzdálenost tohoto bodu od středu kružnice a poloměr kružnice.

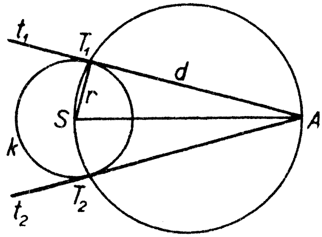
3. úloha. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami 4 cm, 6,5 cm a opište mu kružnici. Střed opsané kružnice leží ve středu přepony; neboť osy odvěsen jsou střední příčky trojúhelníka a proto procházejí středem přepony. (Obr. 90.)

Obr. 90. Má-li trojúhelník ABC tu vlastnost, že střed opsané kružnice leží ve středu strany AB, je úhel ACB pravý. Neboť osa MS strany AC je střední příčkou trojúhelníka ABC. Je tedy zároveň $MS \perp AC$, $MS \parallel BC$, t. j. $AC \perp BC$.

Oba předcházející výsledky shrneme takto: **vrcholy všech pravoúhlých trojúhelníků, jejichž přepona je daná úsečka AB, leží na kružnici sestrojené nad průměrem AB. Každý bod této kružnice s výjimkou bodů A, B je vrcholem takového pravoúhlého trojúhelníka.** Dovedete vyslovit tuto poučku s použitím pojmu „geometrické místo bodů"?



Obr. 90.

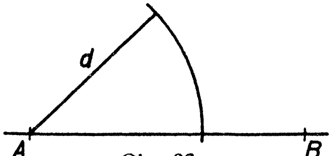


Obr. 91.

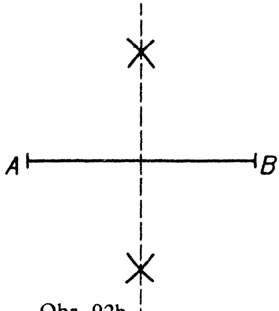
Nyní s pomocí předcházející poučky rozřešíme znovu důležitou úlohu: vésti tečny z bodu ke kružnici. Obr. 91. Je dána kružnice k a její vnější bod A. Označme opět T_1, T_2 dotykové body tečen vedených z bodu A ke kružnici k. Trojúhelníky AST_1, AST_2 mají pravé úhly při vrcholech T_1, T_2. Proto leží body T_1, T_2 na kružnici sestrojené nad průměrem AS. Zvolte si kružnici k, bod A a sestrojte tečny.

V druhé třídě jsme se naučili provádět základní konstrukce pravítkem a kružítkem. Při tom užíváme stále těchto výkonů: přímku rýsujeme jako spojnici dvou bodů, kružnici jako křivku určenou středem a poloměrem (danou úsečkou). Každý bod vyjde buď jako průsečík dvou přímek nebo přímky a kružnice nebo dvou kružnic. Tyto konstrukce se nazývají **euklidovské.** Užíváme-li dvou pravítek (trojúhelníku s pravým úhlem), činíme tak jen pro ulehčení práce; všecky takové konstrukce, které provádíme s dvěma pravítky (na příklad sestrojení rovnoběžky daným bodem, vztyčení kolmice), dovedeme provést jen s pomocí jednoho pravítka a kružítka.

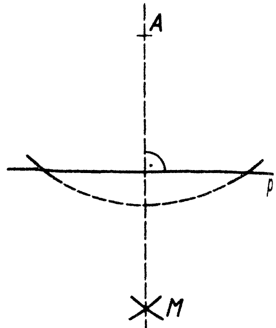
Většina základních euklidovských konstrukcí se zakládá na pojmu geometrického místa.



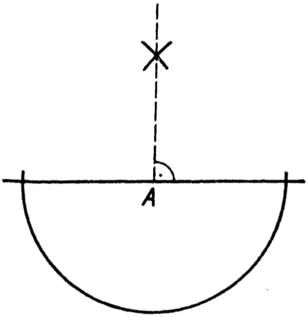
Obr. 92a.



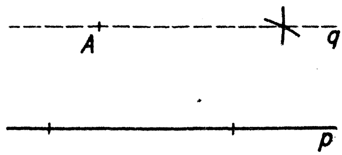
Obr. 92b.



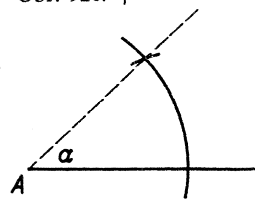
Obr. 92c.



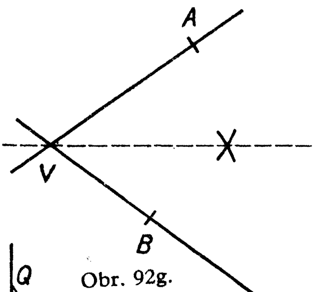
Obr. 92d.



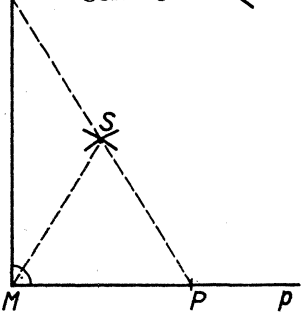
Obr. 92e.



Obr. 92f.



Obr. 92g.

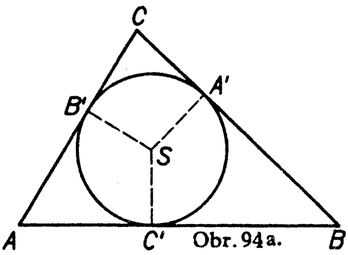


Obr. 93.

Na obr. 92 a) až g) jsou sestrojeny euklidovsky tyto úlohy: nanésti na danou polopřímku AB úsečku dané délky d; b) rozpůliti danou úsečku AB; spustiti na danou přímku p kolmici z daného bodu A; d) vztyčiti v daném bodě A kolmici k dané přímce p; e) vésti daným bodem A rovnoběžku s danou přímkou p; f) nanésti od dané polopřímky p do dané poloroviny daný úhel α; g) rozpůliti daný dutý úhel AVB. Vyložte všecky ty konstrukce!

Obr. 93. V bodě M přímky p máme k této přímce vztyčiti kolmici. Bod M je na okraji papíru a nemůžeme užíti obvyklého postupu (podle obr. 92d). Proto postupujeme takto: zvolíme na přímce p bod P, sestrojíme bod S tak, aby $\overline{SM} = \overline{SP}$, na prodloužení úsečky PS za bod S sestrojíme bod Q tak, aby bylo $\overline{QS} = \overline{SP}$. Pak je $QM \perp p$. Neboť kružnice opsaná trojúhelníku MPQ má střed S, což je střed strany PQ; proto je úhel PMQ pravý.

Cvičení.



Obr. 94a.

170. Je dán bod A a kružnice k se středem S a poloměrem r ($r = 3$ cm, $\overline{AS} = 5$ cm) a) Sestrojte tečny z bodu A ke kružnici k. b) Sestrojte tečny kružnice k, které svírají s přímkou AS úhel 60°. Kolik řešení má úloha b)?

171. Je dána úsečka $\overline{AR} = 6$ cm. Bodem R veďte přímky vzdálené 2 cm od bodu A. Návod: uvažte, kde budou ležet paty kolmic spuštěných z bodu A na hledané přímky. Čím budou hledané přímky pro kružnici, kterou tak dostanete?

172. Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod A na p. Sestrojte kružnici, která se dotýká obou přímek p, q, a to přímky p v bodě A. Jak je vzdálen bod dotyku přímky q od průsečíku obou různoběžek? Kolik řešení má úloha?

173. Kružnice k se středem S má poloměr $r = 4$ cm. Vypočtěte délky tečen vedených z bodu A ke kružnici k; $\overline{AS} = 3r$.

174. Určete geometrické místo těch bodů X, z nichž lze vést ke kružnici tečny délky poloměru. Jaký úhel svírají tečny vedené ke kružnici z libovolného bodu toho geometrického místa?

175. Tečny vedené z bodu A ke kružnici k (střed S, poloměr r) svírají úhel 60° (90°, 120°). Napište, jak závisí vzdálenost $\overline{AS}$ na poloměru r.

176. Obr. 94a. Narýsujte trojúhelník o stranách $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CA} = 7$ cm: vpište mu kružnici. Dotykové body se stranami označte podle obr. 94a. Vypočtěte délku úsečky $\overline{AC'} = x$. Návod: vyjádřete pomocí x úsečky $\overline{CB'} = \overline{CA'}$ a $\overline{BC'} = \overline{BA'}$; napište, že $\overline{BA'} + \overline{CA'} = \overline{BC}$.

177. Je dán trojúhelník ABC jako ve cvičení 176. Kolem středů A, B, C sestrojíte kružnice, které se po dvou budou dotýkati zevně na stranách trojúhelníka. Návod: určete poloměr kružnice opsané kolem středu A jako ve cvičení 176. Co z toho plyne pro dotykové body hledaných kružnic?

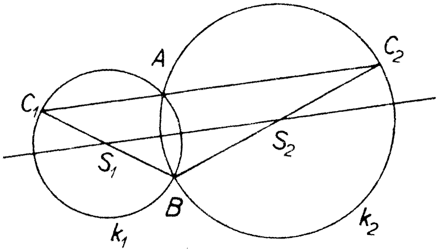
178. Dokažte, že každému kosočtverci lze vepsati kružnici. Vpište kružnici kosočtverci $ABCD$, je-li dáno $\overline{AB} = 6$ cm, $\sphericalangle\ DAB = 60°$.

179. Je dána kružnice k (střed S, poloměr 4 cm) a bod K ($\overline{KS} = 5$ cm). Veďte bodem K přímku tak, aby na ní kružnice k vytínala tětivu délky 38 mm. Kolik řešení má úloha? Návod: určete konstrukcí vzdálenost, kterou má hledaná přímka od středu S: použijte výsledku cvičení 153.

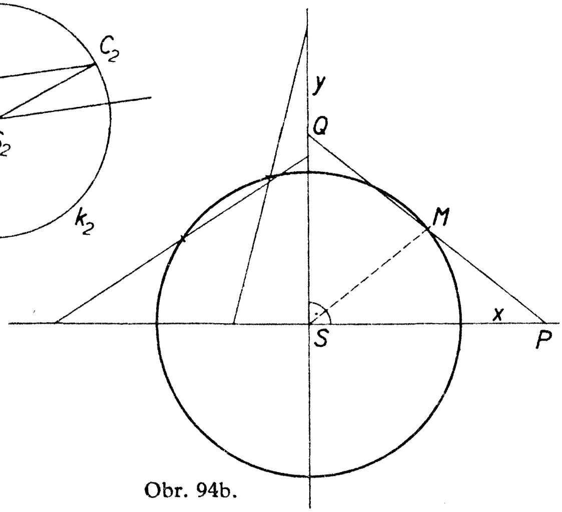
180. Tečny kružnice se středem S sestrojené v bodech A, B se protnou v bodě C. Kolmice vztyčená v bodě C k přímce BC protne přímku AS v bodě D. Sestrojte obrázek a dokažte, že $\overline{SD} = \overline{CD}$. Návod: dokažte, že $\sphericalangle\ DSC = \sphericalangle\ DCS$; oba jsou doplňkové k stejně velkým úhlům.

181. Trojúhelník ABC má strany $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm, $\overline{CA} = 8$ cm. A je středem kružnice o poloměru 5 cm. Sestrojte tečny této kružnice a) rovnoběžné se stranou BC, b) procházející bodem B.

182. Jsou dány dva body U, V. Bodem V je vedena přímka m a z bodu U je na m spuštěna kolmice. Co vyplní paty těch kolmic, otáčí-li se přímka m kolem bodu V? Náležejí body U, V tomu geometrickému místu?



Obr. 95.



Obr. 94b.

183. Obr. 94b. Úsečka PQ stálé délky 6 cm se pohybuje tak, že její krajní body zůstávají na dvou kolmých přímkách x, y. Po čem se pohybuje střed M úsečky PQ? Návod: Kde leží střed kružnice opsané trojúhelníku PQS? Určete $\overline{SM}$.

184. Obr. 95. Kružnice k_1, k_2 (středy S_1, S_2) se protnou v bodech A, B. Rovnoběžka k S_1S_2 vedená bodem A protne k_1 znovu v bodě C_1, k_2 znovu v bodě C_2. Dokažte; a) že spojnice BC_1 prochází středem S_1 a spojnice BC_2 středem S_2; b) že $\overline{C_1C_2} = 2 \cdot \overline{S_1S_2}$.

185. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC, je-li dána přepona $\overline{AB} = 7$ cm a odvěsna $\overline{AC} = 3$ cm! Vyjděte a) z odvěsny $\overline{AC}$, b) z přepony $\overline{AB}$.

186. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána strana $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm, $\sphericalangle ACB = 45°$! Vyjděte ze strany AC. Kolik je řešení?

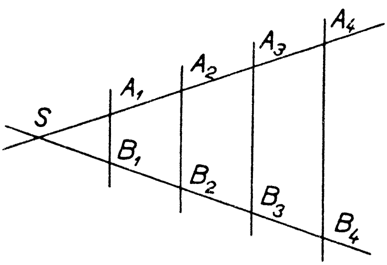
187. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána strana $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AC} = 3$ cm, a) $\sphericalangle ABC = 30°$, b) $\sphericalangle ABC = 60°$. Vyjděte ze strany AB. Kolik řešení má úloha v případě a), kolik v případě b)? Je možné změnit úhel ABC při ponechání délek $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ tak, aby úloha měla jediné řešení?

188. Sestrojte euklidovsky úhel a) 45°, b) 135°, c) 67°30′, d) 75°, e) 105°.

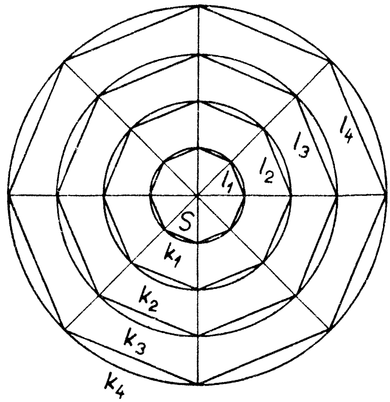
189. Rozdělte euklidovsky danou úsečku na tři stejné díly.

6. **Délka kružnice a kruhového oblouku.**

Dříve než si vyložíme, jak se počítá délka kružnice čili obvod kruhu, probereme si jeden pomocný výsledek. Na obr. 96 je narýsován ostrý úhel s vrcholem S a na jeho ramena je nanesena několikrát za sebou úsečka délky 1 cm. Tak vznikly body $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$. Narýsujeme úsečky A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 a ukážeme si, že platí $\overline{A_2B_2} = 2. \overline{A_1B_1}$, $\overline{A_3B_3} = 3. \overline{A_1B_1}$, $\overline{A_4B_4} = 4. \overline{A_1B_1}$, atd.



Obr. 96.



Obr. 97.

První z těchto vztahů si hned ověříme: úsečka A_1B_1 je totiž střední příčka trojúhelníka SA_2B_2. Také druhý vztah dostaneme snadno: úsečka A_2B_2 je totiž střední příčka lichoběžníku $A_1A_3B_3B_1$. Platí tedy $\overline{A_1B_1} + \overline{A_3B_3} = 2 . \overline{A_2B_2}$. Víme už, že $\overline{A_2B_2} = 2 . \overline{A_1B_1}$; vypočteme $\overline{A_3B_3} = 2 \overline{A_2B_2} - \overline{A_1B_1} = 4 \overline{A_1B_1} - \overline{A_1B_1} = 3 \overline{A_1B_1}$. Podobně bychom odvodili z lichoběžníka $A_2A_4B_4B_2$, že $\overline{A_4B_4} = 4 \overline{A_1B_1}$.

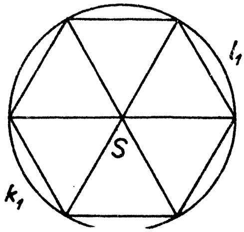
Na obr. 97 jsou narýsovány čtyři soustředné kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 se společným středem S a s poloměry 1, 2, 3, 4 cm. Plný úhel s vrcholem S je rozdělen na 8 stejných dílů. Ramena těch úhlů protínají kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 v průsečících, které jsou spojeny podle obr. 97 lomenými čarami l_1, l_2, l_3, l_4. Každá z těch lomených čar je složena z osmi stejně dlouhých úseček.

O délkách těch lomených čar platí: $l_2 = 2\, l_1$, $l_3 = 3\, l_1$, $l_4 = 4\, l_1$. Neboť na příklad lomená čára l_2 se skládá z 8 úseček, které jsou podle předchozího výkladu dvakrát tak dlouhé jako úsečky skládající čáru l_1. Představte si, že bychom rozdělili plný úhel z obr. 97 na větší počet stejných dílů než 8, na příklad na 40 dílů, a sestrojili pak podobné lomené čáry l_1, l_2, l_3, l_4; opět bude platit: $l_2 = 2\,l_1$, $l_3 = 3\,l_1$, $l_4 = 4\,l_1$.

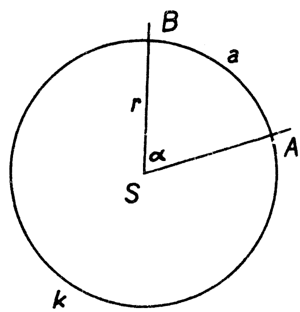
Rozdělíme plný úhel na velký počet stejných dílů a spojíme dělicí body; vzniknou lomené čáry l_1, l_2, l_3, l_4, které se velice málo liší od kružnic k_1, k_2, k_3, k_4. Ty lomené čáry budou mít přibližně stejnou délku jako kružnice k_1, k_2, k_3, k_4. Označíme si o_1, o_2, o_3, o_4 délky těch kružnic. Pak platí $o_2 = 2\,o_1$, $o_3 = 3o_1$, $o_4 = 4o_1$ atd. Obecně si označíme o délku kružnice o poloměru r cm; pak je

$$(1) \qquad o = r \,.\, o_1.$$

Tuto rovnici jsme si odvodili pro $r = 2, 3, 4$ cm, platí však i pro $r = 5, 6$, atd. Platí i tehdy, není-li r číslo celé. To znamená, že na příklad kružnice o poloměru 3,6 cm má délku $3{,}6\,.\,o_1$. Podle rovnice (1) dovedeme tedy vypočítat délku o každé kružnice, známe-li délku o_1 kružnice o poloměru 1 cm. Obr. 98 nám znázorňuje kružnici k_1 o poloměru 1 cm a do ní vepsaný pravidelný šestiúhelník. Jeho obvod je roven 6 cm. Názor nám říká, že délka kružnice je o něco



Obr. 98.



Obr. 99.

větší. Číslo, které vyjadřuje v centimetrech délku polokružnice k_1, je tedy o něco větší než 3. To číslo se označuje řeckým písmenem π (pí) a nazývá se **číslo Ludolfovo.** Jeho hodnotu určil přibližně již ve starověku řecký matematik **Archimedes** tak, že je mezi čísly $3\frac{10}{71}$, $3\frac{1}{7}$. Zpravidla užíváme hodnoty $\pi \doteq 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$. Není to sice hodnota zcela správná, ale pro většinu našich výpočtů postačí. Použijeme-li označení π pro Ludolfovo číslo, je délka kružnice

k_1 rovna délce $o_1 = 2\pi$. Z rovnice (1) dostaneme **vzorec pro délku kružnice o poloměru r cm**:

$$o = 2\pi r. \qquad (2)$$

Délka kružnice vyjde ovšem také v centimetrech. Vyjádříme-li poloměr v jiných jednotkách než v centimetrech, vyjde délka kružnice podle vzorce (2) v týchž jednotkách.

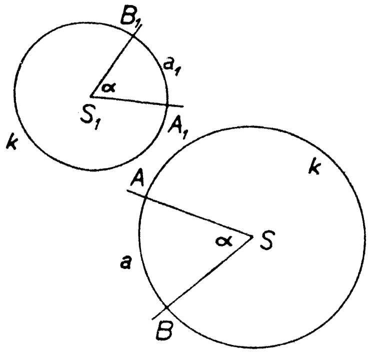
1. úloha. Proměňte číslo $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$ na desetinný zlomek; kolik vyjde, počítáte-li na 5 platných cifer? Správná hodnota Ludolfova čísla je $\pi = 3{,}14159265\ldots$ V kolika platných cifrách tedy souhlasí π s číslem $\frac{22}{7}$? (Při zaokrouhlení ve 4 platných cifrách.)

Na obr. 99 jest kružnice k se středem S a poloměrem r a úhel α, jehož vrchol je střed S kružnice k. Proto nazýváme úhel α **středovým úhlem kružnice k**. Ramena úhlu α protnou kružnici k v bodech A, B; ty dva body rozdělí kružnici ve dvě části; ta část kružnice k, která leží v úhlu α, se jmenuje **oblouk kružnice příslušný k středovému úhlu** α. K dvěma stejně velkým středovým úhlům přísluší stejně dlouhé oblouky téže kružnice. K středovému úhlu 360° přísluší celá kružnice, k úhlu 180° polokružnice, k úhlu 90° čtvrtkružnice, k úhlu 30° dvanáctina celé kružnice. K středovému úhlu 1° přísluší oblouk, jehož délka je třístýšedesátý díl délky kružnice. Velikost středového úhlu a délka příslušného oblouku jsou veličiny přímo úměrné.

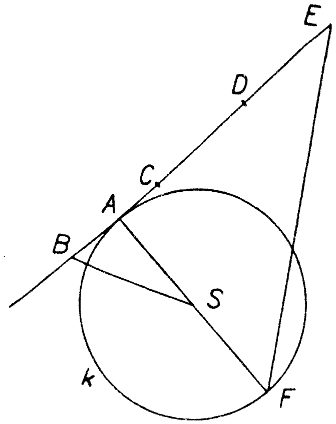
Je dán poloměr r kružnice k (v centimetrech) a středový úhel α (v stupních). Máme za úkol vypočíst délku oblouku příslušného k úhlu α. Označíme délku oblouku písmenem a; vyjádříme a pro $\alpha = 1°, 2°, 3°$; dostaneme $a = \frac{2\pi r}{360}$, $2 \cdot \frac{2\pi r}{360}$, $3 \cdot \frac{2\pi r}{360}$. Obecně platí: $a = \frac{2\pi r}{360} \cdot \alpha = \frac{\pi r}{180} \cdot \alpha$; při tom je úhel α vyjádřen v stupních, oblouk a vyjde v týchž jednotkách, v kterých bylo vyjádřeno r.

Vzorec pro délku oblouku kružnice je tedy $a = \frac{\pi r a}{180}$. Odvodili jsme jej pro takový úhel a, který je ve stupních vyjádřen celým číslem. Tento vzorec však platí i tehdy, je-li úhel a ve stupních vyjádřen obyčejným nebo desetinným zlomkem. Je-li a dáno ve stupních a minutách, převedeme počet minut na desetinný nebo obyčejný zlomek stupně.

2. úloha. Je dán poloměr kružnice $r = 2$ cm, středový úhel $a = 51°\ 18'$. Hledáme délku příslušného oblouku. Převedeme $51°18' \doteq 51{,}3°$. Vyjde $a \doteq 0{,}57\,\pi$. Počítáme na 3 platné cifry a dostaneme $a \doteq 1{,}79$ cm.



Obr. 100.



Obr. 101.

Na obr. 100 jsou narýsovány kružnice k_1 o poloměru 1 cm a kružnice k o poloměru r cm. Dále jsou tu zobrazeny středové úhly ASB, $A_1S_1B_1$, téže velikosti α. Vyjádříme si délky oblouků a, a_1, příslušných k středovému úhlu α v obou kružnicích. Dostaneme $a = \frac{\pi r \alpha}{180}$, $a_1 = \frac{\pi \alpha}{180}$; platí tedy rovnice $a = r \cdot a_1$. Při určitém středovém úhlu jsou proměnné veličiny: poloměr kružnice a délka příslušného oblouku přímo úměrné.

Z rovnice $a = r \cdot a_1$ dovedeme vypočítat délku oblouku a, známe-li poloměr r a délku oblouku a_1. Délku oblouku (v cm) kružnice o poloměru 1 (cm), který přísluší středovému úhlu α, značíme arc α, čteme **arkus alfa.** Arkus je latinské slovo a znamená česky oblouk. Je tedy $a_1 = \text{arc}\,\alpha = \frac{\pi \alpha}{180}$. Hodnoty arc α byly pro různé středové úhly α vypočítány a sestaveny do tabulky. Takovou tabulku pro duté úhly najdete v příručních matematických tabulkách.

