Miloš Kössler

Potenční řady s přirozenou hranicí a jejich pokračování ve smyslu Borelově

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 31 (1922), No. 19, 8 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501220

Potenční řady s přirozenou hranicí a jejich pokračování ve smyslu Borelově.

Napsal

M. Kössler.

(Předloženo dne 28. dubna 1922.)

E. Borel sestrojil arithmetický výraz

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z - e^{i\beta_n}}$$

pro jisté analytické funkce, které mají přirozenou hranici splývající s konvergenční kružnicí příslušného rozvoje mocninného.[1])

Nebyly však dosud uveřejněny — pokud jest mi známo — mocninné řady, které by skutečně připouštěly transformaci ve výraz Borelův. Sestrojuji v tomto pojednání transformační formuli A, která jest jistým zobecněním výrazu Borelova, neboť připouští také hromadění se jiných singularit nežli polů na přirozené hranici. Při tom představuje levá strana rovnice jednoduchou, avšak dosti obecnou potenční řadu.

Omezuji se však pro tentokráte na vyšetřování hromadících se polů libovolných řádů a dospívám k obecným větám I., II., III. a IV., z nichž poslední jest nejdůležitější.

Rovnice (9), (10) a (11) předvádějí nejjednodušší příklady potenčních řad, které mají Borelovo pokračování vně své přirozené hranice.

O hromadění se singularit podstatných a algebraických, jakož i o některých obecnějších otázkách hodlám pojednati jindy.

* * *

1. Všechny úvahy tohoto pojednání spočívají na jisté transformační formuli, vztahující se ke dvěma libovolným funkcím analytickým. Definujme je řadami mocninnými

[1]) Émil Borel: Leçons sur les fonctions monogènes. Paříž 1917. G. V. První myšlenky té věci se týkající obsahuje these Borelova: Sur quelques points de la théorie des fonctions. Paříž 1894.

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \qquad |z| < R_1 \; \ldots\ldots \; (1a)$$

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots \qquad |z| < R_2 \; \ldots\ldots \; (1b)$$

Zvolme si nyní dvě komplexní konstanty α a y hovící nerovninám

$$|\alpha| \leq 1, \qquad |y| < R_1 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (2)$$

a utvořme analytickou funkci komplexní proměnné x, definovanou řadou

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(y\,\alpha^n)\, b_n\, x^n \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (3)$$

Dosadíme-li do tohoto rozvoje místo $f(z)$ řadu $(1a)$, obdržíme řadu dvojnou

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_n\, x^n\, a_k\, \alpha^{nk}\, y^n \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (4)$$

(sčítá se napřed podle k), o níž dokážeme, že konverguje absolutně pokud $|x| < R_2$.

K důkazu utvořme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k\, z^k| < M,$$

která pro $|z| < |y| < R_1$ jistě splňuje napsanou nerovninu, v níž M jest konstanta na z nezávislá. Protože pak podle (2) jest

$$|y\,\alpha^n| \leq |y|,$$

bude i

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k\, \alpha^{nk}\, y^k| < M \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (5)$$

pro libovolný index n.

Ježto také řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \,.\, |b_n\, x^n|$$

konverguje pokud $|x| < R_2$, bude a fortiori podle (5) konvergovati i

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n\, x^n| \,.\, \sum_{k=0}^{\infty} |a_k\, \alpha^{nk}\, y^k| \qquad \text{s. e. d.}$$

Jest tedy dovoleno v dvojné řadě (4) zaměniti pořádek sčítání, aniž se změní hodnota součtu. Tak obdržíme vzhledem k (1)

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g(x\,\alpha^k)\, a_k\, y^k \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (3_1)$$

Srovnáním s (3) dostáváme základní vzorec transformační

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(y\,\alpha^n)\, b_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} g(x\,\alpha^n)\, a_n\, y^n, \; \ldots\ldots\ldots \; (A)$$

který byl odvozen za podmínek

$$|x| < R_2, \quad |y| < R_1, \quad |\alpha| \leq 1.$$

Význam vzorce tohoto pro další vyšetřování spočívá v tom, že pravá strana může za jistých podmínek konvergovati v oboru širším než levá strana. Vzorce použijeme v tomto pojednání vždy tak, že α a y budeme považovati za konstanty, x za komplexní proměnnou.

