Miloš Kössler

Über besondere Klassen von schlicht abbildenden Potenzreihen

Věstník Král. čes. spol. nauk 1934, No. 14, 7 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501253

XIV.

Ueber besondere Klassen von schlicht abbildenden Potenzreihen.

Erste Mitteilung.

Von **M. KÖSSLER** in Prag.

(Vorgelegt am 11. April 1934).

Es sei $f(z) = z + \sum_{2}^{\infty} a_n z^n$ eine den Kreis $|z| < 1$ schlicht abbildende Potenzreihe. Da das Koeffizientenproblem dieser Klasse bisher ungelöst ist, so ist es nicht ohne Interesse besondere Unterklassen zu bilden und zu untersuchen. Näher sind heutzutage nur die Sternfunktionen, die konvexen Funktionen und die Spiralfunktionen bekannt. In dieser Mitteilung wird eine neue Unterklasse definiert, deren Bildunsgesetz sehr einfach ist (siehe Sätze I. und II). Ich benutze diese Gelegenheit um einen allgemeinen Minimumsatz III., welcher die Bogenlänge bei der Abbildung betrifft, zu beweisen. Dieser Satz bezieht sich auf eine Klasse von Funktionen, welche die Klasse der schlichten Funktionen als Unterklasse enthält.

1. Es sei $\varrho(z)$ eine im $|z| < 1$ reguläre Funktion der Klasse $[\varrho(z)] \leq 1$ und φ eine reelle Zahl $o \leq \varphi < 2\pi$.

Satz I. Die Funktionen

$$\varphi(z) = \frac{1}{z} + \int_{o}^{z} \varrho(t)\, dt$$

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{z} + \int_{e^{i\varphi}}^{z} \varrho(t) dt - \frac{1}{e^{i\varphi}} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{z} \left\{ 1 + z \int_{o}^{1} \varrho(z t^2)\, dt \right\}^2$$

sind im $[z] < 1$ schlicht und nehmen da nirgends den Wert Null an.

Beweis. Es ist für $0 < |z_1| < 1$, $0 < |z_2| \leq 1$, $z_2 \neq z_1$

$$\varphi(z_1) - \varphi(z_2) = \varphi_1(z_1) - \varphi_1(z_2) = \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} + \int_{z_2}^{z_1} \varrho(t)\, dt, \quad . \; . \; . \; (2)$$

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) - \varphi(e^{i\varphi}),$$

$$\left| \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right| = \frac{|z_2 - z_1|}{|z_2 \; z_1|},$$

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} \varrho(t)\, dt \right| \leq |z_2 - z_1| . \; \mathrm{Max}\, |\varrho(z)| \leq |z_2 - z_1|$$

Also nach (2)

$$\frac{|z_2 - z_1|}{|z_1 z_2|} + |z_2 - z_1| \geq |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \geq \frac{|z_2 - z_1|}{|z_1 z_2|} - |z_2 - z_1| \; . \; (3)$$

$$\frac{1 + |z_1 z_2|}{|z_1 z_2|} \geq \left| \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geq \frac{1 - |z_1 z_2|}{|z_1 z_2|} > 0 \quad . \; . \; (4)$$

Dadurch ist die Schlichtheit von $\varphi(z)$ und $\varphi_1(z)$ bewiesen und durch den Grenzübergang $z_2 \rightarrow z_1$ bekommen wir aus (4) den Verzehrungssatz in der Form

$$\frac{1 + |z|^2}{|z|^2} \geq |\varphi'(z)| = |\varphi_1'(z)| \geq \frac{1 - |z|^2}{|z|^2}, \; |z| \neq 0, \quad . \; . \; (5)$$

Aus (2) und (3) folgt für $z_2 = e^{i\varphi}$, $z_1 = z$

$$|\varphi_1(z)| \geq \frac{|e^{i\varphi} - z|}{|z|} - |e^{i\varphi} - z| \geq \frac{(1 - |z|)^2}{|z|}.$$

$$|\varphi_1(z)| \leq \frac{|e^{i\varphi} - z|}{|z|} + |e^{i\varphi} - z| \leq \frac{(1 + |z|)^2}{|z|} \quad . \; . \; . \; (6)$$

$\varphi_1(z)$ nimmt also nirgends im $|z| < 1$ den Wert Null an. Weiter ist nach (1)

$$\frac{1}{|z|} - |z| \leq |\varphi(z)| = \left| \frac{1}{z} + \int_0^z \varrho(t)\, dt \right| \leq \frac{1}{|z|} + |z| \quad . \; . \; (7)$$

und es ist also auch $\varphi(z)$ im $|z| < 1$ von Null verschieden.

