Miloš Kössler
Příspěvek k teorii Borelova pokračování funkcí

Věstník Král. čes. spol. nauk 1921-22, No. 7, 14 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501218

VII.

Příspěvek k theorii Borelova pokračování funkcí.

Napsal **Miloš Kössler.**

Předloženo dne 12. července 1922.

Potenční řada

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

nechť konverguje v kružnici $|z| < 1$; tato kružnice budiž při tom přirozenou hranicí funkce podle Weierstrassovy definice.

O jisté skupině takových funkcí dokázal Borel, že jsou monogenní v oboru C*), který obsahuje také nespočetné množství bodů, příslušících k obvodu kružnice $|z| = 1$. Při tom nerozhodl zásadní otázky, zda každá funkce tvaru (1) jest monogenní v tomto smyslu, či zda jsou možné výjimky.

V pojednání tomto podán jest důkaz, že funkce theta $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}$ není monogenní v žádném oboru C, který by obsahoval kružnici $|z| < 1$ jako svou část. Dospějeme totiž pro tuto funkci k větě následující:

Na obvodě jednotkové kružnice existuje jen spočetné množství bodů z_1, které mají tuto vlastnost: Funkční hodnota $f(z)$ má konečnou limitu, když z blíží se spojitě k z_1 po poloměru kružnice konvergenční. Zbývající nespočetné množství bodů obvodových té vlastnosti nemá.

Tato věta jest jednak odpovědí na zmíněnou zásadní otázku o monogenitě, zadruhé pak vede k formulaci následujícího problemu obecnějšího:

Při přímkovém pokračování funkce (1) za hranici $|z| = 1$ přes daný bod této hranice požadujeme pouze:

*) E. Borel: Leçons sur les fonc. monog. Definice funkce monog. a oborů C v kapitole V.

A) konečnost a spojitou změnu funkčních hodnot $f(z)$,
B) existenci, konečnost a spojitou změnu hodnot $f'(z)$.

Ptáme se, zda existují funkce typu (1) toho druhu, že v žádném bodě kružnice $|z| = 1$ tyto dva požadavky nejsou splněny, když blížíme se k obvodu po příslušném poloměru kružnice konverg. Uvidíme, že takové funkce vskutku se dají sestrojiti.

Rozšíření pojmu spojitého pokračování bylo by tedy pro takové funkce možno jen opuštěním požadavku *A*) nebo *B*). Opustiti *A*) jest nemožné, neboť požadavek ten definuje spojitost pokračování. Mohli bychom tedy snad upustiti od *B*); avšak požadavek ten jest podle mého mínění nutným spojovacím článkem mezi definicí analytického pokračování podle Weierstrassa a každou jinou definicí pokračování zobecněného.

Z toho pak vyplývá následující úsudek, který jest možno považovati za hlavní výsledek této práce:

Ať rozšíříme pojem spojitého pokračování jakýmkoliv způsobem, budou vždy existovati funkce, které se způsobem tím pokračovati nedají v žádném bodě své kružnice konvergenční pokud ovšem se přidržíme požadavků *A*) a *B*).

---

1. Uvažujme funkci komplexní proměnné $z = x + iy$

$$\Theta(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 z}.$$

Zaveďme dále označení $\xi = e^{-\pi z}$.

Funkce $\Theta(z)$ představuje pak potenční řadu proměnné ξ, která má kružnici $|\xi| = 1$ svou přirozenou hranicí; jinak řečeno funkce $\Theta(z)$ jest rozvojem svým definována v půlrovině $x = R(z) > 0$.

Položme nyní $y = m/n$, kdež m, n jsou celistvá nesoudělná čísla; pak bude

$$\xi = e^{-\pi x} e^{-\frac{\pi m i}{n}}.$$

Blíží-li se nyní x kladnými hodnotami k nule, blíží se bod ξ k bodu $e^{-\frac{\pi m i}{n}}$ po přímce vycházející z počátku a svírající s osou reálnou úhel $-\frac{\pi m}{n}$. Ptáme se nyní, jak se při tom chová $\Theta(z)$. V tom dovíme se ze známých vzorců*) upravených ovšem podle našeho způsobu označování

$$\lim_{x \to 0} \Theta\left(x + \frac{im}{n}\right) = \sqrt[+]{\frac{1}{x}}\,\frac{1}{n}\sum_{\varrho=0}^{n-1} e^{-\frac{m}{n}\varrho^2 \pi i}, \quad m \text{ sudé;}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{x}}\,\frac{1}{2n}\sum_{\varrho=0}^{2n-1} e^{-\frac{m}{n}\varrho^2 \pi i}, \quad m \text{ liché.}$$

Z toho jest patrno, že funkce $\Theta(z)$ vzrůstá nad všechny meze, když x blíží se k nulle pokud příslušné Gaussovy součty jsou od nully různé. Jestliže však Gaussův součet jest roven nulle, což nastane pro m i n současně liché, blíží se $\Theta(z)$ k nulle a rovněž všechny derivace její podle x.

