Eduard Čech

Geometrie pro IV. třídu středních škol

Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1946, 70 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501349

EDUARD ČECH

GEOMETRIE

PRO IV. TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

UČEBNICE 154

K 14,—

UČEBNICE A POMOCNÉ KNIHY VYDÁVANÉ JEDNOTOU ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
154

GEOMETRIE

PRO ČTVRTOU TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

Napsal

EDUARD ČECH

Se 114 obrazci

Genehmigt mit Erlaß des Ministeriums für Schulwesen vom 9. Oktober 1943, Z. 89 727/43-II/2 Ha, als Lehrbuch für die IV. Klasse der Mittelschulen mit tschechischer Unterrichtssprache.
Schváleno výnosem ministerstva školství ze dne 9. října 1943, čís. 89 727/43-II/2 Ha, jako učebnice pro čtvrtou třídu středních škol s českým jazykem vyučovacím.

CENA K 14,—

PRAG - 1944 - PRAHA
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
V GENERÁLNÍ KOMISI A TISKEM
KNIHTISKÁRNY PROMETHEUS, PRAG - PRAHA VIII - 94

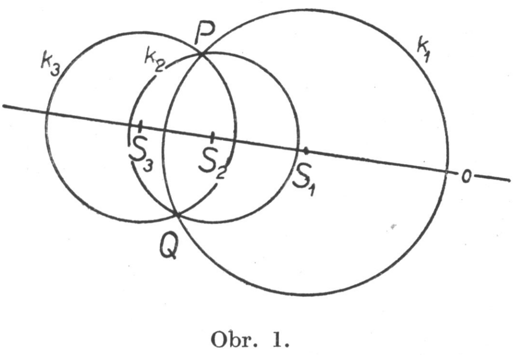
§ 1. Tětivy kružnice.

Narýsujte si kružnici k (střed S) a zvolte si na ní dva body A, B. Víte, že osa o úsečky AB je geometrické místo toho bodu X, pro který platí $\overline{AX} = \overline{BX}$. Protože je jistě $\overline{AS} = \overline{BS}$, leží tedy bod S na přímce o. **Osa každé tětivy kružnice k prochází středem kružnice k.** Protože osa úsečky AB je kolmice vztyčená v jejím středu na přímku AB, můžeme dáti právě vyslovené poučce také jiné tvary:

Je-li T střed tětivy AB a je-li S střed kružnice, pak buďto oba body S a T splynou (tětiva je průměrem) **nebo spojnice ST je kolmá na přímku AB.**

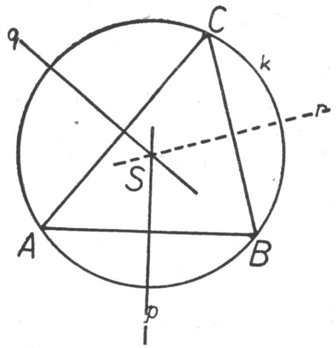
Je-li AB tětiva kružnice, která neprochází středem S kružnice, pak kolmice spuštěná s bodu S na přímku AB půlí úsečku AB.

Buďtež dány dva body P, Q (viz obr. 1). Víme, že každá kružnice k, která prochází i bodem P i bodem Q, musí míti střed na ose o úsečky PQ. Obráceně, zvolíme-li si na ose o libovolný bod S, je $\overline{PS} = \overline{QS}$ a proto kružnice se středem S a poloměrem $\overline{PS}$ prochází (nejen bodem P, nýbrž také) bodem Q. **Geometrické místo středu kružnice, která prochází dvěma danými body P, Q, je osa úsečky PQ.**



Obr. 1.

Při mnoha geometrických úlohách se hledá bod, který má vyhovovati zároveň dvěma podmínkám. Takové úlohy můžeme řešiti pomocí geometrických míst. Body, které vyhovují první podmínce, vyplní jedno geometrické místo (můžeme si je narýsovati třeba červeně), body, které vyhovují druhé podmínce, vyplní druhé geometrické místo (můžeme si je narýsovati třeba modře). Žádaný bod musí vyhovovati oběma podmínkám a proto bude ležeti tam, kde se protne červená čára s modrou. Narýsujte si na př. rovnostranný trojúhelník HKL s délkou strany 4 cm; budiž naší úlohou určiti bod M vzdálený 2 cm od přímky HL a stejně vzdálený od přímky HK jako od přímky KL. Geometrické místo bodu X vzdáleného 2 cm od přímky HL se skládá ze dvou rovnoběžek s přímkou HL; narýsujte si je obě červeně. Geometrické místo bodu X vzdáleného od přímky HK stejně jako od přímky KL se skládá ze dvou k sobě kolmých přímek procházejících bodem K a půlících úhly tvořené přímkami HK a KL; narýsujte si toto nové geometrické místo modře. Žádaný bod M musí ležeti i na červeném i na modrém geometrickém místě; vidíte, že jsou dva takové body M; označte si je M_1, M_2,.



Obr. 2.

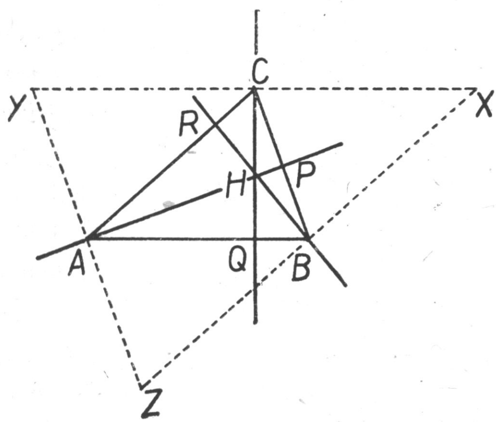
Narýsujte si kružnici k (viz obr. 2) a na ní si zvolte tři body A, B, C. Tyto tři body jsou vrcholy trojúhelníka ABC vepsaného do kružnice k; tato kružnice je opsána trojúhelníku ABC. Protože kružnice k prochází body A, B, leží její střed S na ose p úsečky AB. Z podobného důvodu leží střed S také na ose q úsečky AC a na ose r úsečky BC. **Je-li kružnice k opsána trojúhelníku ABC, protínají se osy všech tří stran trojúhelníka ABC v jediném bodě, totiž ve středu S kružnice k.**

Nyní si obráceně zvolme libovolný trojúhelník ABC. Máme už dokázáno, že se osy všech tří stran našeho trojúhelníka protnou v jediném bodě? Bylo by to dokázáno, kdybychom měli zaručeno, že lze našemu trojúhelníku opsati kružnici; neboť pak víme, že osa každé strany prochází středem té kružnice. Ale snadno provedeme důkaz i bez předpokladu, že možnost opsati trojúhelníku kružnici je vám už známa. Za tím účelem si sestrojíme napřed pouze osy dvou stran, třeba osu p strany AB a osu q strany AC. Jest $AB \perp p$, $AC \perp q$, tedy ke každé z obou přímek máme z bodu A jinou kolmici. Proto přímky p a q nejsou rovnoběžné. Tedy jsou různoběžné a mají průsečík, který si označíme S. Přímka p je geometrické místo toho bodu X, pro který je $\overline{AX} = \overline{BX}$; přímka q je geometrické místo toho bodu X, pro který je $\overline{AX} = \overline{CX}$. Protože bod S leží na přímce p, je délka $\overline{BS}$ rovná délce $\overline{AS}$; protože bod S leží na přímce q, je také délka $\overline{CS}$ rovná délce $\overline{AS}$. Proto je $\overline{BS} = \overline{CS}$ a z toho plyne, že bod S leží také na ose r úsečky BC, neboť r je geometrické místo toho bodu X, pro který je $\overline{BX} = \overline{CX}$. Tím je dokázáno, že osy všech tří stran trojúhelníka ABC mají společný bod S. Mimoto je dokázáno, že všecky tři délky $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{CS}$ jsou si rovny, takže kružnice k se středem S a poloměrem $\overline{AS}$ prochází (nejen bodem A, nýbrž také) bodem B a bodem C, t. j. k je kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Tedy jsme dokázali, že lze každému trojúhelníku opsati kružnici a také jsme se naučili, jak se tato kružnice sestrojí.

U pravoúhlého trojúhelníka ABC s přeponou AB leží střed opsané kružnice na obvodě trojúhelníka, a to uprostřed přepony. Abychom si to odůvodnili, označme si písmenem k kružnici nad průměrem AB a písmenem S její střed, tedy střed přepony. Víme, že k je geometrické místo toho bodu X, pro který $\sphericalangle AXB = 90°$. Protože $\sphericalangle ACB = 90°$, leží (vedle bodů A, B také) bod C na kružnici k, t. j. k je kružnice opsaná trojúhelníku ABC.

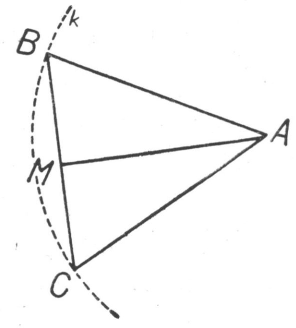
Později snadno dokážeme (viz cvič. **83**), že u ostroúhlého trojúhelníka leží střed opsané kružnice vždy uvnitř trojúhelníka, a u tupoúhlého trojúhelníka vždy vně.

V obr. 3 máme trojúhelník ABC. S každého vrcholu je spuštěna kolmice na protější stranu a paty těchto kolmic jsou označeny písmeny P, R, Q. Tyto tři kolmice AP, BR, CQ se jmenují **výšky trojúhelníka** ABC; určitěji pravíme, že na př. AP je výška příslušná straně BC; bod P je pata té výšky.



Obr. 3.

V obr. 3 všecky tři výšky trojúhelníka ABC se protínají v jediném bodě H. Dokážeme si, že tomu tak je u každého trojúhelníka; bod H se proto jmenuje **průsečík výšek** trojúhelníka ABC. Abychom dospěli k důkazu, veďme si každým vrcholem trojúhelníka rovnoběžku s protější stranou. Tyto tři rovnoběžky omezí nový trojúhelník, který je v obr. 3 označen XYZ. Protože $AB \parallel YC$, $BC \parallel AY$, je $ABCY$ rovnoběžník a proto je $\overline{AY} = \overline{BC}$. Protože $AC \parallel ZB$, $BC \parallel ZA$, je $ACBZ$ rovnoběžník a proto je $\overline{AZ} = \overline{BC}$. Tedy $\overline{AY} = \overline{AZ}$, t. j. bod A je střed strany YZ trojúhelníka XYZ. Protože $AP \perp BC$, $ZY \parallel BC$, je $AP \perp ZY$. Tedy přímka AP je osou strany YZ trojúhelníka XYZ. Stejně se dokáže, že přímky BR a CQ jsou osami ostatních stran trojúhelníka XYZ. Protože však osy tří stran trojúhelníka mají společný bod, musí všecky tři přímky AP, BR, CQ procházeti jedním bodem, což jsme měli dokázati.

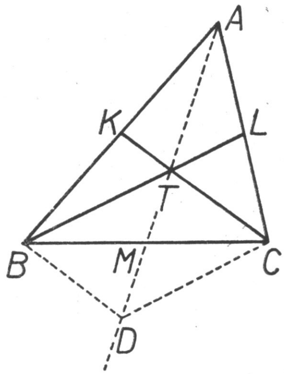


Obr. 4.

U rovnoramenného trojúhelníka výška příslušná základně půlí tuto základnu. Budiž ABC rovnoramenný trojúhelník se základnou BC (viz obr. 4). Protože $\overline{AB} = \overline{AC}$, můžeme si sestrojiti kružnici k se středem A, která prochází oběma body B, C. Úsečka BC je tětivou kružnice k. Je-li M její střed, je $AM \perp BC$ podle poučky ze začátku tohoto paragrafu. To jsme však měli dokázati.

Úsečka, která spojuje jeden vrchol trojúhelníka ABC se středem protější strany, na př. vrchol A se středem M strany BC, jmenuje se **těžnice** trojúhelníka ABC, určitěji těžnice příslušná straně BC. Tedy u rovnoramenného trojúhelníka výška příslušná základně splyne s těžnicí příslušnou základně. Název těžnice se dá vysvětliti jednoduchým pokusem. Vystřihněte si z tuhého papíru trojúhelník ABC a vyznačte si těžnici AM. Zavěste trojúhelník tak, aby závěs vycházel z vrcholu A. Působením tíže zemské nabude trojúhelník takové polohy, že těžnice AM směřuje svisle dolů.

Dokážeme si, že u každého trojúhelníka ABC se všecky tři těžnice protnou v jediném bodě, který se jmenuje **těžiště** trojúhelníka. V obr. 5 je K střed strany AB a L střed strany AC trojúhelníka ABC. Tedy BL, CK jsou dvě ze tří těžnic našeho trojúhelníka; protnou se v bodě, který je v obrazci označen T. Prodlužme si úsečku AT za bod T; na prodloužení si vyznačme jednak průsečík M se stranou BC, jednak ten bod D, pro který je $\overline{AT} = \overline{TD}$. Nyní spojme BD, CD a vzpomeňme si na jednu poučku, kterou jsme poznali loni. (Viz Geom. pro I. až III. tř. stř. šk., str. 142, obr. 247.) Podle této poučky, vedeme-li rovnoběžku s jednou stranou trojúhelníka středem strany druhé, prochází tato rovnoběžka také středem strany třetí. Této poučky užijeme dvakrát za sebou. Po prvé na trojúhelník ABD: rovnoběžka se stranou BD vedená středem K strany AB prochází také středem strany AD, t. j. bodem T; tedy s přímkou BD je rovnoběžná přímka KTC. Po druhé na trojúhelník ACD: rovnoběžka se stranou CD vedená středem L strany AC prochází také středem T strany AD; tedy s přímkou CD je rovnoběžná přímka LTB. Tím je dokázáno, že $BD \parallel TC$, $CD \parallel TB$, t. j. že $BDCT$ je rovnoběžník. My však víme, že úhlopříčky rovnoběžníka se navzájem půlí, takže $\overline{BM} = \overline{MC}$, $\overline{TM} = \overline{MD}$. Protože $\overline{BM} = \overline{MC}$, je M střed strany BC trojúhelníka ABC, tedy BM je třetí těžnice našeho trojúhelníka a máme dokázáno, že všecky tři těžnice procházejí bodem T. Ale vyšlo nám ještě něco zajímavého, že totiž $\overline{TM} = \overline{MD}$, t. j. že $\overline{TM} = \frac{1}{2} . \overline{TD}$. Protože $\overline{TD} = \overline{TA}$, je



Obr. 5.

$$\overline{TM} = \tfrac{1}{2} . \overline{TA},$$

neboli slovy: Vzdálenost těžiště trojúhelníka od kteréhokoli vrcholu je dvojnásobek vzdálenosti těžiště od středu protější strany. Jinak řečeno: Těžnice AM je rozdělena těžištěm na dvě úsečky, z nichž ta, která obsahuje vrchol A, je dvojnásobkem druhé.

Cvičení k § 1.

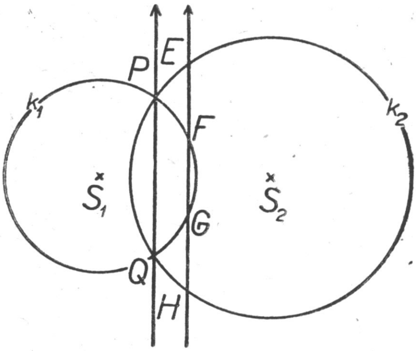
I. Osa tětivy kružnice.

1. Narýsujte si oblouk kružnice třeba pomocí korunové mince. Jak můžete určiti střed kružnice?

2. Uvnitř kružnice k si zvolte bod U. Sestrojte tětivu kružnice k půlenou bodem U.

3. Kružnice k_1 se středem S_1 a kružnice k_2 se středem S_2 protínají se v bodech P, Q. Dokažte, že $PQ \perp S_1S_2$.

4. Dokažte, že v obr. 6 je $\overline{EF} = \overline{GH}$. [Užijte výsledku cvič. **3.**]



Obr. 6.

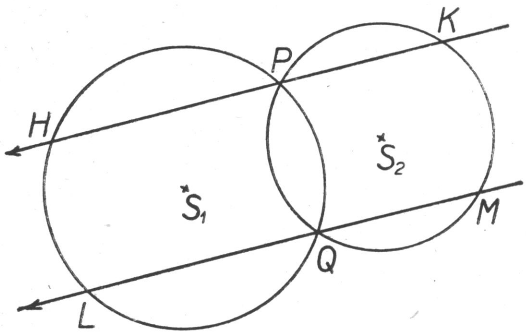
5. Kružnice k_1 a k_2 jsou soustředné. $C_1C_2D_2D_1$ je přímka; body C_1, D_1 leží na kružnici k_1; body C_2, D_2 leží na kružnici k_2. Dokažte, že $\overline{C_1C_2} = \overline{D_2D_1}$.

6. AB, CD jsou dvě tětivy kružnice o středu S. Dokažte:

a) Je-li $\overline{AB} = \overline{CD}$, jsou obě přímky AB, CD stejně vzdáleny od bodu S. [Je-li L střed úsečky AB a je-li M střed úsečky CD, dokažte, že $SLA \cong SMC$.]

b) Jsou-li obě přímky AB, CD stejně vzdáleny od bodu S, je $\overline{AB} = \overline{CD}$. [Zase dokažte, že $SLA \cong SMC$.]

7. Kružnice k_1 se středem S_1 a kružnice k_2 se středem S_2 protínají se v bodech P, Q. Dána je přímka A_1PA_2 rovnoběžná s přímkou S_1S_2; bod A_1 leží na kružnici k_1, bod A_2 leží na kružnici k_2. Dokažte, že $\overline{A_1A_2} = 2 \,.\, \overline{S_1S_2}$. [Pomocná konstrukce: obdélník, jehož jednou stranou je úsečka S_1S_2 a protější strana je částí přímky A_1PA_2.]



Obr. 7.

8. Dokažte, že v obr. 7 je $\overline{HK} = \overline{LM}$. [Se středů S_1, S_2 spusťte kolmice na dané rovnoběžky. Vznikne vám obdélník.]

9. AB, CD jsou dvě tětivy kružnice k, které se navzájem půlí v bodě P. Dokažte, že P je střed kružnice k. [Představte si, že by P nebyl střed a všimněte si spojnice bodu P se středem. Nač by byla kolmá? Nač ještě? Je to možné?]

II. Geometrická místa.

10. Je dána kružnice k. Určete geometrické místo středu tětivy XY, jejíž délka je pevně dána. [Užijte výsledku cvič. **6** a).]

11. Na dané kružnici k se středem S je dán bod A. Proměnná tětiva AX

prochází stále bodem A. Dokažte, že geometrické místo středu proměnné tětivy je kružnice nad průměrem AS.

12. Proměnná tětiva dané kružnice k stáke prochází daným bodem M. Sestrojte geometrické místo středu proměnné tětivy. (Proveďte dvakrát: bod M budiž napřed uvnitř kružnice k, potom vně.)

13. Jsou dány dvě přímky $EF \perp EG$. Úsečka dané délky se pohybuje tak, že stále leží jeden krajní bod na přímce EF, druhý na přímce EG. Dokažte, že geometrické místo středu proměnné úsečky je kružnice se středem E.

III. Metoda dvou geometrických míst. (Viz též úlohy **21** až **23.**)

14. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu 6 cm. Určete bod P vzdálený 4 cm od vrcholu A a 2 cm od strany BC. (Dvě řešení.)

15. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu 4 cm. Určete bod K na přímce AB vzdálený 2 cm od přímky AC. (Dvě řešení.)

16. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu 4 cm. Určete bod L vzdálený 2 cm od přímky AB a 3 cm od přímky AC. (Čtyři řešení.)

17. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bylo $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AC} = 45$ mm, $\overline{BC} = 5$ cm. Sestrojte bod M ve vzdálenosti 6 cm od vrcholu B tak, aby M byl stejně vzdálen od přímky AC jako od přímky BC. (Čtyři řešení.)

IV. Kružnice procházející dvěma body.

18. Zvolte si čtyrúhelník $EFGH$. Sestrojte kružnici, která má střed někde na obvodě čtyrúhelníka a která prochází

a) vrcholy E, F; b) vrcholy E, G.

19. Narýsujte si kružnici k a na ní si zvolte dva body C, D. Sestrojte kružnici m, která má střed na kružnici k a která protíná kružnici k v bodech C, D.

20. Zvolte si dva body A, B a přímku p. Sestrojte kružnici, která prochází oběma danými body a má střed na přímce p. Je konstrukce vždy možná?

21. Je dána úsečka UV; $\overline{UV} = 5$ cm. Máte sestrojiti kružnici s poloměrem 32 mm, která prochází bodem U i bodem V. [První podmínka pro střed S: kružnice prochází oběma body U, V. Druhá podmínka pro střed S: kružnice s poloměrem 32 mm prochází bodem U. Každá podmínka určí jedno geometrické místo. Kolik řešení má úloha? Bylo možné postupovati jinak?]

22. Narýsujte si rovnoramenný trojúhelník PQR; $\overline{PQ} = \overline{PR} = 3$ cm; $\overline{QR} = 5$ cm. Sestrojte kružnici, která prochází bodem P i bodem Q a jejíž střed je tak daleko od přímky PQ jako od přímky QR. (Dvě řešení.)

23. Narýsujte si znovu trojúhelník PQR takový jako ve cvič. **22.** Sestrojte kružnici, která prochází bodem P i bodem R a jejíž střed vyhovuje podmínce $\sphericalangle QSR = 90°$. (Dvě řešení.)

V. Kružnice opsaná trojúhelníku a pod.

24. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bylo

a) $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CA} = 7$ cm;

b) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm, $\overline{CA} = 8$ cm.

Sestrojte opsanou kružnici a změřte její poloměr.

25. Narýsujte si čtyrúhelník $PQRS$ tak, aby nebylo $PQ \parallel RS$. Sestrojte bod H tak, aby bylo

a) $\overline{HP} = \overline{HQ}$, $\overline{HR} = \overline{RS}$;

b) $HP = \overline{HQ}$, $\sphericalangle RHS = 90°$.

26. Na kružnici si zvolte čtyři body E, F, G, H. Dokažte, že osy úseček EF, EG, EH, FG, FH, GH všecky se protínají v jednom bodě.

27. Zvolte si čtyři různoběžky tak, aby žádné tři z nich nešly týmž bodem. Vynecháte-li jednu z nich, omezí ostatní tři trojúhelník. Takové trojúhelníky máte celkem čtyři. Opište každému z nich kružnici; shledáte, že všecky ty čtyři kružnice mají společný bod. (Nemáte nic dokazovat, pouze máte provésti konstrukci. Velký obrazec!)

VI. Výšky trojúhelníka.

28. Kde leží průsečík výšek pravoúhlého trojúhelníka?

29. U ostroúhlého trojúhelníka leží průsečík výšek uvnitř trojúhelníka, u tupoúhlého vně. Proč?

30. V trojúhelníku ABC je $\alpha = 45°$, H je průsečík výšek, D je pata výšky příslušné straně AB. Dokažte, že $\overline{BD} = \overline{DH}$. (Narýsujte si trojí obrazec: poprvé ať oba úhly β, γ jsou ostré, podruhé ať je β tupý, potřetí ať je γ tupý.)

31. Uvnitř rovnoběžníka $PQRS$ je bod T v takové poloze, že $QT \perp QR$, $ST \perp RS$. Dokažte, že $PT \perp QS$.

32. Je-li D průsečík výšek trojúhelníka ABC, dokažte, že C je průsečík výšek trojúhelníka ABD.

VII. Těžiště trojúhelníka.

33. Těžnice trojúhelníka ABC jsou AD, BE, CF. Dokažte, že trojúhelníky ABC, DEF mají oba totéž těžiště.

34. $HKLM$ je rovnoběžník; N je střed strany HK. P je průsečík přímek KM, LN. Dokažte, že přímka HP prochází středem strany KL. [Všimněte si trojúhelníka HKL.]