Aus der ungeraden, schlichten und von Null verschiedenen Funktion

$$\varphi^*(z) = \frac{1}{z} + \int_0^z \varrho(t^2)\; dt = \frac{1}{z} + z \int_0^1 \varrho(t^2 z^2)\, dt$$

bekommen wir wie bekannt durch die Transformation

$$\varphi_2(z) = \left\{\varphi^*(\sqrt{z})\right\}^2 = \frac{1}{z}\left\{1 + z\int_0^1 \varrho(z t^2)\, dt\right\}^2 \quad . \; . \; . \; (8)$$

wieder eine schlichte und von Null verschiedene Funktion. Dadurch ist der Satz I. in allen Teilen bewiesen. Die Ungleichungen (3), (4), (5), (6) und (7) sind genau, denn die besonderen Funktionen $\varphi(z) = \frac{1}{z} - z, \varphi_1(z) = \frac{1}{z} - 2 + z$ nehmen die Schrankenwerte an.

2. Es sei

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{z}{1 + z\int_0^z \varrho(t)\, dt} = z + \sum_{n=3}^{\infty} a_n z^n$$

$$f_1(z) = \frac{1}{\varphi_1(z)} = \frac{z}{1 - z e^{-i\varphi} + z\int_{e^{i\varphi}}^z \varrho(t)\, dt} = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \quad . \; (9)$$

$$f_2(z) = \frac{1}{\varphi_2(z)} = \frac{z}{\left(1 + z\int_0^1 \varrho(z t^2)\, dt\right)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$$

Satz II. Die Funktionen $f(z), f_1(z), f_2(z)$ sind im $|z| < 1$ regulär und schlicht und die Koeffizienten von $f(z)$ und $f_2(z)$ erfüllen die Ungleichungen $|a_n| \leq 1, |c_n| \leq n$, welche genau sind.

Beweis. Der erste Teil von II. ist eine triviale Folge von I. Es erübrigt also nur die Ungleichungen zu beweisen. Es ist

$$\frac{f(z)}{z} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - z\int_0^z \varrho(t)\, dt}{1 + z\int_0^z \varrho(t)\, dt} = \frac{1}{2}\left\{1 + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \right\}$$

Da $\left|z\int_0^z \varrho(t)\, dt\right| \leq |z|$, so muss nach einem Satze von Caratheodory $|A_n| \leq 2$, was mit $|a_n| \leq 1$ gleichbedeutend ist. Die besondere Funktion $f(z) = \frac{z}{1 - z^2}$ zeigt, dass die Ungleichungen genau sind. Aehnlich beweist man

$$\sqrt{\frac{f_2(z^2)}{z^2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - z^2\int\limits_0^1 \varrho(z^2 t^2)\,dt}{1 + z^2\int\limits_0^1 \varrho(z^2 t^2)\,dt} = \frac{1}{2}\left\{1 + B_2 z^2 + B_4 z^4 + \right\},$$

$|B_n| \leq 2.$

Daraus

$$\frac{f_2(z)}{z} = (1 + d_1 z + d_2 z^2 + \ldots + d_n z^n + \ldots)^2, \text{ wo } |d_n| \leq 1 \text{ ist}$$

Es ist also

$$|c_n| = |d_{n-1} + d_1 d_{n-2} + \ldots . + d_{n-1} 1| \leq n$$

Die besondere Funktion $f_2(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ zeigt wieder, dass die Ungleichungen genau sind.

Das Koeffizientenproblem der Funktionenklassen (1) und (9) kann als gelöst betrachtet werden, denn die notwendigen und hienreichenden Bedingungen für die Koeffizienten der beschränkten Funktion $|\varrho|(z)| \leq 1$ sind bekannt. Es ist deshalb bemerkenswert, dass der Beweis der Bieberbachschen Vermutung $|b_n| \leq n$ für die Funktionen des Typus $f_1(z)$ mir nicht gelungen ist.

3. Wir wollen noch näher die Abbildung des Kreises $|z| = r \leq 1$ durch $w = \varphi(z)$ untersuchen. Zu diesen Zwecke beweisen wir zuerst einen allgemeinen

Minimumsatz III. Es sei $F(z) = \sum\limits_{k=-2n-1}^{\infty} a_k z^k$ im $0 < |z| < r_1$ regulär, $a_{-2n-1} \neq 0$, $n \geq 0$ und $F'(z) \neq 0$. Der Kreis $|z| = r < r_1$ wird durch $F(z)$ auf eine geschlossene Kurve abgebildet. Die Bogenlänge dieser Kurve sei $L(r)$. Dan ist $L(r) \geq \dfrac{\pi(4n+2)|a_{-2n-1}|}{r^{2n+1}}$ und die Gleichheit tritt nur bei der Funktion $F(z) = \dfrac{a_{-2n-1}}{z^{2n+1}} + {}$ $+ a_0$ ein.