Tyto známé vlastnosti doplníme vyšetřením, jak chová se $\Theta(z)$, když $x \to 0$ a y jest dané číslo i r r a c i o n á l n é.

Cauchy-ova formule transformační

$$\Theta(z) = \frac{1}{\sqrt[+]{z}}\,\Theta\left(\frac{1}{z}\right) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

platí pro každé komplexní z splňující podmínku $x = R(z) > o$.

Tuto formuli lze snadno zevšeobecniti, uvážíme-li že

$$e^{\alpha} = e^{\alpha + 2k\pi i},$$

kdež k jest libovolné kladné nebo záporné číslo celistvé. Tedy také

$$\Theta\left(\frac{1}{z}\right) = \Theta\left(\frac{1+2kiz}{z}\right).$$

Užiju-li nyní na pravou stranu této rovnice transformace (2) dostanu

$$\Theta\left(\frac{1}{z}\right) = \sqrt[+]{\frac{z}{1+2kiz}}\,\Theta\left(\frac{z}{1+2kiz}\right).$$

To dosadím do (2) a obdržím

$$\Theta(z) = \frac{1}{\sqrt[+]{1+2kiz}}\,\Theta\left(\frac{z}{1+2kiz}\right).$$

---

*) Thomae: Abriss einer Theorie der compl. Funkt. Halle 1873. Viz též Krazer: Thetafunktionen p. 190.

V tomto pochodu mohu pokračovati. Značí-li k_1, k_2, ..., k_m celistvá čísla kladná nebo záporná, bude po m krocích naznačeného procesu proměnná Z při funkci Θ na pravé straně rovnice dána řetězcem

$$Z = \frac{1|}{|2k_1 i} + \frac{1|}{|2k_2 i} + \ldots + \frac{1|}{|2k_m i} + \frac{1|}{|z}.$$

Řetězec tento snadno proměníme ve tvar

$$Z = i\frac{1|}{|2k_1} + \frac{a_2|}{|2k_2} + \frac{a_3|}{|2k_3} + \ldots + \frac{a_m|}{|2k_m} \pm \frac{1|}{|iz},$$

kdež k_1, k_2, ... k_m značí libovolná čísla celistvá kladná (nebo po př. rovná nulle) a každé z čísel a_2, a_3 .... a_m jest rovno buď $+1$ nebo -1 podle libovolné volby. Znamení při posledním částečném zlomku musí býti při tom tak zvoleno, že $R(Z) > 0$.

Zavedeme-li nyní do počtu čísla

$$A_0 = 0, \quad A_{-1} = 1, \quad A_\nu = 2k_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2},$$
$$B_0 = 1, \quad B_{-1} = 0, \quad B_\nu = 2k_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2},$$

bude jak z nauky o řetězcích jest známo

$$Z = i\frac{izA_m \pm A_{m-1}}{izB_m \pm B_{m-1}}$$

Při tom jest

$$A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1}B_\nu = (-1)^{\nu+1} a_2 a_3 \ldots a_\nu.$$

Rovnice (2) přejde tak konečně ve tvar

$$\Theta(z) = \frac{1}{\overset{+}{\sqrt{B_m z i \pm B_{m-1}}}} \cdot \Theta(Z), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

který ve své podstatě není nic jiného, nežli známý vzorec pro lineární transformaci funkce theta. Byl zde odvozen jen proto, abychom co nejstručněji definovali řetězec, který v dalším upotřebíme.

Určíme nyní reálnou a imaginární část čísla

$$Z = X + iY,$$

když za z položíme $x + iy$ a provedeme separaci.