35. $RSTU$ je rovnoběžník; na přímce SU leží bod V tak, že U je střed úsečky SV. Dokažte, že přímka RU prochází středem úsečky TV a ža přímka TU prochází středem úsečky RV.

36. T je těžiště trojúhelníka ABC. Je-li $\overline{AT} = \overline{BC}$, dokažte, že $\sphericalangle BTC = 90°$. [Užijte Thaletovy věty.]

Ve cvič. **37** až **39** jsou AD, BE, CF těžnice trojúhelníka ABC.

37. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bylo $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AC} = 4$ cm, $\overline{AD} = 35$ mm. Změřte $\overline{BC}$. [Napřed sestrojte rovnoběžník $CABP$.]

38. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bylo $\overline{BC} = 5$ cm, $\overline{BE} = 6$ cm, $\overline{CF} = 54$ mm. Změřte $\overline{AD}$.

39. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bylo $\overline{AD} = 6$ cm, $\overline{BE} = 75$ mm, $\overline{CF} = 9$ cm. Změřte $\overline{BC}$.

§ 2. Tečny ke kružnici.

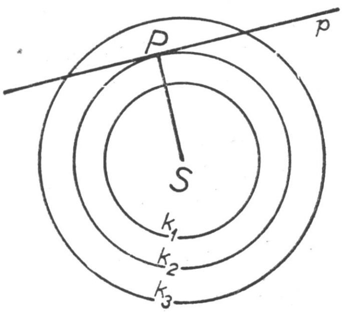
Zvolte si přímku p a mimo ni bod S (viz obr. 8). Spusťte s bodu S kolmici na přímku p a patu označte P, takže $\overline{SP}$ je vzdálenost bodu S od přímky p. Bod P rozdělí přímku p na dvě polopřímky. Probíhá-li bod X kteroukoli z těch polopřímek, počínajíc polohou P, tu je vám známo, že se vzdálenost $\overline{SX}$ stále zvětšuje. Zvolíme-li si nyní libovolnou délku r větší než $\overline{SP}$, budou na přímce p dva body X takové, že

$$\overline{SX} = r \qquad (*)$$

(po jednom na každé z obou polopřímek); zvolíme-li si $r = \overline{SP}$, bude platit (*) pro jediný bod X na přímce p, totiž pro bod P; zvolíme-li si konečně $r < \overline{SP}$, nebude (*) platit pro žádný bod X na přímce p. Zvolíme-li si tři délky r_1, r_2, r_3 tak, že je

$$r_1 < \overline{SP},\ r_2 = \overline{SP},\ r_3 > \overline{SP}$$

a opíšeme-li kolem středu S tři kružnice k_1, k_2, k_3 s poloměry r_1, r_2, r_3, tu přímka p nemá s kružnicí k_1 žádný společný bod, s kružnicí k_2 má jediný společný bod P a s kružnicí k_3 má společné dva body. Říkáme, že přímka p **leží mimo kružnici** k_1, je **tečnou** kružnice k_2 (a to tečnou v bodě P) a je **sečnou** kružnice k_3.

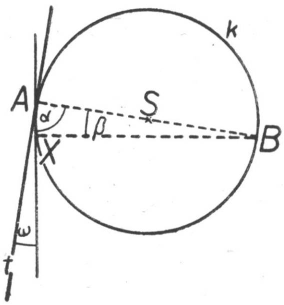


Obr. 8.

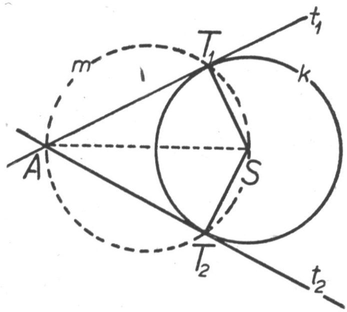
Přímka je sečnou kružnice, je-li její vzdálenost od středu menší než poloměr. Přímka je tečnou kružnice, je-li její vzdálenost od středu rovna poloměru. Přímka leží mimo kružnici, je-li její vzdálenost od středu větší než poloměr.

Na kružnici k se středem S a poloměrem r si zvolme bod A. Mysleme si bodem A vedeny rozmanité přímky. Nejprve veďme bodem A přímku t kolmou na přímku SA; patou kolmice spuštěné s bodu S na přímku t je patrně bod A, takže vzdálenost přímky t od bodu S je rovna poloměru r; proto t je tečna kružnice k v bodě A. Vedeme-li si však bodem A kteroukoli jinou přímku s, tu vzdálenost bodu S od přímky s je menší než délka $\overline{SA}$, t. j. menší než r, takže s je sečnou kružnice k. Kružnice se středem S má v každém svém bodě určitou **tečnu; je to kolmice vztyčená v bodě *A* ke přímce *SA*;** každá jiná přímka vedená bodem A je sečnou kružnice.

V obr. 9 je narýsována tečna t ke kružnici k v bodě A této kružnice. Ačkoli přímka t a kružnice k mají společný pouze jediný bod A, přece se zdá, jako by ty dvě čáry měly společnou celou krátkou úsečku. Můžeme si to vysvětliti takto. Zvolme si na kružnici k bod X blízko bodu A. Veďme si průměr AB kružnice k. Podle Thaletovy věty je $\sphericalangle AXB = 90°$ a z toho následuje, že v obr. 9 je $\alpha + \beta = 90°$. Podle obrazce je však také $\alpha + \omega = 90°$, takže musí býti $\omega = \beta$. Je-li



Obr. 9.



Obr. 10.

bod X velmi blízko bodu A, je zřejmě úhel β velmi malý, takže také úhel ω je velmi malý. Ačkoli tedy přímka AX nesplyne přesně s tečnou t, tvoří s ní velmi malý úhel, takže přibližně splyne přímka AX s tečnou t.

Na rozdíl od tečny rozeznáme sečnu od kružnice velmi jasně už v malé blízkosti společného bodu. Proto říkáme, že kružnice a sečna se protínají, kdežto kružnice a tečna se dotýkají.

Tečnu t k narýsované kružnici rovnoběžnou s danou přímkou p (kolik je takových tečen?) můžeme sestrojiti docela přesně (ale ne euklidovsky) posouváním trojúhelníkového pravítka. Ale abychom přesně určili **bod dotyku** (t. j. ten bod, ve kterém je t tečnou) je nezbytné spustiti se středu kružnice kolmici na přímku p.

Narýsujte si kružnici k se středem S a vně kružnice si zvolte bod A. Bodem A procházejí dvě tečny t_1, t_2 ke kružnici k. Můžeme je sestrojiti docela přesně (ale ne euklidovsky) pouhým přiložením pravítka.

K určení bodů dotyku je však třeba spustiti se středu S kolmice na obě tečny. Ale také euklidovská konstrukce tečen vedených z bodu A je snadná (viz obr. 10). Tu si sestrojíme napřed body dotyku T_1, T_2. Postupujeme tak, že si nejprve narýsujeme pomocnou kružnici m nad průměrem AS. (To dovedeme provésti euklidovsky.) Víme, že m je geometrické místo toho bodu X, pro který platí $\sphericalangle AXS = 90°$. Protože $\sphericalangle AT_1S = 90°$, $\sphericalangle AT_2S = 90°$, leží oba body T_1, T_2 na kružnici m. Tedy body dotyku tečen vedených ke kružnici k z bodu A jsou průsečíky kružnice k s pomocnou kružnicí m nad průměrem AS, kde S je střed kružnice k. Tečny samy dostaneme, spojíme-li bod A se sestrojenými body dotyku.

Všimněme si znovu obr. 10! Máme v něm dva pravoúhlé trojúhelníky AST_1, AST_2, které mají společnou přeponu; mimoto je $\overline{ST_1} = \overline{ST_2}$ (proč?). Tedy oba pravoúhlé trojúhelníky se shodují v přeponě a v jedné odvěsně, takže je

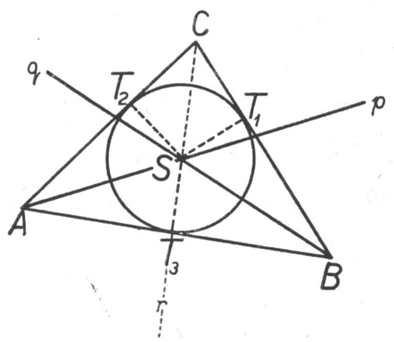
$$AST_1 \cong AST_2. \tag{*}$$

Ze vztahu (*) následuje $\overline{AT_1} = \overline{AT_2}$. **Bod vně kružnice je stejně vzdálen od bodů dotyku obou tečen vedených z něho ke kružnici.** Mimoto ze vztahu (*) následuje

$$\sphericalangle SAT_1 = \sphericalangle SAT_2,$$

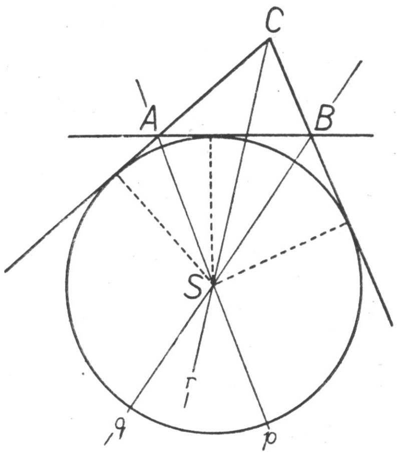
t. j. polopřímka AS je osou úhlu $\sphericalangle T_1AT_2$.

Zvolte si trojúhelník ABC (viz obr. 11). Chceme si odůvodnit, že mu lze vždy vepsat kružnici a také se chceme naučit, jak se vepsaná kružnice k sestrojí. Střed S kružnice k musí býti někde uvnitř trojúhelníka. Vzdálenosti bodu S od všech tří stran trojúhelníka musí býti stejné; neboť přímky AB, AC, BC mají býti tečnami kružnice k. Obráceně, najdeme-li uvnitř trojúhelníka ABC takový bod S, že jeho vzdálenosti od stran trojúhelníka se všecky tři rovnají téže délce r, tu kružnice se středem S a poloměrem r bude patrně vepsána do troj-



Obr. 11.

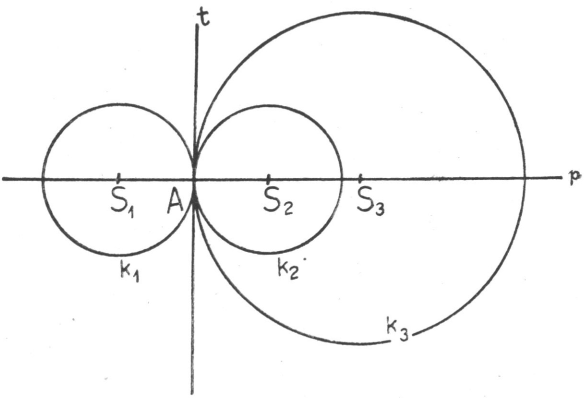
úhelníka ABC. Tedy hledáme bod S podrobený dvojí podmínce: předně jeho vzdálenost od přímky AB má býti taková jako jeho vzdálenost od přímky AC, za druhé jeho vzdálenost od přímky AB má býti taková jako jeho vzdálenost od přímky BC. Proto bod S dostaneme jako průsečík dvou geometrických míst. Sestrojíme si napřed polopřímku p, která je osou úhlu α. Víte, že každý bod polopřímky p je stejně vzdálen od přímky AB jako od přímky AC; polopřímka p je částí geometrického místa bodu stejně vzdáleného od přímky AB jako od přímky AC. Víte, že toto geometrické místo se skládá ze dvou přímek (ze kterých?). Ale je zbytečné rýsovati to geometrické místo celé, neboť hledaný bod S má ležeti uvnitř trojúhelníka ABC, kdežto ta část geometrického místa, která v obr. 11 není narýsována, jistě je vně trojúhelníka. Dále si narýsujeme polopřímku q, která je osou úhlu β. Zase každý bod polopřímky q je stejně vzdálen od přímky AB jako od přímky BC, a každý bod uvnitř trojúhelníka ABC stejně vzdálený od AB jako od BC leží na polopřímce q. Je patrné, že se polopřímky p a q protnou v určitém bodě S uvnitř trojúhelníka ABC.



Obr. 12.

Protože bod S leží na polopřímce p, je stejně vzdálen od přímky AB jako od přímky AC; protože S leží na polopřímce q, je stejně vzdálen od přímky AB jako od přímky BC. Tedy bod S je stejně vzdálen od přímky AC jako od přímky BC; a protože leží uvnitř trojúhelníka ABC, leží také na ose r úhlu γ. Bod S je stejně vzdálen od všech tří stran trojúhelníka; v obr. 11 jsou spuštěny s bodu S kolmice na všecky tři strany a jejich paty jsou označeny T_1, T_2, T_3. Všecky tři úsečky ST_1, ST_2, ST_3 mají stejnou délku r. Sestrojíme-li si kružnici k se středem S a poloměrem r, je k kružnice vepsaná do trojúhelníka ABC. Tedy jsme poznali, že do každého trojúhelníka lze vepsati kružnici, a umíme tuto kružnici narýsovat. Mimoto jsme shledali: **Osy všech tří úhlů trojúhelníka se protínají v jednom bodě, totiž ve středu kružnice vepsané.**

Kružnice vepsaná do trojúhelníka ABC není jediná kružnice, která se dotýká všech tří přímek AB, AC, BC. Jsou ještě tři další takové kružnice, kterým se říká **kružnice připsané** trojúhelníku ABC. Každá z nich je připsána k jedné ze tří stran trojúhelníka. V obr. 12 vidíte kružnici připsanou ke straně AB. Její střed S dostaneme, sestrojíme-li si kterékoli dvě ze tří polopřímek, jež jsou v obr. 12 označeny p, q, r. Při tom je r osa vnitřního úhlu při vrcholu C, kdežto p, q jsou osy vnějších úhlů při vrcholech A, B. Odůvodněte sami, proč je bod S stejně vzdálen od všech tří přímek AB, AC, BC.



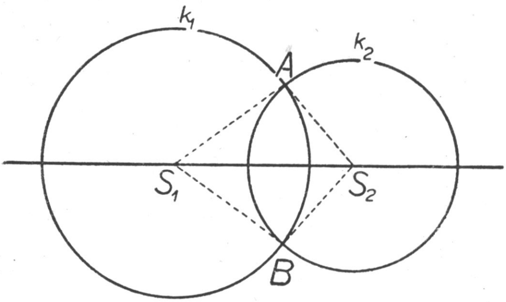
Obr. 13.

Budiž dána přímka t a na ní bod A (viz obr. 13). Prochází-li nějaká kružnice bodem A a je-li t tečnou kružnice k v bodě A, víme, že střed S kružnice k leží na kolmici p vztyčené ke přímce t v bodě A. Obráceně, zvolíme-li si na této kolmici libovolný bod S (ne však v poloze A) a sestrojíme-li si kružnici k, která má střed S a prochází bodem A, tu tečnou kružnice k v bodě A je kolmice zde vztyčená ke přímce AS, t. j. k přímce p, tedy tou tečnou je přímka t. **Geometrické místo středu kružnice, která se v daném bodě A dotýká dané přímky t** (vedené bodem A) **je kolmice vztyčená v bodě A ke přímce t** (ale vlastně si od té kolmice musíme odmysliti bod A).

O dvou kružnicích pravíme, že se **(navzájem) dotýkají** v bodě A, je-li bod A oběma společný a mají-li v něm obě stejnou tečnu. **Geometrické místo středu kružnice, která se v daném bodě A dotýká dané kružnice se středem S** (vedené bodem A) **je přímka AS** (od které si vlastně musíme odmysliti body A, S).

Dvě soustředné kružnice nemohou se dotýkati. Je-li střed S_1

kružnice k_1 různý od středu S_2 kružnice k_2, nazýváme přímku S_1S_2 **střednou** (neboli **centrálou**) obou kružnic (ať se již kružnice dotýkají či ne). Z předchozího plyne: **Dotýkají-li se dvě kružnice, leží bod dotyku na středné.** Obráceně, **mají-li dvě kružnice společný bod A, který leží na jejich středné, pak se kružnice dotýkají v bodě A.** Neboť tečnou kružnice k_1 v bodě A je kolmice vztyčená v bodě A ke přímce S_1A, tedy ke středné, a táž kolmice je také tečnou kružnice k_2 v bodě A.



Obr. 14.

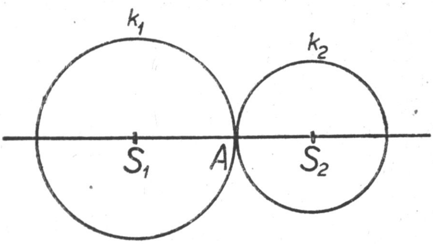
Budiž k_1 kružnice se středem S_1 a budiž k_2 kružnice se středem S_2. Budiž A bod společný oběma kružnicím, který neleží na středné S_1S_2. Je-li B bod souměrně sdružený s bodem A podle osy S_1S_2, je předně $\overline{S_1B} = \overline{S_1A}$, takže bod B leží na kružnici k_1, a za druhé je $\overline{S_2B} = \overline{S_2A}$, takže bod B leží také na kružnici k_2. Tedy když dvě kružnice mají společný bod A, který neleží na jejich středné, mají ještě jeden společný bod B; takové dvě kružnice se nedotýkají ani v bodě A ani v bodě B a říkáme, že **se protínají** v bodech A, B. Body A, B jsou **průsečíky** obou kružnic. Středná dvou kružnic, které se protínají v bodech A, B, je osou úsečky AB.

Dotýkají-li se dvě kružnice v bodě A, mají v něm společnou tečnu t. Mohou nastati dva případy. Předně mohou ležet obě kružnice každá po jiné straně od přímky t; tu mluvíme o **vnějším dotyku,** protože každá z obou kružnic je (až na společný bod A) celá vně druhé; vnější dotyk mají v obr. 13 kružnice k_1, k_2 a také kružnice k_1, k_3. Za druhé mohou obě dotýkající se kružnice ležet po téže straně od přímky t; tu mluvíme o **vnitřním dotyku,** protože menší z obou kružnic je (až na společný bod A) celá uvnitř větší; vnitřní dotyk mají v obr. 13 kružnice k_2, k_3.

Budiž k_1 kružnice se středem S_1 a poloměrem r_1; budiž k_2 kružnice se středem S_2 a poloměrem r_2. **Délkou středné** rozumíme délku $\overline{S_1S_2}$; označíme si ji písmenem d. Uvidíme, že vzájemná poloha obou kružnic se dá zjistit jednoduchým výpočtem, jsou-li délky r_1, r_2, d dány číselně, i když kružnice samy nejsou narýsovány. Při tom budeme předpokládati, že $r_1 > r_2$, t. j. že k_1 znamená tu z obou daných kružnic, která má větší poloměr.

Začneme případem vnějšího dotyku (viz obr. 15). Bod dotyku A leží uvnitř úsečky S_1S_2, takže je $\overline{S_1S_2} = \overline{S_1A} + \overline{AS_2}$ neboli

$$d = r_1 + r_2.$$

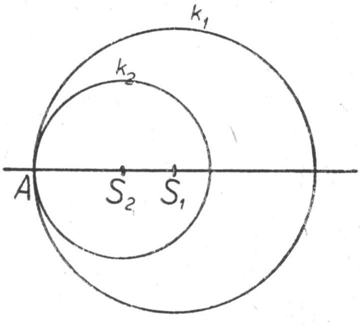


Obr. 15.

Obráceně, je-li $d = r_1 + r_2$, protože d je délka úsečky S_1S_2, můžeme si uvnitř této úsečky určiti bod A tak, aby bylo $\overline{S_1A} = r_1$, $\overline{S_2A} = r_2$. Bod A leží na obou kružnicích k_1, k_2 a poněvadž leží také na středné, dotýkají se obě kružnice v bodě A a dotyk je vnější, protože bod dotyku leží mezi oběma středy.

Případ vnitřního dotyku je znázorněn v obr. 16. Bod dotyku A je na prodloužení úsečky S_1S_2 za bod S_2, takže je $\overline{S_1S_2} = \overline{S_1A} - \overline{S_2A}$ neboli

$$d = r_1 - r_2.$$



Obr. 16.

Obráceně, je-li $d = r_1 - r_2$, zvolme si bod A na prodloužení úsečky S_1S_2 za bod S_2 tak, aby bylo $\overline{S_2A} = r_2$; protože $d = r_1 - r_2$ je délka úsečky $\overline{S_1S_2}$, bude $\overline{S_1A} = \overline{S_1S_2} + \overline{S_2A} = (r_1 - r_2) + r_2 = r_1$. Bod A leží na obou kružnicích k_1, k_2 a poněvadž leží také na středné, dotýkají se obě kružnice v bodě A a dotyk je vnitřní, protože oba středy jsou po téže straně od bodu dotyku A.

Případ protínajících se kružnic je znázorněn v obr. 14. Je-li A jeden z obou průsečíků, vznikne nám trojúhelník S_1S_2A, jehož strany mají délky

$$\overline{S_1S_2} = d; \; \overline{S_1A} = r_1; \; \overline{S_2A} = r_2. \qquad (*)$$

Víme však, že každá strana trojúhelníka je menší než součet obou ostatních a větší než jejich rozdíl. Proto je

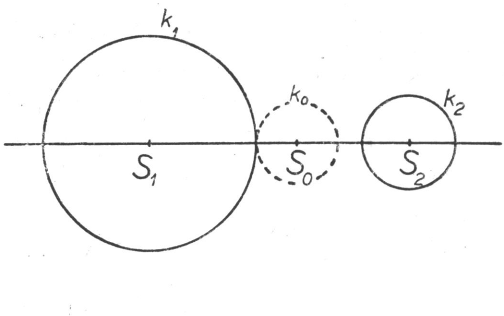
$$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2.$$

Obráceně, je-li $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$, můžeme si sestrojiti trojúhelník S_1S_2A tak, že platí (*) a po druhé straně od přímky S_1S_2 si můžeme sestrojiti trojúhelník $S_1S_2B \cong S_1S_2A$. Pak je $\overline{S_1A} = r_1$; $\overline{S_2A} = r_2$; $\overline{S_1B} = r_1$; $\overline{S_2B} = r_2$, takže kružnice k_1, k_2 se protínají v bodech A, B.

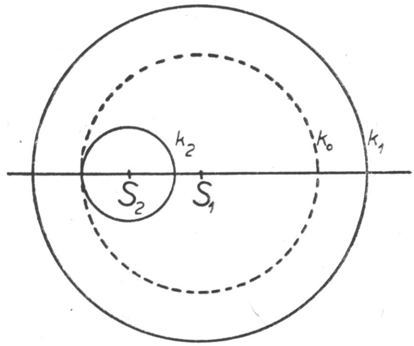
Vždycky je $r_1 - r_2 < r_1 + r_2$, takže pro délku d je celkem pět možností:

$$d = r_1 + r_2; \qquad d = r_1 - r_2;$$

$$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2; \qquad d > r_1 + r_2; \qquad d < r_1 - r_2.$$



Obr. 17.



Obr. 18.

Případ $d > r_1 + r_2$ je znázorněn v obr. 17. Protože $\overline{S_1S_2} > r_1 + r_2$, můžeme si uvnitř úsečky S_1S_2 sestrojit bod S_0 tak, aby bylo $\overline{S_1S_0} = r_1 + r_2$. Je-li k_0 kružnice se středem S_0 a poloměrem r_2 stejným jako má kružnice k_2, tu kružnice k_1, k_0 mají vnější dotyk. Ale z kružnice k_0 dostaneme kružnici k_2, posuneme-li kružnici k_0 od kružnice k_1 dále o délku $\overline{S_0S_2}$. Tedy každá z obou kružnic k_1, k_2 je celá vně druhé a není žádný společný bod.

Poslední případ $d < r_1 - r_2$ je znázorněn v obr. 18. Položme $r_0 = d + r_2$ a sestrojme si kružnici k_0 soustřednou s kružnicí k_1 a s poloměrem r_0. Pak mají kružnice k_0, k_2 vnitřní dotyk a k_2 je až na bod dotyku uvnitř k_1. Protože však $d = r_0 - r_2$, $d < r_1 - r_2$, je $r_1 > r_0$, t. j. kružnice k_0 (a tedy i její vnitřek) je uvnitř kružnice k_1. Tedy celá kružnice k_2 leží uvnitř kružnice k_1 a není žádný společný bod.