3. úloha. Je dán poloměr kružnice $r = 4$ cm; s použitím tabulky vypočteme: a) oblouk příslušný k středovému úhlu 53°, b) středový úhel příslušný k oblouku $a = 4{,}860$ cm. V úloze b) hledáme v tabulce nejbližší číslo k číslu $4{,}860 : 4 = 1{,}215$; které to je?) Vyjde: a) 3,7, b) 70°.

Cvičení.

190. Vypočtěte délku kružnice, je-li dán: a) poloměr 6,3 cm, b) průměr 5,6 dm, c) průměr 9,1 m. Volte $\pi \doteq 3\frac{1}{7}$.

191. Vypočtěte obvod kruhu, je-li dáno: a) poloměr 15 cm, b) průměr 2,5 dm, c) průměr 37 m. Volte $\pi \doteq 3{,}14$ a výsledky zaokrouhlete na 2 platné cifry.

192. Vypočtěte poloměr kruhu, je-li obvod roven a) 11 cm, b) 6,4 m, c) 8,8 m, d) 1 km.

V příkladech 193 až 201 volte $\pi \doteq 3{,}14$ nebo, kde je to početně výhodnější, $\frac{22}{7}$ a odpovědi udávejte nejvýše na tři platné cifry.

193. Obvod polokruhu je 3,5 dm. Určete poloměr.

194. Kus drátu dlouhý 1 m je ohnut do tvaru obvodu a) kruhu, b) polokruhu, c) čtvrtkruhu. Vypočtěte poloměr.

195. Ze studny hluboké $16\frac{1}{7}$ m se nabere vědro rumpálem. Kolikrát se musí otočiti klikou rumpálu, je-li průměr hřídele 2 dm? Nedbejte tloušťky provazu.

196. Průměr kola u velocipedu je 7 dm. a) Kolikrát se otočí kolo, než ujede 1 km? b) Otočí-li se kolo 25krát za 10 vteřin, jaká je rychlost jízdy v km za hodinu?

197. Oblouku kružnice přísluší středový úhel 108°; délka oblouku je 33 mm. Určete poloměr kružnice.

198. Velká ručička na hodinách je dlouhá 12 cm. a) Jakou dráhu urazí její hrot za $\frac{3}{4}$ hodiny? b) Jakou rychlostí se pohybuje její hrot?

199. Čtyři stejné válcové plechovky s průměrem podstavy 10 cm stojí tak, že se navzájem dotýkají. Jak dlouhého provázku je třeba, chceme-li je svázat dohromady?

200. Opakujte cvičení 199. pro tři plechovky.

201. V jakém poměru je rozdělena kružnice tětivou, která půlí poloměr, na nějž je kolmá?

202. Přesvědčte se, že je velmi přibližně $\pi \doteq \frac{355}{113}$ (souhlasí na 6 platných cifer).

203. Na obr. 101 je naznačena tak zvaná Kochanského rektifikace kružnice. Rektifikace je latinské slovo a znamená česky narovnání. Rektifikovati kružnici znamená, sestrojiti úsečku (na obr. 101 EF), jejíž délka je přibližně rovna polovině kružnice. Úsečku EF dostanete takto: zvolte průměr AF kružnice k, sestrojte tečnu t v bodě A, úhel $\sphericalangle ASB = 30°$ a nanesete $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{AS}$. Zvolte poloměr kružnice k za jednotku, vypočtěte délku $\overline{EF}$ na 3 platné cifry a porovnejte s číslem π. Tato konstrukce rektifikace je jen přibližná. Přesnou rektifikaci nelze s použitím pravítka a kružítka provést.

204. Zvolte $\pi \doteq 3{,}1416$ a vypočtěte na 3 platné cifry:

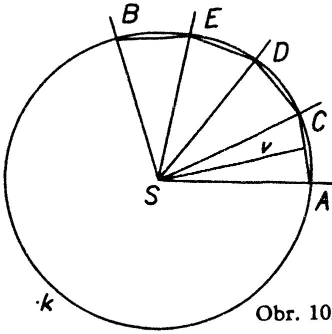
a) arc 35°, b) arc 27°32′, c) arc 2°27′. Porovnejte s tabulkou.

205. Vypočtěte oblouk, je-li dán poloměr kružnice $r = 35$ mm a středový úhel:

a) 47°30′, b) 128°, c) 249°15′. Jak použijete tabulky, není-li středový úhel dutý?

206. Vypočtěte středový úhel v stupních, je-li dán poloměr kružnice $r = 12{,}5$ dm a délka oblouku a) 12,5 dm; b) 30 cm; c) 53,4 m.

207. Oč by se prodloužil zemský rovník, kdyby se poloměr zeměkoule prodloužil o jeden metr? (Na 3 platné cifry.) Potřebujete k řešení úlohy znát poloměr zeměkoule?



Obr. 102.

7. Obsah kruhu a jeho částí.

Na obr. 102 je znázorněna kružnice k a středový úhel ASB. Tento úhel určuje kruhovou výseč ASB. Úhel ASB rozdělíme na několik stejných dílů (na čtyři). Tím se rozdělí také výseč ASB na čtyři shodné výseče ASC, CSD, DSE, ESB. Spojme body $ACDEB$ za sebou. Tak vzniknou čtyři rovnoramenné trojúhelníky ASC, CSD, DSE, ESB, navzájem shodné podle věty *sus*. Protože jsou ty trojúhelníky shodné, jsou jejich základny stejně velké, platí tedy $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EB}$. Obsah trojúhelníka ASC je $\overline{AC} \,.\, \frac{v}{2}$, kde v znamená jeho výšku (obr. 102). Všecky trojúhelníky ASC, CSD, DSE, ESB jsou shodné a proto mají stejné obsahy. Součet těch obsahů je $P = 4 \,.\, \overline{AC} \,.\, \frac{v}{2}$. Avšak $4 \,.\, \overline{AC}$ je délka lomené čáry $ACDEB$. Označíme tu délku d; pak platí

$$(1) \qquad P = d \,.\, \frac{v}{2}.$$

Když rozdělíme úhel ASB na hodně velký počet stejných dílů a spojíme dělící body, vznikne lomená čára AB, která se velmi málo liší od oblouku AB. Součet obsahů vzniklých rovnoramenných trojúhelníků je přibližně roven obsahu výseče a délka lomené čáry AB je přibližně rovna délce oblouku AB. Při tom výška v — jak ukazuje názor — se přibližně rovná poloměru.

Protože pro délku lomené čáry AB a součet obsahů trojúhelníků stále platí rovnice (1), dostaneme mezi obsahem výseče ASB, délkou a oblouku AB a poloměrem r dané kružnice tento vztah:

$$(2) \qquad P = d \,.\, \frac{v}{2}.$$

Lze ukázat, že tento vztah, který jsme si odvodili jen přibližně, platí přesně. Vzorec (2) si upravíme dvojím způsobem: vyjádříme délku d jednak pomocí arc α, jednak bez arc α a dosadíme do rovnice (2). Dostaneme

$$P = \frac{r^2}{2} \operatorname{arc}\alpha = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} \qquad (\alpha \text{ v stupních}).$$

Celý kruh je vlastně výseč, příslušná k středovému úhlu 360°; **pro obsah kruhu máme tedy rovnici**

$$P = \pi r^2.$$

Cvičení.

208. Vypočtěte obsah kruhu, je-li a) poloměr 8,4 cm, b) průměr 7 cm, c) průměr 11,2 mm .Volte $\pi \doteq \frac{22}{7}$.

209. Vypočtěte obsah kruhu, je-li a) poloměr 23 cm, b) průměr 3,2 dm, c) průměr 0,47 mm. Zvolte $\pi \doteq 3{,}14$ a výsledky zaokrouhlete na 2 platné cifry.

V cvičeních 210 až 225 volte $\pi \doteq 3{,}14$ nebo, kde je to početně výhodnější, $3\frac{1}{7}$ a výsledky zaokrouhlete nejvýše na 3 platné cifry.

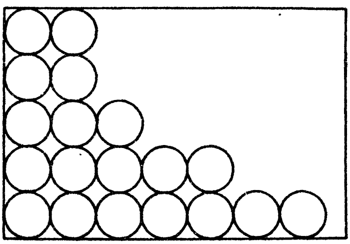
210. Kruh má obvod 1 m. Jak velký má obsah?

211. Kruh má obsah a) 385 m^2, b) 1 dm^2. Určete poloměr.

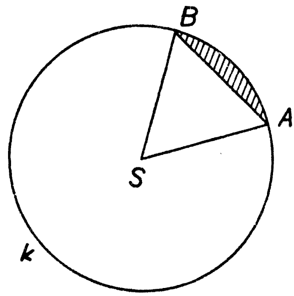
212. Plot kolem pozemku má délku 4 400 m. Jaký je obsah pozemku (plošná výměra), má-li tvar a) čtverce, b) obdélníka o poměru stran 1 : 2, c) kruhu? Dá se ukázat, že ze všech čar dané délky omezuje kružnice největší plochu.

213. Z papírového čtverce o straně 1 dm se vystřihne co největší kruh. Jaký obsah mají odstřižky?

214. Kolik procent (v celých číslech) obsahu rovnostranného trojúhelníku zaujímá vepsaný kruh? Vypočtěte třeba pro délku strany rovnou 1.



Obr. 103.



Obr. 104.

215. Z plechového obdélníku rozměrů 1 m, 1,5 m mají být vystřiženy kruhy o průměru 20 cm podle obr. 103. Kolik procent plechu přijde do odpadků? Dovedete vystřihnout větší počet stejně velkých kruhů tak, aby se procento odpadků zmenšilo?

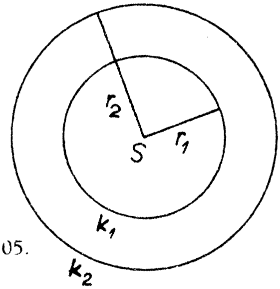
216. Kovová kruhová deska s průměrem 18 cm váží 6 kg. Kolik bude vážiti, budou-li v ní tři kruhové otvory s průměry po 36 mm?

217. Vypočtěte a) obsah, b) obvod výseče kruhu o poloměru $r = 4{,}2$ cm a středovém úhlu 105°. Použijte tabulek pro arcα.

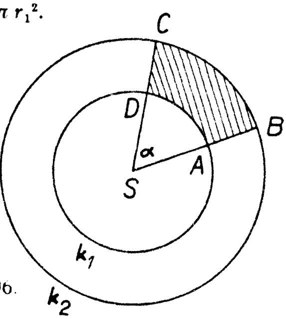
218. Výseč kruhová má obsah 4,2 dm^2 a přísluší středovému úhlu 35°. Vypočtěte poloměr kruhu s pomocí tabulky pro arcα.

219. Obr. 104. Kruh k má poloměr 10 cm, úseč AB přísluší k středovému úhlu a) 60°, b) 90°. Vypočtěte její obsah. Návod: obsah úseče je rozdíl obsahu výseče ASB a trojúhelníka ASB.

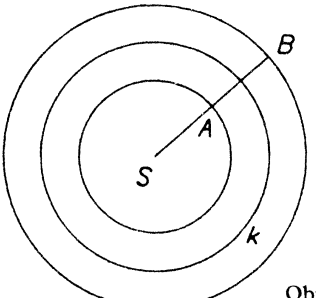
220. Na obr. 105 je znázorněno mezikruží, t. j. část roviny omezená dvěma soustřednými kružnicemi k_1, k_2. Vypočtěte jeho obsah, jsou-li dány poloměry kružnic $r_1 = 25$ m, $r_2 = 48$ m. Vysvětlete, proč je výhodnější počítat podle rovnice $P = \pi\,(r_2 - r_1)\cdot(r_2 + r_1)$ než podle rovnice $P = \pi\,r_2^2 - \pi\,r_1^2$.



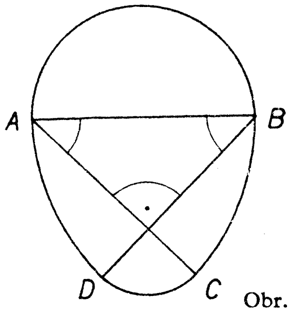
Obr. 105.



Obr. 106.



Obr. 107.