Obdržíme snadno

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{-x[\pm A_m B_{m-1} \mp A_{m-1}B_m]}{(B_m y \mp B_{m-1})^2 + B_m^2 x^2} \\ Y &= \frac{B_m A_m (x^2+y^2) \mp y(A_m B_{m-1} + A_{m-1}B_m) + A_{m-1}B_{m-1}}{(B_m y \mp B_{m-1})^2 + B_m^2 x^2} \end{aligned}\right\} \quad (3a)$$

Při tom platí všude buď jen hořejší nebo jen dolejší znamení. Volbu provedeme tak, aby X bylo kladné. Uvážíme-li však, že x jest kladné, musíme rozeznávati dva případy v celém dalším počtu

I. $A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m = (-a_2)(-a_3) \ldots . (-a_m) = -1,$

II. $A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m = (-a_2)(-a_3) \ldots . (-a_m) = +1.$

V případě I. musíme voliti znamení hořejší, v případě II. pak dolejší.

Shrneme tedy podmínky platnosti vzorce (3) následovně:

Čísla $k_1, k_2, \ldots . k_m$ jsou libovolná kladná čísla celistvá, z nichž některá nebo všechna mohou býti rovna nulle. Jich počet m jest rovněž libovolný.

Čísla $a_2, a_3, \ldots, a_m$ jsou libovolně volené kladné nebo záporné jednotky.

Ve vzorci (3) volím buď horní nebo dolní znamení, podle toho, platí-li podmínka I. nebo II.

Takto upraveného vzorce (3) užijeme k vyšetření, jak chová se $\Theta(Z)$, když $X \to 0$ a Y jest rovno předem danému číslu irracionálnému γ.

Má-li býti $Y = \gamma$ bude v případu I. podle druhého z vzorců (3a) po snadné úpravě

$$\left[x^2 + y^2 - \frac{B^2_{m-1}}{B_m^2}\right] \cdot \left[\frac{A_m}{B_m} - \gamma\right] =$$
$$= \frac{B_{m-1}}{B_m}\left[\frac{A_m}{B_m} + \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} - 2\gamma\right] \cdot \left[y - \frac{B_{m-1}}{B_m}\right]$$

Při tom jsou $x > 0$, y čísla libovolná vázaná pouze právě napsanou rovnicí. Položme

$$y = \frac{B_{m-1}}{B_m} - h, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4_I)$$

kdež h jest dosud neurčené číslo. Dosazením do předešlé rovnice obdržíme lehkým počtem

$$x^2 = \frac{h}{B_m[-A_m + \gamma B_m]} - h^2 \quad \ldots \quad (4_I).$$

V případu II. kladu opět $Y = \gamma$ v druhém z vzorců (3a) a výpočtu

$$\left[x^2 + y^2 - \frac{B^2_{m-1}}{B^2_m}\right] \cdot \left[\frac{A_m}{B_m} - \gamma\right] =$$
$$= -\frac{B_{m-1}}{B_m}\left[y + \frac{B_{m-1}}{B_m}\right] \cdot \left[\frac{A_m}{B_m} + \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} - 2\gamma\right].$$

Volbou $y = -\frac{B_{m-1}}{B_m} + h$ dostanu zde . . (4II)

$$x^2 = \frac{h}{B_m\,[A_m - \gamma\, B_m]} - h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\text{II})$$

Zvolíme-li tedy x, y tímto způsobem, bude ve vzorci (3) $Y = \gamma$. Při tom jest h libovolné číslo vázané jen tou podmínkou, aby x bylo kladné.

K dalšímu počtu potřebujeme několika pomocných vět, týkajících se rozvoje irracionálného čísla v jistý řetězec polopravidelný. Tyto věty odvodíme v odstavci následujícím.

2. Budiž γ libovolné, kladné číslo irracionálné menší než jedna. Pak lze vždy nalézti celistvé kladné číslo $k_1 \geq 1$ a irracionalné číslo γ_1 kladné a menší než jedna, takže platí rovnice

$$\frac{1}{\gamma} = 2\,k_1 \pm \gamma_1\,.$$

Při tom jsou k_1, γ_1 a znaménko při tomto jednoznačně určeny číslem γ. Toto tvrzení jest přímým důsledkem té okolnosti, že $1/\gamma$ jest číslo větší než jedna, které tedy leží mezi jistým sudým a lichým číslem celistvým. Toto sudé číslo jest právě $2\,k_1$. Význam γ_1 jest samozřejmý. Z téhož důvodu mohu klásti

$$\frac{1}{\gamma_1} = 2\,k_2 \pm \gamma_2 \qquad \text{a obecně}$$

$$\frac{1}{\gamma_{\nu-1}} = 2\,k_\nu \pm \gamma_\nu \qquad \nu = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