Výsledek. **Je-li r_1 poloměr kružnice k_1, je-li r_2 poloměr kružnice k_2, je-li $r_1 > r_2$, a je-li d délka středné, nastane jeden z těchto pěti případů:**

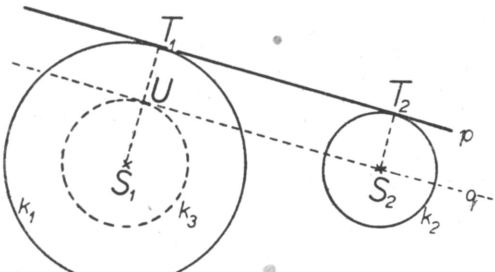
1. $d = r_1 + r_2$, kružnice mají vnější dotyk;
2. $d = r_1 - r_2$, kružnice mají vnitřní dotyk;
3. $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$, kružnice se protínají;
4. $d > r_1 + r_2$, každá kružnice je celá vně druhé;
5. $d < r_1 - r_2$, jedna kružnice je celá uvnitř druhé.

U soustředných kružnic nastane vždy případ 5., což souhlasí s tím, že v tomto případě je $d = 0$, takže je $d < r_1 - r_2$.

Je-li $r_1 = r_2$, je $r_1 - r_2 = 0$, avšak $d > 0$, takže případy 2. a 5. jsou nemožné a zbývají pouze případy 1., 3. a 4.

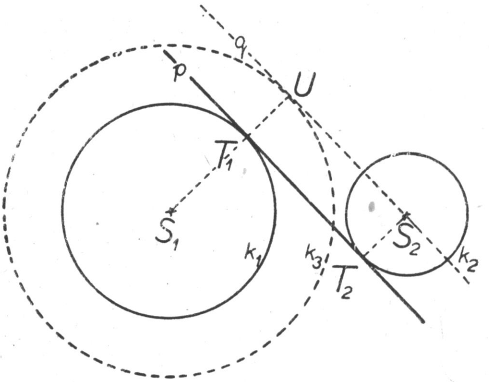
Společná tečna dvou kružnic se jmenuje **vnější,** leží-li obě kružnice (až na body dotyku) po téže straně od té tečny, a jmenuje se **vnitřní,** leží-li (až na body dotyku) každá z obou kružnic po jiné straně od té tečny.

V obr. 19 vidíme jednu vnější společnou tečnu p kružnic k_1, k_2 se středy S_1, S_2. Body dotyku jsou označeny T_1, T_2. V obrazci jsou vedeny poloměry S_1T_1, S_2T_2, při čemž je $\overline{S_1T_1} > \overline{S_2T_2}$. Jest $S_1T_1 \perp p$, $S_2T_2 \perp p$ a proto je $S_1T_1 \parallel S_2T_2$. Naneseme-li si na úsečku S_1T_1 od bodu T_1 délku $\overline{T_1U}$ rovnou délce $\overline{T_2S_2}$, vznikne nám rovnoběžník $S_2T_2T_1U$, neboť $S_2T_2 \parallel UT_1$, $\overline{S_2T_2} = \overline{UT_1}$. (Dokonce je to obdélník.) Proto je $T_1T_2 \parallel S_2U$, takže přímka S_2U, v obrazci označená q, je kolmá na přímku S_1U. Vedeme-li si tedy kružnici k_3 se středem S_1, která prochází bodem U, je q tečna kružnice k_3 v bodě U.



Obr. 19.

Na základě této úvahy můžeme provésti euklidovskou konstrukci vnějších společných tečen dvou kružnic k_1, k_2. Budiž poloměr kružnice k_1 větší než poloměr kružnice k_2. Kolem středu S_1 kružnice k_1 opíšeme kružnici k_3, jejíž poloměr je rozdíl poloměrů daných kružnic. Se středu S_2 kružnice k_2 vedeme obě tečny ke kružnici k_3, což umíme provésti euklidovsky. Je-li q jedna z těchto tečen a U její bod dotyku, prodloužíme úsečku S_1U za bod U až k průsečíku T_1 s kružnicí k_1, dále vedeme $S_2T_2 \parallel UT_1$, kde bod T_2 leží na kružnici k_2. (Obě úsečky S_2T_2, UT_1 musí býti po téže straně od přímky q. Hledaná vnější společná tečna kružnic k_1, k_2 je spojnice T_1T_2; T_1 a T_2 jsou její body dotyku. Když místo tečny q užijeme druhé tečny ke kružnici k_3 vedené z bodu S_2, dostaneme stejnou cestou druhou vnější společnou tečnu kružnic k_1, k_2.



Obr. 20.

K euklidovské konstrukci vnitřních společných tečen dvou kružnic dojdeme podobnou úvahou, kterou proveďte sami (viz obr. 20). Hlavní rozdíl je v tom, že poloměrem pomocné kružnice k_3 nyní je součet poloměrů kružnic k_1, k_2, nikoli rozdíl.

Cvičení k § 2.

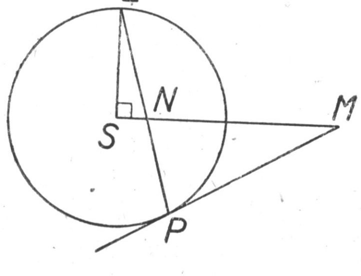
I. Tečna kružnice v daném bodě.

40. AB je průměr kružnice k. Dokažte, že tečny kružnice k v bodech A, B jsou mezi sebou rovnoběžné.

41. Na kružnici k s průměrem AB si zvolte bod C. Sestrojte kružnici m, která má střed v bodě A a prochází bodem C. Dokažte, že přímka BC je tečnou kružnice m v bodě C.

42. Narýsujte si dvě soustředné kružnice, menší si označte k_1 a větší k_2. Na kružnici k_1 si zvolte bod E a sestrojte tečnu t kružnice k_1 v bodě E. Označte F, G průsečíky přímky t s kružnicí k_2. Dokažte, že $\overline{EF} = \overline{EG}$.

43. Na kružnici k se středem S si zvolte dva body H, K. Sestrojte tečnu t kružnice k v bodě H. Označte P patu kolmice spuštěné s bodu K na přímku t. Dokažte,



Obr. 21.

že polopřímka KH je osou úhlu $\sphericalangle SKP$. [Oba úhly $\sphericalangle SKH$, $\sphericalangle HKP$ porovnejte s úhlem $\sphericalangle KHS$.]

44. V obr. 21 S je střed kružnice a $\sphericalangle LSM = 90°$. Dokažte, že $\overline{MN} = \overline{MP}$. [Spojte SP.]

II. Tečny rovnoběžné s danou přímkou.

45. Narýsujte si kružnici k s poloměrem 37 mm a zvolte si přímku p třeba mimo kružnici k. Sestrojte euklidovsky ten bod kružnice k, ve kterém je tečna rovnoběžná s přímkou p a sestrojte tu tečnu. (Dvě řešení.)

III. Tečny vedené z bodu ke kružnici.

46. Narýsujte si kružnici k (střed S, poloměr 34 mm). Zvolte si bod H ve vzdálenosti 56 mm od bodu S. Sestrojte euklidovsky obě tečny vedené ke kružnici k z bodu H. Změřte vzdálenosti bodu H od bodů dotyku.

47. Čtyrúhelník $KLMN$ je opsán kružnicí. Dokažte, že

$$\overline{KL} + \overline{MN} = \overline{KN} + \overline{LM}.$$

[Všimněte si úseček, na které body dotyku rozdělí strany.]

48. Šestiúhelník $ABCDEF$ je opsán kružnici. Dokažte, že

$$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = \overline{AF} + \overline{BC} + \overline{DE}.$$

49. Rovnoběžník je opsán kružnici. Dokažte, že je to kosočtverec, jehož úhlopříčky se protnou ve středu kružnice.

50. Ke kružnici se středem S jsou vedeny dvě mezi sebou rovnoběžné tečny a ještě jedna tečna, která protne prvé dvě v bodech G, H. Dokažte, že $\sphericalangle GSH = 90°$.

IV. Kružnice vepsaná do trojúhelníka a pod.

51. a) Sestrojte znovu trojúhelník ABC podle údajů ze cvič **24** a). Sestrojte kružnici vepsanou a všecky tři kružnice připsané.

b) Opakujte s trojúhelníkem ze cvič. **24** b).

52. Narýsujte si dvě rovnoběžky p, q a třetí přímku r s nimi různoběžnou. Sestrojte kružnici, která se dotýká všech tří přímek p, q, r. (Dvě řešení.)

V. Dotyk kružnic.

53. Narýsujte si kružnici k_1 (střed S_1, poloměr 25 mm) a kružnici k_2 (střed S_2, poloměr 4 cm, $\overline{S_1S_2} = 45$ mm). Narýsujte všecky kružnice, které mají střed na přímce S_1S_2 a dotýkají se obou kružnic k_1, k_2. Jaké jsou jejich poloměry? (Čtyři řešení.)

54. Narýsujte si kružnice k_1, k_2 v téže poloze, jako ve cvič. **53**.

a) Jak by se musil změnit poloměr kružnice k_2 (beze změny středu), aby se nová kružnice dotýkala kružnice k_1? (Dvě řešení.)

b) Jak by se musil posunout střed kružnice k_1 po přímce S_1S_2 (beze změny poloměru), aby se nová kružnice dotýkala kružnice k_2? (Čtyři řešení.)

55. ABC je rovnostranný trojúhelník. Kolem každého vrcholu je opsána kružnice tak, že každé dvě z nich se navzájem dotýkají; dotyk kružnic se středy A, B je vnější a obě ty kružnice jsou (až na body dotyku) uvnitř třetí. Dokažte, že obě kružnice se středy A, B mají týž poloměr, který je třetinou poloměru kružnice se středem C.

56. Je dána kružnice se středem S_1 a kružnice se středem S_2. Mimoto jsou dány další dvě kružnice (střed S_3 a střed S_4), z nichž každá má vnější dotyk s oběma prvými. Dokažte, že

$$\overline{S_1S_3} + \overline{S_2S_4} = \overline{S_1S_4} + \overline{S_2S_3}.$$

57. Jestliže u rovnoběžníka $ABCD$ kružnice nad průměrem AB se dotýká kružnice nad průměrem CD, dokažte, že $ABCD$ je kosočtverec. [Spojte středy obou kružnic.]

VI. Konstrukce kružnic.

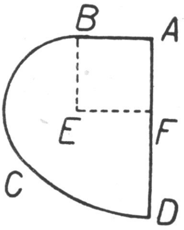
58. Je dána přímka r a na ní bod T. Sestrojte kružnici s poloměrem 36 mm, která se v bodě T dotýká přímky r. (Dvě řešení.)

59. Jsou dány dva body U, V tak, že $\overline{UV} = 4$ cm. Sestrojte kružnici, která prochází oběma danými body a jejíž tečna v bodě U tvoří úhel 60° s přímkou UV. (Dvě řešení.)

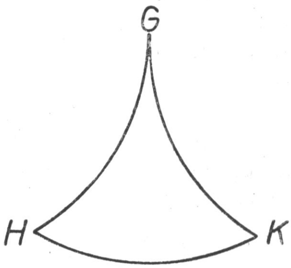
60. Je dána kružnice k s poloměrem 4 cm a na ní bod T. Sestrojte kružnici s poloměrem 24 mm, která se v bodě T dotýká kružnice k. (Dvě řešení.)

61. Zvolte si bod H na kružnici k se středem S a bod P, který neleží ani na kružnici k ani na přímce HS. Sestrojte kružnici, která prochází bodem P a která se dotýká kružnice k v bodě H.

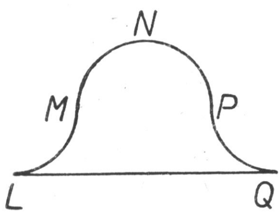
Ve cvič. **62** až **73** máte sestrojiti obrazce asi takového tvaru jako jsou obrazce v učebnici. V každém obrazci jsou oblouky dotýkajících se kružnic.



Obr. 22.



Obr. 23.



Obr. 24.

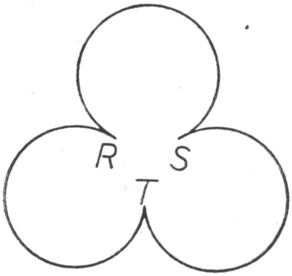
62. (Viz obr. 22.) $ABEF$ je čtverec o straně 2 cm. BC je oblouk kružnice o středu E. CD je oblouk kružnice o středu A.

63. (Viz obr. 23.) Každý oblouk je šestina kružnice s poloměrem 3 cm. V bodech H, K není dotyk.

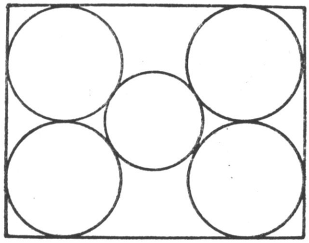
64. (Viz obr. 24.) Obrazec se skládá ze čtyř shodných čtvrtkružnic. Jest $\overline{LQ} = 6$ cm.

65. (Viz obr. 25.) V obrazci jsou oblouky kružnic s poloměrem 3 cm.

66. (Viz obr. 26.) Rozměry obdélníka jsou 6 cm, 8 cm. Krajní kružnice mají všecky čtyři týž poloměr.



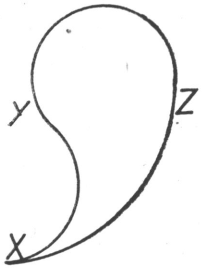
Obr. 25.



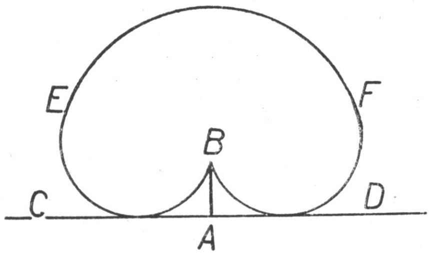
Obr. 26.

67. (Viz obr. 27.) XY je oblouk kružnice s poloměrem 35 mm. YZ je oblouk kružnice s poloměrem 25 mm. ZX je oblouk kružnice s poloměrem 7 cm.

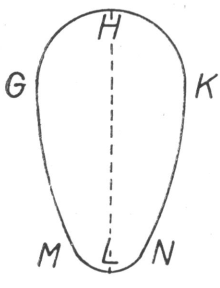
68. (Viz obr. 28.) Jest $AB \perp CD$, $\overline{AB} = 3$ cm. BE, BF jsou oblouky kružnic s poloměrem 4 cm; v bodě B není dotyk. EF je oblouk kružnice s poloměrem 8 cm.



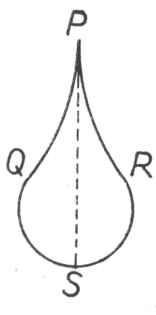
Obr. 27.



Obr. 28.



Obr. 29.



Obr. 30.

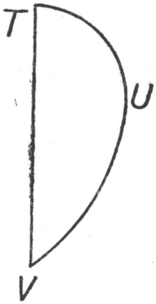
69. (Viz obr. 29.) Přímka HL je osa souměrnosti obrazce. GHK je polokružnice s poloměrem 2 cm. MLN je oblouk kružnice s poloměrem 1 cm. $\overline{HL} = 7$ cm.

70. (Viz obr. 30.) Přímka PS je osa souměrnosti obrazce. PQ, PR jsou oblouky kružnic s poloměrem 6 cm. $\overline{PS} = 6$ cm.

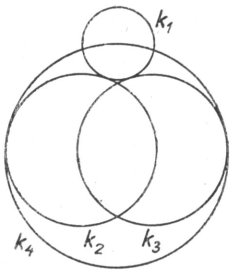
71. (Viz obr. 31.) TU je čtvrtina kružnice s poloměrem 25 mm; střed leží na přímce TV. $\overline{TV} = 7$ cm.

72. (Viz obr. 32.) Kružnice k_1 má střed na kružnici k_4 a poloměr 1 cm. Kružnice k_2, k_3 mají poloměr 2 cm. Kružnice k_4 má poloměr 3 cm.

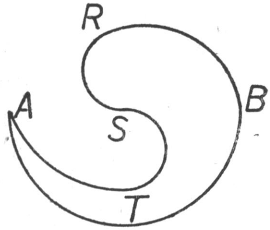
73. (Viz obr. 33.) AB je polokružnice s poloměrem 3 cm a se středem S. SR, ST jsou oblouky kružnic s poloměrem 1 cm.



Obr. 31.



Obr. 32.



Obr. 33.

VII. Společné tečny dvou kružnic.

74. Leží-li jedna kružnice uvnitř druhé, nemají žádnou společnou tečnu. Dokažte!

75. Mají-li dvě kružnice vnitřní dotyk, nemají jinou společnou tečnu mimo tečnu vzájemného dotyku. Dokažte!

76. Protínají-li se dvě kružnice, nemají žádnou vnitřní společnou tečnu. Dokažte!

77. Mají-li dvě kružnice vnější dotyk, nemají jinou vnitřní společnou tečnu mimo tečnu vzájemného dotyku. Dokažte!

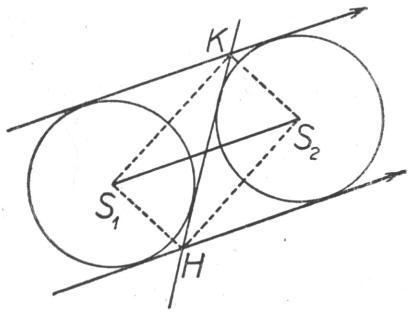
78. a) Jakou vzájemnou polohu mají vnější společné tečny dvou kružnic s týmž poloměrem?

b) Sestrojte všecky společné tečny dvou kružnic s týmž poloměrem 3 cm; délka středné budiž 7 cm.

79. Narýsujte si kružnici k_1 (střed S_1, poloměr r_1) a kružnici k_2 (střed S_2, poloměr r_2) podle následujících údajů. Sestrojte všecky společné tečny obou kružnic.

a) $r_1 = 46$ mm; $r_2 = 38$ mm; $\overline{S_1S_2} = 4$ cm;
b) $r_1 = 2$ cm; $r_2 = 4$ cm; $\overline{S_1S_2} = 75$ mm;
c) $r_1 = 24$ mm; $r_2 = 36$ mm; $\overline{S_1S_2} = 6$ cm.

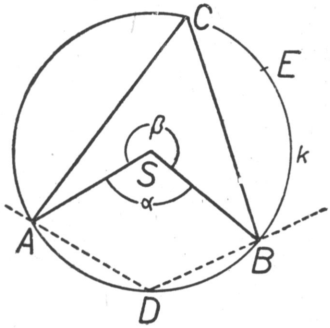
80. (Viz obr. 34.) Dokažte:
a) S_1HS_2K je obdélník; b) $\overline{HK} = \overline{S_1S_2}$.



Obr. 34.

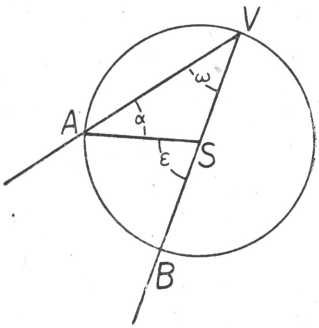
§ 3. Kružnice a úhly.

V obr. 35 je kružnice k se středem S. Body A, B rozdělují kružnici k na dva oblouky, menší oblouk ADB a větší oblouk ACB. Úhel $\sphericalangle ASB$, v obrazci označený α, je **středový úhel nad obloukem ADB.** Vypuklý úhel s týmiž rameny jako úhel α, v obrazci označený β, je středový úhel nad obloukem ACB. Kdyby AB byl průměr kružnice k, byly by oba středové úhly s rameny SA, SB úhly přímé; není-li však tětiva AB průměrem, je jeden z nich dutý a druhý je vypuklý.



Obr. 35.

Úhel $\sphericalangle ACB$ v obr. 35 je **obvodový úhel nad obloukem ADB;** také na př. $\sphericalangle AEB$ (v obrazci nevyznačený) je obvodový úhel nad týmž obloukem. Úhel $\sphericalangle ADB$ je obvodový úhel nad obloukem ACB. Tedy každý obvodový úhel nad obloukem ACB má vrchol na oblouku ADB a každý obvodový úhel nad obloukem ADB má vrchol na oblouku ACB. Obvodový úhel je vždy dutý.



Obr. 36.

Nyní si dokážeme velmi důležitou poučku. Leží-li středový a obvodový úhel nad týmž obloukem, pak **obvodový úhel je polovina úhlu středového.** Důkaz si nejprve provedeme pro ten případ, že jedno rameno obvodového úhlu prochází středem kružnice (viz obr. 36). Máme tedy dokázati, že v obr. 36 je $\varepsilon = 2\omega$. Úhel ε je vnější úhel trojúhelníka AVS; víme, že takový úhel se rovná součtu obou protějších úhlů vnitřních, tedy $\varepsilon = \alpha + \omega$. Avšak α, ω jsou úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka AVS, takže $\alpha = \omega$. Proto je $\alpha + \omega = 2\omega$, tedy $\varepsilon = 2\omega$, což jsme měli dokázati.

Když žádné rameno obvodového úhlu neprochází středem S, mohou nastati dva případy. Předně se může státi, že bod S leží uvnitř obvodového úhlu $\sphericalangle AVB = \omega$ (viz obr. 37). Pomocná přímka VS protne kružnici znovu v bodě C. Středový úhel ε se rozdělí na úhly ε_1, ε_2 a zároveň se obvodový úhel ω rozdělí na úhly ω_1, ω_2. Podle toho, co již máme dokázáno, je

$$\varepsilon_1 = 2\omega_1, \quad \varepsilon_2 = 2\omega_2.$$

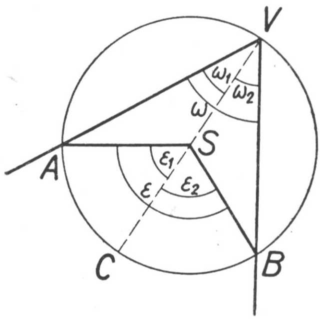
Mimoto je však

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \omega = \omega_1 + \omega_2,$$

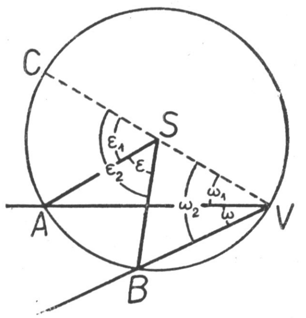
takže

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\omega_1 + 2\omega_2 = 2\,(\omega_1 + \omega_2) = 2\omega,$$

což jsme měli dokázati.



Obr. 37.



Obr. 38.

Za druhé se může státi, že bod S leží vně obvodového úhlu $\sphericalangle AVB = \omega$ (viz obr. 38). Důkaz probíhá podobně jako v prvém případě. Vedeme-li zase pomocnou přímku VSC, je

$$\varepsilon_1 = 2\omega_1, \quad \varepsilon_2 = 2\omega_2$$

a mimoto

$$\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \quad \omega = \omega_2 - \omega_1,$$

takže

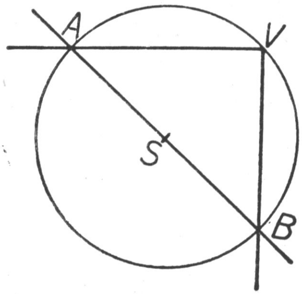
$$\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 2\omega_2 - 2\omega_1 = 2\,(\omega_2 - \omega_1) = 2\omega,$$

což jsme měli dokázati.

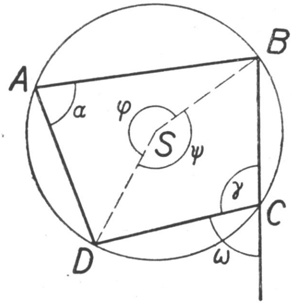
Známá vám Thaletova věta je zvláštním případem právě dokázané poučky. Neboť v obr. 39 je $\sphericalangle ASB = 180°$ a podle naší poučky polovina tohoto úhlu je $\sphericalangle AVB$, takže $\sphericalangle AVB = 90°$, což je Thaletova věta.

