Miloš Kössler

Über Entwicklungen für analytische Funktionen

Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1917, 30-49

Über Entwicklungen für analytische Funktionen.

(Ein kurzgefaßter Inhalt der Abhandlung: O rozvojích platných pro funkci analytickou v daném oboru.)

Von M. KÖSSLER in Prag.

Vorgelegt am 11. November 1916.

Herr G. Faber hat in zwei Abhandlungen „Über polynomische Entwicklungen"[1]) einen Weg eingeschlagen, welcher einer wesentlichen Verallgemeinerung fähig ist. Wenn wir nämlich anstatt der konformen Abbildung des unendlichen Gebietes der z Ebene außerhalb einer regulären Kurve C auf das ganze Innere des Einheitskreises der τ Ebene eine allgemeinere Abbildung nur der Umgebung der Kurve C auf die Umgebung des Einheitskreises benützen, die nicht einmal überall konform und eineindeutig zu sein braucht, so werden wir durch das Integral von Cauchy zu einem allgemeineren Entwicklungssatze geführt. Dieser Satz I. liefert uns erstens eine Entwicklung für jede im Innern von C analytische Funktion und eine Nullentwicklung, welche für das Äußere der Kurve C gültig ist, zweitens eine Entwicklung für jede im Äußeren von C analytische Funktion und eine Nullentwicklung, die in Innern von C konvergiert.

Ich beschränke mich in diesem Auszuge auf den Beweis des allgemeinen Satzes I.; was die Beweise der Sätze II. bis VI. sowie der Folgerungen I. bis III. betrifft, so verweise ich auf die Originalabhandlung.

Im III. Abschnitte ist gezeigt, wie man die Ergebnisse für die Entwicklungspraxis verwerten kann.

I. Der allgemeine Entwicklungssatz.

Die Ebene der komplexen Veränderlichen z sei durch eine geschlossene oder unendliche Kurve C in zwei einfach zusammenhängende

[1]) Mathem. Ann. 1903, p. 389, 1907, p. 116.

Bereiche K_1 und K_2 geteilt. Wir bezeichnen mit k_ν jeden endlichen und geschlossenen Bereich, der ganz im Bereiche K_ν liegt und dessen Grenzen nirgends berührt.

Die Kurve C definieren wir durch die Gleichung

$$z = g(\tau), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

in welcher $g(\tau)$ eine eindeutige Funktion bedeutet. Diese Funktion sei im Kreisringe

$$1 > r \leqq |\tau| \leqq R > 1$$

und in der Umgebung jedes Punktes an seinen Grenzen analytisch und soll folgende Eigenschaften besitzen.

1. Wenn τ die Punkte des Einheitskreises durchläuft, das ist, wenn

$$\tau = e^{i\varphi}, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,$$

so soll der durch die Gleichung (1) definierte Punkt z in eigener Ebene entweder einen oder nacheinander mehrere reguläre Jordansche Bogen durchlaufen, die in ihrer Gesamtheit die Kurve C bilden. Es soll dabei möglich sein, daß sich einige Teile oder auch ganze Bogen decken, so daß zweien oder auch mehreren Punkten des Einheitskreises *ein einziger* Punkt der Kurve C entspricht. Die Punkte, in welchen einzelne Bogen aneinander grenzen, teilen die Kurve C in einige Teile, die wir *Stücke* benennen wollen.

2. Wenn τ den Einheitskreis im positiven Sinne einmal umkreist, so soll der Punkt z das k-te Stück der Kurve C n_k-mal im positiven und (n_k-1)-mal im negativen Sinne durchlaufen. Den Sinn denken wir uns dabei im Bezuge auf den Bereich K_1 definiert. Die Integration längs aller Jordanschen Bogen ist dann äquivalent mit der einfachen Integration längs der Kurve C im positiven Sinne.

Es ist ersichtlich, daß die Anzahl der Jordanschen Bogen sich nur dann von der Einheit unterscheiden wird, wenn mindestens in einem Punkte τ_1 des Einheitskreises die Gleichung

$$g'(\tau_1) = 0$$

erfüllt ist.[1]) In einem solchen Punkte grenzen dann zwei Jordansche Bogen aneinander. Existiert kein solcher Punkt τ_1, so definiert die Gleichung (1) einen einzigen glatten regulären Bogen.

Die Kurven, welche eine solche abbildende Funktion (1) zulassen, bilden eine sehr ausgedehnte Gruppe. So gehört zu ihnen z. B. jede reguläre Kurve überhaupt; eine solche besitzt sogar eine unbegrenzte Anzahl von solchen abbildenden Funktionen (siehe z. B. II. § 1).

Auf den Satz von Cauchy gestützt beweisen wir jetzt folgenden allgemeinen Entwicklungssatz.

---

[1]) Daraus folgt, daß die durch die Gleichung (1) gegebene Abbildung nicht überall konform zu sein braucht.

Satz I. Wir bezeichnen mit γ den Einheitskreis in der τ Ebene und mit $h(\tau)$ eine beliebige Funktion, die analytisch und von Null verschieden ist in der Umgebung jedes Punktes auf der Peripherie von γ.

Das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{h(\tau)\,g'(\tau)\,\tau^{-(k+1)}}{g(\tau)-z}\,d\tau = l_k(z)$$

definiert die Funktion $b_k(z)$, welche im Bereiche K_1 analytisch ist.

Dasselbe Integral definiert im Bereiche K_2 eine *andere* analytische Funktion $c_k(z)$.

1. Jede Funktion $F_1(z)$, die im Bereiche K_1[1]) und in der Umgebung jedes Punktes auf der Kurve C analytisch ist, gibt Anlaß zu zwei Entwicklungen

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha)\quad F_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, b_k(z),\\
&\beta)\quad 0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, c_k(z),\\
&A_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{F_1[g(\tau)]\,\tau^k\,d\tau}{h(\tau)}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Die Reihe α) ist absolut und gleichmäßig konvergent in jedem Bereiche k_1, die Reihe β) in jedem Bereiche k_2.

2. Jede Funktion $F_2(z)$, die im Bereiche K_2 und in der Umgebung jedès Punktes auf der Kurve C analytisch ist, gibt Anlaß zu zwei Entwicklungen

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma)\quad F_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k\, c_k(z),\\
&\delta)\quad O = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k\, b_k(z),\\
&B_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{F_2[g(\tau)]\,\tau^k\,d\tau}{h(\tau)}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2a)$$

Die Reihe γ) ist absolut und gleichmäßig konvergent in jedem Bereiche k_2 und die Reihe δ) in jedem Bereiche k_1.