Tak získáme pro irracionálné číslo γ jednoznačně určený řetězec polopravidelný a nekonečný

$$\gamma = \frac{1\,|}{|2\,k_1} + \frac{a_2\,|}{|2\,k_2} + \frac{a_3\,|}{|2\,k_3} + \ldots, \qquad \ldots . \; (5)$$

kdež $a_\nu = \pm 1$, $k_\nu \geq 1$.

Řetězec ten zřejmě konverguje a jest roven γ.

Jeho hodnota nemůže přesáhnouti jedné, kterážto velikosti dosáhne pro

$$-1 = a_2 = a_3 = a_4 = \ldots .$$
$$1 = k_1 = k_2 = k_3 = \ldots .$$

Z toho jest dále patrno, že pro irracionálné γ nemůže existovati takové celistvé N, aby pro všechna $\nu > N$ bylo splněno

$$a_\nu = -1\,; \quad k_\nu = 1\,,$$

neboť v případu tom představuje řetězec číslo racionálné. Toto poznání můžeme vysloviti také ve tvaru věty následující, která nám bude prospěšná.

V řetězci (5) pro irracionálné číslo γ jest nekonečný počet zlomků tvaru

$$\frac{\pm 1|}{|2\,k_\nu}\,, \quad k_\nu > 1 \text{ nebo } \frac{+1|}{|\;2}\,.$$

Volme jeden mezi těmito význačnými zlomky a zaveďme označení

$$\gamma = \frac{1\;|}{|2\,k_1} + \frac{a_2\;|}{|2\,k_2} + \ldots\ldots + \frac{a_{\nu-1}\,|}{|2\,k_{\nu-1}} + \frac{a_\nu\,|}{|\,\delta_\nu}\,.$$

$$\delta_\nu = 2\,k_\nu + \frac{a_{\nu+1}\,|}{|2\,k_{\nu+1}} + \ldots\ldots \qquad > 2\,k_\nu - 1\,.$$

Pak bude podle známých pravidel o řetězcích

$$\gamma - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = \frac{a_\nu\,(A_{\nu-2}\,B_{\nu-1} - A_{\nu-1}\,B_{\nu-2})}{B_{\nu-1}\,(B_{\nu-1}\,\delta_\nu + a_\nu\,B_{\nu-2})} \quad \ldots\ldots \; (6).$$

Sledujme dále jmenovatele sblížených zlomků. Jest

$$B_{-1} = 0\,; \quad B_0 = 1\,; \quad B_1 = 2\,k_1\,; \quad B_2 = 2\,k_2\,B_1 + a_2\,.\,1\,;$$
$$B_\nu = 2\,k_\nu\,B_{\nu-1} + a_\nu\,B_{\nu-2}\,.$$

Z těchto rovnic soudíme, že

$$B_1 > B_0\,; \quad B_2 > B_1\,, \text{ a obecně}$$
$$B_\nu > B_{\nu-1}\,.\,2\,k_\nu - B_{\nu-1} \geqq 3\,B_{\nu-1}, \text{ když } k_\nu > 1 \text{ a}$$
$$B_\nu > B_{\nu-1}\,.\,2\,k_\nu - B_{\nu-1} = B_{\nu-1}, \quad \text{když } k_\nu = 1\,.$$

Z toho soudíme, že posloupnost $B_1, B_2, \ldots$ jest stále vzrůstající a to nad všechny meze.

Vraťme se opět k význačnému indexu ν. Pak jest, jak jsme již zjistili

$$\delta_\nu > 2\,k_\nu - 1 \text{ a tedy}$$
$$B_{\nu-1}\,\delta_\nu + a_\nu\,B_{\nu-2} > B_{\nu-1}\,(2\,k_\nu - 1) - B_{\nu-1} =$$
$$= B_{\nu-1}\,(2\,k_\nu - 2) \geqq 2\,B_{\nu-1}\,,$$

pokud $k_\nu > 1$.