Obvodové úhly nad týmž obloukem jsou si rovny; neboť každý z nich je polovinou téhož úhlu středového. Tento důsledek právě dokázané poučky je ještě důležitější než poučka sama.

Čtyrúhelník vepsaný do kružnice se jmenuje **tětivový čtyrúhelník,** protože jeho strany jsou tětivami opsané kružnice. **Protější úhly tětivového čtyrúhelníka jsou výplňkové.** Důkaz: máme dokázati, že v obr. 40 je $\alpha + \gamma = 180°$. Víme, že α je polovina úhlu ψ a že γ je polovina úhlu φ. Mimoto je $\varphi + \psi = 360°$, tedy $\alpha + \gamma$ je polovina ze $360°$, tedy $\alpha + \gamma = 180°$, což jsme měli dokázati. Právě dokázané poučce můžeme dáti tento tvar: **Vnější úhel tětivového čtyrúhelníka**



Obr. 39.

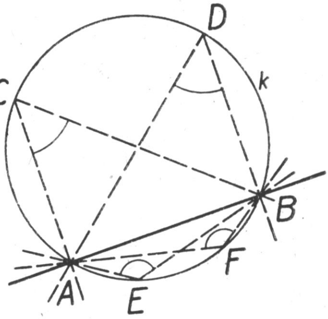


Obr. 40.

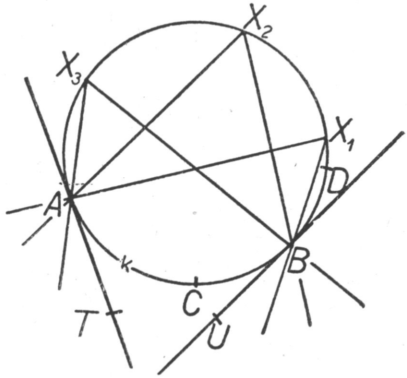
se rovná protějšímu vnitřnímu úhlu. Na př. v obr. 40 je $\omega = \alpha$. Neboť právě jsme dokázali, že α je výplňkový úhel k úhlu γ; ale také ω je výplňkový úhel k úhlu γ, neboť to jsou úhly vedlejší.

V obr. 41 úsečka AB je tětivou kružnice k. **Obvodovým úhlem nad tětivou AB** nazýváme každý úhel, jehož ramena procházejí jedno bodem A a druhé bodem B, kdežto vrchol je kdekoli na kružnici k. V obr. 41 jsou vyznačeny čtyři obvodové úhly nad tětivou AB. Když dva obvodové úhly nad tětivou AB mají vrcholy oba na téže straně od přímky AB, jsou to obvodové úhly nad týmž obloukem a proto jsou si rovny. Když však z obou vrcholů dvou obvodových úhlů nad tětivou AB leží každý na jiné straně od přímky AB, jsou to protější úhly tětivového čtyrúhelníka, tedy úhly výplňkové. Pouze v případě, kdy tětiva AB je průměrem, jsou si rovny v š e c k y obvodové úhly nad tětivou AB (a jsou to úhly pravé).

Mají-li dva oblouky kružnice k stejnou délku, třeba oblouk o_1 a oblouk o_2, můžeme otočiti oblouk o_1 kolem středu S kružnice k tak, že otočený oblouk splyne s obloukem o_2. Při tomto otočení přejde středový úhel nad obloukem o_1 ve středový úhel nad obloukem o_2. Proto **středové úhly nad rovnými oblouky jsou si rovny.** Protože obvodový úhel je polovina úhlu středového, platí dále: **obvodové úhly nad rovnými oblouky jsou si rovny.**



Obr. 41.



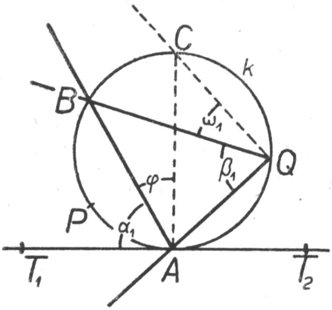
Obr. 42.

Je-li oblouk o roven na př. pětině kružnice k, můžeme si kružnici k rozdělit na pět sobě rovných oblouků, z nichž jeden je oblouk o. Středové úhly nad těmito oblouky jsou si všecky rovny a jejich součet je 360°, takže každý z nich měří 360° : 5 neboli 72°. Obvodový úhel nad obloukem o měří 72° : 2 neboli 36°.

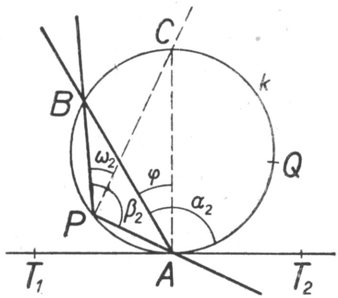
Zvolme si oblouk ACB kružnice k (viz obr. 42). Zvolíme-li si libovolný bod X na druhém oblouku ADB kružnice k, dostaneme obvodový úhel $\sphericalangle AXB$ nad obloukem ACB. Víme, že velikost tohoto úhlu zůstává nezměněna, pohybuje-li se bod X po oblouku ADB. V obr. 42 vidíme tři polohy $\sphericalangle AX_1B$, $\sphericalangle AX_2B$, $\sphericalangle AX_3B$ úhlu $\sphericalangle AXB$, při čemž se vrchol X stále blíží poloze A. Přibližuje-li se bod X bodu A, blíží se $\sphericalangle AXB$ stále více úhlu $\sphericalangle TAB$, při čemž přímka TA je tečna kružnice k v bodě A. Proto $\sphericalangle TAB$ se musí rovnati úhlu $\sphericalangle AXB$. Témuž úhlu se bude rovnati také $\sphericalangle UBA$, jemuž se blíží $\sphericalangle AXB$, když se bod X blíží poloze B. Úhly

$$\sphericalangle TAB, \quad \sphericalangle UBA$$

se jmenují **úsekové úhly nad obloukem ACB.** Tedy jsou dva úsekové úhly nad obloukem ACB. Ten z nich, jehož vrcholem je bod A, má jedno rameno v polopřímce AB, kdežto druhé rameno AT je ta část tečny v bodě A ke kružnici k, která se v blízkosti bodu A přimyká k oblouku ACB (kdežto prodloužení polopřímky AT za bod A se v blízkosti bodu A přimyká k oblouku ADB. Podobně polopřímka BU je ta část tečny v bodě B, která se v blízkosti bodu B přimyká k oblouku ACB.



Obr. 43a.



Obr. 43b.

Již jsme si dokázali, že **úsekový úhel rovná se obvodovému úhlu nad týmž obloukem.** Dokažme si to ještě jinak!

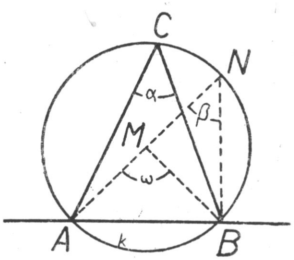
V obr. 43a, 43b body A, B rozdělí kružnici k na dva oblouky APB, AQB. V obr. 43a je vyznačen úsekový úhel $\sphericalangle T_1AB = \alpha_1$ nad obloukem APB a obvodový úhel $\sphericalangle AQB = \beta_1$ nad týmž obloukem. V obr. 43b je vyznačen úsekový úhel $\sphericalangle T_2AB$ nad obloukem AQB a obvodový úhel $\sphericalangle APB = \beta_2$ nad týmž obloukem. Máme tedy dokázati, že je $\alpha_1 = \beta_1$ v obr. 43a, $\alpha_2 = \beta_2$ v obr. 43b. Abychom dokázali, že $\alpha_1 = \beta_1$, vedeme v obr. 43a průměr AC kružnice k, čímž nám vznikne $\sphericalangle BAC = \varphi$. Spojíme-li QC, vznikne nám $\sphericalangle BQC = \omega_1$. Avšak $\varphi = \omega_1$, neboť oba ty úhly jsou obvodové nad týmž obloukem BC. V obr. 43a je dále $\sphericalangle T_1AC = 90°$, takže $\alpha_1 = 90° - \varphi$. Mimoto je $\sphericalangle AQC = 90°$ podle Thaletovy věty, takže $\beta_1 = 90° - \omega_1$. Protože

$$\varphi = \omega_1, \quad \alpha_1 = 90° - \varphi, \quad \beta_1 = 90° - \omega_1,$$

je $\alpha_1 = \beta_1$, jak jsme měli dokázati. Podobně se dokáže, že v obr. 43b je $\alpha_2 = \beta_2$. Proveďte to sami!

V obr. 44 je kružnice k, na které jsou zvoleny dva body A, B. Mimoto je v obr. 44 vyznačen ještě třetí bod C kružnice k, jakož i úhel $\sphericalangle ACB = \alpha$. Zvolíme-li si libovolný bod X na téže straně od přímky AB, na které je bod C, můžeme se ptáti, jaká je velikost úhlu $\sphericalangle AXB$. Odpověď na tuto otázku zní:

[1] Leží-li bod X na kružnici k, je $\sphericalangle AXB = \alpha$.
[2] Leží-li bod X uvnitř kružnice k, je $\sphericalangle AXB > \alpha$.
[3] Leží-li bod X vně kružnice k, je $\sphericalangle AXB < \alpha$.



Obr. 44.

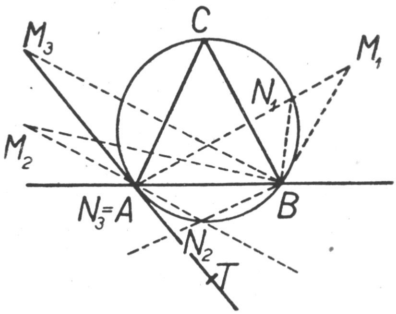
Část [1] je nám již známa. Část [2] a [3] si odvodíme na základě poučky vám známé: Vnější úhel trojúhelníka je větší než kterýkoli protější úhel vnitřní.

Abychom dokázali část [2], zvolme si bod M uvnitř kružnice k (na téže straně od přímky AB, na které je bod C). Máme dokázati, že $\sphericalangle AMB > \alpha$. Za tím účelem prodloužíme úsečku AM až ke druhému průsečíku N s kružnicí k. Vznikne nám trojúhelník MNB. Užijeme-li připomenuté poučky na tento trojúhelník, dostaneme

$$\sphericalangle AMB > \sphericalangle ANB$$

a jsme hotovi, neboť $\sphericalangle ANB = \sphericalangle ACB$ (tedy $= \alpha$), neboť to jsou obvodové úhly nad týmž obloukem.

Podobně se provede důkaz části [3]. Musíme však rozeznávati tři případy (viz obr. 45). V obr. 45 je narýsována tečna AT ke kružnici k v bodě A. Mimoto jsou zvoleny (po téže straně od přímky AB, na které je bod C) tři body M_1, M_2, M_3 vně kružnice k, při čemž je bod M_1 na téže straně od tečny AT, na které je bod B, bod M_2 leží na opačné straně od té tečny, a bod M_3 leží na té tečně. Máme dokázati, že všecky tři úhly



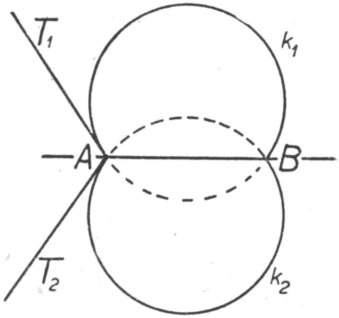
Obr. 45.

$$\sphericalangle AM_1B, \quad \sphericalangle AM_2B, \quad \sphericalangle AM_3B$$

jsou menší než α. To se ve všech třech případech provede tak, že si najdeme trojúhelník, ve kterém je jeden vnější úhel roven úhlu α, kdežto jeden z protějších úhlů vnitřních je právě ten úhel, o kterém máme dokázati, že je menší než α. Proveďte to sami na základě obr. 45!

Nyní si snadno určíme geometrické místo toho bodu X, ze kterého je viděti danou úsečku AB **pod zorným úhlem** α, t. j. pro který platí, že

$$\sphericalangle AXB = \alpha.$$



Obr. 46.

Nejprve si sestrojíme oba úhly $\sphericalangle T_1AB$, $\sphericalangle T_2AB$, které mají velikost $180° - \alpha$ a za jedno rameno polopřímku AB (viz obr. 46). Dále si sestrojíme kružnice k_1, k_2, které procházejí body A, B, při čemž tečnou v bodě A je u prvé přímka AT_1, u druhé přímka AT_2. Hledané geometrické místo se skládá z plně vytaženého oblouku kružnice k_1 a z plně vytaženého oblouku kružnice k_2. Tyto dva oblouky dohromady tvoří čáru c souměrnou podle osy AB. Při tom jest

$\sphericalangle AXB > \alpha$ pro body X uvnitř čáry c,
$\sphericalangle AXB < \alpha$ pro body X vně čáry c,
$\sphericalangle AXB = \alpha$ pro body X na čáře c (vyjma body A, B samy).

Kdybychom si byli místo ostrého úhlu α zvolili tupý úhel $\beta = 180° - \alpha$, vyšlo by nám geometrické místo složené z obou oblouků čárkovaných v obr. 46. Kdybychom si byli zvolili pravý úhel, vyšla by nám jako geometrické místo kružnice nad průměrem AB; to je nám známo již z loňska.

Cvičení k § 3.

I. Úhly středové a obvodové.

81. (Viz obr. 47.)

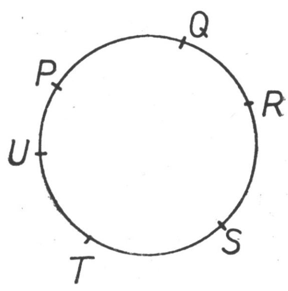
a) Nad kterým obloukem leží obvodový úhel

$\sphericalangle PRT$, $\sphericalangle TQR$, $\sphericalangle PRS$, $\sphericalangle UQS$?

b) Jmenujte dva obvodové úhly nad obloukem

PUT, USR, QRS, UPQ!

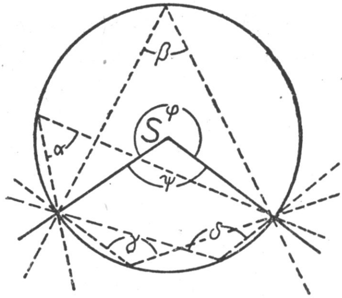
c) Jmenujte dva obvodové úhly, které leží nad týmž obloukem jako $\sphericalangle UPS$! Leží $\sphericalangle UTS$ nad týmž obloukem jako $\sphericalangle UPS$?



Obr. 47.

82. (Viz obr. 48, který **není** přesně rýsován.)

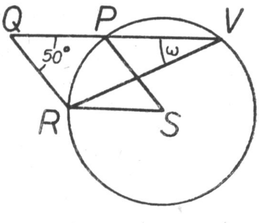
a) Je-li $\psi = 130°$, určete α, β.
b) Je-li $\beta = \ 74°$, určete ψ, α.
c) Je-li $\alpha = 66°$, určete β.
d) Je-li $\varphi = 230°$, určete γ, δ.
e) Je-li $\alpha = 64°$, určete ψ, potom φ a δ. Čemu se rovná $\alpha + \delta$?
f) Je-li $\psi = 126°$, určete β a δ. Čemu se rovná $\beta + \delta$?
g) Je-li $\alpha = \ 58°$, určete δ.
h) Je-li $\gamma = 110°$, určete β.



Obr. 48.

83. Budiž k kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Je-li úhel α ostrý, leží střed S kružnice k na téže straně od přímky BC jako bod A; je-li úhel α tupý, leží S na opačné straně od přímky BC než A. Podobně je tomu s úhly β, γ. Proto S leží uvnitř ostroúhlého trojúhelníka ABC, ale vně tupoúhlého trojúhelníka ABC.

84. V obr. 49 S je střed kružnice, $PQRS$ je rovnoběžník. Určete úhel ω.



Obr. 49.

85. Rovnoramenný trojúhelník ABC má proti základně AB úhel 32°. Určete středové úhly nad oblouky, na které strany trojúhelníka rozdělí opsanou kružnici.

II. Obvodové úhly nad touž tětivou.

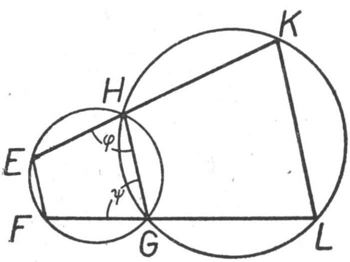
86. AB, CD jsou dvě k sobě kolmé tětivy kružnice k. Je-li $\sphericalangle BAC = 35°$, určete $\sphericalangle ABD$.

87. $HKLM$ je tětivový čtyrúhelník; HK je průměr opsané kružnice. Je-li $\sphericalangle HML = 127°$, určete $\sphericalangle LHK$.

88. Úhlopříčky tětivového čtyrúhelníka $XYZT$ se protnou v bodě N. Je-li $\sphericalangle YXZ = 42°$, $\sphericalangle YNZ = 114°$, $\sphericalangle XTY = 33°$, určete $\sphericalangle YZT$.

89. Šestiúhelník $ABCDEF$ je vepsán do kružnice. Dokažte, že úhly při vrcholech A, C, E dohromady dají úhel plný. [Veďte úhlopříčku AD.]

90. V obr. 50 vyjádřete všecky úhly čtyrúhelníka $EFLK$ pomocí úhlů φ, ψ. Z výsledku odvoďte, že musí býti $EF \parallel KL$.



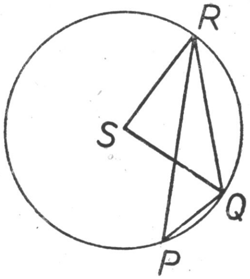
Obr. 50.

91. Úhlopříčky tětivového čtyrúhelníka $XYZT$ se protnou v bodě N. Dokažte, že úhly trojúhelníka XYN jsou rovné úhlům trojúhelníka TZN.

92. $ABCD$ je rovnoběžník. Kružnice opsaná trojúhelníku ABC protne přímku CD (v bodě C a mimoto) v bodě E. Dokažte, že trojúhelník ADE je rovnoramenný.

93. Dvě kružnice se protnou v bodech H, K. Jsou-li HL, HM průměry kružnic, dokažte, že body K, L, M leží na přímce. [Veďte HK.]

94. V obr. 51 S je střed kružnice. Je-li $\sphericalangle RPQ = \sphericalangle SRQ$, dokažte, že $\sphericalangle RSQ = 90°$.



Obr. 51.

95. AB je tětiva kružnice se středem S. Kružnice nad průměrem AS protne přímku AB v bodě C. Dokažte, že C je střed úsečky AB.

96. Zvolte si ostroúhlý trojúhelník EFG a zvolte si libovolný bod L na straně EF. Dále určete na straně EG bod H a na straně FG bod K tak, aby bylo

$$\sphericalangle ELH = 60°, \quad \sphericalangle FLK = 60°.$$

Trojúhelníku HKL opište kružnici, která protne přímku EF (v bodě L a mimoto) v bodě M. Dokažte, že trojúhelník HKM je rovnostranný.

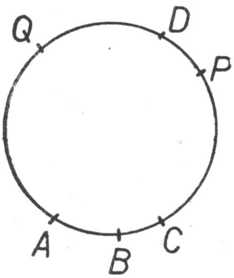
III. Úhly nad rovnými oblouky.

97. V obr. 52 oblouk AB je $\frac{1}{10}$ kružnice, oblouk AC je $\frac{1}{6}$ kružnice, oblouk APD je $\frac{5}{12}$ kružnice.

a) Určete úhly

$$\sphericalangle AQB, \quad \sphericalangle BQC, \quad \sphericalangle APD, \quad \sphericalangle CPD.$$

b) Oblouk AQ budiž dvojnásobek oblouku QD. Určete $\sphericalangle QAD$.



Obr. 52.

98. $EFGHK$ je pravidelný pětiúhelník. Určete úhly trojúhelníka EFH.

99. Určete úhly trojúhelníka, který dostanete, spojíte-li na hodinách číslice 2, 6, 9.

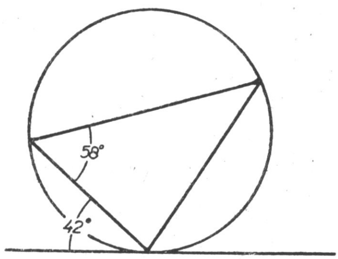
100. Dokažte, že na hodinách spojnice číslic 1, 4 stojí kolmo na spojnici číslic 2, 9.

101. Budiž k kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Průsečíky kružnice k s osou úsečky AB si označte H, K; při tom K budiž na téže straně od přímky AB jako C. Dokažte, že CH je osa úhlu γ a že CK je osa vnějšího úhlu při vrcholu C.

IV. Úsekové úhly.

102. Určete všecky úhly, které vidíte v obr. 53!

103. Určete všecky úhly, které vidíte v obr. 54!

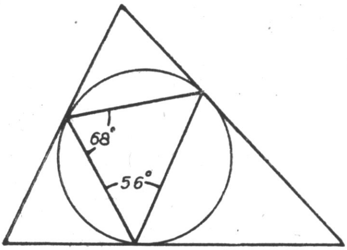


Obr. 53.

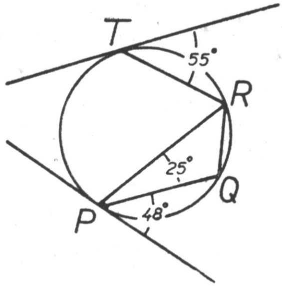
104. Určete všecky úhly čtyrúhelníka $PQRT$ v obr. 55!

105. V trojúhelníku ABC je $\beta = 2\alpha$. Dokažte, že tečna opsané kružnice v bodě C je rovnoběžná s osou úhlu β!

106. N je průsečík úhlopříček tětivového čtyrúhelníka $XYZT$; k je kružnice opsaná trojúhelníku XYN. Dokažte, že tečna kružnice k v bodě N je rovnoběžná s přímkou TZ!



Obr. 54.

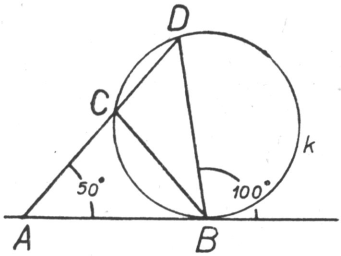


Obr. 55.

107. Dokažte, že v obr. 56 je

a) $\overline{AC} = \overline{BC}$;

b) $\overline{CD}$ rovné poloměru kružnice k.



Obr. 56.

108. Zvolte si přímku $EFGH$ tak, aby bylo $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH}$ a sestrojte rovnostranný trojúhelník FGK. Dokažte, že přímka EK je tečnou v bodě K ke kružnici opsané trojúhelníku FHK.

V. Konstrukce trojúhelníka.

109. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bylo

a) $b = 5$ cm, $c = 4$ cm, $\beta = 75°$;

b) $b = 4$ cm, $c = 6$ cm, $\beta = 30°$.

Proveďte konstrukci tak, že si napřed zvolíte stranu b v určité poloze.

110. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bylo $c = 5$ cm, $\gamma = 50°$ a aby vzdálenost vrcholu C od přímky AB byla 4 cm.

111. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bylo $a = 4$ cm, $\alpha = 70°$ a aby těžnice příslušná straně a měla délku 3 cm.

VI. Geometrická místa.

112. Na kružnici k jsou pevně zvoleny dva body A, B. Bod X probíhá kružnici k; při každé poloze bodu X leží bod Y na prodloužení úsečky AX za bod X a jest $\overline{XY} = \overline{XB}$. Určete geometrické místo bodu Y.

113. Jsou dány dva body K, L a úhel α. Bod U se pohybuje tak, že je stále $\sphericalangle KUL = \alpha$. Bod V je střed kružnice připsané trojúhelníku KLU podél strany KL. Určete geometrické místo bodu V.

