Kössler, Miloš: Scholarly works

Miloš Kössler

Asymptotické rozvoje pro funkce $\zeta(s)$, $\zeta(a, s)$

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 51 (1941), No. 32, 10 p.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/501261`

Terms of use:

© Akademie věd ČR, 1941

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

ROZPRAVY II. TŘÍDY ČESKÉ AKADEMIE.
ROČNÍK LI. ČÍSLO 32.

Asymptotické rozvoje pro funkce $\zeta(s)$ a $\zeta(a, s)$.

Napsal

M. KÖSSLER.

Předloženo dne 30. prosince 1941.

Úvod. Nechť a jest reálné $o < a \leq 1$. Dále budiž s komplexní proměnná. V půlrovině $R(s) > 1$ jest funkce $\zeta(a, s)$ definována řadou

$$\zeta(a, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^s}$$

Riemann-ova funkce $\zeta(s)$ jest tedy rovna $\zeta(1, s)$.

Pro funkce tyto odvodíme v dalším několik asymptotických rozvojů. Zda-li tyto rozvoje mají nebo nemají význam pro teorii funkce $\zeta(s)$ nedovedu dosud posouditi. Proto se v tomto pojednání omezím na několik drobnějších důsledků pro jisté numerické řady. Jsou známy součty následujících numerických řad pro každé celistvé kladné číslo v

$$\zeta(2v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2v}} = \frac{1}{(2v)!} B_v 2^{2v-1} . \pi^{2v}$$

$$S(2v+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2v+1}} = \frac{E_v \pi^{2v+1}}{2^{2v+2}(2v)!}$$

Zde jsou $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, ... čísla BERNOULLI-OVA a $E_0 = 1$, $E_1 = 1$, $E_2 = 5$, $E_3 = 61$, ... čísla EULEROVA. Pokud vím, nepodařilo se dosud sečísti řady $\zeta(2v+1)$ a $S(2v)$. Pro součty těchto řad odvodíme asymptotické a limitní vzorce, které jsou zobecněním známé formule STIRLING-OVY pro $\log n!$ a WALLIS-OVY pro $\pi/2$.

Abych osvětlil, jakou strukturu tyto vzorce mají, uvedu zde dva nejjednodušší. Pro usnadnění sazby užívám při tom označení

$$k^{k^s} = (k, s).$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\dots\right)=\lim_{n\to\infty} log\,\frac{(1,2)\,(2,2)\,(3,2)\dots(n-1,2)}{n^{\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)}\;e^{\frac{1}{12}n}},$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\dots\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} log\,\frac{3^3.7^7.11^{11}\dots(4n-5)^{4n-5}\,(4n+1)^{\frac{1}{6}(4n+1)(4n-3)}}{5^5.9^9.13^{13}\dots(4n-3)^{4n-3}\,(4n-1)^{\frac{1}{6}(4n-1)(4n-5)}\;e^{n}}$$

Jak v dalším je dokázáno, hodí se tyto výrazy s příslušnými korekčními členy velmi dobře k numerickému výpočtu. Zároveň ukazují, že nebude asi možno vyjádřiti tyto součty jako nějaké jednoduché výrazy obsahující známá čísla jako na př. e, π a pod. To nikterak nepřekvapuje, protože ani EULEROVU konstantu C nepodařilo se dosud tak vyjádřiti. Nezbývá tedy nic jiného, nežli pokládati čísla ta za samostatná individua právě tak jako čísla e, π, C. To ovšem nikterak nevylučuje možnost vzájemných vztahů mezi těmito čísly. Jsou totiž známy na př. vztahy

$$C=\frac{1}{2}\zeta(2)-\frac{1}{3}\zeta(3)+\frac{1}{4}\zeta(4)-\dots$$

$$C=1-log\,\frac{3}{2}-\frac{1}{2^2.3}(\zeta(3)-1)-\frac{1}{2^4.5}(\zeta(5)-1)-\dots$$

To jsou vztahy o nekonečném počtu členů. Není znám žádný podobný vztah o konečném počtu členů a jest také velmi málo pravděpodobný.

§ 1. Funkční rovnice $\zeta(s)$ a její transformace.