Jestliže však $k_\nu = 1$, bude nutně $a_\nu = 1$ (pro význačný index) a tedy

$$B_{\nu-1}\,\delta_\nu + a_\nu\,B_{\nu-2} > B_{\nu-1}\,.\,1 + B_{\nu-2} > B_{\nu-1}\,.$$

Pro všechny význačné indexy bez rozdílu jest tedy nutně

$$B_{\nu-1}\,\delta_\nu + a_\nu\,B_{\nu-2} > B_{\nu-1} \quad \ldots\ldots \; (7)$$

Dosadíme-li tento výsledek do rovnice (6) a uvážíme-li, že $a_\nu (A_{\nu-2} B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_{\nu-2}) = -(-a_2)(-a_3) \ldots (-a_\nu) = \pm 1$ podle toho zda se jedná o případ I. nebo II., budeme míti v případě 1.

$$0 < -\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} + \gamma < \frac{1}{B^2_{\nu-1}} \quad \ldots \ldots \quad (7_{\mathrm{I}})$$

v případě II.

$$0 < -\left(\gamma - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right) < \frac{1}{B^2_{\nu-1}} \quad \ldots \ldots \quad (7_{\mathrm{II}})$$

V obou tedy

$$\left|\frac{1}{B_{\nu-1}(A_{\nu-1} - \gamma B_{\nu-1})}\right| > 1 \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Poslední tři vzorce jsou těmi pomocnými větami, o nichž jsme se zmínili na konci odstavce 1. Vraťme se nyní k tomuto odstavci a pokračujme v úvahách tam přerušených.

3. Užijme vzorce (3) s tím rozdílem, že v něm položíme $m = \nu - 1$, a čísla $k_1, k_2, \ldots k_m$; $a_2, a_3, \ldots . a_m$ nevolíme již libovolně, nýbrž určíme je ve shodě s řetězcem (5) pro irracionalitu γ. Při tom nechť ν jest index význačný.

Uvažujme nejdříve v případu I. Podle druhého vzorce (4_{I}) bude prvý člen na pravé straně této rovnice kladný, jestliže vzhledem k (7_{I}) učiníme h kladným. Tuto volbu hleďme provésti tak, oby x^2 bylo co největším. To nastane patrně, jesliže zvolíme

$$h = \frac{1}{2 B_m [\gamma B_m - A_m]}.$$

Tak bude podle (4_{I}), (7_{I}) a 8)

$$x = \frac{1}{2 B_m [\gamma B_m - A_m]} > \frac{1}{2}, \quad \ldots \ldots \quad (9_{\mathrm{I}})$$

$$y = \frac{B_{m-1}}{B_m} - \frac{1}{2 B_m [\gamma B_m - A_m]}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do (3a) s hořeními znaménky (případ I.) dostaneme

$$X = \gamma - \frac{A_m}{B_m}; \; Y = \gamma. \quad \ldots \ldots \quad (10_{\mathrm{I}})$$

Tím jest zároveň provedena kontrola počtu, neboť $X > 0$ podle (7_{I}) a Y rovná se vskutku hodnotě irracionálné γ.

V případu II. obdržíme z druhého vzorce (4_{II}) volbou

$$h = \frac{1}{2 B_m [A_m - \gamma B_m]},$$

což jest podle (7_{II}) hodnota kladná,

$$x = \frac{1}{2\, B_m [A_m - \gamma\, B_m]} > \frac{1}{2}, \quad \ldots \ldots \quad (9_{II})$$

$$y = \frac{1}{2\, B_m [A_m - \gamma\, B_m]} - \frac{B_{m-1}}{B_m}.$$

Vzorce (3a) s doleními znaménky dají pak

$$X = \frac{A_m}{B_m} - \gamma : Y = \gamma \quad \ldots \ldots \quad (10_{II})$$

Při tom jest opět $X > 0$ podle (7_{II}).

Abychom mohli užiti vzorce (3), musíme ještě určiti hodnotu

$\underset{+}{\sqrt{B_m z i + B_{m-1}}}$ v případě I. a číslo

$\underset{+}{\sqrt{B_m z i - B_{m-1}}}$ v případě II.

V případu I. dosadíme do $z = x + i y$ ze vzorců (9_I). Tak dostaneme

$$B_m z i + B_{m-1} = \frac{1+i}{1} \cdot \frac{1}{\gamma B_m - A_m} \quad \ldots \quad (11_I)$$

a tedy $\quad | B_m z i + B_{m-1} | = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left| \frac{B_m}{B_m (\gamma\, B_m - A_m)} \right| > \frac{B_m}{\sqrt{2}}$

podle (8).