Obr. 108.

221. Na obr. 106 vidíte vyčárkovanou plochu $ABCD$, která se jmenuje výseč mezikruží. Jsou dány poloměry obou kružnic $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 5$ cm a středový úhel $\alpha = 54°$. Vypočtěte a) obvod, b) obsah výseče mezikruží!

***222.** Mezikruží je omezeno soustřednými kružnicemi o poloměrech 7, 1. Vypočtěte poloměr třetí soustředné kružnice, která rozděluje plochu mezikruží na dvě stejně velké části!

***223.** Obr. 107. Šířkou mezikruží nazýváme délku úsečky $\overline{AB}$. Označíme o obvod kružnice k se středem S, která půlí úsečku AB. Dokažte, že obsah mezikruží je $o\,.\,\overline{AB}$.

***224.** Mezikruží má obsah 16 cm² a šířku 2 cm. Vypočtěte poloměry kružnic, které je omezují.

***225.** Narýsujte čáru podle obr. 108. V bodech A, B, C, D je dotyk, $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BD} = 6$ cm, úhel $\sphericalangle\, CAB = \sphericalangle\, DBA = 45°$. Vypočtěte její délku a obsah plochy, kterou omezuje.

V. OBJEM, POVRCH A SÍŤ HRANOLU A ROTAČNÍHO VÁLCE.

a) Objem hranolu.

Zvolme si určitou jednotku délky (na př. 1 cm) a označme a délku, b šířku, c výšku kvádru, vyjádřené ve zvolené jednotce. Objem kvádru se rovná součinu abc a je vyjádřen v objemové jednotce, která přísluší k zvolené jednotce délkové.

Co rozumíme objemovou jednotkou? Je to objem krychle (1 cm^3), jejíž hrana je zvolená jednotka (1 cm), nebo objem jiného tělesa, ale stejně velkého jako naše krychle.

Součin abc můžeme na příklad počítat tak, že znásobíme nejdříve $a.b$ a výsledek ještě číslem c. Avšak ab je obsah obdélníku o stranách a, b, to jest obsah podstavy kvádru (horní nebo dolní, neboť obě podstavy jsou shodné), vyjádřený v plošné jednotce, která přísluší k zvolené jednotce délky (1 cm^2). Tedy objem kvádru dostaneme, znásobíme-li obsah podstavy výškou. Ale abc můžeme vypočítat také jinak. Z aritmetiky víme, že platí: $abc = (a.b).c = (a.c).b = (b.c).a$. Avšak $a.c$ je obsah obdélníku o stranách a, c, tedy obsah podstavy, kterou je nyní obdélník o stranách a, c. Výškou bude b.

Podobně bychom mohli uvažovat o součinu $(b.c).a$.

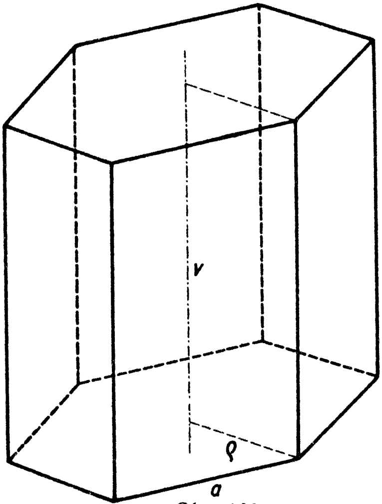
Vidíme, že za podstavu můžeme zvolit kteroukoliv stěnu a vždy dostaneme výraz abc, t. j. součin podstavy a výšky.

Vzpomeňme si dále, za jakých podmínek jsme odvozovali vzorec pro objem kvádru v první třídě. Tenkráte byly délky hran určeny celými čísly. Platí také tento vzorec pro případy, kdy délky hran jsou udány čísly lomenými? Ukážeme, že ano.

Na straně 10 jsme odvodili platnost vzorce $P = ab$ pro obsah obdélníku i pro případ, kdy a, b jsou čísla lomená. Stejným způsobem bychom mohli opakovat úvahy i pro kvádr s rozměry udanými v číslech lomených.

Proto můžeme říci: **Objem kvádru vypočítáme, znásobíme-li obsah podstavy výškou, ať jsou rozměry udány celými, nebo lomenými čísly.**

Ukážeme, že tento vzorec platí i pro libovolný kolmý hranol.



Obr. 109

Nejdříve zopakujme základní vlastnosti hranolu. Jedním z hranolů byl kvádr. Je to vlastně kolmý hranol čtyrboký s podstavou obdélníkovou. To znamená, že má dvě shodné a spolu rovnoběžné podstavy, které jsou obdélníky. Strany podstavy se nazývají podstavné hrany. Kolik má podstava hran, tolik má hranol pobočných stěn a podle jejich počtu také hranol blíže určujeme, na př. hranol pětiboký. Kolik tedy bude mít pobočných stěn a jaké mnohoúhelníky budou podstavy hranolu pětibokého, šestibokého? (Obr. 109.)

Pobočné stěny kolmého hranolu jsou obdélníky o společné výšce. Pobočné hrany jsou průsečnice vždy dvou sousedních pobočných stěn. Pobočné hrany jsou kolmé k rovině podstavy. Délkou výšky rozumíme vzdálenost obou podstav, a to samozřejmě vzdálenost kolmou.

Je-li podstavou pravidelný mnohoúhelník, na př. čtverec nebo pravidelný šestiúhelník, mluvíme o pravidelném hranolu. Hranol pravidelný je vždy kolmý. Proto u hranolu pravidelného slůvko kolmý vynecháváme. Pobočné stěny pravidelného hranolu jsou shodné obdélníky.

Plášť hranolu kolmého je souhrn pobočných stěn. Obsah jeho značme Q. Povrch hranolu je součet obsahu obou podstav a pláště. Značíme-li obsah podstavy P, povrch S, pak píšeme: $S = 2P + Q$.

Objem značíme V. O objemu hranolu kolmého máme dokázat, že se rovná součinu obsahu podstavy a výšky.

Slovem podstava zase můžeme rozumět buďto podstavu dolní nebo také horní, neboť obě podstavy jsou shodné. Také o volbě jednotek délky, obsahu a objemu platí stále totéž, co jsme právě řekli u kvádru.

Důkaz vzorce pro objem kolmého hranolu provedeme nejprve pro případ, že podstavou je pravoúhlý trojúhelník. Mysleme si, že pravoúhlý trojúhelník ABC v obr. 4 je dolní podstavou kolmého hranolu, jehož výšku označíme v. Je-li pravoúhlý trojúhelník ABD v témže obraze dolní podstavou druhého hranolu o stejné výšce v, tvoří oba trojboké hranoly dohromady kvádr, jehož dolní podstavou je obdélník $ACBD$. Označme P obsah tohoto obdélníka. Víme, že objem kvádru o podstavě P a výšce v je Pv. Avšak oba naše trojboké hranoly jsou stejně velké, a proto objem každého z nich je polovinou objemu kvádru. Bude tedy objem jednoho z obou trojbokých hranolů, na př. s podstavou ABC součin $\frac{1}{2}\ P.v$. Obsah podstavy našeho trojbokého hranolu je $\frac{1}{2}\ P$. Proto objem hranolu je opět součin obsahu podstavy a výšky.

Uvažujme nyní o kolmém trojbokém hranolu s podstavou trojúhelníku EFG. Vidíme, že trojúhelník EFG může být buď ostroúhlý nebo tupoúhlý. V obr. 5 a 6 máme oba trojúhelníky. Výškou spuštěnou s vrcholu E rozdělí se nám trojúhelník na dva trojúhelníky pravoúhlé, EFH, HGE. Na straně 13 jsme již odvodili vzorec pro obsah trojúhelníku EFG. Náš trojboký hranol s podstavou EFG a s výškou v se rozdělí na dva trojboké hranoly s podstavami, které jsou pravoúhlé trojúhelníky EFH, HGE. Označme P_1 obsah trojúhelníka EFH, P_2 obsah trojúhelníka EGH. V případě obr. 5 je náš hranol součet obou hranolů s podstavami EFH, EGH se společnou výškou v. Objemy obou hranolů jsou: $P_1 \cdot v$, $P_2 \cdot v$. Proč? Objem hranolu s podstavou EFG a s výškou v je pak:

$$P_1 v + P_2 v = (P_1 + P_2)\ v = Pv.$$

V aritmetice jsme si vyjádřili zákon o roznásobení takto: $(a + b)c = ac + bc$. Vyslovte tento zákon.

Proto platí: $ac + bc = (a + b)c$.

K témuž výsledku dojdeme v případě b). Z obr. 6 vidíme, že obsah trojúhelníku EFG je rozdíl obsahů pravoúhlých trojúhelníků EFH a EGH. A tak i hranol trojboký s podstavou EFG a s výškou v je rozdíl trojbokých hranolů s podstavami, které jsou pravoúhlé trojúhelníky EFH, EGH a s výškou v pro oba hranoly společnou. Potom bude objem hranolu s podstavou EFG vyjádřen takto:

$$P_1 v - P_2 v = (P_1 - P_2)\ v = Pv.$$

Můžeme nyní vyslovit výsledek: **Objem kolmého hranolu trojbokého je součin podstavy a výšky.**

A nyní si rozšiřme tento výsledek také na kolmý hranol s podstavou, která je libovolný mnohoúhelník. Tak v obr. 13 máme podstavou kolmého hranolu obecný čtyrúhelník $EFGH$ a výšku v.

Sestrojme si ve čtyrúhelníku $EFGH$ úhlopříčku EG. Tou se nám rozdělí čtyrúhelník $EFGH$ na dva trojúhelníky, EFG, EGH. Obsah podstavy EFG

označme P_1, podstavy EGH P_2. Objem hranolu s podstavou EFG a s výškou v je $P_1 v$, objem hranolu s podstavou EGH a s výškou v je $P_2 v$. Potom je objem hranolu s podstavou $EFGH$ a s výškou v součet objemů obou hranolů s podstavami EFG a EGH. Platí tedy:

$$P_1 v + P_2 v = (P_1 + P_2)\, v = Pv.$$

Odvoďme si ještě, jak bychom počítali objem kolmého hranolu s podstavou, která je libovolný pětiúhelník $PQRST$ a s výškou v (obr. 11). — Vedeme úhlopříčky PR, PS. Těmi se nám rozdělí pětiúhelník na tři trojúhelníky PQR, PRS, PST. Označme obsah pětiúhelníka $PQRST$ písmenem P, obsahy trojúhelníků PQR, PRS, PST postupně písmeny P_1, P_2, P_3. Potom je obsah pětiúhelníku $P = P_1 + P_2 + P_3$. Objem hranolu pětibokého je:

$$P_1 v + P_2\, v + P_3\, v = (P_1 + P_2 + P_3)\, v = Pv.$$

Můžeme tedy říci: **Objem kolmého hranolu vypočítáme, znásobíme-li obsah podstavy výškou hranolu.**

Síť kolmého hranolu.

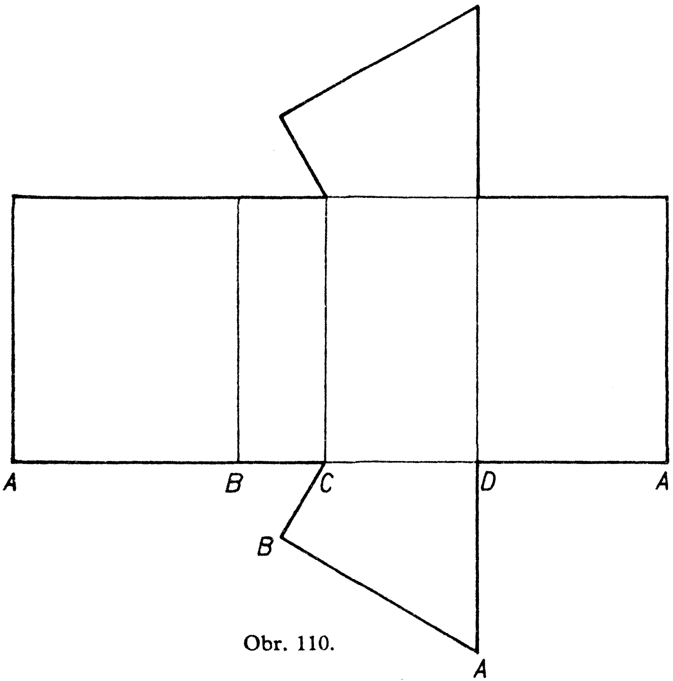
Sestrojme si nyní síť kolmého hranolu čtyrbokého v obr. 110.