Die Funktionen $b_k(z)$ und $c_k(z)$ hängen von der Form der Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ nicht ab.

Beweis. Es sei zuerst die Kurve C geschlossen und im Endlichen: das durch sie begrenzte endliche Gebiet bezeichnen wir als K_1.

Nach dem Cauchyschen Satze ist dann

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F_1(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{F_1[g(\tau)]}{h(\tau)}\cdot\frac{h(\tau)\,g'(\tau)\,d\tau}{g(\tau)-z} \quad \ldots . (3)$$

---

[1]) Wenn der Bereich den unendlichen Punkt enthält, so muß $F(z)$ außerdem noch die Bedingung

$$\lim_{z=\infty} z\,.\,F(z) = \text{einer endl. Konstante}$$

befriedigen.

Die Funktion $g(\tau)$ ist analytisch und also stetig in der Umgebung jedes Punktes auf dem Einheitskreise. Daraus folgt, daß die Gleichung (1) die nahe Umgebung des Einheitskreises in der τ Ebene auf die nahe Umgebung der Kurve C in der z Ebene abbildet. Wir denken uns z. B. in der τ Ebene einen engen Kreisring δ gezeichnet, der den Mittelpunkt im Anfange hat und so gelegen ist, daß die Peripherie des Einheitskreises γ in diesem Bereiche δ liegt. Durch die Gleichung (1) wird dieser Kreisring auf einen Bereich d der z Ebene abgebildet, welcher so geformt ist, daß die Peripherie der Kurve C in ihm liegt. Wie die Grenzen dieses Bereiches d geformt sind, davon brauchen wir gar nichts zu wissen. Nur eines ist sicher. Wenn sich nämlich die Grenzen des Kreisringes δ *beiderseits* der Peripherie des Einheitskreises γ nähern, so werden sich auch die Grenzen des Bereiches d der Peripherie der Kurve C so nähern, daß im Grenzfalle sich der Bereich δ auf die bloße Peripherie von γ und der Bereich d auf die bloße Peripherie von C reduziert. Das ist eine selbstverständliche Folge der Stetigkeit der Funktion $g(\tau)$.

Wir denken uns jetzt im Bereiche K_1 einen beliebigen Bereich k_1. Nach dem Vorausgehenden können wir immer den Kreisring δ so eng wählen, daß sein Bild in der z Ebene — das ist der Bereich d — nirgends die Grenze des Bereiches k_1 berührt, so daß für alle Punkte des Kreisringes δ und für alle z des Bereiches k_1 die Ungleichung

$$|g(\tau) - z| > 0$$

erfüllt ist.

Bezeichnen wir weiter mit $h(\tau)$ eine beliebige im δ analytische Funktion, so definiert auch der Bruch

$$\frac{h(\tau) \, . \, g'(\tau)}{g(\tau) - z}$$

eine im Bereiche δ analytische Funktion der Veränderlichen τ, so daß wir die folgende Laurentsche Reihe aufschreiben können

$$\left.\begin{aligned} \frac{h(\tau) \, . \, g'(\tau)}{g(\tau) - z} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z) \, . \, \tau^k, \\ b_k(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(\tau)\, g'(\tau) \, . \, \tau^{-(k+1)} \, d\tau}{g(\tau) - z}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

deren Konvergenzbereich durch δ gegeben ist. Wenn also z einen festgewählten Punkt im Bereiche k_1 bezeichnet, so ist, wie bekannt, die Reihe (4) für alle Punkte τ auf der Peripherie von γ gleichmäßig konvergent. Wir können also die Entwicklung (4) in das Integral (3) einsetzen und gliedweise integrieren. Wenn weiter die beliebige Funktion $h(\tau)$ durch die Annahme beschränkt wird, daß sie sich in keinem Punkte τ auf der Peripherie von γ annulliert, so bekommen wir die Entwicklung (2) α).

Die Funktionen $b_k(z)$ sind dabei durch das Integral (4) definiert. Es kann leicht bewiesen werden, daß dieses Integral eine im ganzen Bereiche K_1 analytische Funktion darstellt. Das Integral kann nämlich auf die Form

$$b_k(z) = \int_\gamma S(\tau, z)\, d\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4 \text{ bis})$$

schematisiert werden. Die Funktion $S(\tau, z)$ ist eine stetige für beide Veränderlichen τ und z, solange nur τ auf der Peripherie von γ und z im k_1 verbleibt. Erteilt man ferner τ einen beliebigen Wert, so verhält sich $S(\tau, z)$, als Funktion von z allein betrachtet, im Bereiche k_1 analytisch. Daraus kann man schließen, daß $b_k(z)$ eine in jedem Bereiche k_1 analytische Funktion darstellt.[1]) Aus (4) ist auch ersichtlich, daß $b_k(z)$ von $F_1(z)$ unabhängig ist.

Ganz ähnlich leitet man die Entwicklung (2) β) ab. Wenn wir nämlich den Punkt z im Bereiche K_2, das ist außerhalb C wählen, so bekommen wir anstatt (3)

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F_1[g(\tau)]}{h(\tau)} \cdot \frac{h(\tau)\, g'(\tau)\, d\tau}{g(\tau) - z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3\,a)$$

und anstatt (4)

$$\left.\begin{aligned} \frac{h(\tau) \cdot g'(\tau)}{g(\tau) - z} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z) \cdot \tau^k, \\ c_k(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(\tau)\, g'(\tau) \cdot \tau^{-(k+1)}}{g(\tau) - z}\, d\tau \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (4\,a)$$

Der Bereich k_1 wird dabei gegen den Bereich k_2 vertauscht.

Die Funktionen $b_k(z)$ in (4) und $c_k(z)$ in (4a) sind nur scheinbar identisch. In der Formel (4) bedeutet nämlich z einen Punkt im Bereiche K_1. Die Verschiedenheit beider Funktionen begreift man am leichtesten an folgendem Beispiele.

Wir setzen

$$h(\tau) \equiv 1, \quad g(\tau) \equiv \tau.$$

Die Kurve C, die da durch die Gleichung

$$z = \tau$$

gegeben ist, wird zu dem Einheitskreise in der z Ebene. Durch K_1 bezeichnen wir das Innere, durch K_2 das Äußere dieses Kreises.