Pro funkci $\zeta(s)$ platí jak známo

$$(1-2^{1-s})\,\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{z^{s-1}\,dz}{e^z+1}\;\dots\dots\dots\quad(1)$$

pokud $R(s)>0$. Za stejného předpokladu jest

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty z^{s-1}\,e^{-kz}\,d\,z=\frac{1}{k^s}\;\dots\dots\dots\dots(2)$$

pro každé komplexní k, jehož reálná část jest kladná. V integrálu (1) užiju identity platné pro každé reálné z

$$\frac{1}{e^z+1}=e^{-z}-e^{-2z}+e^{-3k}-\dots+(-1)^{k+1}e^{-kz}+(-1)^k\frac{e^{-kz}}{e^z+1}\;.\quad(3)$$

Tak vypočtu

$$(1-2)^{1-s}\,\zeta(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k+1}}{k^s}+\frac{(-1)^N}{2\,\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{z^{s-1}\,e^{-Nz}\,dz}{e^z+1}$$

Dosadím-li $(1-s)$ místo s, obdržím vzorec platný za předpokladu $R(s)<1$

$$(1-2^s)\,\zeta(1-s)=\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}k^{s-1}+\frac{(-1)^N}{2\,\Gamma(1-s)}\int_0^\infty\frac{z^{-s}\,e^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)z}\,.\,2\,e^{\frac{z}{2}}}{e^z+1}\,d\,z\;.\quad(4)$$

Nyní běží o vyčíslení integrálu (4). Postupuji při tom analogicky jako prof. K. Petr v Počtu integrálním, 2. vyd. str. 490. druhá poznámka pod čarou. Ve známém rozvoji

$$\frac{2e^{\frac{z}{2}}}{e^z+1}=4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)\pi}{z^2+(2n+1)^2\pi^2} \quad \ldots\ldots (5)$$

napíšu sčítance pravé strany ve tvaru

$$\frac{(2n+1)\pi}{z^2+(2n+1)^2\pi^2}=$$

$$=\frac{1}{(2n+1)\pi}\left(1-y_n^2+y_n^4-\ldots+(-1)^k y_n^{2k}+(-1)^{k+1}\frac{y_n^{2k+2}}{1+y_n^2}\right),$$

kdež k jest pevně zvolené celé kladné číslo a

$$y_n=\frac{z}{\pi(2n+1)}$$

Tato identita platí pro každé reálné z. Dosazením do (5) a použitím součtů $S(2n+1)$ uvedených v úvodu dostaneme rozvoj

$$\frac{2e^{\frac{z}{2}}}{e^z+1}=E_0-\frac{E_1}{(2)!\,2^2}z^2+\frac{E_2}{(4)!\,2^4}z^4-\ldots+$$

$$+(-1)^k\frac{E_k}{(2k)!\,2^{2k}}z^{2k}+(-1)^{k+1}r(z) \quad \ldots\ldots (6)$$

Při tom jest

$$r(z)=\frac{4z^{2k+2}}{\pi^{2k+3}}\left\{\frac{1}{1\left(1+\frac{z^2}{\pi^2}\right)}-\frac{1}{3^{2k+3}\left(1+\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)}+\frac{1}{5^{2k+3}\left(1+\frac{z^2}{5^2\pi^2}\right)}-\ldots\right\}$$

Tato funkce z jest stále kladná pro všechna $z\geq 0$ a jak se snadným počtem přesvědčíme jest to funkce klesající s rostoucím z. Svého maxima nabývá pro $z=0$. Následkem toho můžeme psáti

$$r(z)=\frac{E_{k+1}}{(2k+2)!\,2^{2k+2}}z^{2k+2}\,\Theta(z) \quad \ldots\ldots\ldots (6a)$$

kdež $\Theta(z)$ jest monotonně klesající funkce z, která má maximum $\Theta(o)=1$ a stále klesá k hodnotě nula při $z\to+\infty$.