Čtyrúhelník $ABCD$ je určen: $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AD} = 3$ cm, $\sphericalangle\, BCD = 120°$, $\sphericalangle\, DAB = 60°$, $\sphericalangle\, ABC = 90°$.

Sestrojme nejdříve podstavu $ABCD$. Položme nyní hranol jednou pobočnou stěnou na nákresnu a rozviňme plášť na nákresnu. Rozvinutý plášť jsou čtyři obdélníky. Tyto obdélníky mají jednu stranu stejně dlouhou. Ta je vždy dvěma sousedním obdélníkům společná. Druhá strana každého obdélníku se rovná příslušné hraně podstavné. Rozvinutý plášť je tedy obdélník, jehož jedna strana je výška hranolu a druhá strana je délka obvodu podstavy. K jedné stěně přidáme obě podstavy. V obr. 110 je jedna podstava připojena k hraně podstavné CD, druhá horní podstava ke hraně protější. (Podstavu můžeme připojit ke kterékoli hraně podstavné.)

Odtud snadno odvodíme vzorec pro povrch kolmého hranolu. Označíme-li obsah podstavy P a pláště Q, je povrch dán vzorcem: $S = 2P + Q$. Plášť hranolu je součet obsahů všech pobočných stěn; je dán součinem obvodu podstavy a výšky.

Početně: každá pobočná stěna je obdélník o základně, která je hranou podstavnou a o výšce v. Potom pro čtyrboký hranol $ABCD$ platí $Q = \overline{AB}\,.\,v +$



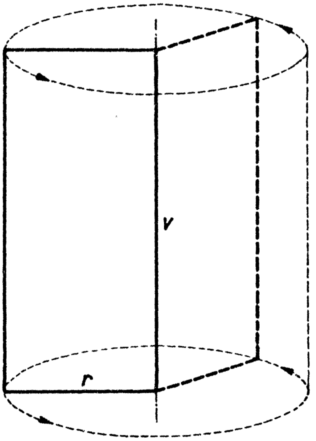
Obr. 110.

$+ \overline{BC}.v + \overline{CD}.v + \overline{DA}.v = (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}).v = o.v. \overline{AB}\ .v$ je součin délky a šířky obdélníka, t. j. obsah pobočné stěny o podstavné hraně AB, o je obvod podstavy.

Vysvětleme si nyní, co je to kosý hranol. Představme si, že srovnáme na sebe sešity stejné velikosti tak, že se sešity kryjí. Tvoří potom kolmý čtyrboký hranol. A nyní posuňme sešity tak, že rohy sešitů vytvoří čtyři hrany rovnoběžné a k rovině podstavy kosé. Tak dostaneme hranol čtyrboký kosý s podstavou obdélníkovou.

Objem takového hranolu musí zůstat týž jako objem kolmého hranolu, neboť jsme neměnili počet sešitů. Také výška zůstala stejná, jestliže rozumíme délkou výšky vzdálenost rovin obou podstav. U kolmého hranolu byla výška zároveň délkou pobočné hrany, u kosého hranolu je výška kratší než délka pobočné hrany.

Objem takového kosého hranolu je opět součin obsahu podstavy a výšky hranolu.



Obr. 111

b) Objem a povrch rotačního válce.

Rotační válec vznikne, otáčíme-li obdélník kolem jedné strany (obr. 111). Jeho podstavou je kruh, poloměr kruhu je délka té otáčející se strany, která je kolmá k ose otáčení. Výška je délka druhé strany obdélníku; je to zároveň vzdálenost obou podstav válce a délka spojnice středů obou podstav. Plášť válce je plocha válcová; je tvořena rovnoběžnými úsečkami, kterým říkáme strany válce.

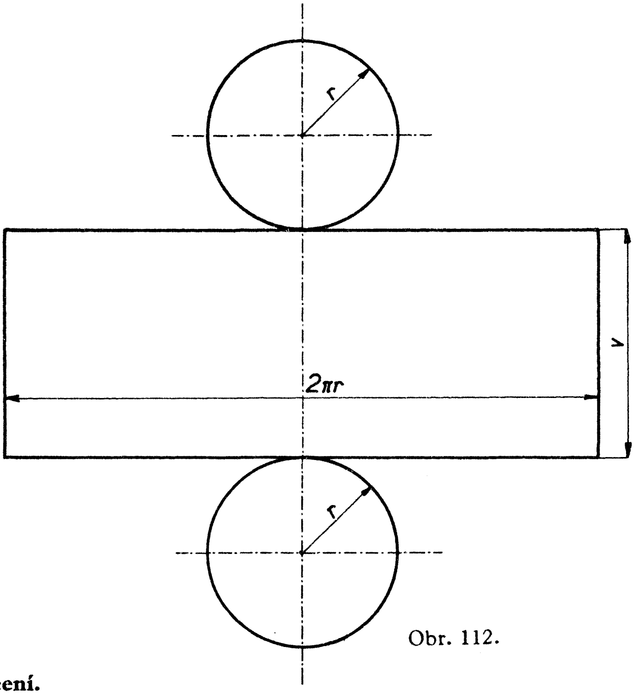
Na rotační válec můžeme se dívat také jinak. Porovnejme jej s pravidelným n-bokým hranolem, jehož výška je v a jehož podstavě je opsána kružnice o poloměru r. Je-li n veliké, je podstava válce velmi přibližně rovna podstavě hranolu, obvod podstavy válce obvodu podstavy hranolu, plášť válce plášti hranolu, objem válce objemu hranolu.

Označme P obsah podstavy válce, o obvod podstavy, Q plášť, V objem válce. Podobně označme obsah podstavy hranolu n-bokého P_n. Co bude znamenat o_n, Q_n, V_n?

Objem hranolu je $V = P_n . v$. Potom bude platit pro objem válce vzorec obdobný: $V = P . v$, slovy: **Objem rotačního válce vypočítáme, znásobíme-li obsah podstavy výškou válce.**

Jak vypočítáme obsah podstavy, t. j. obsah kruhu? Pro objem rotačního válce platí: $V = \pi r^2 . v$. Pro plášť hranolu platí vzorec: $Q = o_n . v$ a podobný vzorec bude tedy platit i pro plášť válce: $Q = o . v$. Obvod kruhu: $o = 2\pi r$, plášť $Q = 2\pi r v$. Povrch hranolu byl: $S = 2P + Q$. Tentýž vzorec platí i pro válec. U válce si ovšem můžeme dosadit za obsah podstavy i za plášť, a dostaneme: $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$ a po úpravě vytknutím před závorky: $S = 2\pi r (r + v)$. Síť válce dostaneme podobně jako u hranolu. Musíme zde nejdříve určit délku obvodu kruhu graficky. (Cvič. 203).

Rozvinutým pláštěm rotačního válce je obdélník (obr. 112). Jeho délka se rovná délce obvodu kruhové podstavy válce, šířka se rovná výšce válce. Podstavy jsou shodné kruhy, jež se dotýkají délky obdélníku, který nám představuje rozvinutý plášť.



Obr. 112.

Cvičení.

226. Podstava kolmého hranolu je rovnoramenný lichoběžník o základnách dlouhých 7 dm, 4 dm a výšce 3 dm. Výška hranolu je 8 dm. Určete povrch a objem hranolu.

227. Nádoba má tvar kolmého hranolu, jehož podstava má obsah 8,4 dm². V nádobě je 5,46 l vody. Do jaké výše sahá voda v nádobě?

228. Roura má tvar kolmého hranolu, jehož podstava má obsah 42 cm². Rourou protéká voda rychlostí 1,25 m za vteřinu. Kolik vody proteče za minutu?

229. Podstavou kolmého hranolu je rovnoramenný trojúhelník o základně dlouhé 10 cm a rameni dlouhém 13 cm. Výška hranolu je rovna výšce podstavy příslušné k její základně. Sestrojte síť hranolu (ve zmenšení 1 : 3) a určete jeho povrch a objem.

230. Určete objem, plášť a povrch rotačního válce:

a) $r = 35$ cm, $v = 6$ dm; b) $d = 2{,}1$ cm, $v = 2$ dm;

c) $d = 1{,}4$ m, $v = 1$ cm. d) $r = 0{,}35$ m, $v = 0{,}5$ m.

231. Určete výšku rotačního válce:

a) objem 66 dm³, $r = 2$ dm; b) objem 4 l, $r = 5$ cm.

232. Určete průměr podstavy rotačního válce:

a) objem 44 cm³, $v = 3{,}5$ cm; b) plášť 396 cm², $v = 9$ cm.

233. Pravidelný šestiboký hranol má podstavnou hranu dlouhou 2 cm, výšku 3 cm. Sestrojte jeho síť a určete obsah pláště.

234. Učebna ve škole má rozměry 8,80 m, 5,90 m, 3,70 m. Kolik m³ vzduchu připadá na jednoho žáka, je-li ve třídě 35 žáků?

235. Povrch pravidelného čtyrbokého hranolu je 20,58 cm^2. Obsah podstavy je 4,41 cm^2. Určete rozměry hranolu.

236. Délka podstavné hrany pravidelného pětibokého hranolu je 3 cm, výška hranolu je 9 cm. Určete velikost pláště hranolu.

237. Příčný průřez trámu je čtverec o straně dlouhé 1,8 dm. Určete objem trámu 6 m dlouhého (v dm^3) a jeho váhu ($s = 0{,}79$ g/cm^3).

238. Sloupek ze železového betonu má kruhový průřez o průměru 26 cm a výšku 3 m. Určete jeho váhu ($s = 2{,}4$ kg/dm^3).

239. Válcová roura má průměr 9 cm a délku 7 m. Vypočtěte její vnější povrch!

240. Hrnec tvaru rotačního válce má průměr dna 20 cm a hloubku 12 cm. Zjistěte, zda je správný údaj, že hrnec obsáhne $3\frac{3}{4}$ l.

241. Studna tvaru rotačního válce o průměru 1,6 m je 9 m hluboká. Kolik hl vody je ve studni, je-li hladina 6,4 m pod horním okrajem?

242. Rozvinutý plášť rotačního válce je čtverec o straně 27 cm. Určete objem válce.

243. Plynojem má tvar rotačního válce o průměru 42 m a výšce 50 m. Na výrobu 100 m^3 plynu je potřebí 2 q uhlí. Kolik tun uhlí je třeba proměnit v plyn, aby se plynojem naplnil?

244. Kolik m^2 plechu je třeba ke zhotovení pláště na železný kotel o průměru 2 m a délce 10 m? Kolik tun váží tento kotel, jestliže 1 m^2 plechu váží 100 kg?

245. Na dvojité elektrické vedení bylo spotřebováno 3 720 kg měděného drátu o průřezu 32,18 mm^2. Určete délku vedení ($s = 9{,}1$ g/cm^3).

VI. OPAKOVÁNÍ UČIVA.

246. Pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách 25 cm a 48 cm má stejný obsah s kosočtvercem o úhlopříčce 40 cm. Jak dlouhá je druhá úhlopříčka?

247. Pole tvaru trojúhelníka o základně 100 m a obsahu 14,4 a má se vyměnit za pole tvaru obdélníka 100 m dlouhého. Jak široké bude pole?

248. Pole má tvar lichoběžníka, jehož rovnoběžné strany jsou dlouhé 200 m a 280 m; jejich vzdálenost je 36 m. Kolik hl žita bude zapotřebí pro osetí, počítá-li se na osetí 1 ha 1,9 hl žita?

249. Státní vlajka má tvar obdélníka, jehož délka je dvojnásobek jeho šířky; modrý klín sahá do poloviny vlajky. Kolik m látky se spotřebuje na vlajku dlouhou $4\frac{1}{2}$ m a) celkem; b) pro modrý klín.