Die erzeugende Reihe (4) für die Funktionen $b_k(z)$ ist in diesem Falle

$$\frac{1}{\tau - z} = \frac{1}{\tau} + \frac{z}{\tau^2} + \frac{z^2}{\tau^3} + \ldots, \quad |\tau| \geqq 1, \quad |z| < |\tau|,$$

[1]) Siehe z. B. Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie I. B., 2. Aufl., p. 307, 7. Satz.

und also

$$b_0(z) = 0, \quad b_k(z) = 0,$$

$$b_{-k}(z) = z^{k-1}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Für $c_k(z)$ ist die erzeugende Entwicklung (4 *a*)

$$\frac{1}{\tau - z} = -\frac{1}{z} - \frac{\tau}{z^2} - \frac{\tau^2}{z^3} \ldots, \quad |z| > |\tau|$$

und also

$$c_0(z) = \frac{-1}{z}, \quad c_k(z) = -\frac{1}{z^{k+1}}$$

$$c_{-k}(z) = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die entsprechenden Entwicklungen (2) α) und (2 *a*) γ) sind da die Taylorsche und Laurentsche Reihe. Die Reihen (2) β) und (2 *a*) δ) reduzieren sich auf bloße Identitäten $0 = 0$.

Wir haben bisher angenommen, daß die Kurve C geschlossen und ganz im Endlichen gelegen ist. Jetzt wollen wir auch den Fall behandeln, daß sie sich ins Unendliche erstreckt. Wir denken uns den Bereich K_1 vollständig begrenzt durch einen Teil der Kurve C und durch einen Kreisbogen k, der den Mittelpunkt im Anfange und einen sehr großen Halbmesser hat. Die Funktion $F_1(z)$ muß dabei die Bedingung erfüllen

$$\lim z \,.\, F_1(z) = \text{einer endl. Konstante.}$$

Dann bekommen wir anstatt (3)

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{F_1(t)\,dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_k \frac{F_1(t)\,dt}{t - z}\,.$$

Das erste Integral ist längs des entsprechenden Teiles der Kurve C, das zweite längs des Kreisbogens k genommen. Bei unendlich wachsendem Halbmesser des letzteren verschwindet das zweite Integral und das erste erstreckt sich dann längs der ganzen Kurve C. Es behalten also die Gleichung (3) und die Entwicklungen (2) α) β) auch in diesem Falle ihre Gültigkeit.

Ein analoges Verfahren benützen wir in dem Falle, daß die Kurve C zwar geschlossen ist und ganz im Endlichen liegt, wir aber die Entwicklungen (2 *a*) für die Funktion $F_2(z)$ ableiten wollen. Den Kreisbogen k ersetzen wir durch den ganzen sehr großen Kreis. Mit wachsendem Halbmesser des letzteren konvergiert das längs dieses genommene Integral von Cauchy zur Null, so daß wir da anstatt (3) die Gleichung bekommen

$$F_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{F_2(t)\,dt}{t - z}\,.$$

Das negative Zeichen beim Integral wird folgendermaßen begründet. Wenn wir den Bereich K_2 im positiven Sinne umlaufen wollen, so müssen wir uns längs der Kurve C im entgegengesetzten Sinne bewegen als im Falle des positiven Umlaufes des Bereiches K_1. Die letzte Gleichung tritt an die Stelle von (3); dann benützt man die Entwicklung (4 *a*) und bekommt die Entwicklung (2 *a*) γ). Ganz ähnlich wird auch die Entwicklung (2 *a*) δ) bewiesen.

Um den Beweis des Satzes I. zu vervollständigen, müssen wir noch die gleichmäßige und absolute Konvergenz der Reihen (2) und (2 *a*) beweisen.

Wir denken uns im Bereiche K_1 einen kleineren und geschlossenen k_1. Bei der Ableitung der Entwicklung (4) haben wir bewiesen, daß man immer in der τ Ebene einen Kreisring δ so konstruieren kann, daß in ihm der Bruch

$$\frac{h(\tau) \,.\, g'(\tau)}{g(\tau) - z}$$

eine analytische Funktion der Veränderlichen τ darstellt, wenn nur z fest im k_1 gewählt ist. Die Grenzen des Kreisringes δ sind dabei zwei Kreise, von welchen der erste einen Halbmesser besitzt, der größer ist als 1 und der zweite einen Halbmesser, der kleiner ist als 1. Im Innern des Bereiches δ denken wir uns einen noch engeren Kreisring δ_1. Wir definieren ihn näher durch die Ungleichungen

$$1 < \lambda \geqq |\tau| \geqq \mu < 1.$$

In diesem Bereiche und auch in jedem Punkte an seiner Grenze konvergiert, wie bekannt, die Reihe (4) absolut bei festgewähltem z im k_1. Nach dem Cauchyschen Kriterium für absolute Konvergenz müssen also die Ungleichungen

$$\sqrt[n]{|b_n(z)|} \,.\, |\tau| \leqq 1, \quad \sqrt[n]{|b_{-n}(z)} \,.\, \frac{1}{|\tau|} \leqq 1$$

erfüllt werden für alle n, die größer sind als eine gewisse endliche und positive Zahl N'. In Verbindung mit den vorausgehenden Ungleichungen für τ bekommen wir also das Ergebnis

$$\sqrt[n]{|b_n(z)|} \leqq \frac{1}{\lambda} < 1; \quad \sqrt[n]{|b_{-n}(z)|} \leqq \mu < 1. \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Die Grenze N' ist dabei eine Funktion von z. Wenn also z nacheinander alle Punkte des Bereiches k_1 durchläuft, so wird sich dabei N' fortwährend ändern; sie bleibt aber immer *endlich*. Wenn wir also mit N die endliche und positive obere Grenze aller diesen Zahlen bezeichnen, so werden die Ungleichungen (5) für jedes

$$n > N$$

und für jedes z aus dem Bereiche k_1 erfüllt.