Dosadíme (6) a (6_a) do (4), pak použijeme vzorce (2) a funkční rovnice $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$ a také známé funkční rovnice

$$\zeta(1-s)=\frac{2\,\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}}{(2\pi)^s}\zeta(s).$$

Tak dospějeme ke konečnému výsledku, který nazvu transformovaná funkční rovnice pro $\zeta(s)$

$$\frac{2(1-2^s)\,\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}}{(2\pi)^s}\zeta(s)=$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} k^{s-1} + \frac{(-1)^N}{2} \sum_{k=0}^{k} (-1)^k \frac{E_k}{2^{2k}} \binom{s-1}{2k} \left(N + \frac{1}{2}\right)^{s-1-2k} + R(N,k),$$

$$R(N,k) = (-1)^{N+k+1} \frac{E_{k+1}}{2\Gamma(1-s)\,(2k+2)!\,2^{2k+2}} \int_0^\infty e^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)z} \,.\, z^{2k+2-s}\, \Theta(z)\, dz. \qquad (7)$$

Poslední sčítanec obsahující integrál musíme pokládati za člen zbytkový, protože obsahuje neznámou funkci $\Theta(z)$, o níž však víme, že jest monotonně klesající s vlastnostmi $\Theta(o) = 1$, $\Theta(\infty) = o$. Formule (7) byla odvozena za těchto předpokladů. N a k jsou celá čísla, z nichž první jest větší než nula a druhé větší nebo rovné nule; dále $R(s) < 1$. Avšak vzorec (7) podrží platnost pro celou půlrovinu $R(s) < 2k + 3$, protože v této půlrovině definuje $R(N, k)$ regulární funkci proměnné s a ostatní sčítanci na pravé straně (7) jsou dokonce celistvé funkce transcendentní v s. Chceme-li tedy užíti vorce (7) pro pevně dané s, musíme celé číslo k v druhém součtu a ve zbytku obsažené voliti tak, aby bylo $2k > R(s) - 3$. Za těchto předpokladů jest zřejmě při pevném k a s

$$\lim_{N \to \infty} R(N, k) = 0.$$

Numerickou velikost zbytku lze lehko odhadnouti pro každé komplexní s. Nás zde zajímá hlavně jeho velikost při reálném s. V tom případě jest integrál menší nežli stejný integrál, v němž $\Theta(z)$ jest nahrazeno číslem 1 a jest tedy pro reálné s

$$R(N,k) = (-1)^{N+k+1} \frac{E_{k+1}}{2^{2k+3}} \binom{s-1}{2k+3} \Theta . \left(N + \frac{1}{2}\right)^{s-3-2k} \quad . \; . \; . \; (7a)$$

$$0 < \Theta < 1.$$

Celé číslo k v rovnici (7) jest sice libovolné, avšak nemůžeme je zvětšovati do nekonečna. Ze vzorce pro $S(2v + 1)$ v úvodě jest totiž patrno, že

$$\lim_{k \to \infty} \frac{E_k}{(2k)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} = \frac{4}{\pi}$$

Následkem toho $R(N, k)$ při pevném N a s a při vzrůstajícím k vzrůstá do nekonečna. Transformovaná rovnice (7) jest tedy asymptotickým výrazem podobného typu jako na př. známý rozvoj pro

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + \frac{1}{2} \log 2\pi + \sum_{k=1}^{k} \frac{(-1)^k B_k\, s^{1-2k}}{2k(2k-1)} + R(s, k)$$

kde zbytkový člen $R(s, k)$ má obdobné vlastnosti jako $R(N, k)$ v (7).

V pojednání tomto užijeme rovnice (7) k numerickému výpočtu pro celistvá lichá $s = 2v + 1$. Avšak právě v tomto případě nelze $\zeta(2v + 1)$ vypočísti přímým dosazením, neboť faktor $\cos \frac{\pi s}{2}$ na levé straně (7) se anuluje. Mohli bychom (7) děliti oním faktorem a pak hledati limitu pravé strany pro $s \to 2v + 1$. To by vedlo k derivování. Proto jest výhodnější derivovati rovnici (7) podle s hned předem. Pro úsporu psaní označím

$$\varphi(s) = \frac{2(1-2^s)}{(2\pi)^s} \Gamma(s) \cos\frac{\pi s}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Derivace (7) jest pak