2. Druhé omezení, které si pro tentokráte ukládáme, spočívá v tom, že zvolíme za $g(z)$ funkci buď lomenou racionálnou nebo meromorfní. Její poly seřazené podle velikosti absolutních hodnot

$$x_0, \; x_1, \; x_2, \; \ldots$$

nechť jsou všechny od nully různé; pokládejme je za známé a rovněž tak některý z arithm. výrazů, které definují $g(z)$ v celé rovině jako na př. Mittag-Lefflerův rozvoj v parciální zlomky. Funkci $f(z)$ při tom *nijak* v obecnosti neomezujeme.

Za těchto předpokladů dokážeme o analytické funkci $F(x)$ definované řadou (3) tyto čtyři věty:

I. Řada (3) má týž poloměr konvergence jako řada pro $g(z)$.

II. Jestliže $|\alpha| < 1$, představuje pravá strana rovnice (A) analytické pokračování funkce $F(x)$ platné v celé rovině s výjimkou spočetné množiny isolovaných bodů ($\mathfrak{M}$)

$$x_k \, \alpha^{-l}, \quad k, \, l = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Tyto body jsou poly funkce $F(x)$.

III. Jestliže $\alpha = e^{i\beta}$ a β jest číslo souměřitelné s π, platí totéž co v případě II.

IV. Jestliže $\alpha = e^{i\beta}$ a β jest vhodně volené číslo nesouměřitelné s π, jest konvergenční kružnice řady (3) její přirozenou hranicí ve smyslu Weierstrassově. Avšak ve smyslu Borelově připouští funkce $F(x)$ pokračování v celé rovině, které jest sprostředkováno pravou stranou rovnice (A); při tom jsou singularity nahromaděny na kružnicích, které mají střed v počátku a procházejí body $x_0 \; x_1 \; x_2 \ldots$

3. Důkaz prvých tří vět jest tak jednoduchý, že zajisté postačí jeho stručné naznačení.

Funkce $g(x\alpha^n)$ jest omezená v každém konečném oboru K roviny x, který neobsahuje ani uvnitř ani na své hranici žádný z bodů množiny $\mathfrak{M}$. Jest tedy pro všechna x oboru K

$$|g(x\alpha^n)| \leq N,$$

kdež N jest konečná konstanta. Z toho plyne stejnoměrná konvergence řady (3_1) v oboru K; řada tedy definuje funkci proměnné x analytickou v tomto oboru.

1*

Protože pak každá kružnice se středem v počátku a s poloměrem menším než R_2 jest podle (1_b) oborem typu K, kdežto kružnice s poloměrem R_2 jím není, jest konvergenční poloměr řady (3_1) a tedy i řady (3) nejméně roven číslu R_2.

Věta II. jest pouhým důsledkem stejnoměrné konvergence řady (3_1) a té okolnosti, že body množiny ($\mathfrak{M}$) se nikde v konečnu nehromadí, jestliže $|\alpha| < 1$. To pak má ten následek, že singularity funkce $F(x)$ jsou identické se singularitami jednotlivých sčítanců v rozvoji (3_1) specielně se singularitami prvého členu $g(x)$. Jest tedy pro $|\alpha| < 1$ poloměr konvergence řady (3) skutečně roven R_2.

Jestliže pak $\alpha = e^{i\beta}$, kdež $\beta = \frac{2\pi p}{q}$ a p, q jsou celistvá nesoudělná čísla, bude mezi čísly α^n jen q od sebe různých $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{q-1}, 1$. Rovnice (3_1) dostane tvar

$$F(x) = \sum_{k=0}^{q-1} A_k \, g(x\,\alpha^k),$$

kdež A_k jsou konstanty závislé na y. Tím jest dokázána věta III.

Důkaz věty IV. provedeme podrobněji. Základní jeho myšlenky shodují se v podstatě s důkazem, který podal Borel pro funkci uvedenou na první straně tohoto článku, opíraje se o práci G o u r s a t-o v u.[2])

Podle předpokladů o funkci $g(z)$ leží na konvergenční kružnici řady (1_b) jen konečný počet polů. Nechť jsou to

$$x_k = R_2 \,.\, e^{i\varphi_k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots s; \quad \varphi_k < 2\pi;$$

jejich řády označme $\nu_0, \nu_1, \ldots \nu_s$. Lze tedy psáti $g(z)$ ve tvaru

$$g(z) = \sum_{n=0}^{s} \frac{P_n(z)}{(z - x_n)^{\nu_n}} + g_1(z). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Při tom jest $P_n(z)$ polynom stupně nižšího než ν_n a $g_1(z)$ funkce analytická a tedy *omezená* uvnitř a na obvodě kružnice

$$|z| \leq R_3 > R_2.$$

Rovněž všechna $P_n(z)$ jsou v tomto oboru *omezena*. Analytický výraz těchto vět jest vystižen v nerovninách

$$|P_n(z)| < P, \quad |g_1(z)| < S,$$

kdež P a S jsou konstanty nezávislé na z a n.