Einer ähnlichen Behandlung unterwerfen wir die Funktion

$$\frac{\tau \,.\, F_1[g(\tau)]}{h(\tau)},$$

die sich in der Umgebung jedes Punktes auf dem Einheitskreise der τ Ebene analytisch verhält. Man kann also immer einen Kreisring

$$1 < l \geqq |\tau| \geqq m < 1$$

auswählen in welchem der behandelte Bruch die Laurentsche Entwicklung besitzt

$$\frac{\tau \,.\, F_1[g(\tau)]}{h(\tau)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_k \tau^k,$$

$$E_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_1[g(\tau)]\,\tau^{-k}}{h(\tau)}\, d\tau.$$

Ganz analogisch, wie bei (5) kann man hier die Ungleichungen ableiten

$$\sqrt[n]{|E_n|} \leqq \frac{1}{l}, \quad \sqrt[n]{|E_{-n}|} \leqq m,$$

welche für alle n gelten, die nicht kleiner sind als eine positive und endliche Zahl N_1.

Wenn wir den Integralausdruck für E_n mit den Koeffizienten der Reihe (2) vergleichen, so sehen wir, daß

$$E_{-n} = A_n$$

und also

$$\sqrt[n]{|A_{-n}|} \leqq \frac{1}{l}, \quad \sqrt[n]{|A_n|} \leqq m \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5a)$$

Mit Rücksicht auf (5) können wir schreiben

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt[n]{|A_n b_n(z)|} < m < 1, \\ &\sqrt[n]{|A_{-n} b_{-n}(z)|} < \frac{1}{l} < 1 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

für alle z des Bereiches k_1 und für alle n, die größer sind als die größere der Zahlen N und N_1. Dabei sind l, m, N und N_1 von z *unabhängige* Konstanten.

Wenn wir nun die Glieder der absolut konvergenten Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{l^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} m^k$$

mit den Gliedern der Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} | A_k b_k (z) | , \quad \sum_{k=-1}^{-\infty} | A_k b_k (z) |$$

vergleichen, so sehen wir, daß alle Bedingungen des Weierstraßschen Kriteriums[1]) für absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k b_k (z)$$

im Bereiche k_1 erfüllt sind.

Durch eine fast unveränderte Betrachtung kann man auch die gleichmäßige und absolute Konvergenz der übrigen Reihen (2) und (2a) beweisen. Dadurch ist also der Beweis des *I.* Satzes im ganzen Umfange erledigt.

Die Entwicklungsfunktionen $b_k (z)$ und $c_k (z)$ sind in diesem Satze durch Kurvenintegrale definiert. Es wird uns aber in vielen Fällen gelingen, die Laurentsche Reihe der Funktion

$$\frac{h (\tau) . g' (\tau)}{g (\tau) - Z}$$

anders zu verwirklichen,[2]) wodurch wir auch zur bequemeren Definition der $b_k (z)$ und $c_k (z)$ gelangen.

Mit Hilfe der Ungleichungen (5) sind wir im Stande den folgenden Satz zu beweisen.

Satz II. Wenn die Reihe der sonst beliebigen Konstanten A_k die Ungleichungen erfüllt

$$\sqrt[k]{| A_k |} \leqq 1 , \qquad \sqrt[k]{| A_{-k} |} \leqq 1 ,$$

für alle Indexe k, die größer sind als eine endliche und positive Zahl N, so konvergieren absolut und gleichmäßig die Reihen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k b_k (z) , \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k c_k (z) ,$$

und zwar die erste in jedem Bereiche k_1 und die zweite in jedem Bereiche k_2. Es definiert also die erste Reihe eine im K_1 und die zweite eine im K_2 analytische Funktion.

Wir haben gesehen, daß uns jede Funktion $F_1 (z)$ oder $F_2 (z)$ zu einer *Nullentwicklung* (2) β) oder (2a) δ) führt. In manchen Fällen[3]) reduzieren sich diese Nullentwicklungen auf bloße Identitäten $0 = 0$; aber es geschieht nicht immer so. Ist z. B. *keine* der Funktionen $b_k (z)$ für ein positives oder negatives k identisch gleich Null, so existiert eine unbeschränkte Anzahl von nicht identisch verschwindenden Nullentwicklun-

[1]) Siehe z. B. Osgood. l. c. p. 96.
[2]) Siehe II., § 2, § 4 und III.
[3]) III. § 3.

gen. **Für** $h(\tau) = 1$ können wir sogar eine solche Entwicklung direkt ableiten. Sie lautet

$$O = -B_{-1} b_{-1}(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{k+1} b'_{-(k+2)}(a)\, b_k(z),$$

$$B_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\tau}{\tau[g(\tau) - a]}.$$

Dabei bedeutet a einen beliebigen im Bereiche K_1 liegenden Punkt; der Strich bei dem Summenzeichen soll die Weglassung des Index $k = -1$ andeuten.

Der folgende Satz ist nun evident.

Satz III. Wenn man mindestens eine nicht identisch verschwindende Nullentwicklung (2*a*) δ) ableiten kann, so existiert für jede Funktion $F_1(z)$ neben der *Hauptentwicklung* (2) α) eine unbeschränkte Anzahl von *Nebenentwicklungen* der Form

$$F_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (A_k + \lambda B_k)\, b_k(z).$$

Dabei ist λ eine beliebige Konstante.

Ein ähnlicher Satz ist auch für jede Funktion $F_2(z)$ gültig.

II. Entwicklungen, welche zur eineindeutigen und konformen Abbildung gehören.

§ 1. Allgemeine Entwicklungen.

Wie schon am Anfange gesagt wurde, beschränken wir uns im folgenden auf die bloße Aufzählung der Resultate. Die Beweise sind in der Originalabhandlung enthalten.

Die Kurve C sei durch einen einzigen einfachen glatten und geschlossenen Jordanschen Bogen gegeben. Das Innere bezeichnen wir als K_1, das Äußere als K_2.

Dann ist es immer möglich, eine unbeschränkte Anzahl von folgenden abbildenden Funktionen zu konstruieren.

Die Gleichung

$$z = g(\tau) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7_1)$$

soll das Innere und beide Grenzen des Kreisringes s_1 in der τ Ebene

$$1 > r_1 \leqq |\tau| \leqq R_1 > 1$$

eineindeutig stetig und, von einigen Punkten der Begrenzung abgesehen, auch konform auf die Umgebung der Kurve C in der z Ebene abbilden. Dabei sollen die Punkte auf der Peripherie des Einheitskreises γ in der

τ Ebene den Punkten auf der Peripherie der Kurve C in der z Ebene einander entsprechen.