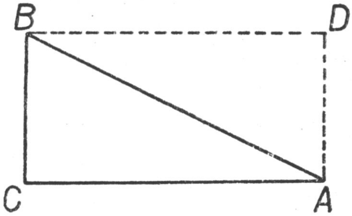
114. Kružnice k, m se protínají v bodech P, Q. Bod Z probíhá kružnici k; přímka PZ protne kružnici m podruhé v bodě H; přímka QZ protne kružnici m podruhé v bodě K; L je průsečík přímek PK, QH. Určete geometrické místo bodu L.

115. ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou BC. Určete geometrické místo toho bodu X, pro který platí $\sphericalangle AXB = \sphericalangle AXC$. [Toto geometrické místo se skládá z jedné celé přímky, z části jiné přímky a z oblouku kružnice.]

§ 4. Obsah mnohoúhelníka. Povrch a objem kolmého hranolu.

Víte, že obsah obdélníka dostaneme, znásobíme-li oba rozměry. Při tom si musíme zvoliti určitou jednotku délky a vyjádřiti oba rozměry v téže jednotce; obsah pak vyjde v plošné jednotce příslušné zvolené jednotce délky. Toto důležité upozornění platí také pro výpočet obsahů jiných rovinných obrazců a je nutno míti je stále na paměti, ač nebude v dalším už výslovně uváděno.

Začněme pravoúhlým trojúhelníkem. V obr. 57 máme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Zvolíme si určitou jednotku délky a označíme si a, b délky odvěsen BC, AC, vyjádřené v této jednotce. Vedeme-li bodem B rovnoběžku s přímkou AC a bodem A rovnoběžku s přímkou BC, protnou se tyto rovnoběžky v bodě D a vznikne nám obdélník $ACBD$. Trojúhelníky ABC, ABD jsou shodné (proč?). Tedy mají stejný obsah. Z toho plyne, že obsah trojúhelníka ABC je polovina obsahu obdélníka $ACBD$, jehož rozměry jsou a, b. Tedy obsah pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami a, b je



Obr. 57.

$$\frac{1}{2}ab \quad \text{neboli} \quad \frac{a}{2}b \quad \text{neboli} \quad a\frac{b}{2}.$$

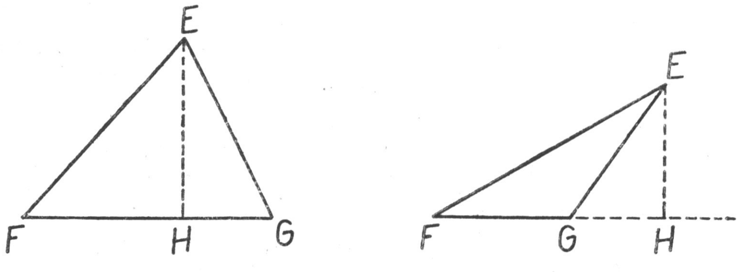
V obr. 58a, 58b máme obecný trojúhelník EFG. V obou obrazcích je vyznačena výška EH trojúhelníka EFG příslušná straně FG.

Slovem **výška** (příslušná straně FG) budeme však nyní rozuměti také délku $\overline{EH}$ úsečky EH. Trojúhelník EFG v obr. 58a je výškou EH rozdělen na dva pravoúhlé trojúhelníky a obsah trojúhelníka EFG dostaneme, sečteme-li obsahy obou pravoúhlých trojúhelníků. Položme

$$\overline{FG} = s, \quad \overline{EH} = v;$$

dále budiž

$$\overline{FH} = s_1, \quad \overline{GH} = s_2, \quad \text{tedy} \quad s_1 + s_2 = s.$$



Obr. 58a. Obr. 58b.

Pravoúhlý trojúhelník EFH má obsah $s_1 \dfrac{v}{2}$; pravoúhlý trojúhelník EGH má obsah $s_2 \dfrac{v}{2}$; tedy obsah trojúhelníka EFG je

$$s_1 \frac{v}{2} + s_2 \frac{v}{2} = (s_1 + s_2) \frac{v}{2} = s \frac{v}{2}.$$

K témuž výsledku dospějeme u trojúhelníka EFG z obr. 58b, jehož obsah je patrně rovný rozdílu obsahů pravoúhlých trojúhelníků EFH, EGH. Zase položme

$$\overline{FG} = s, \quad \overline{EH} = v;$$

dále budiž

$$\overline{FH} = s_1, \quad \overline{GH} = s_2, \quad \text{tedy} \quad s_1 - s_2 = s.$$

Obsah trojúhelníka EFG je

$$s_1 \frac{v}{2} - s_2 \frac{v}{2} = (s_1 - s_2) \frac{v}{2} = s \frac{v}{2}.$$

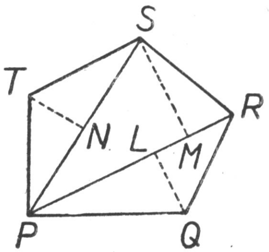
Výsledek: Je-li s délka jedné strany trojúhelníka a je-li v

příslušná výška, obsah trojúhelníka je

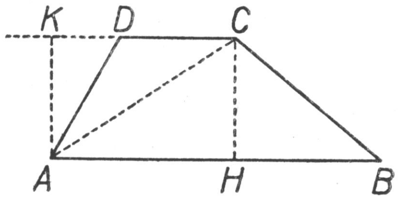
$$\frac{1}{2}sv \quad \text{neboli} \quad \frac{s}{2}v \quad \text{neboli} \quad s\frac{v}{2}.$$

Slovy: obsah trojúhelníka je poloviční součin strany s příslušnou výškou, neboli součin poloviny strany s příslušnou výškou, neboli součin strany s polovinou příslušné výšky.

Jakmile umíme vypočísti obsah trojúhelníka, můžeme také vypočísti obsah libovolného mnohoúhelníka, neboť každý mnohoúhelník



Obr. 59.



Obr. 60.

dá se rozdělit na trojúhelníky. Na př. pětiúhelník $PQRST$ v obr. 59 je rozložen na tři trojúhelníky a obsah každého z nich se dá určit, změříme-li jednu stranu, jakož i příslušnou výšku. Obsah pětiúhelníka $PQRST$ je polovina výrazu

$$\overline{PR}\,.\,\overline{QL} + \overline{PR}\,.\,\overline{SM} + \overline{PS}\,.\,\overline{TN}.$$

Obsah každého čtyrúhelníka se dá určiti tím, že si jej některou úhlopříčkou rozdělíme na dva trojúhelníky. U lichoběžníka vede tento postup k výsledku, který si zapamatujte. V obr. 60 máme lichoběžník $ABCD$. Položme

$$\overline{AB} = s_1, \quad \overline{CD} = s_2$$

a označme si v vzdálenost obou rovnoběžek AB, CD, takže v obr. 60 je

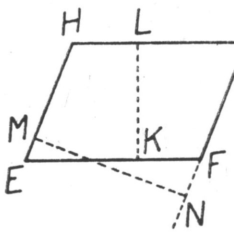
$$\overline{CH} = v, \quad \overline{AK} = v.$$

V trojúhelníku ABC je CH výškou příslušnou straně AB a proto jeho obsah je $\frac{s_1}{2}v$; v trojúhelníku ACD je AK výškou příslušnou straně

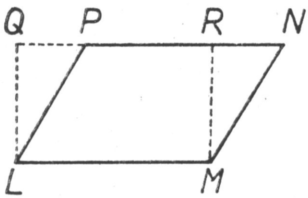
CD a proto jeho obsah je $\frac{s_2}{2} v$. Tedy obsah našeho lichoběžníka je

$$\frac{s_1}{2} v + \frac{s_2}{2} v = \frac{s_1 + s_2}{2} v.$$

Obě rovnoběžné strany lichoběžníka se obyčejně nazývají jeho základnami a vzdálenost obou rovnoběžek se obyčejně nazývá výškou lichoběžníka. Proto můžeme takto vysloviti výsledek, ke kterému jsme dospěli: Obsah lichoběžníka je součin polovičního součtu obou základen s výškou.



Obr. 61.



Obr. 62.

Při odvození vzorce pro obsah lichoběžníka $ABCD$ jsme užili té okolnosti, že strany AB, CD jsou mezi sebou rovnoběžné, ale neužili jsme té okolnosti, že strany AC, BD nejsou mezi sebou rovnoběžné. Proto výsledek, ke kterému jsme dospěli, platí nejen pro lichoběžník, nýbrž také pro rovnoběžník. Dokonce ho můžeme užíti na rovnoběžník dvojím způsobem. Obsah rovnoběžníka $EFGH$ z obr. 61 můžeme určiti tak, že za základny považujeme strany EF, GH; příslušná výška je v obr. 61 označena $\overline{KL}$. Je-li $\overline{EF} = a$, je také $\overline{GH} = a$, takže poloviční součet obou základen je zase a. Tedy obsah rovnoběžníka $EFGH$ v obr. 61 je součin $\overline{EF} \,.\, \overline{KL}$. Druhým způsobem najdeme týž obsah, považujeme-li strany EH, FG za základny; obsah vyjde ve tvaru součinu $\overline{EH} \,.\, \overline{MN}$. U rovnoběžníka máme dvě výšky; jednou výškou je vzdálenost jednoho páru rovnoběžných stran (měřená na kterékoli společné kolmici), druhou výškou je vzdálenost druhého páru rovnoběžných stran (zase měřená na kterékoli společné kolmici); výška příslušná určité straně je vzdálenost této strany od strany protější. Výsledek, ke kterému jsme dospěli, dá se tedy vysloviti takto: Obsah rovnoběžníka je součin kterékoli strany s příslušnou výškou.

Právě vyslovený výsledek dá se odvoditi také jinak (viz obr. 62). Je-li dán rovnoběžník $LMNP$, spusťme s bodů L, M kolmice na přímku NP a označme Q, R jejich paty. Vznikne nám obdélník $LMRQ$. Tento obdélník dostaneme z rovnoběžníka $LMNP$, když napřed připojíme trojúhelník LPQ a potom ubereme trojúhelník MNR. Avšak $LPQ \cong MNR$ (proč?). Tedy obsah rovnoběžníka $LMNP$ je roven obsahu obdélníka $LMRQ$ neboli je roven součinu $\overline{LM} \,.\, \overline{LQ}$ a to jsme chtěli odvoditi.

Budiž dán jakýkoli kvádr. Zvolme si určitou jednotku délky a označme a délku, b šířku a c výšku našeho kvádru, vyjádřené ve zvolené jednotce. Víme, že objem kvádru, vyjádřený v objemové jednotce příslušné zvolené jednotce délky, rovná se součinu abc. Tento součin můžeme počítati tak, že napřed znásobíme mezi sebou čísla a, b a co vyjde, znásobíme číslem c. Avšak ab je obsah podstavy (horní nebo dolní, neboť obě podstavy jsou shodné) vyjádřený v plošné jednotce příslušné zvolené jednotce délky. Tedy objem kvádru dostaneme, znásobíme-li obsah podstavy výškou.

Výsledek, k němuž jsme dospěli, je správný nejen pro kvádr, nýbrž pro libovolný kolmý hranol. Tedy: **objem kolmého hranolu dostaneme, násobíme-li obsah podstavy výškou hranolu.** Slovem podstava zase můžeme rozuměti buďto podstavu dolní nebo také horní, neboť obě podstavy jsou shodné. Také o volbě jednotek délky, obsahu a objemu platí stále totéž, co jsme si právě řekli u kvádru.

Důkaz vzorce pro objem kolmého hranolu provedeme napřed pro případ, že podstava je pravoúhlý trojúhelník. Mysleme si, že pravoúhlý trojúhelník ABC v obr. 57 je dolní podstavou kolmého hranolu, jehož výška je v. Je-li pravoúhlý trojúhelník ABD v obr. 57 dolní podstavou kolmého hranolu se stejnou výškou, tvoří oba ty trojboké hranoly dohromady kvádr, jehož dolní podstavou je obdélník $ACBD$. Je-li P obsah tohoto obdélníka, víme, že objem kvádru je Pv. Avšak oba naše trojboké hranoly jsou shodné, takže objem každého z nich je polovinou objemu kvádru. Tedy objem hranolu s podstavou ABC je součin $\frac{1}{2}P \,.\, v$, a to souhlasí s výše vysloveným obecným vzorcem, neboť $\frac{1}{2}P$ je obsah trojúhelníka ABC.

Dále si mysleme, že trojúhelník EFG v obr. 58a nebo v obr. 58b je dolní podstavou kolmého hranolu s výškou v. Budiž P obsah trojúhelníka EFG; P_1 budiž obsah trojúhelníka EFH, P_2 budiž obsah trojúhelníka EGH. V případě obr. 58a se náš hranol skládá z hranolu s dolní podstavou EFH a s hranolu s dolní podstavou EGH, při čemž výška obou hranolů je v. Protože trojúhelníky EFH, EGH jsou pravoúhlé, víme, že objemy hranolů nad nimi postavených jsou P_1v, P_2v. Tedy objem hranolu postaveného nad trojúhelníkem EFG je

$$P_1v + P_2v = (P_1 + P_2)\,v = Pv$$

v souhlase s výše vysloveným vzorcem. K témuž výsledku dojdeme podobnou úvahou také v případě obr. 58b, kdy objem hranolu postaveného nad trojúhelníkem EFG vyjde ve tvaru

$$P_1v - P_2v = (P_1 - P_2)\,v = Pv.$$

Nyní si snadno rozšíříme náš výsledek také na kolmý hranol, jehož podstavou je libovolný mnohoúhelník. Budiž na př. pětiúhelník $PQRST$ v obr. 59 dolní podstavou kolmého hranolu s výškou v. Je-li P obsah pětiúhelníka a jsou-li P_1, P_2, P_3 obsahy trojúhelníků PQR, PRS, PST, je objem našeho hranolu roven

$$P_1v + P_2v + P_3v = (P_1 + P_2 + P_3)\,v = Pv.$$

Povrch kolmého hranolu je zřejmě dán vzorcem

$$2P + Q,$$

kde P znamená obsah podstavy a Q znamená plášť, t. j. součet obsahů všech pobočných stěn. **Plášť kolmého hranolu je součin obvodu podstavy s výškou.** Odvoďme si to třeba pro hranol s výškou v postavený nad pětiúhelníkem $PQRST$ v obr. 59. Každá pobočná stěna je obdélník, jehož obsah je součin základny s výškou. Proto je

$$Q = \overline{PQ}\,.\,v + \overline{QR}\,.\,v + \overline{RS}\,.\,v + \overline{ST}\,.\,v + \overline{TP}\,.\,v =$$
$$= (\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS} + \overline{ST} + \overline{TP})\,v = ov,$$

kde o znamená obvod podstavy.

Cvičení k § 4.

I. Obsah mnohoúhelníka.

116. Sestrojte si trojúhelník ABC tak, aby bylo $\overline{AB} = 85$ mm, $\overline{BC} = 72$ mm, $\overline{AC} = 9$ cm. Změřte pečlivě všecky tři výšky a určete trojím způsobem obsah trojúhelníka. Souhlasí navzájem všecky tři výsledky?

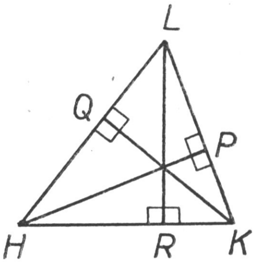
117. Sestrojte si rovnoběžník $DEFG$ tak, aby bylo $\overline{DE} = 63$ mm, $\overline{EF} = 8$ cm, $\sphericalangle DEF = 75°$. Změřte pečlivě obě výšky a určete dvojím způsobem obsah rovnoběžníka.

118. (Viz obr. 63, který vysvětluje označení; HP, KQ, LR jsou výšky trojúhelníka HKL.)

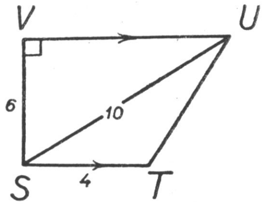
a) Je-li $\overline{HK} = 12$ cm, $\overline{LR} = 18$ cm, čemu se rovná obsah trojúhelníka HKL?

b) Má-li HKL obsah $112\ \text{cm}^2$ a je-li $\overline{KL} = 14$ cm, čemu se rovná $\overline{HP}$?

c) Je-li $\overline{HP} = 5$ cm, $\overline{HL} = 6$ cm, $\overline{KQ} = 4$ cm, čemu se rovná $\overline{KL}$?



Obr. 63.



Obr. 64.

119. Narýsujte si podle obr. 64 vlastní obrazec, ve kterém je jednotka 1 cm. Vypočtěte, jaký je ve vašem obrazci obsah trojúhelníka STU. Potom vypočtěte, jaká má býti ve vašem obrazci vzdálenost bodu T od přímky SU a přeměřte tuto vzdálenost.

120. a) Narýsujte si kosočtverec $ABCD$ tak, aby bylo $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{BD} = 6$ cm a určete jeho obsah.

b) Dokažte, že obsah kosočtverce je polovina součinu obou úhlopříček.

c) Kosočtverec má obsah $196\ \text{cm}^2$; jedna úhlopříčka je polovinou druhé. Určete délky obou úhlopříček.

121. Délky základen lichoběžníka jsou 34,8 cm; 25,6 cm. Výška lichoběžníka je 18,4 cm. Určete obsah lichoběžníka.

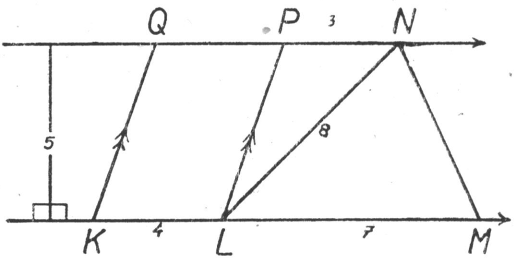
122. Délky základen lichoběžníka $EFGH$ jsou $\overline{EF} = 14$ cm, $\overline{GH} = 6$ cm; obsah lichoběžníka je $72\ \text{cm}^2$. Určete obsah trojúhelníka FGH.

123. Narýsujte si podle obr. 65 vlastní obrazec, ve kterém je jednotka 1 cm. Vypočtěte obsah lichoběžníka $KMNQ$. Dále vypočtěte obsah rovnoběžníka $KLPQ$ a trojúhelníků LMN, LPN. Určete, jaká má býti vzdálenost bodu L od přímky KQ, dále vzdálenost bodů M a P od přímky LN a přeměřte všecky tři vzdálenosti.

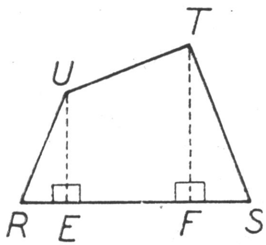
124. Rovnoběžník $ABCD$ má obsah $23{,}52\ \text{dm}^2$; jest $\overline{AB} = 49$ cm, $\overline{AD} = 56$ cm. Vypočtěte obě výšky rovnoběžníka.

125. (Viz obr. 66, který jen vysvětluje označení.) Je-li $\overline{EU} = 238$ m, $\overline{FT} = 316$ m, $\overline{RE} = 95$ m, $\overline{EF} = 174$ m, $\overline{FS} = 82$ m, určete obsah čtyrúhelníka $RSTU$.

126. Narýsujte si libovolný pětiúhelník (dosti veliký) a určete aspoň dvojím způsobem jeho obsah.



Obr. 65.



Obr. 66.

II. Kolmé hranoly. (Viz též cvič. k § 5, **174** až **177.**)

127. Podstava kolmého hranolu je lichoběžník $ABCD$ znázorněný v obr. 60; výška hranolu je 8 dm. Je-li $\overline{AB} = 7$ dm, $\overline{CD} = 4$ dm, $\overline{AD} = 35$ cm, $\overline{BC} = 45$ cm, $\overline{CH} = 3$ dm, určete povrch a objem hranolu.

128. Nádoba má tvar kolmého hranolu, jehož podstava má obsah 8,4 dm^2. V nádobě je 5,46 l vody. Do jaké výše sahá voda v nádobě?

129. Roura má tvar kolmého hranolu s obsahem základny 42 cm^2. Rourou protéká voda rychlostí 1,25 m za vteřinu. Kolik vody vyteče za minutu?

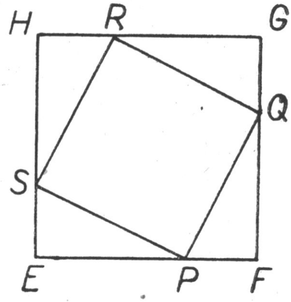
130. Kolmý hranol má povrch 13,25 m^2 a objem 5,625 m^3; výška hranolu je 2,5 m. Určete obvod a obsah podstavy.

§ 5. Pythagorova věta.

V tomto paragrafu si odvodíme vztah mezi délkami všech tří stran pravoúhlého trojúhelníka, který je jedním z nejdůležitějších vztahů celé geometrie. Říká se mu **Pythagorova věta,** protože prý ji objevil Pythagoras, matematik a filosof z řeckého ostrova Samu, který žil v 6. století př. Kr. Kolem r. 540 př. Kr. se usadil Pythagoras v jižní Italii a založil proslulou školu, která dala Řekům mnoho objevů geometrických a jiných. Žáci Pythagorovi se rozptýlili po smrti svého slavného učitele a roznesli tak známost jeho jména po celém tehdy známém světě.

Abychom došli k Pythagorově větě, označme si jako obvykle písmeny a, b délky obou odvěsen a písmenem c délku přepony. Všecky tři délky a, b, c buďtež vyjádřeny v téže délkové jednotce. Je nám již známo, že číslo c je menší nežli součet $a + b$ a že totéž číslo c je větší nežli rozdíl $a - b$. (Není-li $a = b$, volme označení tak, aby bylo $a > b$.) Tedy číslo c^2 je menší než $(a + b)^2$ a číslo c^2 je větší než $(a - b)^2$.

K Pythagorově větě můžeme dospěti tak, že zkoumáme, oč je číslo c^2 menší než $(a + b)^2$. Avšak $(a + b)^2$ znamená obsah čtverce s délkou strany $a + b$ a podobný význam má c^2. Proto si sestrojíme (viz obr. 67) čtverec $EFGH$ s délkou strany $a + b$. Na stranách čtverce si určíme body P, Q, R, S tak, aby bylo



Obr. 67.

$$\overline{EP} = \overline{FQ} = \overline{GR} = \overline{HS} = a,$$

takže bude také

$$\overline{PF} = \overline{QG} = \overline{RH} = \overline{SE} = b.$$

Narýsujeme-li si úsečky PQ, QR, RS, SP, vzniknou nám především čtyři pravoúhlé trojúhelníky, jejichž odvěsny mají délky a, b, takže přepona každého z nich má délku c. Dále nám vznikne čtyrúhelník $PQRS$, o kterém z názoru soudíme, že je to asi čtverec. Skutečně už víme, že všecky strany čtyrúhelníka $PQRS$ mají touž délku c. Zbývá dokázati, že všecky úhly našeho čtyrúhelníka jsou pravé. Všimněme si třeba úhlu při vrcholu P. V pravoúhlém trojúhelníku PSE máme při vrcholech P, S dva doplňkové úhly. Avšak $PSE \cong QPF$ (proč?), takže úhel trojúhelníka QPF při vrcholu P rovná se úhlu trojúhelníka PSE při vrcholu S. Tedy

$$\sphericalangle QPF, \quad \sphericalangle SPE$$

jsou dva doplňkové úhly. Avšak velikost úhlu $\sphericalangle SPQ$ dostaneme, odečteme-li od přímého úhlu oba právě zmíněné úhly. Tedy $\sphericalangle SPQ = 90°$, což jsme chtěli dokázati.

Tedy máme čtverec $EFGH$ rozložen na čtverec $PQRS$ a na čtyři pravoúhlé trojúhelníky. Každý z těch trojúhelníků má obsah $\frac{1}{2}ab$, takže jejich celkový obsah je $4 \cdot \frac{1}{2}ab$ neboli $2ab$. Větší čtverec má obsah $(a + b)^2$, menší c^2. Proto musí býti

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab.$$

Ale z algebry je vám známo, že

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab.$$

Porovnáním dostaneme vzorec

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

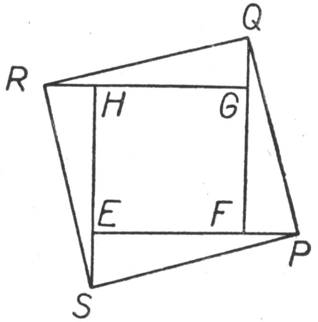
který není nic jiného než Pythagorova věta.