250. Kolem čtvercové zahrady o straně 58,5 m je cesta o šířce 1,2 m. Kolik m^2 měří tato cesta?

251. Kapesní jízdní řád má formát $(11{,}7 \cdot 17)$ cm^2 a obsahuje 332 stránky. Kolik m^2 papíru to je?

252. Krabička na zápalky je 57 mm dlouhá, 36 mm široká a 17 mm vysoká. Kolik cm^2 dřeva je potřeba na vnější část?

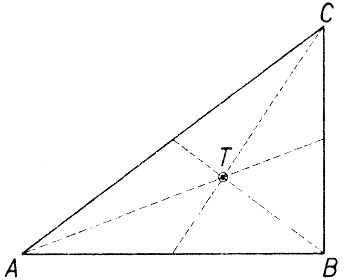
253. Střecha se skládá ze dvou obdélníků k sobě skloněných. Je dlouhá 12 m; štít tvaru rovnoramenného trojúhelníka má základnu 6 m dlouhou a je $1\frac{1}{4}$ m vysoký. Kolik m^2 lepenky je zapotřebí k pokrytí střechy?

254. Louka má tvar obdélníka dlouhého 48 m a širokého 20 m. Cesta jde úhlopříčkou tohoto obdélníka. O kolik m je kratší, než kdyby šla po obvodu?

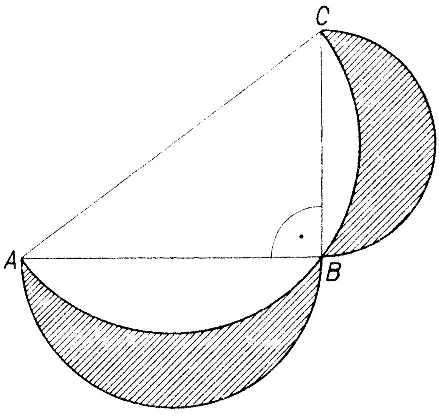
255. Karel si dělal draka tvaru deltoidu. Jedna úhlopříčka byla 20 cm, druhá 25 cm a je dělena druhou úhlopříčkou ve dvě části dlouhé 10 cm a 15 cm. Draka vyztužil tyčinkami v úhlopříčkách a po obvodě. Kolik cm tyčinek spotřeboval na vyztužení draka?

256. Daný trojúhelník rozdělte příčkami jdoucími bodem, který si zvolíte na straně AC na 3 stejné díly.

257. Trojúhelník o stranách 6 cm, 8 cm, 4 cm proměňte na kosočtverec o straně 6 cm. Kolik řešení dostanete?



Obr. 113.



Obr. 114.

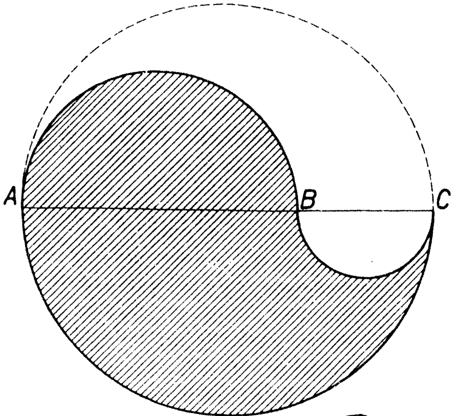
258. Obdélník o stranách 6 cm a 4 cm proměňte na trojúhelník a) pravoúhlý o odvěsně 6 cm; b) rovnoramenný o základně 6 cm.

259. T je těžiště pravoúhlého trojúhelníka ABC; jeho odvěsny mají délky $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 3$ cm. Sestrojte kolem středů A, B, C, T kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 s poloměry 2; 2,4; 3; $\frac{5}{3}$ cm a zjistěte výpočtem vzájemnou polohu (obr. 113)

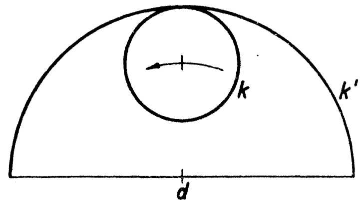
a) kružnic k_1, k_3; k_2, k_4;

b) kružnice k_2 a přímky AC; kružnice k_4 a přímky AB.

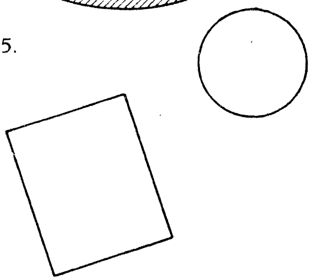
260. Vyšrafované plochy jsou omezeny polokružnicemi, jejichž průměry jsou strany pravoúhlého trojúhelníka ABC. Porovnejte součet jejich obsahů s obsahem trojúhelníka ABC (obr. 114).



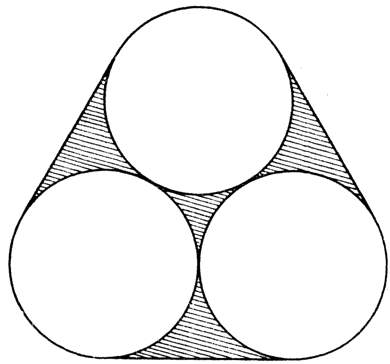
Obr. 115.



Obr. 117.



Obr. 118.



Obr. 116.

261. Na obr. 115 leží body A, B, C v přímce a jsou body dotyku zobrazených kružnic. Je dáno $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{AB} : \overline{BC} = 5 : 3$.

a) Narýsujte obrázek. b) Vypočtěte délku jeho obvodu.

c) Kolik % obsahu kruhu nad průměrem AC má vyšrafovaná plocha?

262. Na obrázku 116 je schematicky naznačen průřez pouzdrem, kterým procházejí tři trubky stejného průměru 4 cm.

a) Jak velká je vyšrafovaná plocha průřezu?

b) Kolik % průřezu celého pouzdra zaujímá vyšrafovaná plocha?

263. Hnací kolo lokomotivy má průměr 1,8 m. Kolikrát se otočí za vteřinu, jede-li stroj rychlostí 105 km/hod?

264. V zatáčce projíždí vnitřní kolo vozu oblouk kruhový o poloměru 50 m, vnější kolo oblouk o poloměru 51,5 m. Obě kola mají průměr 1 m. Kolikrát rychleji se otáčí vnější kolo než vnitřní?

265. Uvnitř polokruhu s poloměrem 6 cm se kotálí kružnice k o poloměru 2 cm.

a) Narýsujte čáru, kterou opíše střed kružnice k.

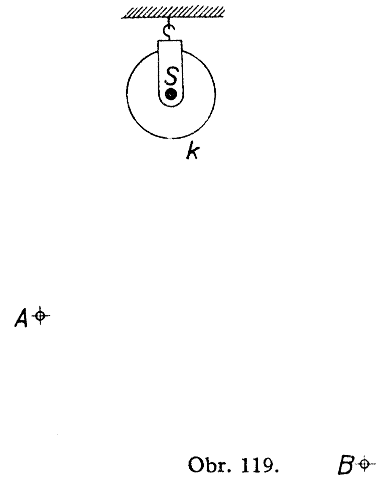
b) Narýsujte takové polohy kružnice k, v nichž se dotýká polokružnice k' i průměru d (obr. 117).

266. Obdélník na obrázku 118 značí půdorys domku, kruh půdorys továrního komína. Vyznačte na vlastním náčrtku vyšrafováním tu část roviny, odkud pozorovateli zakrývá komín celý domek.

267. Kruh k značí kladku, v bodě A je břemeno, z bodu B má být břemeno zdvíháno.

a) Vyznačte na vlastním náčrtku polohu lana před zdvíháním (obr. 119).

b) Je dán poloměr kladky 25 cm, a vzdálenosti $\overline{AS} = 4$ m, $\overline{BS} = 6$ m. Vypočtěte délku lana. Lano přiléhá na třetinu obvodu kladky.



Obr. 119.

268. K danému čtverci o straně $a = 6$ cm sestrojíme dva kruhy k_1, k_2; k_1 má týž obsah jako daný čtverec, k_2 týž obvod. Který z obou kruhů má větší poloměr a o kolik?

269. Maják je vysoký 25 m a má tvar šestibokého pravidelného hranolu o podstavné hraně dlouhé 6 m. Jak velká je podstava majáku? Jak velký prostor maják zaujímá?

270. Železniční násep má průřez rovnoramenného lichoběžníka. Dolení základna je 5,8 m dlouhá, hoření 3,4 m. Bočné stěny náspu svírají s vodorovnou základnou úhel 60°. Kolik m^3 hlíny obsahuje násep dlouhý 10 m?

271 Vypočítejte objem pravidelného trojbokého hranolu, je-li délka podstavné hrany 30 cm a výška 32 cm.

272. Kolik l vody vypumpuje při jednom zdvihu pumpa, jejíž píst má průměr 16 cm, je-li výška vodního sloupce ve válci 25 cm?

273. Bazén má tvar rotačního válce o průměru podstavy 5,4 m a hloubky 1,4 m; má se naplnit vodou. Rourou přiteče v jedné vteřině 0,4 l vody. Za jakou dobu se bazén naplní?

274. Obdélník o rozměrech 4 dm a 6 dm se otáčí jednou kolem základny, po druhé kolem výšky. Vypočítejte poměr a) povrchů, b) objemů obou vzniklých válců.

275. Plášť válce je čtverec o straně 1 dm. Jaký je poloměr podstavy, povrch a objem válce?

276. Krychli o hraně a cm je opsán a vepsán rotační válec. Kolikrát větší je a) povrch, b) objem opsaného válce než vepsaného válce?

277. Jak se mění plášť a objem válce, jestliže a) zvětšíme poloměr podstavy dvakrát, třikrát při nezměněné výšce, b) zvětšíme výšku válce dvakrát, třikrát při nezměněném poloměru podstavy?

Výsledky.

I. OPAKOVÁNÍ.

1. a) 0,07; b) 8,3; c) 10 000; d) 70,3. **3.** a) 5 700; b) 30 000; c) 0,37; d) 1 000 000; e) 0,3725. **4.** a) 3 000; b) 0,037; c) 0,047 568. **5.** a) 36°; b) 135°; c) $37\frac{1}{2}$°; d) $708\frac{3}{4}$°. **6.** a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{3}{8}$; d) $\frac{13}{21600}$. **7.** a) 49°; b) 82°. **10.** Uvaž vlastnosti součtu a rozdílu stran trojúhelníka: $a + b > c$; $a - b < c$.

12. 33°. **14.** (*sss*); (*sus*); (*usu*); (*ssu*). **16.** 75°; 75°; 30°. **17.** $7\frac{19}{32}$. **18.** $\frac{1}{3}$. **20.** a) Protější strany stejně velké; b) $\overline{AB} = \overline{CD}$; $\overline{AD} = \overline{BC}$; c) $\overline{AB} = \overline{CD}$; d) půlí se. Jestliže se u čtyrúhelníka úhlopříčky navzájem půlí, je to rovnoběžník.

II. OBSAHY A PROMĚNY OBRAZCŮ.

21. 3,12 ha. **22.** 82 hl. **23.** a) 9krát; b) 6,25krát; c) 49krát. **24.** a) zvětšit 3krát; b) zmenšit 4krát; c) zmenšit 8krát; d) zvětšit 10krát. **25.** 102,2a; 1 000 000krát. **26.** Opsáním získáme obdélník: $P = u_1 . u_2$, dvakrát větší, než je kosočtverec; $P = \frac{u_1 u_2}{2}$. **27.** 4,63 dm²; **28.** 7,29 m² (zaokrouhleno na 3 č.). **29.** 46,8 kg.

33. 19,2 g; **34.** 12,6a. **36.** 120,51 kg. **37.** a) 108 cm²; b) 16 cm; c) 4,8 cm. **38.** $P = 12$ cm²; $v = 2,4$ cm. **39.** 7,54a; **40.** Nepřesnost měření; chyba výpočtu.

41. 7,2459 ha. **43.** 15,05 a; **44.** 1,93 m². **45.** 13,19 m². **46.** Obsah rovnoběžníka: $P = z . v$; obsah trojúhelníka: $P = \frac{1}{2}\, zv$. **47.** 555,7 cm². **48.** 21,6 cm². **49.** 25 cm. **50.** 45; 20; 17,5; 7,5 (cm²); 4,375 a 1,875 cm.