In jedem Punkte des Bereiches s_1 ist

$$g'(\tau) \neq 0,$$

von jenen Punkten der Grenze abgesehen, in denen die Abbildung konform zu sein aufhört. Jedem Kreise in der τ Ebene, der den Mittelpunkt im Anfange hat und dessen Halbmesser ϱ_k die Ungleichungen erfüllt

$$r_1 \leqq \varrho_k \leqq R_1,$$

entspricht in der z Ebene eine gewisse Kurve C_k. Wir erteilen dem Halbmesser ϱ_k den Namen „das Parameter der Kurve C_k". Diese Kurven haben folgende Eigenschaften:

1. Jede Kurve C_k wird durch einen einzigen glatten und geschlossenen Jordanschen Bogen gebildet, welcher sich nirgends schneidet. Auch zwei verschiedene Kurven C_k schneiden sich nicht.

2. Die Grenzkurven, welche den Parametern R_1 und r_1 entsprechen, können Ecken besitzen und zwar in den Punkten, wo

$$g'(\tau) = 0.$$

3. Den Parametern $\varrho_k < 1$ entsprechen die Kurven eines Bereiches, z. B. K_1, den Parametern $\varrho_k > 1$ die Kurven des zweiten Bereiches.

Das Innere der Kurve C_k bezeichnen wir mit $K_1^{(k)}$, das Äußere mit $K_2^{(k)}$.

Die analytische und sonst beliebige Funktion $h(\tau)$ sei im Bereiche

$$1 < R_2 \geqq |\tau| \geqq r_2 < 1$$

definiert. Im folgenden bezeichnen wir mit R die *kleinere* der beiden Zahlen R_1, R_2, mit r die *größere* der Zahlen r_1, r_2 und mit s den Kreisring, welcher von den Kreisen mit den Halbmessern R und r begrenzt ist.

Satz IV. Die Kurve C_k, welche zum Parameter ϱ_k gehört, teilt die z Ebene in die Bereiche $K_1^{(k)}$ und $K_2^{(k)}$.

Jede Funktion $F_1^{(k)}(z)$, welche im $K_1^{(k)}$ und in der Umgebung jedes Punktes auf der Kurve C_k sich analytisch verhält, gibt Anlaß zu den Entwicklungen

$$\left.\begin{aligned} &\alpha) \quad F_1^{(k)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, b_n(z)\,, \\ &\beta) \qquad\quad 0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, c_n(z)\,, \\ &A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho_k} \frac{F_1^{(k)}[g(\tau)]\, \tau^n\, d\tau}{h(\tau)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Jede Funktion $F_2^{(k)}(z)$, welche im $K_2^{(k)}$ und in der Umgebung jedes Punktes auf der Kurve C_k analytisch ist, gibt Anlaß zu den Entwicklungen

$$\left.\begin{aligned} &\gamma)\quad F_2^{(k)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n\, c_n(z)\,, \\ &\delta)\quad 0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n\, b_n(z)\,, \\ &B_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varrho k} \frac{F_2^{(k)}[g(\tau)]\,\tau^n\, d\tau}{h(\tau)}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (7a)$$

Die Funktionen $b_n(z)$ und $c_n(z)$ ändern sich *nicht* mit dem Parameter ϱk. Im übrigen ist alles, was in dem Satze I. von den Entwicklungen (2) und (2*a*) gesagt wurde, auch für die Entwicklungen (7) und (7*a*) gültig mit der einzigen Abänderung, daß man anstatt K_1 und K_2 sich $K_1^{(k)}$ und $K_2^{(k)}$ denken muß.

Der wesentliche Unterschied zwischen diesem und dem I. Satze liegt darin, daß im I. Satze die Funktionen $b_n(z)$ und $c_n(z)$ zu einer *einzigen* Kurve C gehören, während sie im IV. Satze der ganzen Gruppe der Kurven C_k zugeordnet sind.

Anstatt des II. Satzes erhalten wir da den

Satz V. 1. Wenn die Reihe der sonst beliebigen Konstanten A_n die Ungleichungen erfüllt

$$\sqrt[n]{|A_n|} < R\,, \qquad \sqrt[n]{|A_{-n}|} < \frac{1}{\varrho k}$$

für alle Indexe n, die größer sind als eine endliche positive Zahl N, so konvergiert absolut und gleichmäßig die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, b_n(z)$$

in jedem endlichen Bereiche k_1, der ganz im $K_1^{(k)}$ so liegt, daß die Grenzen beider Bereiche sich nirgends berühren.

2. Wenn die Reihe der sonst beliebigen Konstanten B_n die Ungleichungen erfüllt

$$\sqrt[n]{|B_n|} < \varrho k\,, \qquad \sqrt[n]{|B_{-n}|} < \frac{1}{r}$$

für alle Indexe n, die größer sind als eine endliche positive Zahl N, so konvergiert absolut und gleichmäßig die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n\, c_n(z)$$

in jedem endlichen Bereiche k_2, der ganz im $K_2^{(k)}$ so gelegen ist, daß die Grenzen beider Bereiche sich nirgends berühren.

3. Wenn die Reihe der sonst beliebigen Konstanten D_n die Ungleichungen erfüllt

$$\sqrt[n]{|D_n|} < \varrho k\,, \qquad \sqrt[n]{|D_{-n}|} < \frac{1}{\varrho k}$$

für alle Indexe n, die größer sind als N, so konvergieren absolut und gleichmäßig die Reihen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, b_n(z)\,, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, c_n(z)\,,$$

und zwar die erste in jedem Bereiche k_1 und die zweite in jedem Bereiche k_2.

Alle diese Bedingungen sind für die absolute und gleichmäßige Konvergenz hinreichend, aber nicht notwendig.