K Pythagorově větě lze také dospěti zkoumáním, oč je číslo c^2 větší než $(a - b)^2$. Sestrojíme si nyní (viz obr. 68) čtverec $EFGH$ s délkou strany $a - b$ (předpokládajíce, že je $a > b$). Na prodloužení strany EF za vrchol F, strany FG za vrchol G atd. si určeme body P, Q, R, S tak, aby bylo

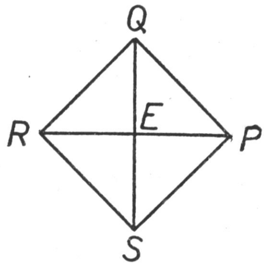
$$\overline{EP} = \overline{FQ} = \overline{GR} = \overline{HS} = a,$$

tedy také

$$\overline{FP} = \overline{GQ} = \overline{HR} = \overline{ES} = b.$$



Obr. 68.



Obr. 69.

Narýsujeme-li si zase úsečky PQ, QR, RS, SP, vzniknou nám zase čtyři pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami a, b a mimoto čtyrúhelník $PQRS$, o němž si snadno dokážeme, že to je čtverec s délkou strany c. Tedy čtverec $EFGH$ s obsahem $(a - b)^2$ dostaneme, když od čtverce $PQRS$ s obsahem c^2 ubereme čtyři trojúhelníky s celkovým obsahem $2ab$. Proto je

$$(a - b)^2 = c^2 - 2ab.$$

Porovnáme-li se vzorcem

$$(a - b)^2 = (a^2 + b^2) - 2ab$$

známým z algebry, dostaneme znovu Pythagorovu větu $a^2 + b^2 = c^2$.

Prvý z obou vyložených důkazů Pythagorovy věty platí beze změny i pro případ $a = b$. Ale druhý důkaz vyžaduje v tomto případě malé úpravy, neboť čtverec $EFGH$ z obr. 68 se v případě $a = b$ redukuje na jediný bod, který je v obr. 69 označen písmenem E. Je lehké sledovat, jak je nutné upravit konstrukci z obr. 68 pro případ $a = b$. Narýsujeme si (viz obr. 69) čtyři polopřímky se společným počátkem E tak, aby nám vznikly čtyři pravé úhly. (Tyto polopřímky zastupují prodloužení strany EF čtverce $EFGH$ za bod F, strany FG za bod G atd.) Na ty polopřímky naneseme od bodu E délku

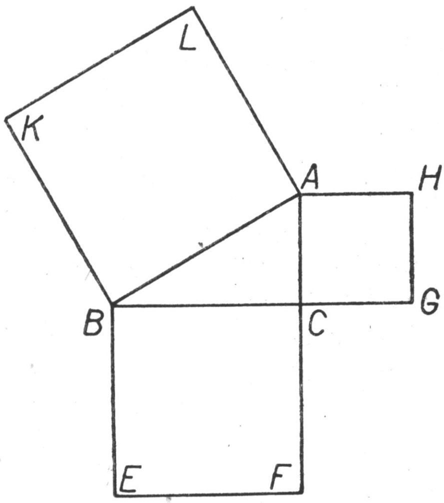
$$\overline{EP} = \overline{EQ} = \overline{ER} = \overline{ES} = a = b$$

a vznikne nám čtverec s délkou strany c, který je rozdělen na čtyři pravoúhlé trojúhelníky, z nichž každý má obsah $\frac{1}{2}a^2$. Proto je $c^2 = 2a^2$ a to je Pythagorova věta pro případ $a = b$.

Podle Pythagorovy věty můžeme počítati délku třetí strany pravoúhlého trojúhelníka, známe-li délky ostatních dvou stran. Obecně je

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2},$$

ale je zbytečné učiti se zpaměti těmto třem vzorcům. Stačí si dobře zapamatovati základní tvar $a^2 + b^2 = c^2$. Protože délky stran pravoúhlého trojúhelníka je často vhodné označiti jinými písmeny než právě a, b, c, je dobře pamatovati si Pythagorovu větu ve slovním znění. Obvykle se Pythagorova věta uvádí v tomto znění: **Čtverec nad přeponou rovná se součtu čtverců nad oběma odvěsnami.** Slovo čtverec je zde možno chápati aritmeticky jako „druhou mocninu“ nebo také geometricky jako „obsah čtverce“. Předložka „nad“ v obvyklém slovním znění Pythagorovy věty odpovídá geometrickému chápání slova čtverec. Vlastně toto znění říká, že



Obr. 70.

v obr. 70 obsah čtverce $ABKL$ se rovná součtu obsahu čtverce $BCFE$ s obsahem čtverce $ACGH$.

Víme, že u pravoúhlého trojúhelníka můžeme, známe-li dvě ze tří stran a, b, c, počítati třetí podle Pythagorovy věty. Ve spojení s jinými poučkami můžeme Pythagorovy věty užíti i k jiným výpočtům: Všimneme si na př. výpočtu výšky. **Výškou pravoúhlého trojúhelníka** rozumíme obyčejně výšku příslušnou přeponě (na př. délku $\overline{CH}$ v obr. 71), protože výška příslušná odvěsně splyne s druhou odvěsnou. Označíme-li výšku písmenem v, je obsah trojúhelníka ABC v obr. 71

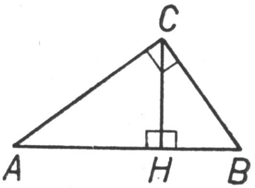
$$\text{jednak } \tfrac{1}{2}cv, \quad \text{jednak } \tfrac{1}{2}ab.$$

Proto platí u pravoúhlého trojúhelníka vzorec

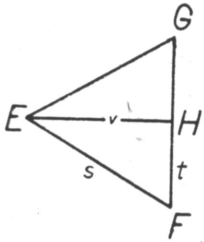
$$cv = ab.$$

Známe-li dvě strany pravoúhlého trojúhelníka, vypočteme si třetí podle Pythagorovy věty, načež můžeme vypočísti výšku v takto:

$$v = \frac{ab}{c}.$$



Obr. 71.



Obr. 72.

Pythagorovy věty můžeme užíti také na př. u obdélníka, neboť úhlopříčka rozdělí obdélník na dva pravoúhlé trojúhelníky. Jsou-li rozměry obdélníka a, b a je-li u délka úhlopříčky, je patrně

$$u = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Pythagorovy věty můžeme užíti také na rovnoramenný trojúhelník, neboť víme (viz § 1, obr. 4), že výška příslušná základně rozdělí rovnoramenný trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky, z nichž každý má za přeponu rameno daného trojúhelníka a za odvěsny polovinu základny a výšku příslušnou základně.

Co jsme si řekli o rovnoramenném trojúhelníku, platí také pro trojúhelník rovnostranný. V obr. 72 máme rovnostranný trojúhelník EFG rozdělený výškou na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky EFH, EGH. Položme

$$\overline{EF} = s, \quad \overline{EH} = v, \quad \overline{FH} = t.$$

Víme, že $s = 2t$. Podle Pythagorovy věty je však $t^2 + v^2 = s^2$. Ale $s^2 = (2t)^2 = 4t^2$, tedy $t^2 + v^2 = 4t^2$, z čehož $v^2 = 3t^2$, tedy $v = \sqrt{3} \, . \, t$ neboli

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} s,$$

což je vzorec, podle kterého můžeme počítati výšku v rovnostranného trojúhelníka, známe-li délku strany s. (Délky všech tří výšek rovnostranného trojúhelníka jsou si ovšem rovny.)

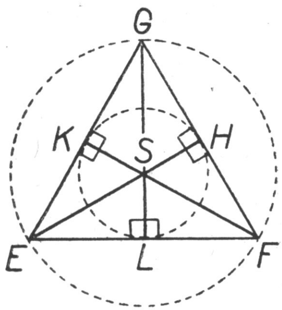
Úhly trojúhelníka EFH jsou 30°, 60°, 90°; proti nim leží strany, jejichž délky jsme označili t, v, s. Právě jsme odvodili důležitý vztah

$$t : v : s = 1 : \sqrt{3} : 2;$$

tento vztah platí pro strany každého trojúhelníka s úhly 30°, 60°, 90°. Neboť je-li dán takový trojúhelník EFH (viz obr. 72) a připojíme-li k němu trojúhelník souměrně sdružený podle osy EH, dostaneme rovnostranný trojúhelník, ve kterém je EH výškou.

V obr. 73 máme znovu rovnostranný trojúhelník EFG, ve kterém jsou tentokrát vyznačeny všecky tři výšky EH, FK, GL. Víte, že tyto tři výšky se protínají v jednom bodě, který je v obr. 73 označen S. U rovnostranného trojúhelníka leží pata každé výšky uprostřed příslušné strany, takže bod S je zároveň těžištěm trojúhelníka. Z toho plyne, že

$$\overline{SE} = \overline{SF} = \overline{SG} = \tfrac{2}{3}v,$$
$$\overline{SH} = \overline{SK} = \overline{SL} = \tfrac{1}{3}v,$$



Obr. 73.

kde v znamená společnou délku všech tří výšek. Proto je bod S středem kružnice opsané i středem kružnice vepsané, poloměr opsané kružnice je

$$\tfrac{2}{3}v = \frac{\sqrt{3}}{3} s$$

a poloměr vepsané kružnice je

$$\tfrac{1}{3}v = \frac{\sqrt{3}}{6} s,$$

kde s znamená délku strany.

V předcházejícím se nám několikrát vyskytlo číslo $\sqrt{3}$. Pamatujte si, že zaokrouhleno na čtyři platné cifry je

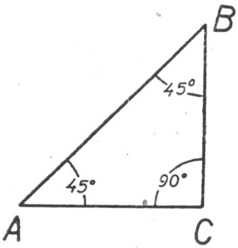
$$\sqrt{3} \doteq 1{,}732.$$

V obr. 74 je trojúhelník ABC s úhly 45°, 45°, 90°, tedy pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník. Z Pythagorovy věty sami snadno odvodíte, že strany našeho trojúhelníka jsou v poměru

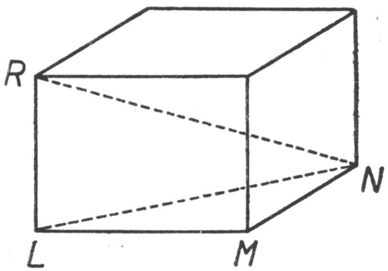
$$1 : 1 : \sqrt{2}.$$

Pamatujte si také tento výsledek a rovněž si pamatujte, že zaokrouhleno na čtyři platné cifry je

$$\sqrt{2} \doteq 1{,}414.$$



Obr. 74.



Obr. 75.

Pythagorovy věty můžeme užíti u rozmanitých úloh o kružnicích. Budiž na př. dán vně kružnice k (střed S, poloměr r) bod A ve vzdálenosti d od středu (viz obr. 10). Z bodu A lze ke kružnici k vésti dvě tečny; jsou-li T_1, T_2 jejich body dotyku, víme, že obě úsečky AT_1, AT_2 jsou stejně dlouhé. Délku t kterékoli z těchto dvou úseček nazýváme krátce d é l k o u t e č n y z b o d u A k e k r u ž n i c i k. V obr. 10 je AST_1 pravoúhlý trojúhelník, takže podle Pythagorovy věty je $t^2 + r^2 = d^2$, tedy $t = \sqrt{d^2 - r^2}$. D é l k o u s p o l e č n é t e č n y d v o u k r u ž n i c rozumíme vzdálenost obou bodů dotyku. Také délku společné tečny můžeme určit podle Pythagorovy věty, neboť na př. v obr. 19 je délka $\overline{T_1T_2}$ rovna délce $\overline{US_2}$ odvěsny US_2 pravoúhlého trojúhelníka S_1S_2U, na který můžeme užíti Pythagorovy věty a podobně tomu je v obr. 20.

Pythagorovy věty lze užíti také při četných úlohách o tělesech. Všimněme si na př. kvádru znázorněného v obr. 75. Dejme tomu, že rozměry kvádru jsou

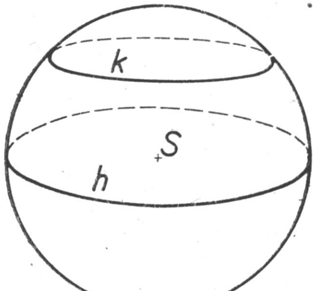
$$\overline{LM} = 6\ \text{cm}, \quad \overline{MN} = 3\ \text{cm}, \quad \overline{LR} = 5\ \text{cm}$$

a že chceme vypočísti délku úhlopříčky NR. Zvolme 1 cm za jednotku délky. Svislá přímka LR a vodorovná přímka LN stojí na sobě kolmo, takže trojúhelník LNR je pravoúhlý; podle Pythagorovy věty je

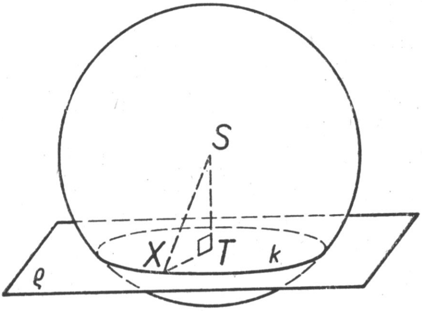
$$\overline{NR}^2 = \overline{LN}^2 + \overline{LR}^2 = \overline{LN}^2 + 25.$$

Dále soudíme podle Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníka LMN, že

$$\overline{LN}^2 = \overline{LM}^2 + \overline{MN}^2 = 6^2 + 3^2 = 45.$$



Obr. 76.



Obr. 77.

(Tedy $LN = \sqrt{45}$, ale výpočet této odmocniny je pro náš účel zbytečný.) Dosadíme-li za $\overline{LN}^2$ do hořejšího výrazu pro $\overline{NR}^2$, dostaneme

$$\overline{NR}^2 = 45 + 25 = 70; \quad \overline{NR} = \sqrt{70} \doteq 8{,}36.$$

Tedy délka úhlopříčky NR je 8,4 cm přesně na milimetry.

Je zřejmé, že rovina vedená středem S kulové plochy protne tuto plochu v kružnici, jejíž střed je S a jejíž poloměr se rovná poloměru kulové plochy. Takové kružnice na kulové ploše se jmenují hlavní kružnice kulové plochy (viz kružnici h v obr. 76). Vedle hlavních kružnic jsou na kulové ploše ještě vedlejší kružnice, které mají střed různý od středu kulové plochy a poloměr menší než je poloměr kulové plochy.

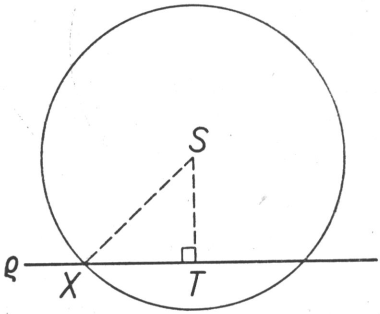
V obr. 77 je znázorněna kulová plocha se středem S a poloměrem r, dále rovina ϱ, která neprochází středem S, ale jejíž vzdálenost d od bodu S je menší než r. Spusťme s bodu S kolmici na rovinu ϱ a označme T její patu, takže $\overline{ST} = d$. Leží-li bod X i v rovině ϱ i na kulové ploše, vznikne nám pravoúhlý trojúhelník STX, jehož přepona SX má délku r, kdežto jedna odvěsna ST má délku d. Podle Pythagorovy věty má druhá odvěsna délku

$$\overline{TX} = \sqrt{r^2 - d^2}. \qquad (*)$$

Obráceně budiž X takový bod v rovině ϱ, že platí (*). Podle Pythagorovy věty je

$$\overline{SX}^2 = \overline{ST}^2 + \overline{TX}^2 = d^2 + (\sqrt{r^2 - d^2})^2 = d^2 + (r^2 - d^2) = r^2,$$

tedy $\overline{SX} = r$, takže bod X leží na kulové ploše. Tedy rovina ϱ protne kulovou plochu v kružnici, jejíž střed je T a jejíž poloměr je $\sqrt{r^2 - d^2}$.



Obr. 78.

Místo obr. 77 jsme mohli užíti jednoduššího obr. 78, ve kterém kulová plocha a rovina ϱ jsou zastoupeny svými průseky s rovinou kolmou na rovinu ϱ a procházející středem S.

V závěru tohoto paragrafu si ještě dokážeme, že Pythagorova věta platí pouze pro pravoúhlý trojúhelník. Budiž dán trojúhelník ABC s obvyklým označením a, b, c pro strany, α, β, γ pro úhly. Je-li $\gamma = 90°$, je $c^2 = a^2 + b^2$ podle Pythagorovy věty. Dokážeme, že je

$$c^2 < a^2 + b^2, \text{ je-li } \gamma < 90°,$$
$$c^2 > a^2 + b^2, \text{ je-li } \gamma > 90°.$$

Budiž nejprve $\gamma < 90°$. Není-li c nejdelší strana trojúhelníka, je zřejmě $c^2 < a^2 + b^2$. Je-li však c nejdelší strana, leží proti ní také největší úhel γ. Protože $\gamma < 90°$, je tím spíše $\alpha < 90°$. Proto pata D výšky BD padne dovnitř úsečky AC (viz obr. 79). Položíme-li

$$\overline{BD} = x, \quad \overline{AD} = y,$$

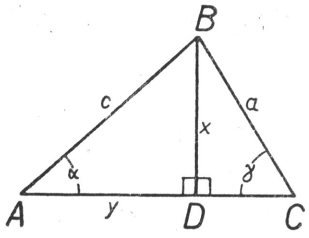
plyne z pravoúhlého trojúhelníka ABD, že

$$c^2 = x^2 + y^2.$$

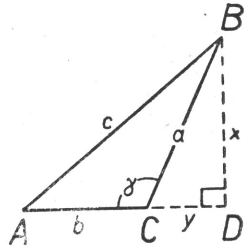
Avšak $\quad x < a, \quad y < b, \quad$ tedy $\quad x^2 + y^2 < a^2 + b^2,$

takže $c^2 < a^2 + b^2$.

Budiž nyní $\gamma > 90°$. Pata D výšky BD padne nyní na prodloužení úsečky AC za bod C (viz obr. 80). Položíme-li



Obr. 79.



Obr. 80.

$$\overline{BD} = x, \quad \overline{CD} = y,$$

jest $\overline{AD} = y + b$. Z pravoúhlého trojúhelníka ABD plyne podle Pythagorovy věty

$$c^2 = x^2 + (y + b)^2$$

neboli

$$c^2 = x^2 + y^2 + 2by + b^2,$$

takže

$$c^2 > x^2 + y^2 + b^2.$$

Avšak z pravoúhlého trojúhelníka BCD plyne podle Pythagorovy věty

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \text{tedy} \quad x^2 + y^2 + b^2 = a^2 + b^2,$$

takže $c^2 > a^2 + b^2$.

Chceme-li rozhodnouti, zda trojúhelník, jehož strany známe, je ostroúhlý, pravoúhlý či tupoúhlý, označíme si strany písmeny a, b, c tak, aby c byla nejdelší strana. Protože proti nejdelší straně leží největší úhel, je náš trojúhelník

ostroúhlý, je-li $c^2 < a^2 + b^2$,
pravoúhlý, je-li $c^2 = a^2 + b^2$,
tupoúhlý, je-li $c^2 > a^2 + b^2$.

Na př.: Poněvadž $3^2 + 4^2 = 5^2$, soudíme, že trojúhelník, jehož strany jsou v poměru 3 : 4 : 5, je pravoúhlý. To bylo známo v Číně již kolem r. 1100 př. Kr.

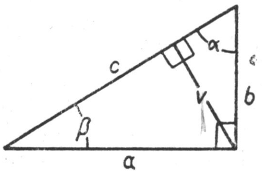
Cvičení k § 5.

Nelze-li výsledek některého cvičení vyjádřiti přesně, zaokrouhlete jej na 2 platné cifry.

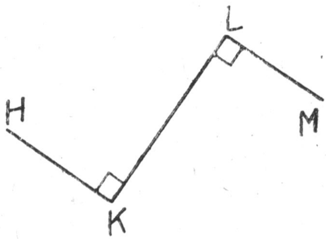
I. Trojúhelníky a čtyřúhelníky.

131. (Viz obr. 81.) Jednotka 1 cm.

a) $a = 8$; $b = 15$; určete c.
b) $a = 5$; $b = 12$; určete c.
c) $a = 2{,}4$; $b = 3{,}2$; určete c.
d) $c = 75$; $b = 45$; určete a.
e) $c = 18$; $a = 15$; určete b.



Obr. 81.



Obr. 82.

132. Žebřík dlouhý 10 m je opřen o svislou zeď tak, že jeho spodní konec je vzdálen 6 m ode zdi. Jak vysoko sahá žebřík?

133. Žebřík právě dosáhne vrcholu svislé zdi vysoké 9 m, je-li jeho spodní konec vzdálen 4 m ode zdi. Jak dlouhý je žebřík?

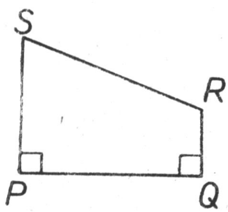
134. Cyklista jel 15 km k severu a potom 5 km k západu. Jak je potom vzdálen od místa, z něhož vyjel?

135. (Viz obr. 82.) Je-li $\overline{HK} = 4$ cm, $\overline{KL} = 8$ cm, $\overline{LM} = 2$ cm, určete $\overline{HM}$.

136. Určete délku úhlopříčky obdélníka s rozměry 5,2 dm; 6,8 dm.

137. Úhlopříčky kosočtverce mají délky 6 cm, 10 cm. Určete délku strany.

138. Strana kosočtverce má délku 3,2 cm; jedna úhlopříčka má délku 4,4 cm. Určete délku druhé úhlopříčky.



Obr. 83.

139. (Viz obr. 83.)

a) $\overline{PS} = 3$ dm; $\overline{PQ} = 24$ cm; $\overline{QR} = 12$ cm. Určete $\overline{RS}$.

b) $\overline{PS} = 8{,}4$ m; $\overline{QR} = 3{,}6$ m; $\overline{RS} = 7{,}2$ m. Určete $\overline{PQ}$.

140. Ve čtyřúhelníku $EFGH$ je $\sphericalangle EFG = 90°$; $\sphericalangle EGH = 90°$; $\overline{EF} = 12$ cm; $\overline{FG} = 9$ cm; $\overline{GH} = 8$ cm. Určete délku strany $\overline{EH}$ a obsah čtyrúhelníka.

141. AD je výška ostroúhlého trojúhelníka ABC. Je-li $\overline{AB} = 2$ m, $\overline{BC} = 16$ dm, $\overline{CD} = 5$ dm, vypočtěte $\overline{AC}$.

142. V trojúhelníku PQR je $\overline{PQ} = \overline{PR} = 26$ cm, $\overline{QR} = 2$ dm. Určete obsah trojúhelníka.

143. Opakujte úlohu 142 s tím rozdílem, že $\overline{PQ} = \overline{PR} = 3$ dm, $\overline{QR} = 36$ cm.

144. (Viz obr. 81.)

a) Je-li $a = 8$ cm, $b = 6$ cm, určete v.
b) Je-li $a = 2{,}3$ m; $c = 5{,}2$ m, určete v.
c) Je-li $\alpha = 45°$, $a = 36$ cm, určete c, v.
d) Je-li $\alpha = 45°$, $c = 5{,}8$ m, určete a, v.
e) Je-li $\alpha = 60°$, $a = 4$ m, určete b, c.
f) Je-li $\alpha = 30°$, $a = 6$ m, určete b, c.
g) Je-li $\alpha = 60°$, $c = 1$ m, určete a, b.