51. $\triangle DCH \cong \triangle EFG$. Rovnoběžník $EFCD$ a čtverec $ABCD$ mají společnou stranu CD a stejnou výšku. **52.** $\triangle KQP$ a $\triangle PQN$ mají stejný obsah. Stejný obsah mají také rovnoběžník $KLMN$ a $\triangle KQN$. **53.** a) Srovnejte základny ($\overline{RU}$; $\overline{US}$) a výšky $\triangle RUT$ a $\triangle SUT$; b) srovnejte základny ($\overline{RU}$; $\overline{US}$) a výšky $\triangle RUV$ a $\triangle SUV$; c) $\triangle RUT - \triangle RUV = \triangle UST - \triangle USV$; d) spol. základna $\overline{VT}$; doplněním $\triangle RSV$ na rovnoběžník $RVSQ$ odvoďte, že i výšky příslušné k základně VT jsou stejné. **54.** $\triangle QRX$ a $\triangle QRS$ mají stejné obsahy (základna QR); $\triangle QRS$ a $\triangle RSY$ mají stejné obsahy (základna RS). **55.** a) $\triangle ABC$ a $\triangle DBC$ mají stejný obsah (základna BC), b) $\triangle ADB$ a $\triangle ADC$ mají stejný obsah (základna AD). $\triangle ADB - \triangle ADE = \triangle ADC - \triangle ADE$ (odečtli jsme týž trojúhelník ADE); c) $\triangle BEC$ a $\triangle DEC$ stejného obsahu (základna $\overline{DE} = \overline{EB}$); $\triangle ABE$ a $\triangle AED$ stejného obsahu (základna $\overline{DE} = \overline{EB}$); $\triangle ABE + \triangle BEC = \triangle AED + \triangle DEC$. **56.** $\triangle AGE$ a $\triangle AGC$ mají stejný obsah (základna AG); $\triangle AGE - \triangle AGB = \triangle AGC - \triangle AGB$ a proto i rovnoběžníky

ABCD a *BEFG* mají stejné obsahy. **57.** $\triangle$ *MHK* a $\triangle$ *LKM* stejné obsahy (základna *KM*); $\triangle NMK + \triangle LKM = \triangle NMK + \triangle KMH$. **59.** Nejprve na rovnoběžník o hledané výšce a potom rovnoběžník na kosočtverec. Možnosti obecně: 2 kosočtverce; 1 čtverec; žádný kosočtverec.

65. Je-li *D* mezi *S* a *B*, je *E* na straně *AC*. **66.** Poměr 3 : 2. **67.** Stejné obsahy mají: $\triangle$ *HRM* a $\triangle$ *HNR*, $\triangle$ *HSQ* a $\triangle$ *HKS*, $\triangle$ *SRL* a $\triangle$ *SRP* a proto mají stejný obsah i rovnoběžníky *QSLM* a *KNPS*. **68.** Nejprve na rovnoběžník o základně 3,5 cm a ten na jiný o stejné základně a úhlu 75°. **69.** Přímka jdoucí středem rovnoběžníka rozdělí ho buď [1]) na 2 lichoběžníky o stejném obsahu (stejná výška a střední příčka); [2]) na dva shodné rovnoběžníky; [3]) na dva shodné trojúhelníky. **70.** Daný bod spojte se středem rovnoběžníku.

III. PYTHAGOROVA VĚTA.

1. Odvození Pythagorovy věty.

71. a) 17; b) 13; c) 4; d) 30,8 (zaokr.). **72.** a) $b \doteq 10$; b) $s = 60$; c) $t \doteq 29$; d) $u \doteq 14$. **73.** 8. **74.** 158 km. **75.** 5,4 m. **76.** a) $o \doteq 34$ dm; $P = 35{,}7$ dm^2; b) $o = 23{,}4$ dm; $P = 23{,}4$ dm^2. **77.** 5,97 m. **78.** $c = 65$ cm; $o = 296$ cm; $u_1 \doteq 98{,}7$ cm; $u_2 \doteq 112$ cm; $P = 5292$ cm^2. **79.** $o = 32{,}8$ dm; $P = 55$ dm^2.

2. Úhlopříčka obdélníka a čtverce.

80. $P \doteq 7{,}82$ m^2.

81. $u \doteq 8{,}6$ dm. **82.** $u \doteq 32{,}5$ cm. **83.** $ö = 0{,}85$ dm; $r \doteq 1{,}2$ dm. **84.** $d \doteq$ $\doteq 102$ mm. **85.** Ano; nejsilnější je 19,1 cm. **86.** $a = 90$ m; $b = 60$ m; $u \doteq 108$ m; $P = 5\,400$ m^2. **87.** $a \doteq 3{,}6$ cm; $u \doteq 5{,}1$ cm. **88.** $P = 49$ dm^2. **89** . $P \doteq 37{,}9$a. **90.** $r \doteq 13{,}4$ cm.

91. $a \doteq 36$ cm; $b \doteq 18$ cm. **92.** $a \doteq 297$ mm. **93.** $\overline{FK} = 24$ cm; $\overline{EJ} = 24$ cm; $\overline{KG} = \overline{JF} = 10$ cm; $\overline{EF} = \overline{FG} = 34$ cm.

3. Trojúhelník rovnoramenný a rovnostranný.

94. $P \doteq 31{,}8$ cm^3. **95.** a) $v = 4{,}8$ cm; b) $v \doteq 2{,}1$ cm; c) $c \doteq 51$ cm; $v \doteq 25$ cm; d) $a \doteq 4{,}1$ cm; $v = 2{,}9$ cm; e) $b \doteq 2{,}3$ cm; $c \doteq 4{,}6$ cm. **96.** $v \doteq 6{,}06$ cm; $P \doteq 21{,}2$ cm^2 **97.** $\varrho \doteq 19{,}9$ cm. **98.** $P \doteq 437$ mm^2; b) $\overline{AC} = \overline{CE} = \overline{AE}$; $\triangle ABC \cong \triangle CDE \cong$ $\cong \triangle AEF$; $\overline{AC} \doteq 22{,}5$ mm; $P \doteq 219$ mm^2. **99.** a), b), d) nejsou. **100.** $r = 10$ cm.

101. $b \doteq 2{,}83$ cm. **102.** 25 cm, 11 cm. **103.** 28,3; 29; 41. — 29; 29,7; 41. **104.** $u_1 = 0{,}3$; $u_2 = 0{,}4$. **105.** $a = 36$; $b = 54$. **106.** 5,620 km. **107.** $a \doteq 5{,}2$ cm. **108.** $t \doteq 7{,}2$. **109.** $d \doteq 21{,}8$. **110.** Z $\triangle ABD$ plyne: $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$; z $\triangle ACD$ plyne: $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$.

111. V pravoúhlém lichoběžníku $ABCD$ platí: $\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2$; $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$ **112.** V lichoběžníku $ABCD$ platí: $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$; $\overline{AB} = 2\,\overline{CD}$; $\overline{BD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + 3\,\overline{CD}^2}$; $\overline{AC} = \overline{BC}$. **113.** V kosočtverci musí platit: $\left(\frac{u_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{2}\right)^2 = a^2$.

115. $a \doteq 4{,}95$ cm; **116.** 16 m; **117.** 56,7 m; **118.** $o \doteq 199{,}5$ m.

IV. KRUŽNICE.

1. Kružnice a přímka.

119. $r\sqrt{3}$; 6,9; 10,4; 12,1 cm. **120.** 40,2 mm.

121. 23 cm. **122.** $\overline{AM} \doteq 42{,}7$ mm, $\overline{AP} \doteq 42{,}4$ mm, P je vnitřní, M vnější. **123.** a) $\triangle CPQ \cong \triangle CPR$ (*sus*, $\overline{PQ} = \overline{PR}$, $\sphericalangle CPQ = \sphericalangle CPR = 90°$), proto $\overline{CQ} = \overline{CR}$. Z $\triangle CQA$ plyne, $\overline{CA} > \overline{CQ}$, neboť $\sphericalangle AQC$ je tupý. Z pravoúhlého $\triangle CPQ$ plyne $\overline{CQ} > \overline{CP}$. b) 37,9 mm. **124.** Sestrojíme kolmici ke spojnici bodu A se středem kružnice. Úloha je jednoznačná, vyjma případ, kdy $A \equiv S$; pak je neurčitá. **125.** Vzdálenost tětivy délky a od středu kružnice je $\sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. Je-li $a > b$, je $\sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} < \sqrt{r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$. **126.** a) B je vnější, D vnitřní, neboť poloměr kružnice je $\overline{AM} = 50$ mm. b) První přímka je nesečna, ostatní jsou sečny. **127.** Sečen obojího druhu je nekonečně mnoho. **128.** Pata kolmice spuštěné z bodu S na přímku p je bod dotyku. **129.** Spustíme z bodu S kolmici na přímku p a od její paty naneseme na obě polopřímky po 15 mm; tak dostaneme dva body kružnice. **130.** Úloha má dvě řešení (středy kružnic leží v obou polorovinách vyťatých přímkou p na kolmici vztyčené k p v bodě K a ve vzdálenosti 2 cm.

131. Jeden průměr kružnice je kolmý k oběma přímkám m, p. **132.** V bodě T vztyčíme kolmici k přímce r; na ní vytnou obě rovnoběžky r, s jeden průměr kružnice. **133.** Poloměr kružnice k' je $\frac{r}{2}\sqrt{5} \doteq 3{,}4$ cm. **134.** Střed úseček AD, BC je pata kolmice spuštěné ze středu obou kružnic na přímku p. Proto je $\overline{AB} = \overline{CD}$ a tedy i $\overline{AC} = \overline{BD}$.

2. Dvě kružnice.

135. a) Protínají se ve dvou bodech; b) jedna kružnice leží vně druhé; c) mají vnitřní dotyk; d) jedna leží uvnitř druhé; e) dotýkají se vně. **136.** a) Označíme M střed kružnice k_2; pak je $\overline{SM} = \overline{SB} - \overline{BM}$, $\overline{DM} = \overline{DS} + \overline{SM}$; b) 61,2 mm. **138.** Průměry hledaných kružnic jsou úsečky, jejichž jeden krajní bod je průsečík k_1 se střednou a druhý je průsečík k_2 se střednou. Poloměry jsou 35 mm, 55 mm, 10 mm, 15 mm. **139.** a) Na 20 nebo 70 mm; b) délka středné by byla 25 mm nebo 75 mm.

142. b) D leží uvnitř kružnice k_3; c) k_2, k_3 mají vnitřní dotyk.

143. Společná tětiva obou kružnic je průměr kružnice k, kolmý k středné AS. **144.** Společná tětiva obou kružnic je průměr kružnice k', kolmý ke středné AS. **145.** Středná obou kružnic je střední příčka trojúhelníka rovnoběžná s přeponou BC, jeden jejich průsečík je vrchol A. Proto leží druhý průsečík na kolmici spuštěné z bodu A na střednou ve stejné vzdálenosti od středné jako bod A. Druhý průsečík je tedy pata výšky v_a.

3. Geometrická místa.

146. Kružnice se středem A a poloměrem r. **147.** Dvě rovnoběžky s přímkou p vedené ve vzdálenosti r. **148.** Osa úsečky AB s výjimkou středu úsečky AB. **149.** Osa úsečky AB. **150.** Kolmice vztyčená k přímce p v bodě T s výjimkou bodu T.

151. Přímka TS s výjimkou bodů T, S. **152.** Kružnice soustředné s kružnicí k o poloměrech 10 mm a 5 mm. **153.** Vzdálenost středů tětiv od středu kružnice k je $r' = \sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$, což je totéž číslo pro všecky tětivy. Naopak na libovolné tečně kružnice k' vytne k tětivu délky $2\sqrt{r^2 - r'^2} = 2 \cdot \sqrt{r^2 - r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = d$; bod dotyku této tečny, což je libovolný bod kružnice k', náleží tedy geometrickému místu. Je-li $d = 2r$, je geometrické místo jediný bod – střed kružnice k. **154.** Průměr kružnice kolmý k přímce p bez svých krajních bodů. **155.** Rovnoběžka s přímkou AB vedená bodem C a přímka k ní souměrně položená podle AB. Tři rovnoběžky se stranami vedené vrcholy A, B, C a přímky k nim souměrně položené podle té strany, se kterou jsou rovnoběžné. **156.** $\overline{BM} = \overline{BA}$; geometrické místo je kružnice se středem B procházející bodem A. **157.** Je to rovnoběžka s přímkou p, která půlí kolmici z bodu A na přímku p. **158.** Geometrické místo je rovnoběžka s přímkou AB, která půlí příslušnou výšku rovnoběžníka a přímka k ní souměrně položená podle AB. **159.** Kružnice sestrojená nad průměrem AS s výjimkou bodu A.