$$\varphi'(s)\,\zeta(s) + \varphi(s)\,\zeta'(s) = \sum_{k=2}^{N} (-1)^{k+1} k^{s-1} \log k +$$

$$+ \frac{(-1)^N}{2} \sum_{k=0}^{k} (-1)^k \frac{E_k}{2^{2k}} \binom{s-1}{2k} \left(N + \frac{1}{2}\right)^{s-2k-1} \log\left(N + \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{(-1)^N}{2} \sum_{k=0}^{k} (-1)^k \frac{E_k}{2^{2k}} \frac{d}{ds} \binom{s-1}{2k} N^{s-2k-1} + \frac{d}{ds} R(N, k) \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Vzorec tento platí za stejných předpokladů jako (7). Derivace zbytku jest zde pouze naznačena. Není nijak obtížno vypočísti ji explicite, jako pro zvláštní případ jest provedeno v § 3. Podobně se počítají i derivace další. Protože jich však zde nepoužijeme, vypouštím příslušné vzorce.

§ 2. Funkční rovnice pro $\zeta(a, s)$ a její transformace.

Metoda použitá v předešlém odstavci hodí se na rozmanité řady Dirichletovy, jichž funkční rovnice jest známa. Pro úzký cíl vytčený v úvodě budeme potřebovati ještě transformaci funkční rovnice pro $\zeta(a, s)$ definovanou rovněž v úvodě. Postup počtu jest zcela obdobný, jako v § 1.

$$\zeta(a, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty z^{s-1} e^{-(a-1)z} \frac{dz}{e^z - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Předpokládám $0 < a < 1$, $R(s) > 1$.

$$\frac{1}{e^z - 1} = e^{-z} + e^{-2z} + \ldots + e^{-(N+1)z} + \frac{e^{-(N+1)z}}{e^z - 1},$$

$$\zeta(a, s) = \frac{1}{a^s} + \frac{1}{(a+1)^s} + \ldots + \frac{1}{(a+N)^s} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-(N+a)z} z^{s-2} \frac{z\,dz}{e^z - 1}.$$

Dosadím $(1-s)$ místo s a vzorec bude platiti pro $R(s) < 0$.

$$\zeta(a, 1-s) = \sum_{k=0}^{N} (a+k)^{s-1} + \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^\infty e^{-(N+a)z} z^{-s-1} \frac{z}{e^z - 1}\, dz \quad . \quad . \quad (11)$$

Jest

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2},$$

$$\frac{z^2}{z^2 + a^2} = \left(\frac{z}{a}\right)^2 - \left(\frac{z}{a}\right)^4 + \ldots + (-1)^{k+1} \left(\frac{z}{a}\right)^{2k} + (-1)^k \frac{\left(\frac{z}{a}\right)^{2k+2}}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}.$$

Dosadím postupně za a čísla $1 \,.\, 2\pi,\ 2 \,.\, 2\pi, \ldots$ a sčítám. Při tom užiju součtů pro $\zeta\,(2\,v)$ z úvodu

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{k} (-1)^{k+1} \frac{B_k}{(2\,k)!} z^{2k} + (-1)^k z^{2k+2} \,.\, \varphi\,(z)\,,$$

$$\varphi\,(z) = \frac{2}{(2\,\pi)^{2k+2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k+2}\left(1 + \dfrac{z^2}{4\,\pi^2\,m^2}\right)} = \frac{B_{k+1}}{(2\,k+2)!}\,\Theta\,(z) \ldots (12)$$

$\Theta(z)$ jest monotonně ubývající funkce reálné proměnné z pro $z \geq 0$. Mimo to jest $\Theta\,(0) = 1$, $\Theta\,(\infty) = 0$. Dosadím (12) do (11) a provedu integraci pomocí (2)

$$\zeta\,(a, 1 - s) = \sum_{k=0}^{N} (a + k)^{s-1} - \frac{1}{2}\,(a + N)^{s-1} - \frac{1}{s}\,(a + N)^s +$$

$$+ \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{k} (-1)^k B_k \binom{s}{2\,k} (N + a)^{s-2k} + (-1)^k R\,(N, a, k) \quad \ldots (13)$$

$$R\,(N,\,a,\,k) = \frac{B_{k+1}}{(2\,k+2)!\,\Gamma(1 - s)} \int_0^{\infty} e^{-(N+a)z}\, z^{2k+1-s}\,\Theta(z)\,dz$$

Vzorec tento platí pokud $R\,(s) < 2\,k + 2$ při $o < a \leqq 1$. Je-li však současně $R\,(s) > 1$ platí (13) i pro $a = o$.