Zvolme si nyní číslo $\beta = 2\pi\gamma$ nesouměřitelné s číslem π a se všemi čísly spočetné množiny[3])

$$2\pi k \pm (\varphi_p - \varphi_q), \quad p, q = 0, 1, \ldots s.$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

---

[2]) E. B o r e l, l. c. p. 57–70.
M. G o u r s a t, Bulletin des sc. math. t. XI. et XVII.

[3]) To jest vždy možno, neboť množina irracionálných čísel jest nespočetná, kdežto všechna čísla souměřitelná se shora uvedenými tvoří množinu spočetnou.

Pak jsou body spočetné množiny ($\mathfrak{m}$)

$$x_h e^{-in\beta}, \quad k = 0, 1, \ldots s; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

všechny od sebe různé a pokrývají všude hustě obvod kružnice R_2. Různost bodů uvažovaných vyplývá z toho, že rovnice

$$x_p e^{-in\beta} = x_q e^{-im\beta}$$

by měla následek

$$2\pi (m - n) \gamma = (\varphi_q - \varphi_p) \pm 2\pi k,$$

kdež n, m, k jsou čísla celistvá. To však jest podle předpokladů o β vyloučeno. Hustota uvažované množiny jest pak pouhým důsledkem známého faktu, že množina bodů

$$m\gamma - [m\gamma], \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

při iracionálném γ pokrývá všude hustě interval (0, 1), značíme-li symbolem $[x]$ největší celistvé číslo obsažené v x.

Zvolme si nyní z polů funkce $g(z)$ ležících na kružnici R_2 ten anebo jeden z těch, jimž odpovídá největší ν. Budiž to na př. x_0. V množině ($\mathfrak{m}$) budou mu odpovídati body

$$\xi_n = x_0 e^{-in\beta}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

které pokrývají kružnici R_2 všude hustě. Dokážeme si větu:

Jestliže se blížíme k jednomu z těchto bodů po přímce spojující jej s počátkem, vzrůstá hodnota $|F(x)|$ nad všechny meze. Z toho plyne, že kružnice R_2 jest přirozenou hranicí funkce $F(x)$ ve smyslu W.

Abychom to dokázali, uvažme, že

$$g(x) = \frac{A_0}{(x - x_0)^{\nu_0}} + \frac{Q(x)}{(x - x_0)^{\nu_0 - 1}} + \sum_{n=1}^{s} \frac{P_n(x)}{(x - x_n)^{\nu_n}} + g_1(x),$$

kdež $Q(x)$ jest polynom stupně $(\nu_0 - 2)$ho. Můžeme tedy podle (3_1) psát

$$F(x) = \frac{A_0 a_p y^p}{(x e^{i\beta p} - x_0)^{\nu_0}} + \frac{Q(x e^{i\beta p}) a_p y^p}{(x e^{i\beta p} - x_0)^{\nu_0 - 1}} + F_1(x) +$$
$$+ F_2(x) + F_3(x) + F_4(x) + F_5(x).$$

Zde značí

$$F_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_1(x^{i\beta k}) a_k y^k; \quad F_2(x) = \sum_{k=0}^{h} \sum_{n=1}^{s} \frac{P_n(x e^{i\beta k}) \cdot a_k y^k}{(x e^{i\beta k} - x_n)^{\nu_n}};$$

$$F_3(x) = \sum_{k=0}^{h}{}' \frac{P_0(x e^{i\beta k}) a_k y^k}{(x e^{i\beta k} - x_0)^{\nu_0}}; \quad F_4(x) = \sum_{k=h}^{\infty} \frac{P_0(x e^{i\beta k}) a_k y^k}{(x e^{i\beta k} - x_0)^{\nu_0}};$$

$$F_5(x) = \sum_{k=h}^{\infty} \sum_{n=1}^{s} \frac{P_n(x e^{i\beta k}) a_k y^k}{(x e^{i\beta k} - x_n)^{\nu_n}}.$$

Při tom jest h jisté dosud neurčené číslo celistvé a čárka při Σ značí, že vypuštěn jest sčítanec příslušný $k = p$. Funkce $F_1(x)$, $F_2(x)$ a $F_3(x)$ jsou analytické a konečné v kružnici R_2 a v jistém okolí bodu $x = x_0 e^{-i\beta p}$.