145. Do kružnice s poloměrem 17 cm je vepsán

a) čtverec; b) rovnostranný trojúhelník.

Určete délku strany.

146. Kružnici s poloměrem 13 cm je opsán rovnostranný trojúhelník. Určete jeho obsah.

147. Délka strany pravidelného šestiúhelníka je 23 cm. Určete poloměr vepsané kružnice.

148. $ABCDEF$ je pravidelný šestiúhelník; $\overline{AB} = 13$ mm.

a) Určete obsah šestiúhelníka.
b) Dokažte, že trojúhelník ACE je rovnostranný; určete délku jeho strany a obsah.

II. Kružnice.

149. Na kružnici s poloměrem 6 cm leží body K, L ve vzdálenosti 8 cm od sebe. Jak daleko je přímka KL od středu kružnice?

150. Ve vzdálenosti 16 km od přímé trati je dělo, kterým lze střílet do vzdálenosti 30 km. Jak dlouhý kus trati je v dostřelu?

151. Kruhový mostní oblouk překlene délku 20 m. Výška středu oblouku je 3 m. Určete poloměr. [Sestavte rovnici pro neznámý poloměr r.]

152. Dvě rovnoběžné tětivy kružnice s poloměrem 6 cm mají délky 6 cm a 10 cm. Jaká je vzájemná vzdálenost obou tětiv? [Jsou dva možné případy.]

153. Tětiva kružnice k má délku 12 cm a je vzdálena 25 mm od středu S kružnice k.

a) Jak dlouhá je tětiva kružnice k, která je vzdálena 5 cm od středu S?
b) Jak daleko od středu S je tětiva kružnice k dlouhá 6 cm?

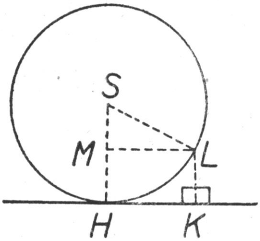
154. Kružnice k má střed S a poloměr 6 cm. Je-li $\overline{AS} = 1$ dm, určete délku tečny vedené z bodu A ke kružnici k.

155. Délka tečny z bodu A ke kružnici k je 6 cm; poloměr kružnice k je 45 mm. Určete vzdálenost bodu A od nejbližšího bodu kružnice k.

156. Poloměry dvou soustředných kružnic jsou 5 cm a 3 cm. Určete délku tětivy větší kružnice, která se dotýká kružnice menší.

157. Dvě kružnice mají poloměry 8 cm, 3 cm; vzdálenost středů je 13 cm. Určete délku vnější společné tečny.

158. Dvě kružnice mají poloměry 11 cm, 5 cm; vzdálenost středů je 2 dm. Určete délku vnitřní společné tečny.



Obr. 84.

159. V obr. 84 je HK tečna kružnice v bodě H; dále je $\overline{HK} = 15$ cm, $\overline{LK} = 9$ cm, $LK \perp HK$. Určete poloměr kružnice. [Z obrazce je patrná pomocná konstrukce. Sestavte rovnici.]

160. Trojúhelník ABC má pravý úhel při vrcholu C; jest $\overline{AC} = 3$ cm, $\overline{BC} = 2$ cm. Kružnice k se dotýká přímky BC v bodě B a prochází bodem A. Určete poloměr kružnice k. [Spojte bod A se středem S kružnice k; spusťte s bodu A kolmici na přímku BS; sestavte rovnici.]

III. Tělesa.

161. Místnost je dlouhá 6 m, široká $4\frac{1}{2}$ m, vysoká $3\frac{1}{2}$ m.

a) Určete vzdálenost rohu podlahy od protějšího rohu stropu.
b) Určete vzdálenost rohu podlahy od středu stropu.
c) Určete vzdálenost rohu podlahy od středu místnosti.

162. Hrana krychle měří 8 cm. Určete

a) délku úhlopříčky,
b) vzdálenost středů dvou sousedních stěn.

163. Průměr podstavy rotačního kužele je 14 cm, výška je 12 cm. Určete délku strany.

164. Výška rotačního kužele je 1 dm, délka strany je 16 cm. Určete průměr podstavy.

165. Průměr podstavy rotačního kužele je 8 cm, délka strany je 12 cm. Určete výšku.

166. Délka podstavné hrany pravidelného

a) čtyrbokého, b) trojbokého

jehlanu je 4 cm, výška je 5 cm. Určete délku pobočné hrany.

167. Podstava jehlanu je čtverec $ABCD$ s délkou strany 5 cm; V je vrchol jehlanu. Přímka AV je kolmá na rovinu podstavy; jest $\overline{AV} = 4$ cm. Určete délky hran BV, CV, DV.

168. Čtverec $EFGH$ s délkou strany 2 cm byl přehnut podél úhlopříčky EG tak, že roviny trojúhelníků EFG, EHG stojí na sobě kolmo. Jaká je v přehnuté poloze vzdálenost $\overline{FH}$?

169. Sestavte vzorec pro výšku pravidelného čtyrstěnu s délkou hrany a.

170. Z dřevěné koule poloměru 4 cm byla odříznuta část omezená kruhem o poloměru 2 cm. Zbytek koule je postaven na vodorovnou podložku rovnou kruhovou stěnou. Jak vysoko nad podložkou je nejvyšší bod tělesa?

171. Míč s poloměrem 12 cm pluje na vodě ponořen do hloubky tří čtvrtin průměru. Určete poloměr kružnice, podél níž dosahuje hladina vodní k povrchu míče.

172. Na dutém válci s vnitřním poloměrem 1 dm je postavena koule. Nejvyšší bod koule je 15 cm nad válcem. Určete poloměr koule.

173. Do polokulovité vázy s vnitřním průměrem 6 dm je nalito tolik vody, že největší hloubka vody je 12 cm. Určete poloměr kruhu utvořeného hladinou vody.

174. Podstava kolmého hranolu je rovnoběžník $ABCD$; $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{AD} = 5$ cm, $\sphericalangle BAD = 60°$; výška hranolu je 4 cm. Určete povrch a objem hranolu.

175. Pravidelný trojboký hranol má podstavnou hranu 5 cm, pobočnou hranu 4 cm. Určete povrch a objem hranolu.

176. Pravidelný šestiboký hranol má výšku 5 cm a objem 100 cm^3. Určete povrch hranolu.

177. Podstava kolmého hranolu je rovnoramenný trojúhelník s délkou základny 5 cm. Výška hranolu je 3 cm a objem hranolu je 40 cm^3. Určete povrch hranolu.

IV. Obrácení Pythagorovy věty.

178. Rozhodněte, zdali trojúhelník je ostroúhlý, pravoúhlý či tupoúhlý, jsou-li při určité volbě délkové jednotky délky stran dány čísly:

a) 4; 5; 6;	b) 3; 5; 6;	c) 5; 12; 13;
d) 8; 9; 12;	e) 12; 36; 34;	f) 8; 7; 11;
g) 15; 16; 22;	h) 12; 37; 35;	i) 25,5; 25,7; 3,2;

j) $4n$; $4n^2 - 1$; $4n^2 + 1$; k) $m^2 + n^2$; $m^2 - n^2$; $2mn$.

179. Délky úhlopříček rovnoběžníka jsou 5 cm a 12 cm, délka jedné strany je 65 mm. Dokažte, že je to kosočtverec.

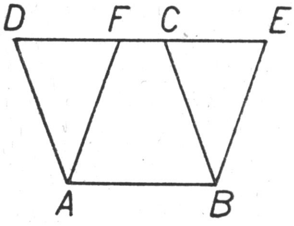
180. D je pata výšky AD trojúhelníka ABC; bod D leží uvnitř úsečky BC. Je-li $\overline{AB} = 1$ dm, $\overline{AC} = 75$ mm, $\overline{AD} = 6$ cm, určete $\overline{BC}$ a dokažte, že $\sphericalangle BAC = 90°$.

181. Podstava pravidelného čtyrbokého jehlanu s vrcholem V je čtverec $EFGH$ se stranou 4 cm. Pobočné stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. Dokažte, že $\sphericalangle EVG = 90°$ a určete výšku jehlanu.

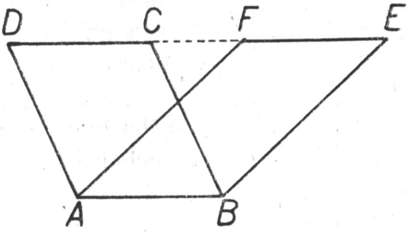
§ 6. Proměna obrazců. Euklidovy věty.

V § 4 jsme poznali, jak se dá počítati obsah jednoduchých rovinných obrazců. Tyto poznatky si nyní doplníme studiem obrazců, které mají různý tvar, ale týž obsah. Budeme krátce říkati, že dva obrazce jsou si rovny, mají-li týž obsah. Jsou-li dva obrazce shodné, jsou si rovny; ale dva obrazce, které jsou si rovny, nemusí býti shodné.

Počněme studiem rovnoběžníků! Mají-li dva rovnoběžníky $ABCD$, $ABEF$ společnou stranu a leží-li protější strany CD, EF v téže přímce, jsou si ty dva rovnoběžníky rovny (viz obr. 85a, b). Poučku právě vyslovenou můžeme si odvoditi ze známého



Obr. 85a.



Obr. 85b.

vzorce pro obsah rovnoběžníka. Neboť tento obsah je $\overline{AB} \,.\, v$, kde v znamená výšku příslušnou straně AB, která je stejná u obou rovnoběžníků $ABCD$, $ABEF$. Ale můžeme si dokázati naši poučku také jinak. Za tím účelem si všimněme trojúhelníků ADF, BCE. Jest $\sphericalangle ADF = \sphericalangle BCE$ (souhlasné úhly mezi rovnoběžkami) a z téhož důvodu je $\sphericalangle AFD = \sphericalangle BEC$; mimoto je $\overline{AD} = \overline{BC}$ (protější strany rovnoběžníka). Tedy

$$ADF \cong BCE \quad (suu)$$

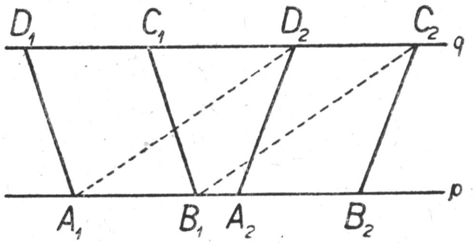
a proto trojúhelníky ADF, BCE jsou si rovny. Nyní si všimněme lichoběžníka $ABED$. Ubereme-li od tohoto lichoběžníka trojúhelník BCE, vznikne rovnoběžník $ABCD$; ubereme-li však od téhož lichoběžníka trojúhelník ADF, vznikne rovnoběžník $ABEF$. Protože oba trojúhelníky jsou si rovny a každý z nich byl ubrán od téhož lichoběžníka, jsou si rovnoběžníky $ABCD$, $ABEF$ rovny, což jsme měli dokázati.

Poznámka. V případě obr. 85a jsme místo lichoběžníka $ABED$ mohli také užíti lichoběžníka $ABCF$. Připojíme-li k lichoběžníku $ABCF$ nejprve trojúhelník ADF, vznikne rovnoběžník $ABCD$; připojíme-li však k témuž lichoběžníku trojúhelník BCE rovný trojúhelníku ADF, vznikne rovnoběžník $ABEF$. Proto jsou si rovny oba rovnoběžníky v obr. 85a; ale tento postup selže u obr. 85b.

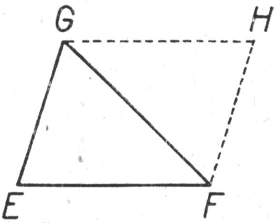
Je-li u rovnoběžníků $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ strana A_1B_1 stejně dlouhá jako strana A_2B_2, leží-li ty dvě strany v téže přímce p, a leží-li také obě protější strany v téže přímce q, jsou si oba rovnoběžníky rovny. Také tato poučka plyne ihned ze vzorce pro obsah rovnoběžníka, neboť obsahy našich rovnoběžníků jsou

$$\overline{A_1B_1} \,.\, v = \overline{A_2B_2} \,.\, v,$$

kde táž délka v znamená i výšku rovnoběžníka $A_1B_1C_1D_1$ příslušnou



Obr. 86.



Obr. 87.

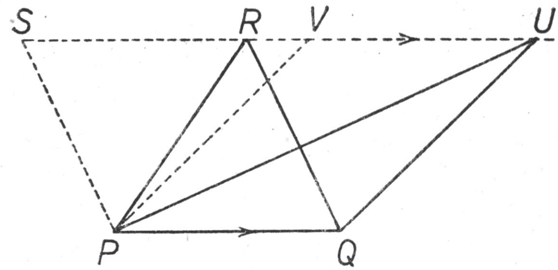
straně A_1B_1 i výšku rovnoběžníka $A_2B_2C_2D_2$ příslušnou straně A_2B_2. Bez užití vzorce pro obsah můžeme dokázati naši poučku takto (viz obr. 86). Všimneme si čtyrúhelníka $A_1B_1C_2D_2$. Jest $A_1B_1 \parallel D_2C_2$; mimoto je však $\overline{A_1B_1} = \overline{D_2C_2}$, neboť obě ty délky jsou rovny téže délce $\overline{A_2B_2}$. Tedy $A_1B_1C_2D_2$ je rovnoběžník. Tomuto rovnoběžníku je podle předešlé poučky roven jednak rovnoběžník $A_1B_1C_1D_1$, neboť oba rovnoběžníky $A_1B_1C_1D_1$, $A_1B_1C_2D_2$ mají společnou stranu A_1B_1 a protější strany leží v téže přímce q; témuž rovnoběžníku $A_1B_1C_2D_2$ je však také roven rovnoběžník $A_2B_2C_2D_2$, neboť oba rovnoběžníky mají společnou stranu C_2D_2 a protější strany leží v téže přímce p. Tedy jsou si rovny rovnoběžníky $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, jak jsme chtěli dokázati.

Od rovnoběžníků přejdeme snadno ke trojúhelníkům, neboť každý trojúhelník je polovina rovnoběžníka. Je-li dán libovolný trojúhelník EFG (viz obr. 87), vedeme si vrcholem F rovnoběžku se stranou EG a vrcholem G rovnoběžku se stranou EF. Vznikne nám rovnoběžník $EFHG$. Protože protější strany rovnoběžníka jsou si rovny, jest

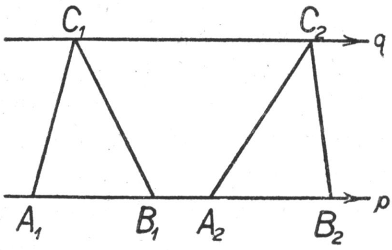
$$EFG \cong HGF \quad (sss).$$

Proto oba trojúhelníky *EFG*, *HGF* jsou si rovny, takže každý z nich je polovinou rovnoběžníka *EFHG* (t. j. obsah trojúhelníka je polovina obsahu rovnoběžníka).

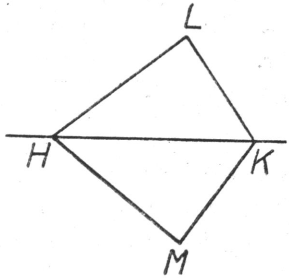
Mají-li dva trojúhelníky *PQR*, *PQU* společnou stranu *PQ* a je-li spojnice *RU* protějších vrcholů rovnoběžná s přímkou *PQ*, jsou si oba trojúhelníky rovny. Vyložte sami, jak lze tuto poučku odůvodnit ze vzorce pro obsah trojúhelníka! Bez užití vzorce ji dokážeme takto (viz obr. 88). Sestrojíme si rovnoběžníky *PQRS*, *PQUV*, které mají společnou stranu *PQ*; protože protější strany *RS*, *UV* leží v téže přímce, jsou si oba rovnoběžníky *PQRS*, *PQUV* rovny. Ale trojúhelník *PQR* je polovina rovnoběžníka *PQRS* a trojúhelník *PQU* je polovina rovnoběžníka *PQUV*, takže oba trojúhelníky jsou si rovny.



Obr. 88.



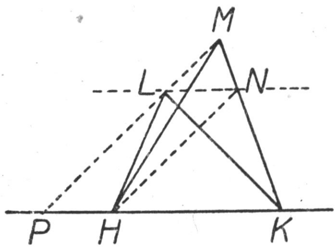
Obr. 89.



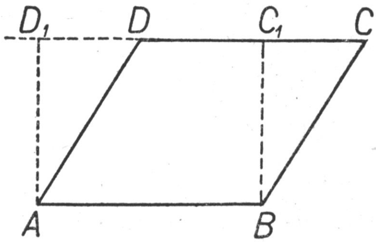
Obr. 90.

Je-li u trojúhelníků $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ strana A_1B_1 stejně dlouhá jako strana A_2B_2, leží-li ty dvě strany v téže přímce p, a když protější vrcholy C_1, C_2 buďto splynou nebo leží na rovnoběžce q s přímkou p, jsou si oba trojúhelníky rovny (viz obr. 89). Odůvodněte sami tuto poučku napřed pomocí vzorce pro obsah trojúhelníka, potom bez užití tohoto vzorce. Proveďte důkaz také pro případ, že body C_1, C_2 splynou!

Poučky, které jsme dosud poznali v tomto paragrafu, dají se v jistém smyslu obrátit. Spokojíme se s jedním příkladem. Mějme dva trojúhelníky HKL, HKM se společnou stranou HK, které jsou si rovny. Můžeme tvrdit, že přímka LM je rovnoběžná s přímkou HK? Obr. 90 ukazuje, že nikoli, neboť je $HKL \simeq HKM$, ale přes to není $LM \parallel HK$. Platí však tato poučka. Jsou-li si rovny trojúhelníky HKL, HKM se společnou stranou HK a leží-li oba body L, M na téže straně od přímky HK, jest $LM \parallel HK$. Abychom si to dokázali, předpokládejme, že přímka LM je různoběžná s přímkou HK, takže přímky HK, LM mají společný bod P; máme dokázati, že



Obr. 91.



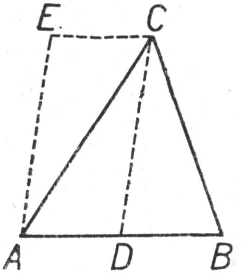
Obr. 92.

oba trojúhelníky HKL, HKM nemohou si býti rovny. Protože body L, M leží oba po téže straně od přímky HK, musí ležeti bod P na prodloužení úsečky LM buďto za bod L nebo za bod M. Pro určitost nechť leží P třeba na prodloužení úsečky LM za bod L (viz obr. 91). Bod L leží uvnitř strany MP trojúhelníka PKM. Rovnoběžka vedená bodem L s protější stranou PK tohoto trojúhelníka protne třetí stranu KM v bodě N. Trojúhelník HKM je pak zřejmě větší než trojúhelník HKN. Avšak trojúhelník HKN se rovná trojúhelníku HKL, neboť oba trojúhelníky mají společnou stranu HK a mimoto je $LN \parallel HK$. Tedy trojúhelník HKL je menší než trojúhelník HKM.

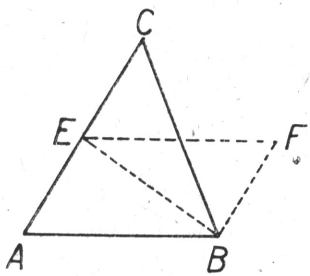
Nyní si promluvíme o t. zv. proměně obrazců. To znamená, že se budeme učit, jak se sestrojí obrazec, který se rovná danému obrazci a jehož tvar vyhovuje předepsaným podmínkám.

V obr. 92 je naznačeno, jak lze rovnoběžník $ABCD$ proměniti v obdélník ABC_1D_1. Popište sami konstrukci obdélníka! Obdélník je roven rovnoběžníku, protože mají společnou stranu AB a protější strany CD, C_1D_1 leží obě v téže přímce.

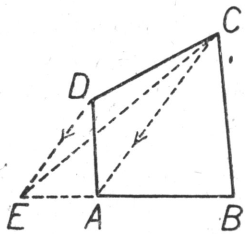
V obr. 93a a 93b jsou naznačeny dva způsoby proměny trojúhelníka ABC na rovnoběžník. V obr. 93a je D střed úsečky AB. Trojúhelník ADC je polovinou rovnoběžníka $ADCE$; avšak trojúhelníky ADC, DBC jsou si rovny (proč?), takže trojúhelník ADC je také polovinou trojúhelníka ABC, takže tento trojúhelník se rovná rovnoběžníku $ADCE$. V obr. 93b je E střed úsečky AC; trojúhelník ABE je



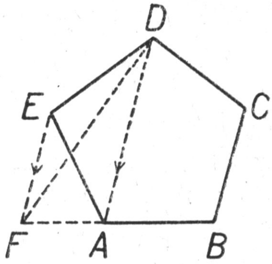
Obr. 93a.



Obr. 93b.



Obr. 94a.

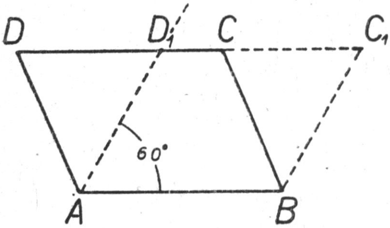


Obr. 94b.

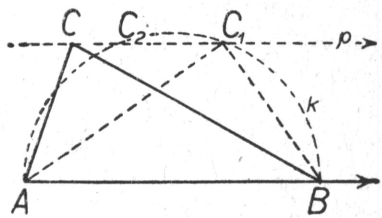
jednak polovinou rovnoběžníka $ABFE$, jednak polovinou trojúhelníka ABC (proč?). Proto trojúhelník ABC se rovná rovnoběžníku $ABFE$.

V obr. 94a je naznačeno, jak lze čtyrúhelník $ABCD$ proměniti na trojúhelník EBC. Bod E je průsečík přímky AB s rovnoběžkou vedenou bodem D ke přímce AC. Trojúhelníky ACD, ACE mají společnou stranu AC a protější vrcholy D, E leží na rovnoběžce s přímkou AC; proto trojúhelníky ACD, ACE jsou si rovny. Připojíme-li trojúhelník ABC ke trojúhelníku ACD, vznikne čtyrúhelník $ABCD$; připojíme-li však týž trojúhelník ABC ke trojúhelníku ACE, vznikne trojúhelník EBC. Proto je čtyrúhelník $ABCD$ roven trojúhelníku EBC.

V obr. 94b je naznačeno, jak lze pětiúhelník $ABCDE$ proměniti na čtyrúhelník $FBCD$. Popište sami konstrukci a odůvodněte ji! Podobným způsobem lze každý mnohoúhelník proměniti v jiný, jehož počet stran je o jednu menší. Proto můžeme každý mnohoúhelník postupně proměniti v trojúhelník; protože trojúhelník dovedeme proměniti v rovnoběžník a tento v obdélník, můžeme každý mnohoúhelník proměniti v obdélník.



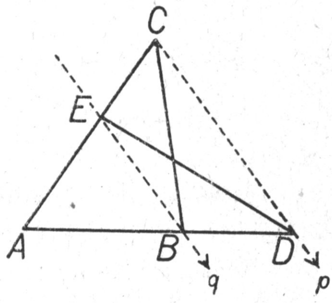
Obr. 95.



Obr. 96.

V obr. 95 je naznačeno, jak lze rovnoběžník $ABCD$ proměniti v rovnoběžník ABC_1D_1, u kterého $\sphericalangle BAD_1 = 60°$. V obr. 96 je naznačeno, jak lze trojúhelník ABC proměniti v trojúhelník ABC_1, u kterého $\sphericalangle AC_1B = 90°$. Popište sami tyto konstrukce a odůvodněte je! (V obr. 96 je $p \parallel AB$ a k je polokružnice nad průměrem AB.)

