Miloš Kössler

Sur les singularités des séries entières situées sur le cercle de convergence

Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1923, 106-108

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501230

Sur les singularités des séries entières situées sur le cercle de convergence.*)

Par

Miloš Kössler.

(Présenté le 26 Octobre 1923.)

Soit donnée la série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

En faisant usage de la transformation quadratique

$$z = x + \tfrac{3}{4} x^2$$

on peut démontrer le théorème:

La condition nécessaire et suffisante pour que $z = e^{i\varphi}$ soit un point singulier de la série (1) est donnée par la relation

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\lim} |B_n|^{\frac{1}{n}} = \tfrac{3}{2}, \quad \textit{où} \\ &B_n = \sum_{k=\left[n\left(\frac{1}{4}-\mu\right)\right]}^{\left[n\left(\frac{1}{4}+\mu\right)\right]} \binom{n-k}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k a_{n-k}\, e^{ik\varphi} \end{aligned}\right\} \ldots (B)$$

et μ est une constante aussi petit que l'on veut, independante de n.[1])

Nous appelons le coëfficient

$$a_{n-\left[\frac{n+1}{4}\right]}$$

---

*) Rozpravy Čes. Akademie roč. XXXII., čís. 25: „O singularitách řady mocninné ležících na kružnici konvergenční.“

[1]) Kössler: Rend. real. acc. naz. dei lincei, XXXII (5), 1° sem. fasc. 10°. p. 528.

contenu dans l'expression B_n le coëfficient *central* et les autres coëfficients dans cette expression *le groupe* du coëfficient central. Cela étant, nous choisissons, dans l'ensemble des a_n, une suite

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots a_{n_q} = |a_{n_q}| e^{i\varphi_{n_q}}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (L)$$

satisfaisant à la condition

$$\lim_{q \to \infty} |a_{n_q}|^{\frac{1}{n_q}} = 1,$$

ce qu'on peut faire toujours d'une infinité de manièrs. Ces suites du type (L) jouent un rôle remarquable dans la théorie des séries entières. Le *groupe* du coëfficient *central* a_{n_q} est défini par

$$a_{n_q+s}, \quad s = -\lambda_2, -\lambda_2+1, \ldots -1, 1, 2, \ldots, +\lambda_1,$$

$$\lambda_1 = \left[\frac{N_q+1}{4}\right] - \left[N_q\left(\frac{1}{4}-\mu\right)\right]$$

$$-\lambda_2 = \left[\frac{N_q+1}{4}\right] - \left[N_q\left(\frac{1}{4}+\mu\right)\right],$$

$$N_q = \frac{4n_q - \lambda}{3}, \quad \lambda \equiv n_q \pmod{3}.$$

Cela posé, nous pouvons démontrer le théorème spécial:

Choisissons une suite du type (L). A chaque a_{n_q} de cette suite un groupe de coëfficients a_{n_q+s} est associé.

Si l'on peut trouver des angles ψ_q de manière que

$$\left.\begin{array}{l} 1^0 \quad \lim\limits_{q \to \infty} |\cos(\varphi_{n_q} + \psi_q)|^{\frac{1}{N_q}} = 1, \\ 2^0 \quad \cos\{\varphi_{n_q+s} + s\varphi + \psi_q\} \geq 0, \end{array}\right\} \ldots (I)$$

pour chaque q et chaque s du groupe respectif, le point $z = e^{i\varphi}$ est singulier.

Ce théorème est une généralisation essentiel du théorème de Vivanti-Dienes.[2])

Faisant usage du théorème (I), on peut en ne changeant que les angles φ_n, obtenir, qu'un point $e^{i\varphi}$, choisi à volonté sur la circonférence du cercle de convergence, devienne singulier pour $f(z)$. Un cas particulier d'un tel changement est le changement du *signe* de a_n. A cet effet, choisissons la suite (L) de façon que les nombres B_{N_q}, dans lesquels les membres de (L) occupent les positions centrales, définissent des groupes des a_n, qui n'aient pas, deux à deux, des élements communs.[3]) Cela posè, choisis-

[2]) Vivanti, Riv. di Matem., vol. 3, 1893, pp. 111–114; Dienes, Journ. de Math. (6) vol. 5, 1909, pp. 327–413.

[3]) Il suffit, à cet effet, de choisir la suite (L) de manière, que $n_{q+1} \geq (1+\varepsilon)\, n_q$, ε étant une constante positive aussi petite qu'on veut.

sons dans le théorème (I) $\psi_q = 2\pi - \varphi_{n_q}$ et changeons dans chaque *groupe* B_{N_q} les angles φ_{n_q+s} de manière que la condition 2⁰) soit rempliè. Il est évident qu'on peut laisser simplement φ_{n_q+s} inaltéré, si la condition 2⁰) est rempliè, ou y ajouter π, si elle ne l'est pas.

En choisisant convenablement une suite des suites (L) on peut, par un procédé analogue, atteindre en ne changeant que les angles φ_n, ou simplement les *signes* de a_n, que *chaque* point d'une suite arbitraire $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \ldots$ choisi à volonté devienne singulier pour $f(z)$. Si, en particulier, la suite $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \ldots$ forme un ensemble *dense* sur la circonférence du cercle de convergence, la circonférence devient la frontière du domaine d'existence de la fonction. Cet énoncé donne non seulement une demonstration nouvelle, mais encore une généralisation essentielle du théorème de F a t o u - P o l y a,[4]) car on a ainsi un procédé déterminé pour effectuer les changements des signes des a_n, dans chaque cas particulier.

Nous pouvons, de même généraliser un théorème de H a d a m a r d,[5]) comme il suit:

Choisissons un suite du type (L). *Si à chaque* a_{n_q} *de cette suite est associé un groupe de coefficients* a_{n_q+s} *tels, que*

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{1} |a_{n_q+s}| + \sum_{s=-1}^{-\lambda_1} |a_{n_q+s}| = |a_{n_q}| \,.\, r_q, \\ &0 \leqq r_q < 1; \quad \overline{\lim_{q\to\infty}} |1 - r_q|^{\frac{1}{N_q}} = 1, \end{aligned}\right\} \ldots \text{(II)}$$

la circonférence du cercle de convergence devient la frontière du domaine d'existence de la fonction.

Voilà une série particulière de cette sorte

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

$$\begin{aligned} 0 \leqq |a_n| &< \text{const. pour chaque } n \neq 2^q, \\ |a_n| &\overline{>} \text{ n. const. pour chaque } n = 2^q,\ q = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

La démonstration du théorème de M. F a b r y,[6]) généralisé d'une manière analogue sera donnée dans un autre mémoire.

---

[4]) F a t o u, Acta Math. vol. 30, 1906, p. 400; P o l y a - H u r w i t z, Acta Math. vol. 40, 1916, pp. 179—183.

[5]) H a d a m a r d, Journ. de Math. (4) 8, 1892 p.

[6]) F a b r y Ann. Ec. Norm. (3) 13. 1896 pp. 107—114.