Levou stranu rovnice (13) lze vyjádřiti pro $R\,(s) > 1$ pomocí vzorce Hurwitz-ova (Zeitschrift für Math. u. Phys. XXVII. 1882, p. 95.)

$$\zeta\,(a,\, 1 - s) = \frac{2\,\Gamma\,(s)}{(2\,\pi)^s} \left\{ \cos\frac{\pi\,s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\,\pi a n}{n^s} + \sin\frac{\pi\,s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\,\pi a n}{n^s} \right\} \quad (14)$$

Zvláště pak pro $a = 1$, dostaneme

$$\frac{2\,\Gamma\,(s)\cos\dfrac{\pi\,s}{2}\,\zeta\,(s)}{(2\,\pi)^s} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} k^{s-1} - \frac{1}{2} N^{s-1} - \frac{N^s}{s} + \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{k} (-1)^k B_k \binom{s}{2\,k} N^{s-2k} + (-1)^k R\,(N, k)$$

$$R\,(N, k) - \frac{B_{k+1}}{(2k+2)!\,\Gamma(1-s)} \int_0^{\infty} e^{-Nz}\, z^{2k+1-s}\,\Theta\,(z)\,dz = -\frac{B_{k+1}}{s}\binom{s}{2k+2}\frac{\vartheta}{N^{2k+2-s}},$$

$$o < \vartheta < 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Z asymptotického rozvoje (13) vypočteme dva rozvoje téhož druhu pro oba součty na pravé straně (14). Protože $o \leqq 1 - a \leqq 1$, dosadím do (13) $(1 - a)$ místo a a zároveň $(N - 1)$ místo N. Tak dostanu sečtením a odečtením

$$\zeta\,(a,\, 1 - s) \pm \zeta\,(1 - a,\, 1 - s) = \frac{4\,\Gamma\,(s)}{(2\,\pi)^s}\, f\left(\frac{\pi\,s}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f\,(2\,\pi n a)}{n^s} =$$

$$= a^{s-1} + \sum_{k=1}^{N} \left[\,(k + a)^{s-1} \pm (k - a)^{s-1}\right] - \frac{1}{2}\left[\,(N + a)^{s-1} \pm (N - a)^{s-1}\right] -$$

$$-\frac{1}{s}[(N+a)^s+(N-a)^s]+\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{k}(-1)^k B_k\binom{s}{2k}[(N+a)^{s-2k}\pm(N-a)^{s-2k}]+$$

$$+(-1)^k[R(N,a,k)\pm R(N-1,1-a,k)] \quad . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Při tom pro horní kladná znaménka jest $f(u)=\cos u$ a pro dolní záporná $f(u)=\sin u$. Pro potřebu v paragrafu dalším výpočtu ještě derivaci vzorce (15) a druhého ze vzorců (16) při označení

$$\varphi(s)=\frac{2\,\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\cos\frac{\pi s}{2}, \quad \psi(s)=\frac{2\,\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\sin\frac{\pi s}{2},$$

$$\varphi'(s)\,\zeta(s)+\varphi(s)\,\zeta'(s)=\sum_{k=2}^{N}k^{s-1}\log k-\frac{1}{2}N^{s-1}\log N+\frac{N^s}{s^2}-\frac{N^s\log N}{s}+$$

$$+\sum_{k=1}^{k}(-1)^k B_k\frac{1}{s}\binom{s}{2k}N^{s-2k}\log N+\sum_{k=1}^{k}(-1)^k B_k\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\binom{s}{2k}\right)N^{s-2k}+$$

$$+(-1)^k\frac{d}{ds}R(N,k) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

$$2\,\psi'(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi a n}{n^s}-2\,\psi(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n\sin 2\pi a n}{n^s}=$$

