

## Kössler, Miloš: Scholarly works

---

Miloš Kössler

Sur une formule de récurrence relative aux nombres premiers

Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1918, 1-3

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/501288>

### Terms of use:

© Akademie věd ČR, 1917

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## Sur une formule de récurrence relative aux nombres premiers.\*)

Par MILOŠ KÖSSLER.

La fonction  $\xi(s)$  est définie par la formule d'Euler

$$\xi(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-s}},$$

où  $p_1, p_2, \dots$  sont les nombres premiers  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$  et ainsi de suite. Posons

$$\Phi(s) + 1 = \xi(s) \cdot (1 - p_1^{-s}) (1 - p_2^{-s}) \dots (1 - p_{k-1}^{-s}).$$

Nous en déduisons facilement

$$\Phi(s) + 1 = 1 + \frac{1}{p_k^s} + \frac{1}{p_{k+1}^s} + \dots \dots \dots (1.)$$

où chaque terme de la série est plus petit que le précédent.

On obtient à l'aide de la formule (1)

$$\frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)} = p_k^2 \frac{1 + \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s + \left(\frac{p_k}{p_{k+2}}\right)^s + \dots}{1 + \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^{s+2} + \left(\frac{p_k}{p_{k+2}}\right)^{s+2} + \dots} \dots (2.)$$

En posant

$$\varphi(s) = \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s + \left(\frac{p_k}{p_{k+2}}\right)^s + \dots,$$

on a

$$\varphi(s) < p_k^2 \left[ \frac{1}{p_{k+1}^s} + \frac{1}{(p_{k+1} + 1)^s} + \frac{1}{(p_{k+1} + 2)^s} + \dots \right],$$

---

\* ) O rekurentním vzorci pro prvočísla. Rozpravy České Akademie XXVI. 1917.

mais

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p_{k+1}^s} + \frac{1}{(p_{k+1} + 1)^s} + \frac{1}{(p_{k+1} + 2)^s} + \dots = \\ & = \frac{1}{(s-1) p_{k+1}^{s-1}} + \frac{1}{2 p_{k+1}^s} + \frac{\Theta \cdot s}{12 \cdot p_{k+1}^{s+1}}, \end{aligned}$$

$$0 < \Theta < 1;$$

donc

$$\varphi(s) < \left( \frac{p_k}{p_{k+1}} \right)^s \cdot \left[ \frac{p_{k+1}}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{s \cdot \Theta}{12 p_{k+1}} \right] \dots \dots \dots (3.)$$

Si nous prenons

$$s - 1 > 8 p_{k+1}, \dots \dots \dots (3a)$$

nous pouvons écrire

$$\frac{s}{12 p_{k+1}} > \frac{1}{2} + \frac{p_{k+1}}{s-1};$$

donc

$$\varphi(s) < \left( \frac{p_k}{p_{k+1}} \right)^s \cdot \frac{s}{6 p_{k+1}} \dots \dots \dots (4.)$$

Alors on aura d'après (2)

$$p_k^2 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)} \dots \dots \dots (5.)$$

Cette formule donne une solution du problème proposé. Mais on peut déduire de l'équation (2) une autre solution d'une forme beaucoup plus simple.

Or on a d'après (2) et (4)

$$p_k^2 < \frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)} < p_k^2 + \frac{p_k^2 s}{6 p_{k+1}} \left( \frac{p_k}{p_{k+1}} \right)^s.$$

Si l'on peut trouver un nombre entier  $\sigma$  de sorte que

$$\frac{p_k \cdot \sigma}{6} \left( \frac{p_k}{p_{k+1}} \right)^{\sigma+1} < 1, \dots \dots \dots (6a)$$

on a aussi

$$\begin{aligned} & \frac{p_k s}{6} \left( \frac{p_k}{p_{k+1}} \right)^{s+1} < 1, \dots \dots \dots (6.) \\ & s \geq \sigma; \end{aligned}$$

donc

$$p_k^2 = E \left[ \frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)} \right]; \dots \dots \dots (6b.)$$

$F(x)$  désigne le plus grand entier contenu dans  $x$ .

Considerons l'inégalité évidente

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq \frac{p_k + 2}{p_k}$$

et l'inégalité de Čebyšev

$$p_k < 2 p_{k-1};$$

nous voyons que au lieu de (6a), on peut écrire

$$\frac{2 p_{k-1} \cdot \sigma}{6} < \left( \frac{p_{k-1} + 1}{p_{k-1}} \right)^{\sigma+1}.$$

Cette inégalité et l'inégalité (3a) admettent la solution

$$\sigma = 7 p_{k-1} \log p_{k-1},$$

$$p_{k-1} > 11$$

pour la quelle a *fortiori* a lieu l'inégalité (6a).

En substituant

$$s = 2 m, \quad (m \text{ entier})$$

$$\zeta(2 m) = \frac{2^{2 m-1} B_m \pi^{2 m}}{(2 m)!},$$

on obtient enfin l'équation (6b) sous la forme

$$p_k^2 = E \left[ (2 m + 1) (2 m + 2) \frac{2^{2 m-1} B_m \pi^{2 m} (1 - p_1^{-2 m}) (1 - p_2^{-2 m}) \dots}{2^{2 m+1} B_{m+1} \pi^{2 m+2} (1 - p_1^{-2 m-2}) (1 - p_2^{-2 m-2}) \dots} \dots \frac{\dots (1 - p_{k-1}^{-2 m}) - (2 m)!}{\dots (1 - p_{k-1}^{-2 m-2}) - (2 m-2)!} \right] \dots \dots \dots (7.)$$

$$p_{k-1} > 11, \quad m > 3 \cdot 5 p_{k-1} \log p_{k-1},$$

où  $B_m, B_{m+1}$  sont les nombres bien connus de Bernoulli.

Étant donnés les nombres premiers  $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$  d'indice plus petit que  $k$ , on peut, au moye de la formule (7), calculer le nombre premier  $p_k$ .