4. Konstruktivní úlohy.

160. Jsou to průsečíky přímky KL s kružnicí o středu M a poloměru 4 cm. Úloha má dvě řešení.

161. Střed kružnice je průsečík osy úsečky AB a kolmice vztyčené k přímce p v bodě T. **162.** Vedeme průměr kolmý k dané přímce a k tomuto průměru sestrojíme rovnoběžky ve vzdálenostech 21 mm. Tyto rovnoběžky protnou kružnici v krajních bodech hledaných tětiv. **163.** Poloměr r hledané kružnice je poloviční vzdálenost obou rovnoběžek. Její střed leží jednak na rovnoběžce s přímkami p, q, ve vzdálenosti r od obou, jednak na kružnici se středem A a poloměrem r. Leží-li bod A na některé z přímek p, q má úloha jediné řešení, jinak má dvě řešení. **164.** 5,3 cm. **166.** Osy některých dvou tětiv se protnou ve středu kružnice. **167.** Středy hledaných kružnic jsou průsečíky kružnice se středem A a poloměrem 2 cm a kružnice soustředné s k s poloměrem a) 5 cm, b) 1 cm. Úloha a) má dvě řešení; úloha b) žádné. **168.** Hledané kružnice mají středy na osách úhlů α, β a dotýkají se obou ramen úhlu. **169.** Střed první kružnice leží na ose úsečky AS a na přímce AC; střed druhé leží na ose úsečky BS a na kolmici vztyčené v bodě B k přímce BC. Vhodné měřítko je na př. 1 : 2 000.

5. Úlohy o tečnách.

170. Úloha b) má 4 řešení (2 a 2 přímky jsou souměrně položené podle AS).

171. Hledané přímky jsou tečny vedené z bodu R ke kružnici se středem A a poloměrem 2 cm. **172.** Osy úhlů obou různoběžek protneme kolmicí, vztyčenou v bodě A k přímce p; tak dostaneme středy hledaných kružnic (2 řešení). **173.** $2 \,.\, r\sqrt{2}$; 11,3 cm. **174.** Geometrické místo je kružnice soustředná s danou o poloměru $r\sqrt{2}$. Svírají úhel 90°. **175.** $\overline{AS} = 2r\left(r\sqrt{2}, \frac{2r}{\sqrt{3}}\right)$. **176.** $x = \frac{b+c-a}{2} = 3$.
177. Dotykové body hledaných kružnic jsou body dotyku vepsané kružnice se stranami trojúhelníka. **178.** Průsečík úhlopříček leží na osách všech vnitřních úhlů kosočtverce (totiž na úhlopříčkách) a má tedy od všech jeho stran stejnou vzdálenost, rovnou poloměru vepsané kružnice. **179.** Geometrické místo středů tětiv dané kružnice, které mají délku 38 mm, je kružnice soustředná o poloměru $\sqrt{40^2 - 19^2} \doteq 35$ mm. K této kružnici vedeme tečny z bodu K. **180.** $\sphericalangle\, DSC$ je doplňkový k $\sphericalangle\, SCA$ (v $\triangle\, SCA$); úhel $\sphericalangle\, SCD$ je doplňkový k $\sphericalangle\, BCS = \sphericalangle\, SCA$.

182. Paty kolmic vyplní kružnici sestrojenou nad průměrem UV; body U, V náležejí geometrickému místu. **183.** $\overline{SM} = \frac{\overline{PQ}}{2}$. Geometrické místo bodů M je kružnice, jejíž střed je průsečík přímek x, y a poloměr je roven $\frac{\overline{PQ}}{2}$. **184.** a) $\sphericalangle\, BAC_1 = 90°$, k_1 je kružnice opsaná pravoúhlému trojúhelníku BAC_1, proto její střed S_1 leží na přeponě BC_1. (Podobně pro BC_2.) b) S_1S_2 je střední příčka v $\triangle\, C_1C_2B$. **185.** a) Kolmici vztyčenou v bodě A k přímce AC protneme kružnicí se středem A a poloměrem 7 cm. b) Nad průměrem AB sestrojíme kružnici a protneme ji kružnicí se středem A a poloměrem 3 cm. **186.** Rameno úhlu 45° protneme kružnicí se středem A a poloměrem 4 cm. Jsou dvě řešení. **187.** Postup jako v předešlém cvičení; a) jsou dvě řešení, b) úloha není řešitelná. Má-li mít úloha jediné řešení, vedeme z bodu B tečnu ke kružnici se středem A a poloměrem 3 cm; tak dostaneme příslušný úhel ABC.
188. $45° = \frac{90°}{2}$; $135° = 90° + 45°$; $67°30' = \frac{135°}{2}$; $75° = 30° + 45° = \frac{60° + 90°}{2}$, $105° = 60° + 45°$.

6. Délka kružnice a kruhového oblouku.

190. a) 39,6 cm; b) 17,6 dm; c) 28,6 m.

191. a) 94 cm; b) 7,9 dm; c) 120 m. **192.** a) 1,8 cm; b) 1 m; c) 1,4 m; d) 159 m; **193.** 11 cm. **194.** a) 16 cm; b) 32 cm; c) 64 cm. **195.** Asi 26krát. **196.** a) Asi 450krát. b) asi 20 km za hodinu. **197.** 18 mm. **198.** a) 56 cm; b) asi 12 mm za minutu. **199.** 71 cm. **200.** 61 cm.

201. V poměru 1 : 2. **202.** $\pi \doteq 3{,}141592|65\ldots$ $355 : 113 = 3{,}141592|92\ldots$ **203.** Vyjde 3,14. **204.** a) 0,611; b) 0,481; c) 0,0427. **205.** a) 29 mm; b) 78 mm; c) 152 mm. **206.** a) 57°; b) 14°; c) 245°. **207.** O 6 m 28 cm.

7. Obsah kruhu.

208. a) 222 cm²; b) 39 cm²; c) 99 mm². **209.** a) 1700 cm²; b) 8,0 dm²; c) 0,17 mm². **210.** 8 dm².

211. a) 11,1 m; b) 0,564 dm. **212.** a) 121 ha; b) 107 ha; c) 154 ha. **213.** 22 cm². **214.** 60%. **215.** 26,7%. **216.** 5 kg 28 dkg. **217.** a) 16 cm²; b) 16 cm. **218.** 3,7 dm² **219.** a) 9 cm²; b) 28 cm². **220.** 5280 m². Počítáme-li podle rovnice $P = \pi r_2^2 - \pi r_1^2$, musíme provést dvoje umocňování, dvoje násobení a jedno odčítání. Podle rovnice

$$P = \pi (r_2 - r_1)(r_2 + r_1)$$

provedeme jedno sčítání, jedno odčítání a dvě násobení.

221. a) 12,6 cm; b) 9,9 cm². **222.** 5 cm. **223.** $P = \pi \overline{BS}^2 - \pi \overline{AS}^2 = \underbrace{\pi(\overline{AS} + \overline{BS})}_{o} (\overline{BS} - \overline{AS}) = o . \overline{AB}$. **224.** 2,3 cm; 0,3 cm. **225.** 21,6 cm; 26,8 cm².

V. OBJEM, POVRCH A SÍŤ HRANOLU A ROTAČNÍHO VÁLCE.

226. $V = 132$ dm³; $S \doteq 174{,}6$ dm³. **227.** 6,5 cm. **228.** 315 l. **229.** $S = 552$ cm²; $V \doteq 720$ cm³. **230.** a) $V \doteq 231$ dm³; $Q \doteq 132$ dm²; $S \doteq 209$ dm²;
b) $V \doteq 69{,}3$ cm³; $Q \doteq 126$ cm²; $S \doteq 139$ cm²;
c) $V \doteq 15{,}4$ dm³; $Q \doteq 4{,}40$ dm²; $S \doteq 312$ dm²;
d) $V \doteq 0{,}192$ m³; $Q \doteq 1{,}10$ m²; $S \doteq 1{,}87$ m².

231. a) $v \doteq 5{,}25$ dm; b) $v \doteq 5{,}1$ dm. **232.** a) $d \doteq 4$ cm; b) $d \doteq 3{,}5$ cm. **233.** $Q = 36$ cm². **234.** 5,5 m³. **235.** $a = 2{,}1$ cm; $v = 1{,}4$ cm. **236.** $Q = 135$ cm². **237.** 194,4 dm³; 154 kg. **238.** 382 kg. **239.** $Q = 1{,}98$ m². **240.** $V \doteq 3{,}8$ dm³.

241. 52,3 hl. **242.** $V \doteq 1{,}57$ dm³. **243.** 138,5 t. **244.** 62,82 m²; 6,3 t. **246.** 6,35 km.

VI. OPAKOVÁNÍ.

246. 30 cm. **247.** 14,4 m. **248.** 1,64 hl. **249.** $10\frac{1}{8}$ m²; $2\frac{1}{3}\frac{7}{2}$ m². **250.** 287 m².

251. 6,6 m². **252.** 60,4 cm². **253.** 78 m². **254.** O 16 m. **255.** 1,1 m. **256.** Stranu AC rozdělím body D E na 3 stejné díly. $\triangle ADB$ proměním na jiný o základně AM, kde M je zvolený bod na základně AC. Podobně $\triangle\ ECB$. **257.** Nejdříve na rovnoběžník o straně 6 cm. **258.** Nejdříve na trojúhelník o základně 6 cm. **259.** a) k_1, k_3 se dotýkají, k_2, k_4 se protínají; b) k_2 se dotýká přímky AC, k_4 protíná přímku AB. **260.** Součet obsahů měsíčků rovná se obsahu $\triangle\ ABC$.

261. $o = 8\pi$; 62,5 %. **262.** 23,18; 8,4 %. **263.** Asi 2,6krát. **264.** 1,03krát. **265.** a) Čára se skládá z oblouku kružnice, která je soustředná s danou a má poloměr 4 cm a z úsečky vedené ve vzdálenosti 2 cm od průměru d uvnitř daného polokruhu. **267.** b) Asi 10,5 m. **268.** k_1 má poloměr kratší asi o 4,4 mm než k_2. **269.** $P \doteq 93{,}6\ \mathrm{m}^2$; $V \doteq 2340\ \mathrm{m}^3$. **270.** 95,6 m^3.

271. $V \doteq 12{,}5\ \mathrm{dm}^3$. **272.** Asi 5,03 l. **273.** Za 22 hod. 16 min. **274.** $S_1 : S_2 = \frac{2}{3}$; $V_1 : V_2 = \frac{2}{3}$. **275.** $r \doteq 0{,}16$ dm; $S \doteq 1{,}16\ \mathrm{dm}^2$; $V \doteq 0{,}08\ \mathrm{dm}^3$. **276.** Objem dvakrát, povrch asi 1,6krát. **277.** Plášť v obou případech dvakrát, třikrát. Objem a) čtyřikrát, devětkrát; b) dvakrát, třikrát.

REJSTŘÍK

Čísla znamenají stránky.

OBSAH.

GEOMETRIE

pro třetí třídu středních škol

Autoři: Dr Eduard Čech, Alfons Fišer, Vítězslav Jozífek, Ing. Karel Komínek, Jan Vyšín, Rudolf Zelinka

Odpovědný redaktor: Dr František Vyčichlo

Technický redaktor: Ing. Antonín Langer

Korektor: Antonín Mašek

●

Plánovací skupina 301 20-521 - Schváleno výnosem ministerstva školství, věd a umění ze dne 15. března 1951, č. 16 198/51-I/1, v třetím vydání jako učebnice pro školy střední - Povoleno MIO č. j. 44 708/51-9-III/1 ze dne 2. března 1951 - Čkm. S 238-III - Sazba: 26. II. 1951 - Tisk: 8. V. 1951 - Vydalo r. 1951 Státní nakladatelství učebnic, třetí vydání - Náklad 27 000 výtisků (162 001.-189 000. výt.) - Plánovacích archů 6,— - Autorských archů 6,33 - Vydavatelských archů 6,45 - Papír 221-10 - Formát A 5 - Písmo Plantin - Druh tisku: ofset - Všeobecná daň 1 % - Vytiskla Státní tiskárna, n. p., závod 03, Praha II

CENA SEŠ. VÝTISKU Kčs 7,80

B 72

Čkm. S 238-III

Cena Kčs 7,80
301 20-521