$$=a^{s-1}\log a+\sum_{k=1}^{N}[(k+a)^{s-1}\log.(k+a)-(k-a)^{s-1}\log(k-a)]-$$

$$-\frac{1}{2}[(N+a)^{s-1}\log(N+a)-(N-a)^{s-1}\log(N-a)]-$$

$$-\frac{1}{s}[(N+a)^s\log(N+a)-(N-a)^s\log(N-a)]+\frac{1}{s^2}[(N+a)^s-(N-a)^s]+$$

$$+\sum_{k=1}^{k}(-1)^k\frac{B_k}{2k}\binom{s-1}{2k-1}[(N+a)^{s-2k}\log(N+a)-(N-a)^{s-2k}\log(N-a)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{k}(-1)^k\frac{B_k}{2k}\binom{s-1}{2k-1}'[(N+a)^{s-2k}-(N-a)^{s-2k}]+$$

$$+(-1)^k\frac{d}{ds}\Big\{R(N,a,k)-R(N-1,1-a,k)\Big\} \quad . \; . \; . \quad (18)$$

Pro celistvá kladná s přechází vzorec (15) ve známé vyjádření součtu $\sum_{k=1}^{N}k^{s-1}$ pomocí Bernoulli-ho polynomu. Vzorec (13) jest nový i pro celá s.

§ 3. Několik důsledků odvozených vzorců.

Vzorce (9), (17) a (18) vedou ihned k výsledkům v úvodě naznačeným. Zavedu ještě označení užité už ve vzorci (18)

$$\frac{d}{ds}\binom{s}{n}=\binom{s}{n}'=\binom{s}{n-1}-\binom{s}{n-2}\frac{1}{2}+\binom{s}{n-3}\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\binom{s}{0}\frac{1}{n}.$$

Jest to mnohočlen stupně $(n-1)$ — *ho* v s, který získáme derivováním binomického rozvoje $(1+x)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n$ podle s.

Ve vzorci (9) jest

$$\varphi'(s) = \cos\frac{\pi s}{2} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{2(1-2^s)\,\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\right) - \pi \sin\frac{\pi s}{2}\,\frac{(1-2^s)\,\Gamma(s)}{(2\pi)^s}.$$

Dosadíme nyní $s = 2v+1$, kdež v jest celé číslo > 1.

$$\varphi(2v+1) = 0,\ \varphi'(2v+1) = (-1)^v\,(2^{2v+1}-1).(2v)!\,\pi.(2\pi)^{-2v-1}.$$

Tedy

$$\varphi'(2v+1)\,\zeta(2v+1) = \sum_{k=2}^{N} (-1)^k k^{2v} \log k + \left(N+\frac{1}{2}\right)^{2v} \log\left(N+\frac{1}{2}\right) S_1(v) +$$
$$+\left(N+\frac{1}{2}\right)^{2v} S_2(v) + R_N.$$

Zde jest

$$S_1(v) = (-1)^N \sum_{k=o}^{k} (-1)^k \frac{E_k}{2^{2k+1}} \binom{2v}{2k} \left(N+\frac{1}{2}\right)^{-2k},$$

$$S_2(v) = (-1)^N \sum_{k=1}^{k} (-1)^k \frac{E_k}{2^{2k+1}} \binom{2v}{2k}' \left(N+\frac{1}{2}\right)^{-2k} \quad \ldots \quad (19)$$

Zbývá vypočísti R_N derivováním $R(N, k)$ ze vzorce (7). Protože pro $s = 2v+1$ jest $\frac{1}{\Gamma(1-s)} = 0$, $\frac{\Gamma'(-2v)}{\Gamma^2(-2v)} = -(2v)!$

dostaneme po snadném počtu

$$R_N = (-1)^{N+k} \frac{E_{k+1}}{2^{2k+3}} \left(N+\frac{1}{2}\right)^{2v-2k-2} \frac{\vartheta}{(2k+2)\binom{2k+1}{2v}},\ o < \vartheta < 1 \quad (19a)$$

Vzorce právě odvozené se hodí velmi dobře k numerickému výpočtu $\zeta(2v+1)$. Při tom nutno upozorniti, že logaritmy zde se vyskytující jsou přirozené. Pro kontrolu jsem počítal případ $v = 1$. Již při volbě $k = 3$, $N = 4$ a zanedbání zbytku R_4 vychází

$$\frac{1}{4\pi^2}\zeta(3) = 0{,}0304484\ldots$$

Podle PETERS-ových logar. tabulek jest $\zeta(3) = 1{,}20205\ 69031\ 6$ s opravou poslední cifry. Dělíme-li toto číslo číslem $4\pi^2$, dostaneme souhlas ve všech shora napsaných sedmi decimalách.