Zkoumejme, jak se mění ostatní výrazy, když x se blíží z počátku po *přímce* k bodu $x_0 e^{-i\beta p}$. Patrně

$$\left|\frac{Q(x e^{i\beta p})\, a_p y^p}{(x e^{i\beta p} - x_0)^{\nu_0 - 1}}\right| < \frac{Q_1 \,.\, |a_p y^p|}{|x e^{i\beta p} - x_0|^{\nu_0 - 1}}\,;$$

Q_1 jest největší hodnota, které nabývá $|Q(x)|$ v oboru $|x| \leq R_2$.

$$F_4(x) < \frac{P}{|x e^{i\beta p} - x_0|^{\nu_0}} \,.\, \sum_k^\infty a_k y^k$$

$$F_5(x) < \frac{s P}{|x e^{i\beta p} - x_0|^{\nu_0}} \sum_k^\infty a_k y^k \,.$$

Jest tedy

$$|F(x) - F_1(x) - F_2(x) - F_3(x)| >$$

$$\frac{A_0 \,|a_p y^p| - (s+1) P \sum\limits_k^\infty |a_k y^k|}{|x e^{i\beta p} - x_0|^{\nu_0}} - \frac{Q_1 |a_p y^p|}{|x e^{i\beta p} - x_0|^{\nu_0 - 1}}\,.$$

Zvolíme-li číslo h tak veliké, že

$$A_0 \,.\, |a_p y^p| > (s+1) P \sum_k^\infty |a_k y^k|\,,$$

což následkem absolutní konvergence řady

$$\Sigma\, a_k y^k$$

jest vždy možné, bude patrně výraz uvažovaný vzrůstati nad všechny meze, když x bude probíhati shora definovanou přímkovou dráhu. Protože pak $F_1(x)$, $F_2(x)$ a $F_3(x)$ jsou čísla konečná v okolí bodu $x = x_0 e^{-i\beta p}$, musí $|F(x)|$ blížiti se k ∞. To pak platí pro každé celistvé číslo p. Jsou tedy body $x_0 e^{-i\beta p}$, $p = 0, 1, 2, \ldots$ singulárními body funkce $F(x)$ a poněvadž pokrývají kružnici R_2 všude hustě, jest tato přirozenou hranicí funkce $F(x)$ s. e. d.

Při této úvaze jsme mlčky předpokládali, že všechna a_p jsou od nully různa. Není-li tomu tak, musíme předpokládati aspoň, že body $x_0 e^{-i\beta p}$, příslušné k a_p od nully různým, pokrývají kružnici R_2 všude hustě. Tím omezujeme do jisté míry obecnost funkce $f(z)$.

4. Zbývá dokázati druhou část věty IV. Z důvodů stručnosti učiníme tak pro speciální případ, kdy všechna čísla φ_p jsou souměřitelna s π a pro určitě zvolené

$$\beta = 2\pi(\sqrt{2} - 1).$$

Ke konci pak naznačíme, jak toto omezení dá se odstraniti.

Sledujme, jak se mění funkce daná arithm. výrazem (3_1), když x probíhá body přímky spojující počátek s bodem

$$x = R_3\, e^{-\frac{2\pi p_1}{q_1} i}\,,$$

kdež $p_1 < q_1$ jsou nesoudělná celistvá čísla.

Je-li x bod na této přímce a A bod na kružnici R_2, bude vždy

$$|x - A| \geq R_2 \cdot \frac{\psi}{4},$$

značí-li ψ obloukovou vzdálenost obou bodů měřenou z bodu O obloukem menším než π.