Der Beweis ist fast selbstverständlich. Es ist

$$L(r) = \int\limits_0^{2\pi} r\,|F'(r e^{i\varphi})|\,d\varphi$$

Da $F'(z) = -\frac{(2n+1)\, a_{-2n-1}}{z^{2n+2}} + \ldots$ nicht Null wird, so ist

$$\sqrt{F'(z)} = \frac{1}{z^{n+1}} \sqrt{-(2n+1)\, a_{-2n-1} + \gamma_1 z + \ldots} = \frac{g(z)}{z^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{z^{n+1}} \left\{ \sqrt{-(2n+1)\, a_{-2n-1}} + \beta_1 z + \ldots \right\}$$

wo $g(z)$ im Kreise $|z| < r_1$ regulär bleibt.

$$L(r) = \int_0^{2\pi} r \frac{g(re^{i\varphi}) \,.\, \overline{g}(re^{-i\varphi})}{r^{2n+2}} \,.\, d\varphi = \frac{2\pi}{r^{2n+1}} \Big\{ (2n+1)\, |a_{-2n-1}| +$$

$$+ |\beta_1|^2 r^2 + |\beta_2|^2 r^4 + \ldots \Big\}$$

$L(r)$ erreicht sein Minimum nur in dem Falle $0 = \beta_1 = \beta_2 = \ldots$, das heist im Falle $F(z) = \frac{a_{-2n-1}}{z^{2n+1}} + a_0$.

Für die allgemeine den Einheitskreis schlicht abbildende Funktion $\Phi(z) = \frac{1}{z} + \sum_0^{\infty} d_n z^n$ ist also $L(r) \geq \frac{2\pi}{r}$. Die Fläche $D(r)$ des von $L(r)$ begrenzten Bereiches ist wie bekannt

$$D(r) = \pi \left\{ \frac{1}{r^2} - |d_1|^2 r^2 - 2\, |d_2|^2 r^4 - \ldots \right\} \leq \frac{\pi}{r^2}$$

Bei der besonderen Funktion $\Phi_1(z) = \frac{1}{z}$ erreicht also das Bild des Kreises $|z| = r$ gleichzeitig den kleinsten Umfang und die grösste Fläche unter allen Funktionen des Typus $\Phi(z)$. Aus der Reihe für $L(r)$ entfliesst, dass bei diesen Funktionen ein endlicher oder unendlicher Grenzwert $\lim\limits_{r \to 1} L(r)$ existiert. Für die besonderen Funktionen der Klasse (1) sind wir sogar im Stande auch die obere Schranke für $L(r)$ anzugeben. Es ist nach (1)

$$L(r) = \int_0^{2\pi} r\, |\varphi'(re^{i\varphi})|\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{|1 - r^2 e^{2i\varphi}\, \varrho(re^{i\varphi})|}{r}\, d\varphi \leq \frac{2\pi(1+r^2)}{r}$$

Also $\lim\limits_{r \to 1} L(r) \leq \mathfrak{B}$

wo $\mathfrak{B}$ eine absolute Konstante bezeichnet, deren wahren Wert zu bestimmen mir nicht gelungen ist. Wir können nur behaupten, dass

$$8 \leq \mathfrak{B} \leq 4\pi$$

denn der Wert 8 wird von der Funktion $\varphi(z) = \frac{1}{z} + z$ erreicht.

Résumé.

Sur les fammilles particulières de fonctions univalentes.

Par M. Kössler.

(Présenté le 11. avril 1934.)

1. Soit $\varrho(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle $|z| < 1$, tel que $|\varrho(z)| \leq 1$. Les fonctions

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} + \int_0^z \varrho(t)\, dt, \quad \varphi_1(z) = \frac{1}{z} - e^{i\psi} + \int_{e^{i\psi}}^z \varrho(t) dt,$$

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{z}\left\{1 + z\int_0^1 \varrho(zt^2)\, dt\right\}^2$$

sont univalentes et differentes de zéro dans $|z| < 1$. Donc: les fonctioes $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$, $f_1(z) = \frac{1}{\varphi_1(z)}$, $f_2(z) = \frac{1}{\varphi_2(z)}$ sont univalentes et holomorphes dans $|z| < 1$. Posons $f(z) = z + \sum_3^\infty a_n z^n$, $f_2(z) = z + \sum_2^\infty c_n z^n$. On a toujours $|a_n| \leq 1$, $|c_n| \leq n$.

2. Soit n un nombre entier ≥ 0 et

$$w = F(z) = \sum_{k=-2n-1}^{\infty} a_k z^k$$

une fonction holomorphe dans l'anneau $0 < |z| < r_1$, tel que $F'(z) \neq 0$, $a_{-2n-1} \neq 0$. Si **z** décrit un cercle $|z| = r < r_1$ du plan (z), **w** décrit une courbe **C** ferme du plan (w). Soit

$$L(r) = \int_0^\pi r\,|F'(r\,e^{i\varphi})|\,d\varphi$$

la longueur de la courbe C. On a

$$L(r) \geq \frac{2\pi\,(2n+1)\,|a_{-2n-1}|}{r^{2n+1}}$$

L'égalité n'a lieu que si $F(z) = e^{i\psi}.\left\{\frac{a_{-2n-1}}{z^{2n+1}} + a_o\right\}$. Si en particulier $\Phi(z) = \frac{1}{z} + \sum_{o}^{\infty} d_n z^n$ est un fonction univalente dans

$$0 < |z| < 1, \; L(r) \geq \frac{2\pi}{r}.$$

L'égalité n'a lieu que si $\Phi(z) = \frac{1}{z} + d_o$.