WALLIS-ova formule pro π jest zvláštním případem vzorce (9) pro $s = 1$. Abychom se vyhnuli pólu, který tam $\zeta(s)$ má, uvažme, že levá strana (9) jest vlastně derivací výrazu $(1-2^s)\,\zeta(1-s)$. Protože pak $\zeta(o) = -\frac{1}{2}$, $\zeta'(o) = -\log 2\pi$ dostáváme z (9) při volbě $k = 0$, $s = 1$, $N = 2n$

$$\log \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \log \frac{1.3.5.\ldots(2n-1)\sqrt{2n+\frac{1}{2}}}{2,4,6.\ldots(2n)} + \frac{\vartheta}{16\,(2n+\frac{1}{2})^2}$$

a to jest formule Wallis-ova se zbytkem. Pro numerický počet jest ovšem výhodnější zvoliti k větší, abychom dostali více korekčních členů.

Nyní použijeme vzorce (17) pro $s = 2v + 1$. Zde vyjde

$$\varphi'(2v+1) = (-1)^{v+1}(2v)!\,2^{-1}.\,(2\pi)^{-2v},\ \frac{d}{ds}R(N,k) =$$

$$= -\frac{B_{k+1}\,\vartheta}{(2k+1(2k+2)\binom{2k}{2v}}\,N^{2v-2k-1} = R_N$$

Celkem jest tedy

$$\varphi'(2v+1)\,\zeta(2v+1) = \sum_{k=2}^{N} k^{2v}\log k - \frac{1}{2}N^{2v}\log N + \frac{1}{(2v+1)^2}N^{2v+1} -$$

$$-\frac{1}{(2v+1)}N^{2v+1}\log N + N^{2v+1}\log N\,\varphi_1(v) + N^{2v+1}\varphi_2(v) + R_N(-1)^k, \qquad \ldots (20)$$

při označení

$$\varphi_1(v) = \sum_{k=1}^{k}(-1)^k\frac{B_k}{2k}\binom{2v}{2k-1}N^{-2k},\ \varphi_2(v) = \sum_{k=1}^{k}(-1)^k\frac{B_k}{2k}\binom{2v}{2k-1}'N^{-2k},$$

$$k \geq v \qquad \ldots (20a)$$

Zvolíme-li $k = v$, jest $R_N = O(N^{-1})$ a tak nám vyjde při $N \to \infty$ limitní vzorec

$$\varphi'(2v+1)\,\zeta(2v+1) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\log\frac{(2,2v)\,(3,2v)\ldots(N-1,2v)\,(N,2v)^{\frac{1}{2}}.\ \exp\left(\varphi_2(v)\,N^{2v+1}\right)}{(N,2v+1)^{\frac{1}{2v+1}-\varphi_1(v)}} \qquad \ldots (21)$$

Pro $v = 1$ jest to vzorec v úvodě otištěný. Tam jest také vysvětlen význam $(k, 2v)$.

Zbývá ještě vypočísti asymptotické výrazy pro součty $S(2v)$. K tomu užijeme (18), kdež dosadíme $a = {}^1/_4$, $s = 2v$. Vypočteme

$$\psi(2v) = o,\ \psi'(2v) = (-1)^v\pi\,(2v-1)!\,(2\pi)^{-2v},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi\frac{n}{2}}{n^s} = S(s)$$

$$R_N = \frac{d}{ds}\left\{R(N,a,k) - R(N-1,1-a,k)\right\} =$$

$$= \frac{B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)\binom{2k}{2v-1}}\left(\vartheta_1\left(N-\frac{1}{4}\right)^{2v-2k-2} - \vartheta_2.\left(N+\frac{1}{4}\right)^{2v-2k-2}\right).$$