Zvolíme-li za A bod množiny (m), t. j.

$$A = x_k e^{-i m 2\pi (\sqrt{2}-1)},$$

bude

$$\psi = 2\pi \left| m\sqrt{2} - m - E - \frac{p}{q} - (1) \right|,$$

kdež nesoudělná čísla $p < q$ jsou stanovena vztahem

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} + \varphi_k - \left[\frac{p_1}{q_1} + \varphi_k\right],$$

$$E = [m\sqrt{2} - m];$$

jednotka v závorce (1) se odčítá jen tehdy, když bez ní by ψ bylo větší než π. Nyní lze snadno nalézti dolní mez pro ψ. Jest totiž celé číslo

$$2q^2 m^2 - \{mq + Eq + p + (q)\}^2 \geq 1.$$

Protože pak

$$mq\sqrt{2} + mq + [m\sqrt{2} - m]q + p + (q) < 4mq + 2q,$$

bude

$$\left| m\sqrt{2} - m - E - \frac{p}{q} - (1) \right| > \frac{1}{2q^2(2m+1)}$$

a tedy

$$|x - x_k e^{-i m 2\pi (\sqrt{2}-1)}| = |x e^{i m 2\pi (\sqrt{2}-1)} - x| >$$
$$\frac{\pi R_2}{4q^2(2m+1)} = \frac{C}{2m+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Zde závisí q a tedy i C na volbě x_k. Protože těchto x_k jest pouze $(s+1)$, bude nerovnina právě napsaná platiti pro každé k, když zvolíme v ní za q největší z čísel, která přísluší různým x_k.

Podle (6), (7) a (8) jest však

$$|g(x e^{i m \beta})| < P \cdot \sum_{k=0}^{s} \frac{(2m+1)^{\nu_k}}{C^{\nu_k}} + S$$

a tedy podle rovnice (3_1)

$$|F(x)| < a_0 g(x) + P \sum_{k=0}^{s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m+1)^{\nu_k}}{C^{\nu_k}} a_m y^m + S \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k.$$

Při tom musí x ležeti na přímce spojující počátek s bodem shora vytčeným na kružnici R_3.

Z toho plyne, že řada (3_1) jest na každém vnitřním úseku této přímky stejnoměrně konvergentní a definuje tam tedy spojitou funkci proměnné x.

Doslova táž věta platí o každé řadě vzniklé opětovaným derivováním řady (3_1) člen za členem. Protože pak $R_3 > R_2$, vidíme, že řada (3_1) představuje Borelovo přímkové pokračování funkce $F(x)$ dané potenční řadou (3) za její přirozenou hranici.

Tím jest dokázána věta IV. pro zvláštní formu irracionality γ. Avšak důkaz dá se rozšířiti i na jiné formy této irracionality týmž postupem, jehož užil B o r e l v citovaných Leçons p. 66 (Remarque). Proto upouštím od podrobného provedení.

5. Uvedu nejjednodušší řady uvažovaného typu. Volím

$$f(z) = \frac{1}{1-\varrho z}, \quad g(z) = \frac{1}{1-z}, \quad \varrho = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}; \quad a > b.$$

Transformační vzorec (A) dává

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 - \varrho e^{in\beta} y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n y^n}{1 - e^{in\beta} x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Levá strana jest potenční řada konvergující v kruhu $|x| < 1$ a mající jej za přirozenou hranici, kdežto pravá strana jest výraz typu Borelova, jehož „poly" hromadí se na jednotkové kružnici.

Kladu-li $y = 1$ a pokládám-li na okamžik x, ϱ za čísla reálná, obdržím separací částí reálných a imaginárných řadu ještě jednodušší

$$\sqrt{a^2 - b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a - b \cos n\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{b + \sqrt{a^2 - b^2}} \right)^n \frac{1 - x \cos n\beta}{1 - 2x \cos n\beta + x^2}. \quad (10)$$

Řada tato má tytéž vlastnosti jako (9). Za β mohu voliti na př. úhel v Pythagorejském trojúhelníku daný vztahem

$$p^2 + q^2 = r^2, \quad \cos \beta = \frac{q}{r},$$

kdež $p < q < r$ jsou celistvá nesoudělná čísla a mohu tedy koëficienty řady (10) učiniti racionálnými, zvolím-li také a, b racionálně.[4])

Jiný jednoduchý příklad vznikne, kladu-li

$$g(z) = z \cot g\, z = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} z^{2n},$$

$$A_{2n} = \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!}.$$

Tak dostanu řadu

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{2n} z^{2n}}{a - b \cos 2n\beta}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

která představuje funkci schopnou Borelova pokračování v celé rovině. „Poly" se hromadí při tom na kružnicích se středem v počátku a o poloměrech π, 2π, 3π, ...

O některých dalších příkladech pojednám snad jindy.

---

[4]) Irracionalitu podílu $\frac{\beta}{\pi}$ dokáži jinde.