§ 2. **Polynomische Entwicklungen von Faber.**

Die einfachste Form, welche die Gleichung der Kurve C einnehmen kann, entsteht, wenn die abbildende Funktion

$$z = g(\tau)$$

das ganze Äußere der Kurve C in der z Ebene auf das ganze Äußere des Einheitskreises in der τ Ebene abbildet oder wenn diese Abbildung das Innere beider eben genannten Kurven betrifft. Aus der Lehre von der konformen Abbildung ist bekannt, daß im erstgenannten Falle die abbildende Funktion die Form hat

$$z = \alpha\tau + P\left(\frac{1}{\tau}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Die Potenzreihe

$$P\left(\frac{1}{\tau}\right) = a_0 + a_1\tau^{-1} + a_2\tau^{-2} + \ldots$$

konvergiert im Bereiche

$$|\tau| > 1 - \eta,$$

wobei η eine positive Zahl bedeutet, die kleiner ist als die Einheit. Mit Hinsicht auf (4) erhält man da durch eine kurze Rechnung bei der Wahl $h(\tau) \equiv 1$

$$\left.\begin{array}{c} b_{-1}(z) = 1\,; \quad b_n(z) = 0, \quad n \geqq 0 \\ \alpha\,.\,b_{-n}(z) = b_{-n+1}(z)\,.\,(z - a_0) - b_{-n+2}(z)\,.\,a_1 - \ldots - b_{-1}(z)\,.\,a_{n-2} - (n-2)\,a_{n-2} \\ n \geqq 2. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Es ist also $b_{-n}(z)$ ein Polynom $(n-1)$sten Grades der Größe $\left(\frac{z - a_0}{\alpha}\right)$, dessen erstes Glied ist

$$\left(\frac{z - a_0}{\alpha}\right)^{n-1}.$$

Wir erhalten für $F_1^{(k)}(z)$ eine polynomische Entwicklung von der Torm (7) α), welche im wesentlichen mit der Faberschen[1]) identisch ist.

Die allgemeinste Form der Funktion $h(\tau)$ ist

---

[1]) Math. An. l. c.

$$\left.\begin{array}{c} h(\tau) = \sum\limits_{n=-\infty}^{n=m} d_n \tau^n , \\ \lambda \leqq |\tau| \leqq \varkappa > 1 \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (10)$$

Die Größe m ist entweder eine positive endliche oder unendliche ganze Zahl oder eine endliche negative ganze Zahl.

Wir bezeichnen diesmal die zugehörigen Entwicklungsfunktionen mit $\beta_n(z)$, für welche wir die Rekursionsformeln bekommen

$$\left.\begin{array}{c} \beta_m(z) = 0, \quad \beta_{m+k}(z) = 0, \\ \beta_{m-k}(z) = d_m^1 b_{-k}(z) + d_{m-1} b_{-k+1}(z) + \dots + d_{m-k+1} \cdot b_{-1}(z) \\ m \text{ endlich}, \quad k \geqq 1; \\ \beta_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_{n+k} b_{-k}(z), \quad m \text{ unendlich}, \end{array}\right\} \dots (11)$$

wobei $b_{-k}(z)$ durch die Gleichungen (9) bestimmt werden. Bei endlichem m ist also $\beta_n(z)$ ein Polynom $(m - n - 1)$-ten Grades der Größe

$$\frac{z - a_0}{\alpha}.$$

Wir erhalten für $F_1^{(k)}(z)$ eine Entwicklung der Form (7) α) nach den Funktionen (11).

Dabei ist erstens die Kurve C_k auf die Ungleichungen

$$\varrho_k > 1 - \eta, \quad \lambda \leqq \varrho_k \leqq \varkappa$$

gebunden und zweitens darf der Kreis ϱ_k durch keinen Nullpunkt der Funktion $h(\tau)$ durchgehen. Über die Bedeutung dieser Punkte für die Nullentwicklungen wird im folgenden die Rede sein.

Der zweite einfache Fall ist durch die konforme Abbildung des Innern des Einheitskreises auf das Innere der Kurve C gegeben. Die abbildende Funktion ist da

$$z = P(\tau) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (12)$$

$$P(\tau) = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + \dots,$$

$$|\tau| < 1 + \eta.$$

Dabei bedeuten a_k und η andere Zahlen als in (8).

Für $h(\tau) = 1$ erhalten wir

$$\left.\begin{array}{c} c_0(z) = \dfrac{a_1}{a_0 - z}, \quad c_{-n}(z) = 0 \\ c_n(z)(a_0 - z) + c_{n-1}(z) a_1 + \dots + c_0(z) \cdot a_n = (n+1) a_{n+1}, \\ n \geqq 1. \end{array}\right\} (13)$$

Es ist also $c_n(z)$ ein Polynom $(n+1)$-ten Grades der Größe

$$\frac{\alpha_1}{a_0 - z}.$$

Wir erhalten für jede Funktion $F_\gamma^{(k)}(z)$ eine Entwicklung von der Form (7a) γ), welche ein Gegenstück zu den polynomischen Entwicklungen von Faber bildet.

Im allgemeinsten Falle ist

$$h(\tau) = \sum_{n=-m}^{\infty} d_n \tau^n,$$

$$1 > \lambda \leqq |\tau| \leqq \varkappa,$$

wobei m eine endliche positive oder negative oder auch eine unendliche positive Zahl bedeutet. Die Entwicklungsfunktionen bezeichnen wir diesmal mit $\gamma_n(z)$. Man findet

$$\left.\begin{array}{c} \gamma_{-m}(z) = 0, \quad \gamma_{-m-k}(z) = 0, \\ \gamma_{-m+k}(z) = d_{-m}c_k(z) + d_{-m+1}c_{k-1}(z) + \ldots + d_{-m+k} \cdot c_0(z); \\ m \text{ endlich, } k \geqq 1; \\ \gamma_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{n-k} \cdot c_k(z), \quad m \text{ unendlich.} \end{array}\right\} \tag{14}$$

Jede Funktion $F_2^{(k)}(z)$ besitzt also eine Entwicklung von der Form (7 a) γ)

$$F_2^{(k)}(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} B_n \gamma_n(z).$$

Die Peripherie des Kreises ϱ_k darf auch diesmal keinen Nullpunkt der Funktion $h(\tau)$ berühren.

§ 3. Gleichmäßig konvergente Reihen nach den Polynomen $\beta_n(z)$ oder $\gamma_n(z)$ und die Nullentwicklungen.

Ist eine Reihe beliebiger Konstanten A_n gegeben, so wird die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n \beta_n(z)$$

nach dem Sazte V. beurteilt. Außerdem kann folgender Satz bewiesen werden.