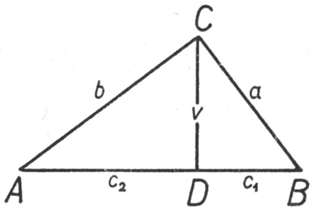
V obr. 97 je naznačeno, jak lze trojúhelník ABC proměniti v trojúhelník ADE, u kterého $\overline{AD}$ je daná délka větší než $\overline{AB}$. Vedeme napřed spojnici p bodů C, D a potom bodem B rovnoběžku q s přímkou p, která protne přímku AC v hledaném bodě E. Odůvodnění: Trojúhelníky BEC, BED mají společnou stranu BE a protější vrcholy C, D leží na rovnoběžce s přímkou BE; proto jsou si trojúhelníky rovny. Připojíme-li však trojúhelník BEC ke trojúhelníku ABE, vznikne trojúhelník ABC; připojíme-li trojúhelník BED k témuž trojúhelníku ABE, vznikne trojúhelník ADE. Proto jsou si trojúhelníky ABC, ADE rovny, jak jsme chtěli dokázati. Týž obr. 97 také vysvětluje, jak lze



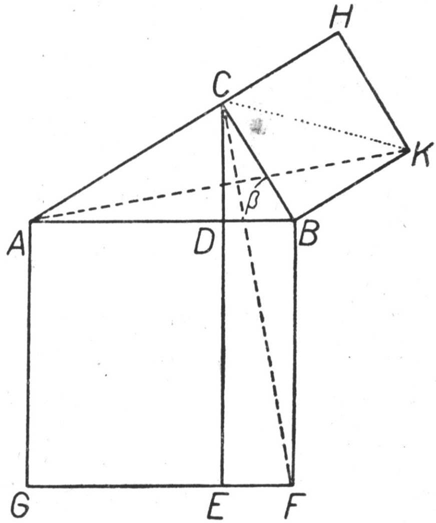
Obr. 97.

obráceně trojúhelník ADE proměniti v trojúhelník ABC, ve kterém $\overline{AB}$ je daná délka menší než $\overline{AD}$. Popište sami konstrukci!

Nyní se ještě naučíme, jak lze proměnit obdélník na čtverec. Protože umíme libovolný mnohoúhelník proměnit na obdélník, budeme potom umět proměnu každého mnohoúhelníka na čtverec. Proměna obdélníka na čtverec se dá provésti podle kterékoli ze dvou pouček o pravoúhlém trojúhelníku, kterým se říká **věty Euklidovy**, a to Euklidova věta o výšce a Euklidova věta o odvěsně. V obr. 98 máme pravoúhlý trojúhelník ABC rozdělený výškou CD na dva pravoúhlé trojúhelníky. Pata výšky D rozdělí přeponu AB na dvě úsečky AD, BD, kterým říkáme krátce **úseky na přeponě;** BD je úsek přilehlý odvěsně a a jeho délku značíme c_1; AD je úsek přilehlý odvěsně b a jeho délku značíme c_2.



Obr. 98.



Obr. 99.

Euklidova věta o výšce zní: Čtverec nad výškou pravoúhlého trojúhelníka rovná se obdélníku, jehož rozměry jsou oba úseky přepony. Krátce je vyjádřena vzorcem

$$v^2 = c_1 c_2.$$

Euklidova věta o odvěsně zní: Čtverec nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka rovná se obdélníku, jehož rozměry jsou přepona a přilehlý úsek. Pro odvěsnu a je vyjádřena vzorcem

$$a^2 = c_1 c,$$

pro odvěsnu b vzorcem

$$b^2 = c_2 c.$$

Dokážeme si napřed Euklidovu větu o odvěsně. Stačí ovšem provésti důkaz pro odvěsnu a. V obr. 99 máme opět pravoúhlý trojúhelník ABC a jeho výšku CD. Dále je v obrazci sestrojen čtverec $ABFG$ nad přeponou a čtverec $BCHK$ nad odvěsnou a. Přímka CD rozdělí čtverec $ABFG$ na dva obdélníky $ADEG$, $BDEF$. Máme dokázati, že obdélník $BDEF$ se rovná čtverci $BCHK$. Polovina obdélníka $BDEF$ je trojúhelník BDF; polovina čtverce $BCHK$ je trojúhelník BCK. Proto stačí dokázati, že trojúhelník BDF se rovná trojúhelníku BCK. Avšak trojúhelník BDF se rovná trojúhelníku BCF, neboť mají společnou stranu BF a spojnice CD protějších vrcholů je rovnoběžná s přímkou BF; podobně trojúhelník BCK se rovná trojúhelníku BAK, neboť mají společnou stranu BK a spojnice AC protějších vrcholů je rovnoběžná s přímkou BK. Proto stačí dokázati, že trojúhelník BCF se rovná trojúhelníku BAK a důkaz bude hotov, odůvodníme-li, že je dokonce

$$BCF \cong BKA \quad (sus).$$

To je však snadné, neboť

$$\overline{BC} = \overline{BK} \text{ (strany čtverce } BCHK\text{)},$$
$$\overline{BF} = \overline{BA} \text{ (strany čtverce } ABFG\text{)}$$

a z obr. 99 je patrné, že

$$\sphericalangle CBF = \beta + 90°, \quad \sphericalangle KBA = \beta + 90°, \quad \text{tedy} \quad \sphericalangle CBF = \sphericalangle KBA.$$

Proveďte sami znovu týž důkaz, tentokrát pro odvěsnu b!

Při důkaze Euklidovy věty o odvěsně jsme se obešli bez znalosti Pythagorovy věty. Proto si můžeme znovu odvodit Pythagorovu větu na základě věty právě dokázané. Je to velmi snadné, neboť ze vzorců

$$a^2 = c_1 c, \quad b^2 = c_2 c$$

plyne

$$a^2 + b^2 = (c_1 + c_2)\, c,$$

což už je Pythagorova věta, neboť zřejmě $c_1 + c_2 = c$. Tímto způsobem postupuje Euklid ve svých proslulých Základech.

Euklidovu větu o výšce odvodíme snadno z Euklidovy věty o odvěsně, užijeme-li Pythagorovy věty na pravoúhlý trojúhelník BCD

(viz obr. 98). Tím dostaneme

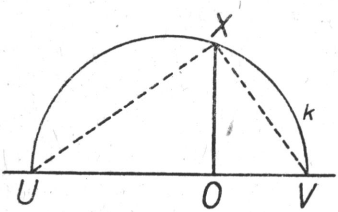
$$v^2 = a^2 - c_1^2;$$

za a^2 dosadíme podle Euklidovy věty o odvěsně hodnotu c_1c a dostaneme

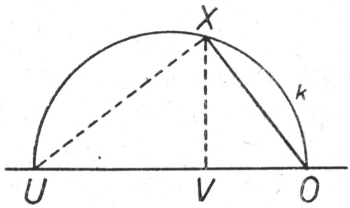
$$v^2 = c_1c - c_1^2 = c_1(c - c_1) = c_1c_2,$$

neboť $c - c_1 = c_2$.

Máme-li obdélník, jehož rozměry jsou u, v, proměniti na čtverec, můžeme postupovati dvojím způsobem (viz obr. 100 a 101). V obou



Obr. 100.



Obr. 101.

obrazcích je $\overline{OU} = u$, $\overline{OV} = v$ a strana hledaného čtverce je $x = \overline{OX}$. V obr. 100 je sestrojena polokružnice k nad průměrem UV; kolmice vztyčená v bodě O ke přímce UV protne k v hledaném bodě X. Odůvodnění: Podle Thaletovy věty trojúhelník UVX má pravý úhel při vrcholu X, takže podle Euklidovy věty o výšce je $\overline{OX}^2 = \overline{OU} \,.\, \overline{OV}$ neboli $x^2 = uv$. V obr. 101 předpokládáme, že $u > v$; v obrazci je sestrojena polokružnice k nad průměrem OU; kolmice vztyčená v bodě V ke přímce UV protne k v hledaném bodě X. Odůvodnění: Podle Thaletovy věty má trojúhelník OUX pravý úhel při vrcholu X, takže podle Euklidovy věty o odvěsně je $\overline{OX}^2 = \overline{OU} \,.\, \overline{OV}$ neboli $x^2 = uv$.

Týž význam jako rovnice

$$x^2 = uv$$

má úměra

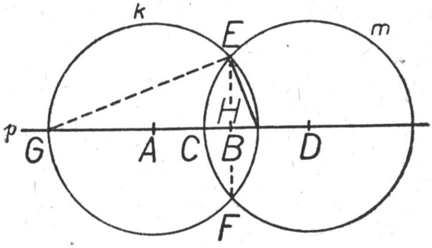
$$u : x = x : v;$$

proto říkáme, že délka x je **střední geometrická úměrná** délek u, v.

Naučili jsme se dvěma konstrukcím střední geometrické úměrné x dvou délek u, v, znázorněným v obr. 100 a 101. Při obou je třeba rozpůliti úsečku, abychom mohli sestrojiti polokružnici k. V obr. 102 je znázorněna jednodušší konstrukce, při které půlení odpadne; opět předpokládáme, že je $u > v$. Na přímku p naneseme postupně délky

$$\overline{AB} = u, \quad \overline{BC} = v, \quad \overline{CD} = u$$

tak, aby bod C byl mezi body A, B a bod B mezi body C, D. Potom sestrojíme kružnice k, m se středy A, D a s poloměrem u, takže k prochází bodem B, m bodem C. Je-li E jeden průsečík obou kružnic, je $\overline{BE} = x$. Odůvodnění: Budiž F druhý průsečík kružnic k, m, G druhý průsečík kružnice k s přímkou p a H průsečík přímky EF s přímkou p. Podle konstrukce je EF osa úsečky AD, takže je $EH \perp p$ a mimoto je $\overline{AH} = \overline{HD}$. Protože je také $\overline{AB} = \overline{CD}$, je



Obr. 102.

$$\overline{AB} - \overline{AH} = \overline{CD} - \overline{HD}$$

neboli $\overline{BH} = \overline{CH}$, takže $\overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ neboli $\overline{BH} = \frac{1}{2}v$. Trojúhelník BEG má podle Thaletovy věty pravý úhel při vrcholu E a EH je výška tohoto trojúhelníka, takže podle Euklidovy věty o odvěsně je

$$\overline{BE}^2 = \overline{BG} \,.\, \overline{BH}.$$

Avšak $\overline{BG} = 2u$, $\overline{BH} = \frac{1}{2}v$, $2u \,.\, \frac{1}{2}v = uv$, takže $\overline{BE}^2 = uv$, tedy $\overline{BE} = x$, jak jsme chtěli dokázati.

Známe-li u pravoúhlého trojúhelníka ABC dvě ze šesti hodnot a, b, c, v, c_1, c_2 (viz obr. 98), můžeme vypočísti ostatní čtyři hodnoty podle vzorců, které nám jsou známy. Je to především zřejmý vzorec

$$c_1 + c_2 = c,$$

dále vzorec

$$ab = cv,$$

který známe z § 5 (str. 46), potom Euklidovy věty

$$v^2 = c_1c_2, \quad a^2 = c_1c, \quad b^2 = c_2c,$$

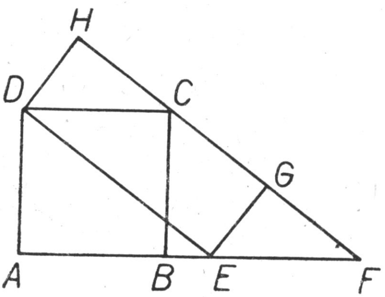
konečně je to Pythagorova věta, které můžeme užíti nejen na trojúhelník ABC, nýbrž i na trojúhelníky ACD, BCD, což dává vzorce

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad a^2 = c_1^{\,2} + v^2, \quad b^2 = c_2^{\,2} + v^2.$$

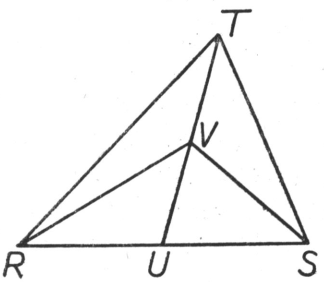
Cvičení k § 6.

I. Rovné rovnoběžníky a trojúhelníky.

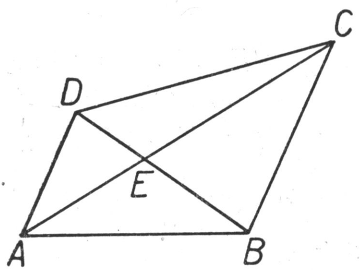
182. V obr. 103 $ABCD$ je čtverec, $DEGH$ je obdélník; dokažte, že se oba sobě rovnají. [Porovnejte je s rovnoběžníkem $CDEF$.]



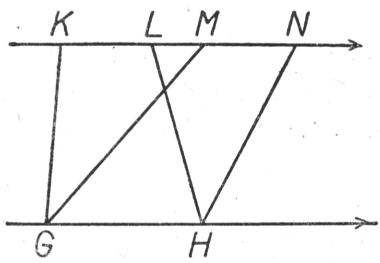
Obr. 103.



Obr. 104.



Obr. 105.



Obr. 106.

183. $KLMN$ je rovnoběžník; P je střed strany KN; bod Q leží na prodloužení úsečky KL a jest $\overline{KL} = \overline{LQ}$. Dokažte, že trojúhelník PQN se rovná polovině rovnoběžníka $KLMN$.

184. V obr. 104 U je střed úsečky RS a V je střed úsečky TU. Dokažte, že trojúhelníky RTV, STV jsou si rovny.

185. (Viz obr. 105.)

a) Je-li $AD \parallel BC$, který trojúhelník v obrazci je rovný trojúhelníku ABC?

b) Je-li $AD \parallel BC$, dokažte, že trojúhelníky ABE, CDE jsou si rovny.

c) Je-li E střed úsečky BD, dokažte, že trojúhelníky ABC, ACD jsou si rovny.

186. V obr. 106 je $\overline{KL} = \overline{MN}$; dokažte, že lichoběžníky $GHLK$, $GHNM$ jsou si rovny. (Neužívejte vzorce pro obsah lichoběžníka.)

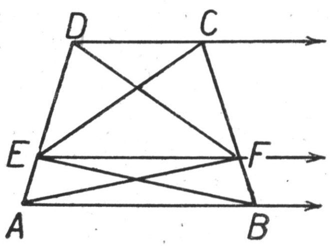
187. (Viz obr. 107.)

a) Dokažte, že trojúhelníky BCE, ADF jsou si rovny.

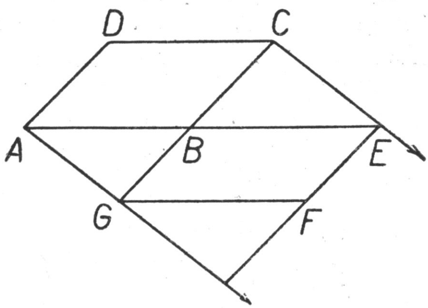
b) Zvolte si bod G na úsečce AB a bod H na úsečce CD. Dokažte, že čtyřúhelník $EGFH$ se rovná trojúhelníku ADF.

188. Narýsujte si rovnoběžník $PQRS$; zvolte si bod X na straně PS a bod Y na prodloužení strany PQ za bod Q. Dokažte, že trojúhelníky QRX, RSY jsou si rovny.

189. V obr. 108 jsou dva rovnoběžníky $ABCD$, $BEFG$. Dokažte, že jsou si rovny. [Veďte spojnice AC, EG.]



Obr. 107.



Obr. 108.

190. Narýsujte si libovolný čtyřúhelník $KLMN$. Sestrojte bod H tak, aby bylo $KH \parallel MN$, $LH \parallel MK$. Dokažte, že lichoběžník $HKMN$ se rovná čtyřúhelníku $KLMN$.

191. Sestrojte si čtyřúhelník $TYXZ$ tak, aby úhlopříčka TX půlila úhlopříčku YZ. Dokažte, že čtyřúhelník $TYXZ$ je rozpůlen úhlopříčkou TX.

II. Proměna obrazců.

192. Narýsujte si pravidelný šestiúhelník s délkou strany 4 cm a vypočtěte jeho obsah na dvě platné cifry. Potom proměňte šestiúhelník na obdélník, změřte jeho rozměry, z nich vypočtěte obsah obdélníka a porovnejte s obsahem šestiúhelníka.

193. Narýsujte si libovolný pětiúhelník. Proměňte jej dvojím způsobem na trojúhelník. U každého z obou trojúhelníků změřte jednu stranu a příslušnou výšku. Podle provedených měření vypočtěte obsahy obou trojúhelníků a porovnejte oba výsledky.

194. Narýsujte si libovolný čtyřúhelník. Proměňte jej dvojím způsobem na obdélník. Vypočtěte a porovnejte obsahy obou obdélníků.

195. Narýsujte si trojúhelník ABC tak, aby bylo $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm.

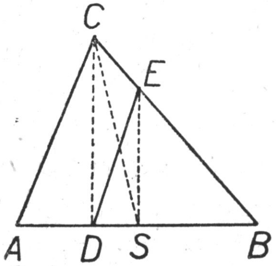
a) Na polopřímce AB určete body D, E tak, že $\overline{AD} = 5$ cm, $\overline{AE} = 7$ cm. Sestrojte trojúhelníky ADF, AEG rovné trojúhelníku ABC.

b) Sestrojte trojúhelníky ABH, ABK rovné trojúhelníku ABC tak, aby bylo $\sphericalangle BAH = 75°$, $\sphericalangle AKB = 45°$.

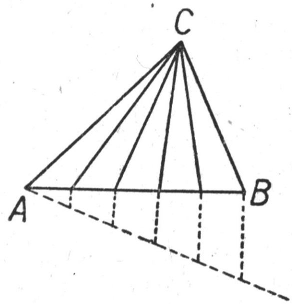
c) Sestrojte trojúhelník ALM rovný trojúhelníku ABC tak, aby bylo $\overline{AL} = 8$ cm, $\overline{AM} = 4$ cm. [Nejprve proměňte ABC na ALP, kde L leží na AB, $\overline{AL} = 8$ cm; potom proměňte ALP na ALM, kde M leží na AP, $\overline{AM} = 4$ cm.]

196. Rovnostranný trojúhelník s délkou strany 6 cm proměňte na kosočtverec s délkou strany 5 cm.

197. V obr. 109 je znázorněno, jak se dá libovolný trojúhelník ABC rozděliti na dva stejné díly úsečkou DE, jejíž jeden krajní bod D je dán na straně AB a jejíž druhý krajní bod E se má určit na straně BC. Popište a odůvodněte konstrukci. [Jest $\overline{AS} = \overline{SB}$, $CD \parallel ES$.]



Obr. 109.



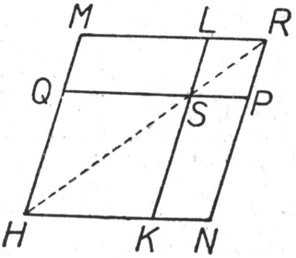
Obr. 110.

198. V obr. 110 je znázorněno, jak lze rozděliti trojúhelník ABC na pět stejných dílů. Popište a odůvodněte konstrukci.

199. Rozdělte trojúhelník ABC na dva díly tak, aby jeden byl o polovinu větší než druhý.

200. a) Dokažte, že obr. 111 oba rovnoběžníky $HKLM$, $HNPQ$ jsou si rovny. [Užijte toho, že každý rovnoběžník je rozpůlen úhlopříčkou; napřed porovnejte rovnoběžníky $LMQS$, $KNPS$.]

b) Narýsujte si rovnoběžník $ABCD$. Zvolte bod E uvnitř strany AB a bod F na prodloužení strany AB za bod B. Sestrojte rovnoběžníky $AEUV$, $AFXY$ rovné rovnoběžníku $ABCD$.



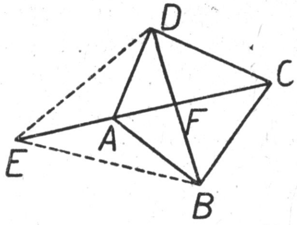
Obr. 111.

201. Čtverec s délkou strany 4 cm proměňte na obdélník, jehož jeden rozměr je 7 cm, užívajíce výsledku cvič. 182.

202. Narýsujte si libovolný čtyrúhelník $ABCD$. Vrcholem A veďte přímku tak, aby rozpůlila daný čtyrúhelník. [Proměňte čtyrúhelník na trojúhelník.]

203. Obr. 112 znázorňuje, jak lze čtyrúhelník $ABCD$ proměnit na troj-úhelník BDE. Popište a odůvodněte konstrukci. [Jest $\overline{AE} = \overline{CF}$.]

204. Dokažte, že každý čtyrúhelník se rovná trojúhelníku, jehož dvě strany se rovnají úhlopříčkám čtyrúhelníka, při čemž úhel těmi stranami sevřený je roven úhlu úhlopříček.



Obr. 112.

III. Euklidovy věty.

205. Jsou-li u pravoúhlého trojúhelníka ABC dány dvě ze šesti délek a, b, c, v, c_1, c_2, určete ostatní čtyři:

a) $a = 65$ cm; $b = 156$ cm;
b) $a = 175$ mm; $c = 625$ mm;
c) $a = 3{,}69$ m; $v = 3{,}6$ m;
d) $c_1 = 1{,}21$ cm; $c_2 = 36$ cm;
e) $a = 51$ m; $c_1 = 45$ m;
f) $c = 8{,}41$ m; $c_1 = 4{,}41$ m;
g) $v = 18{,}48$ cm; $c_1 = 10{,}89$ cm.

206. PQ je průměr kružnice k; RS je tětiva kružnice k; jest $PQ \perp RS$. Je-li $\overline{PR} = 18{,}2$ cm; $\overline{RS} = 18{,}48$ cm, určete délky obou úseček, na které tětiva RS rozdělí průměr PQ.

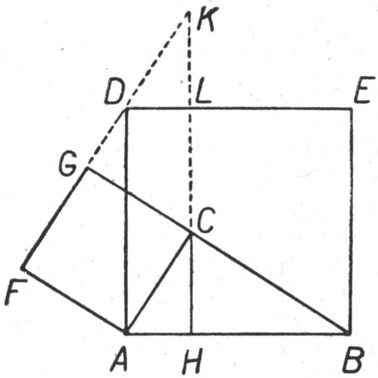
207. Řešte znovu úlohu **151**, užívajíce Euklidovy věty o výšce.

208. Ke kružnici k s poloměrem 65 mm jsou vedeny tečny z bodu P. Spojnice bodů dotyku je vzdálena 16 mm od středu S kružnice k. Vypočtěte vzdálenost $\overline{PS}$.

209. Tečny vedené z bodu A ke kružnici k o středu S mají body dotyku T_1, T_2. Je-li $\overline{AS} = 6{,}76$ m a je-li 1 m vzdálenost bodu S od přímky T_1T_2, vypočtěte poloměr kružnice k a délku tětivy T_1T_2.

210. Rovnostranný trojúhelník s délkou strany 53 mm proměňte na čtverec. Potom vypočtěte na dvě platné cifry stranu čtverce a přesvědčte se, jak přesně jste rýsovali.

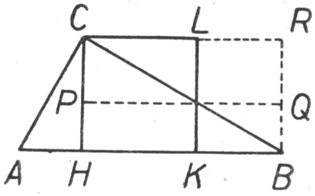
211. a) Sestrojte úsečku délky $\sqrt{38}$ cm. [Zvolte si dvě čísla a, b tak, aby se nelišila příliš od sebe a aby bylo $a \cdot b = 38$, na př. $a = 5$, $b = \frac{38}{5}$; potom sestrojte střední geometrickou úměrnou dvou úseček, jejich délky jsou a cm, b cm. Není výhodné voliti na př. $a = 2$, $b = 19$ nebo $a = 1$, $b = 38$.]



Obr. 113.

b) Sestrojte délku $\sqrt{31}$ cm.
c) Sestrojte délku $\sqrt{9{,}6}$ dm.

212. Proveďte důkaz Euklidovy věty o odvěsně na základě obr. **113.** [*ABED*, *ACGF* jsou čtverce; máte dokázati, že čtverec *ACGF* se rovná obdélníku *ADLH*.]



Obr. 114.

213. Proveďte důkaz Euklidovy věty o výšce na základě obr. 114. [Čtverec *HKLC* se rovná obdélníku *CPQR* podle výsledku cvič. **200** a).]

Obsah.