Abychom zjednodušili výraz získaný, dosadíme také do druhého z vzorců (16) za a a s příslušné hodnoty. Zde vyjde

$$0 = \frac{1}{4^{2v-1}} + \sum_{k=1}^{N}\left[\left(\frac{4k+1}{4}\right)^{2v-1} - \left(\frac{4k-1}{4}\right)^{2v-1}\right] - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{4N+1}{4}\right)^{2v-1} -\right.$$

$$-\left(\frac{4N-1}{4}\right)^{2v-1}\Bigg] - \frac{1}{2v}\left[\left(\frac{4N+1}{4}\right)^{2v} - \left(\frac{4N-1}{4}\right)^{2v}\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k} (-1)^k \frac{B_k}{2k}\binom{2v-1}{2k-1}\left[\left(\frac{4N+1}{4}\right)^{2v-2k} - \left(\frac{4N-1}{4}\right)^{2v-2k}\right].$$

Násobíme-li tuto rovnici $\log {}^1/_4$ a odečteme od předcházejícího výsledku. Konečný výsledek násobíme ještě faktorem 4^{2v-1}. Tak dostaneme

$$(-1)^v (2v-1)! \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2v-1} S(2v) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left[(4k+1)^{2v-1} \log (4k+1) - (4k-1)^{2v-1} \log (4k-1)\right] +$$

$$- \frac{1}{2}\left[(4N+1)^{2v-1} \log (4N+1) - (4N-1)^{2v-1} \log (4N-1)\right] -$$

$$- \frac{1}{8v}\left[(4N+1)^{2v} \log (4N+1) - (4N-1)^{2v} \log (4N-1)\right] +$$

$$+ \frac{1}{16v^2}\left[(4N+1)^{2v} - (4N-1)^{2v}\right] + S_1(v) + S_2(v) + (-1)^k R_N . 4^{2v-1} \quad (22)$$

při označení

$$S_1(v) = 4^{2v-1} \sum_{k=1}^{k} (-1)^k \frac{B_k}{2k}\binom{2v-1}{2k-1}\Bigg[\left(\frac{4N+1}{4}\right)^{2v-2k} \log (4N+1) -$$

$$\left(\frac{4N-1}{4}\right)^{2v-2k} \log (4N-1)\Bigg]$$

$$S_2(v) = 4^{2v-1} \sum_{k=1}^{k} (-1)^k \frac{B_k}{2k}\binom{2v-1}{2k-1}'$$

$$\left[\left(N+\frac{1}{4}\right)^{2v-2k} - \left(N-\frac{1}{4}\right)^{2v-2k}\right], \quad \ldots (22a)$$

$$k \geq v$$

Volíme-li $k = v$, jest $R_N = O(N^{-1})$ a tak dostaneme při $N \to \infty$ limitní výraz pro $S(2v)$. Tato limita jest otištěna v úvodě pro zvláštní hodnotu $v = 1$.

Připomínám ještě, že vzorce (9), (17) při $s = 2v$ umožňují výpočet řad $\zeta'(2v)$. Uvedu zde jen jako příklad formuli nejjednodušší

$$\frac{3}{2\pi^2}\zeta'(2) + \frac{1}{12}\log 2 - \frac{1}{4}(\log \pi + C - 1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log \frac{3^3.5^3 \ldots (2n-1)^{2n-1}}{2^2.4^4 \ldots (2n-2)^{2n-2}} \frac{\left(2n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{4}}}{(2n)^{2n}}$$

Ze vzorců odvozených v paragrafech 1 a 2 vyplývá takových numerických výsledků neomezený počet. Stačí na př. ve vzorcích (16) a (18) dosazovati za a racionální zlomky ${}^1/_2$, ${}^1/_3$, ${}^2/_3$ a pod. Nemělo by však smyslu hromaditi takové speciální výsledky bez nějaké pořádající idee.

Transformované funkční rovnice, které tvoří podklad celého pojednání lze ještě podstatně zobecniti. Toto zobecnění jakož i některé důsledky pro teorii funkce $\zeta(s)$ a tedy i pro teorii prvočísel hodlám uveřejniti někdy později.