Satz VI. Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n \beta_n(z)$$

absolut und gleichmäßig im Inneren der Kurve C_k und auch in der Umgebung jedes Punktes auf dieser Kurve, so kann man eine Funktion $G(z)$ durch die Reihe definieren

$$G(z) = h[\gamma(z)] \sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n \gamma^n(z),$$

die in der Umgebung jedes Punktes auf der Kurve C_k sich analytisch verhält und die Eigenschaft besitzt, daß

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho_k} \frac{G[g(\tau)]\,\tau_n\,d\tau}{h(\tau)}.$$

Dabei ist $\gamma(z)$ die inverse Funktion zur Gleichung (8). Für das Innere der Kurve C_k ist

$$\sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n \beta_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{G(t)\,dt}{t-z}.$$

Dieser Satz ist nur fürs endliche m gültig.

Für die *Nullentwicklungen* nach den Polynomen $\beta_n(z)$ erhalten wir drei Folgerungen.

Folgerung I. Existiert überhaupt eine Nullentwicklung

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n \beta_n(z),$$

die im Innern der Kurve C_k und in der Umgebung jedes Punktes dieser Kurve absolut und gleichmäßig konvergiert, so kann man die Koeffizienten durch folgende gemeinsame Formel ausdrücken

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho_k} \frac{G[g(\tau)]\,\tau^n\,d\tau}{h(\tau)};$$

dabei ist $G(z)$ eine Funktion, die sich in der Umgebung jedes Punktes auf der Kurve C_k und in dem ganzen Teile der z Ebene analytisch verhält, den das Äußere der Kurve C_k bildet; außerdem ist

$$\lim_{z=\infty} z \,.\, G(z) = \text{eine endl. Konstante.}$$

Folgerung II. Aus den Polynomen (9) oder (11) kann man bei endlichem m *keine* Nullentwicklungen konstruieren, welche im Innern der Kurve C_k und in der Umgebung jedes Punktes auf dieser Kurve absolut und gleichmäßig konvergiere, solange nur die Funktion $h(\tau)$ *keinen* Nullpunkt im Äußeren des Kreises ϱ_k besitzt.

Infolgedessen ist jede absolut und gleichmäßig konvergente Entwicklung nach diesen Polynomen eine *Hauptentwicklung* für eine nicht identisch verschwindende analytische Funktion.

Auf die Frage, wann also die Nullentwicklungen existieren, gibt die Antwort folgende

Folgerung III. Die Nullentwicklungen für das Innere der Kurve C_k nach den Polynomen (11) existieren nur in diesen zwei Fällen:

1. Die Zahl m ist endlich und die Funktion $h(\tau)$ hat im Bereiche (10) mindestens einen Nullpunkt τ_1, welcher die Ungleichung erfüllt

$$|\tau_1| > \varrho_k .$$

2. Die Zahl m ist positiv und unendlich.

Diese Bedingungen sind für die Existenz der Nullentwicklungen notwendig und hinreichend.

Wir haben bisher in diesem Paragraphen ausschließlich von den Polynomen (11) gesprochen; alle diese Betrachtungen könnten wir aber fast unverändert auf die Funktionen (14) übertragen. Wir erhalten wieder einen Satz und drei Folgerungen, welche man aus dem Satze VI. und den Folgerungen I., II., III. folgendermaßen bekommt. Es werden die Worte „das Innere der Kurve C_k" gegen die Worte „das Äußere der Kurve C_k" und die Funktionen „(11)" — das ist „$\beta_n(z)$" — gegen die Funktionen „(14)" — das ist „$\gamma_n(z)$" — vertauscht.

III. Entwicklungen, welche zu den rationalen Kurven gehören.

Die Kurve C sei algebraisch und rational. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Kurve kann man, wie bekannt, mit Hilfe zweier rationalen Funktionen des Parameters η in der Form ausdrücken

$$x = u_1(\eta), \quad y = v_1(\eta),$$
$$-\infty \leqq \eta \leqq +\infty .$$

Durch die Transformation

$$\eta = i\frac{1+\tau}{1-\tau}, \quad \tau = e^{i\varphi},$$
$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$$

erhalten wir daraus eine neue parametrische Gleichung, mit deren Hilfe wir den Ausdruck konstruieren

$$x + iy = \frac{u(\tau)}{v(\tau)},$$

wobei $u(\tau)$ und $v(\tau)$ teilfremde Polynome der Veränderlichen τ bedeuten. Dadurch haben wir für die Kurve C eine abbildende Funktion

$$z = \frac{u(\tau)}{v(\tau)} = g(\tau) \qquad \text{(15)}$$

konstruiert, welche die Form der Gleichung (1) oder (7_1) besitzt. Man kann also dazugehörige Entwicklungen (2), (2a) oder (7) und (7a) für die im

Innern oder im Äußern der Kurve C analytischen Funktionen sofort aufschreiben. Es ist aber dabei möglich, die Entwicklungsfunktionen $b_k(z)$ oder $c_k(z)$ explicit darzustellen, ohne das Kurvenintegral benützen zu müssen. Mit Rücksicht darauf, daß die in der Gleichung (15) auftretenden Funktionen $u(\tau)$ und $v(\tau)$ Polynome sind, können wir schreiben

$$\left.\begin{aligned} v(\tau) &= b_0(\tau-\beta_1)(\tau-\beta_2)\ldots(\tau-\beta_m), \\ u(\tau)-z\,v(\tau) &= a_0(\tau-\alpha_1)(\tau-\alpha_2)\ldots(\tau-\alpha_n), \\ & m \geqq m. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(16)$$

Die Zahlen b_0 und alle β_k sind von z unabhängige Konstanten, während a_0 und alle α_k als algebraische Funktionen der Veränderlichen z aufgefaßt werden müssen. Es sei

$$|\beta_1| \leqq |\beta_2| \leqq |\beta_3| \leqq \ldots \leqq |\beta_m|$$

und bei festgewähltem z

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq |\alpha_3| \leqq \ldots \leqq |\alpha_n|.$$

Wenn die Kurve C geschlossen ist und z einen Punkt in ihrem Innern bedeutet, so kann man folgende Sätze beweisen.

A. Keine von den Zahlen α und β ist dem absoluten Betrage nach gleich der Einheit.

B. Bezeichnen wir mit p die Anzahl der Konstanten β, welche dem absoluten Betrage nach kleiner sind als die Einheit, so sind von den Zahlen α $(p+1)$ dem absoluten Betrage nach kleiner als die Einheit. Diese Anzahl ist von der Lage des Punktes z im Inenrn der Kurve C unabhängig und jede symmetrische Funktion dieser $(p+1)$ Größen ist für den Bereich K_1 eine *eindeutige* Funktion der Veränderlichen z.

