Kössler, Miloš: Scholarly works

Miloš Kössler

Eine Verschärfung des Drehungssatzes von L. Bieberbach

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 41 (1931), pp. 80–82

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501249

Terms of use:

© Teubner Verlag, 1931

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Eine Verschärfung des Drehungssatzes von L. Bieberbach.

Von M. KÖSSLER in Prag.

Wenn $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ eine im Einheitskreise $|z| < 1$ reguläre und daselbst schlichte Funktion ist, so ist nach L. Bieberbach[1])

$$(1) \qquad |\arg f'(z)|_{|z| \leqq r} < 2 \log \frac{1+r}{1-r},$$

und es kann kein kleinerer konstanter Faktor als 2 vor diesen Ausdruck treten. Des weiteren existiert keine Funktion der betrachteten Klasse, für welche die Schranke erreicht werden könnte.

In dieser Arbeit wird der Satz folgendermaßen verschärft:

Es ist

$$(2) \qquad |\arg f'(z)|_{|z| \leqq r} \leqq \int_0^r \frac{2\sqrt{4-x^2}}{1-x^2}\, dx.$$

Diese Schranke ist kleiner als in (1); denn

$$2 \log \frac{1+r}{1-r} = \int_0^r \frac{4\,dx}{1-x^2} > \int_0^r \frac{2\sqrt{4-x^2}}{1-x^2}\, dx$$

für jedes $r > 0$. Ob diese neue Schranke die genaue ist, konnte ich nicht entscheiden.

Die Funktion

$$\log f'(z) = \log(1 + 2a_2 z + \cdots) = \log |f'(z)| + i \arg f'(z)$$

ist im Einheitskreise regulär. Wir bezeichnen[2])

$$(3) \qquad \Phi(r) = \operatorname{Max} \arg f'(z), \quad |z| = r.$$

Dieses Maximum wird wegen der Stetigkeit der betrachteten Funktion auf dem Kreise $z = re^{i\varphi}$ für ein ganz bestimmtes φ_r erreicht. Der Winkel φ_r ist unter den Lösungen der Gleichung

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg f'(z) = 0 \qquad \text{zu suchen.}$$

$\Phi(r)$ ist, wie bekannt, eine stetige monoton wachsende Funktion von r. Sie ist sogar stückweise analytisch, und die Stellen, wo sie

1) Mathem. Zeitschr. Bd. 4 (1919), S. 295—305.

2) $e^{\Phi(r)}$ ist das Maximum des absoluten Betrages von $\{f'(z)\}^{-i}$.

nicht analytisch ist, können sich im Innern des Einheitskreises nicht häufen. Dabei existiert nach Herrn Blumenthal $\frac{d\varphi_r}{dr}$ in jedem der Intervalle, wo $\Phi(r)$ analytisch ist, und dieser Differentialquotient ist daselbst stetig. Weiter ist nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg f'(z). \tag{5}$$

In jedem der betrachteten Intervalle ist

$$\Phi'(r) = \left\{\frac{\partial}{\partial r}\arg f'(z) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\arg f'(z)\cdot\frac{d\varphi}{dr}\right\}_{\varphi=\varphi_r},$$

was wegen (4) sich auf

$$\Phi'(r) = \left\{\frac{\partial}{\partial r}\arg f'(z)\right\}_{\varphi=\varphi_r} \tag{6}$$

reduziert. Außerdem ist nach (4) und (5)

$$\left\{\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|\right\}_{\varphi=\varphi_r} = 0. \tag{7}$$

Für schlichte Funktionen gelten die Gleichungen

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leqq \frac{4r}{1-r^2}, \qquad z = re^{i\varphi}, \tag{8}$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| = R\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right), \qquad r\frac{\partial}{\partial r}\arg f'(z) = I\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right). \tag{9}$$

Nach (6) und (7) ist also für $\varphi = \varphi_r$

$$\left|ir\Phi'(r) - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leqq \frac{4r}{1-r^2},$$

$$r\Phi'(r) \leqq \sqrt{\left(\frac{4r}{1-r^2}\right)^2 - \frac{4r^4}{(1-r^2)^2}}$$

$$\Phi'(r) \leqq \frac{2\sqrt{4-r^2}}{1-r^2} \tag{10}$$

in jedem Intervalle (r_1, r_2), in welchem $\Phi(r)$ analytisch ist. Es ist also

$$\Phi(r_2) - \Phi(r_1) \leqq \int_{r_1}^{r_2} \frac{2\sqrt{4-x^2}}{1-x^2}\,dx.$$

Da nun $\Phi(0) = 0$ und $\Phi(r)$ eine stetige Funktion ist, so schließt man daraus, daß

$$\Phi(r) \leqq \int_0^r \frac{2\sqrt{4-x^2}}{1-x^2}\,dx.$$

Wenn wir, anstatt $\log f'(z)$, die Funktion $\log \frac{1}{f'(z)}$ betrachten, so gelangen wir zum analogen Resultate

$$\operatorname*{Min}_{|z|=r} \arg f'(z) \geqq -\int_0^r \frac{2\sqrt{4-x^2}}{1-x^2}\,dx.$$

Im ganzen ist also

$$(2) \qquad |\arg f'(z)|_{|z|\leqq r} \leqq \int_0^r \frac{2\sqrt{4-x^2}}{1-x^2}\,dx = 4\left\{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2+r}{2-r}} - \frac{\pi}{4}\right\} + \sqrt{3}\log\frac{1+\frac{\sqrt{3}\,r}{\sqrt{4-r^2}}}{1-\frac{\sqrt{3}\,r}{\sqrt{4-r^2}}}.$$

(Eingegangen am 3. 7. 1931.)

Über die ebenen Kurven von Maximalindex und von Maximalklassenindex.

Von JULIUS V. SZ. NAGY in Szeged (Ungarn).

1. Einleitung.

Unter einer *Kurve* verstehen wir im folgenden eine stetige geschlossene ebene Kurve, die aus endlichvielen konvexen Bögen besteht und in jedem ihrer Punkte eine bestimmte mit dem Berührungspunkte sich stetig ändernde Tangente hat. Die Ordnung bzw. der Index der Kurve ist die größte bzw. die kleinste Anzahl der Punkte, in denen die Kurve von einer Geraden der Ebene getroffen werden kann. Die Klasse bzw. der Klassenindex ist die größte bzw. die kleinste Anzahl der Tangenten, die von einem beliebigen Punkte der Ebene an die Kurve gezogen werden können.[1])

Bilden die Punkte der Ebene, aus denen $n-2$ Tangenten an die Kurve C n-ter Klasse von Maximalklassenindex gehen, k zusammenhängende Gebiete $T_1, T_2, \ldots, T_k$ mit den Zusammenhängen p_1+1,

1) Vgl. die Arbeiten des Verfassers: „Über Kurven vom Maximal-Klassenindex. Über Kurven vom Maximalindex", Math. Annalen **89** (1923), S. 32—75, **90** (1924), S. 152—153; „Über die charakteristischen Zahlen einer Kurve vom Maximal-Klassenindex", Math. Annalen **100** (1928), S. 164—178; „Über die Züge der ebenen Kurven vom Maximal-Klassenindex", Math. Annalen **100** (1928), S. 179—187. Diese drei Abhandlungen werden im folgenden unter A, B bzw. C zitiert werden.