C. Wenn der Punkt z im Äußern der Kurve C liegt, so ist die Anzahl der Wurzeln α, welche kleiner sind als die Einheit, gleich der Zahl p.

Wir wählen die beliebige Funktion am einfachsten, d. i. gleich der Einheit; dann werden die Funktionen $b_k(z)$ durch die Entwicklung (4) definiert

$$\frac{g'(\tau)}{g(\tau)-Z} = \frac{\frac{d}{d\tau}[g(\tau)-z]}{g(\tau)-z} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tau-\alpha_k} - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\tau-\beta_k},$$

also nach dem Vorhergesagten

$$\frac{g'(\tau)}{g(\tau)-z} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1}\tau^k\left[\alpha_1^{-(k+1)}+\alpha_2^{-(k+1)}+\ldots+\alpha_{p+1}^{-(k+1)}-\beta_1^{-(k+1)}-\beta_2^{-(k+1)}-\ldots-\beta_p^{-(k+1)}\right]+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\tau^k\left[\beta_{p+1}^{-(k+1)}+\beta_{p+2}^{-(k+1)}+\ldots+\beta_m^{-(k+1)}-\alpha_{p+2}^{-(k+1)}-\alpha_{p+3}^{-(k+1)}-\ldots-\alpha_n^{-(k+1)}\right].$$

Daraus sieht man, daß

$$\left.\begin{aligned} b_k(z) &= [\beta_{p+1}^{-(k+1)} + \ldots + \beta_m^{-(k+1)} - \alpha_{p+2}^{-(k+1)} - \ldots - \alpha_n^{-(k+1)}], \quad k \geqq 0; \\ b_k(z) &= -[\beta_1^{-(k+1)} + \ldots + \beta_p^{-(k+1)} - \alpha_1^{-(k+1)} - \ldots - \alpha_{p+1}^{-(k+1)}], \quad k < 0. \end{aligned}\right\} \ldots (17)$$

Ähnlich erhält man für die Funktionen $c_k(z)$

$$\left.\begin{aligned} c_k(z) &= [\beta_{p+1}^{-(k+1)} + \ldots + \beta_m^{-(k+1)} - \alpha_{p+1}^{-(k+1)} - \ldots - \alpha_n^{-(k+1)}], \quad k \geqq 0; \\ c_k(z) &= -[\beta_1^{-(k+1)} + \ldots + \beta_p^{-(k+1)} - \alpha_1^{-(k+1)} - \ldots - \alpha_p^{-(k+1)}], \quad k < 0. \end{aligned}\right\} \ldots (17a)$$

Sucht man also die Entwicklung für eine Funktion $F(z)$, welche im Innern oder Äußern einer rationalen Kurve sich analytisch verhält, so konstruiert man zuerst mit Hilfe der parametrischen Gleichung die abbildende Funktion (15), berechnet dann aus (16) die Wurzeln β und α, aus diesen baut man die Entwicklungsfunktionen (17) oder (17a) auf und benützt dann den Satz I. oder IV.

So hat z. B. die *Ellipse*

$$x = a\cos\varphi = a\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad y = b\sin\varphi = b\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,$$

die abbildende Funktion (15)

$$z = x + iy = \frac{\tau^2(a+b) + a - b}{2\tau}.$$

Aus (16) berechnen wir

$$\beta_1 = 0; \quad m = p = 1;$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{z \mp \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a+b}.$$

Bedeutet z einen inneren Punkt der Ellipse, so ist nach dem Satze B. $|\alpha_1| < 1$, $|\alpha_2| < 1$ und nach (17)

$$b_k(z) = 0, \quad k \geqq 0;$$

$$b_k(z) = \alpha_1^{-(k+1)} + \alpha_2^{-(k+1)}, \quad k < 0.$$

Jede im Innern der Ellipse analytische Funktion besitzt also die Entwicklung (2) α)

$$F_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} \frac{(z - \sqrt{z^2 - a^2 + b^2})^{k-1} + (z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2})^{k-1}}{(a+b)^{k-1}}.$$

Bedeutet z einen äußeren Punkt der Ellipse, so ist $|\alpha_1| < 1$, $|\alpha_2| > 1$ und nach (17 a)

$$c_k(z) = -\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a+b}\right)^{-(k+1)}, \quad k \geqq 0;$$

$$c_k(z) = \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a + b}\right)^{-(k+1)}, \quad k < 0.$$

Jede im Äußern der Ellipse analytische Funktion besitzt also die Entwicklung (2 a) γ)

$$F_2(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} B_k \left(\frac{a + b}{z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}\right)^{k+1} + \sum_{k=-1}^{-\infty} B_k \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a + b}\right)^{-(k+1)}.$$

Die *Nullentwicklung* (2 a) δ) reduziert sich nach der Folgerung II. auf die bloße Identität $0 = 0$. Dagegen existiert immer die Nullentwicklung (2) β). So ist z. B. für $F_1(z) = z$

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\tau^2 (a + b) + a - b}{2} \cdot \tau^{k-1} d\tau$$

und also

$$2 \cdot A_{-2} = a + b, \quad 2 \cdot A_0 = a - b;$$

für alle übrigen Indexe k ist $A_k = 0$. Daraus folgt nach (2) β)

$$(a + b) \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a + b} - (a - b) \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a + b} = 0.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung ist evident; man kann anstatt dessen schreiben

$$\left(\frac{z - \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a + b}\right)^k = \left(\frac{a - b}{z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}\right)^k.$$

Es existieren also unbeschränkt viele Nullentwicklungen von der Form

$$\sum_{k=1}^{n} D_n \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a + b}\right)^k - \sum_{k=1}^{n} D_n \left(\frac{a - b}{a + b}\right)^k \left(\frac{a + b}{z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}\right)^k = 0,$$

wobei die D_n beliebige Konstanten bedeuten. Diese Tatsache führt zur folgenden *Nebenentwicklung* für die Funktion $F_2(z)$

$$F_2(z) = B_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k (a + b)^{k+1} + B_{-k-2} \cdot (a - b)^{k+1}}{(z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2})^{k+1}}.$$

Die Ellipse wurde als Beispiel nur der Einfachheit halber gewählt. Ebenso leicht könnten wir jede andere rationale Kurve z. B. eine beliebige Epi- oder Hypocykloide behandeln. In der Originalabhandlung findet man mehrere Beispiele dieser Art.