Podobně v případu II., užijeme-li (9_{II}),

$$B_m z i - B_{m-1} = \frac{i-1}{2} \cdot \frac{1}{A_m - \gamma\, B_m} \quad \ldots \quad (11_{II})$$

a tedy $\quad | B_m z i - B_{m-1} | = \frac{B_m}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{A_m - \gamma\, B_m} \right| > \frac{B_m}{\sqrt{2}}.$

Vzorec (3) v případě I. nabude tedy tvaru

$$\Theta (x + i y) = \sqrt{1 - i} \,.\, \sqrt{\gamma\, B_m - A_m} \,.\, \Theta \left(\gamma - \frac{A_m}{B_m} + i \gamma \right),$$

čili

$$\Theta \left(\gamma - \frac{A_m}{B_m} + i y \right) = \sqrt{\frac{1+i}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma\, B_m - A_m}} \Theta (x + i y). \quad . \quad (12_I)$$

Podle nerovniny (11_I) bude tedy

$$\left| \Theta \left(\gamma - \frac{A_m}{B_m} + i \gamma \right) \right| > | \Theta (x + i y) | \,.\, B_m^{\frac{1}{2}} \,.\, 2^{-\frac{1}{4}}, \quad \ldots \quad (13_I)$$

kdež čísla x, y jsou určena vzorci (9_I).

Funkce $\Theta(x+iy)$ nemá, jak známo, v půlrovině $x>0$ žádných nullových bodů. Z toho plyne, že v půlrovině $x>\frac{1}{2}$ neklesne prostá hodnota této funkce pod jistou konečnou mez M ať y jest jakékoliv. Protože podle vzorců ($9_{\rm I}$) pro všechny význačné indexy m typu I. hodnota x neklesne pod $\frac{1}{2}$, bude pro všechny tyto indexy platiti nerovnina

$$\left|\Theta\left(\gamma-\frac{A_m}{B_m}+i\gamma\right)\right|>2^{-\frac{1}{4}}M\,.\,B^{\frac{1}{2}}_m \quad . \quad . \quad . \quad (14_{\rm I})$$

V případě II. nabude rovnice (3) tvaru

$$\Theta\left(\frac{A_m}{B_m}-\gamma+i\gamma\right)=\sqrt{\frac{1-i}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{A_m-\gamma B_m}}\,\Theta(x+iy) \quad . \quad . \quad . \quad (12_{\rm II})$$

a z toho podle ($11_{\rm II}$) nerovnina

$$\left|\Theta\left(\frac{A_m}{B_m}-\gamma+i\gamma\right)\right|>|\,\Theta(x+iy)\,|\,.\,2^{-\frac{1}{4}}B^{\frac{1}{2}}_m\,, \quad . \quad . \quad (13_{\rm II})$$

která z téhož důvodu jako při ($13_{\rm I}$) přejde v tvar

$$\left|\Theta\left(\frac{A_m}{B_m}-\gamma+i\gamma\right)\right|>2^{-\frac{1}{4}}M.\,B^{\frac{1}{2}}_m \quad . \quad . \quad . \quad (14_{\rm II})$$

Když v nerovnině ($14_{\rm I}$) nebo ($14_{\rm II}$) index m vzrůstá, vzrůstá také B_m nad všechny hodnoty, kdežto M se nemění. Dále uvažme, že se vzrůstajícímu m hodnota

$$\gamma-\frac{A_m}{B_m} \quad \text{v případě I. a hodnota}$$

$\dfrac{A_m}{B_m}-\gamma$ v případě II. blíží se k nulle čísly kladnými.

Výsledek celého počtu shrneme takto:

Budiž γ libovolné číslo irracionálné menší než 1. Vyjádříme ho ve tvaru řetězce (5). Mezi sblíženými zlomky tohoto řetězce A_m/B_m vybéřeme nekonečnou posloupnost takových, které hoví nerovnině

$$\frac{1}{B_m\,|\,A_m-\gamma B_m\,|}>1\,,$$

což podle úvah předcházejících jest vždy možné.

Učiníme-li nyní

$$X_m=\left|\gamma-\frac{A_m}{B_m}\right|,$$

bude o funkci

$$\Theta(X_m+i\gamma)$$

platiti jedna z nerovin (14_{I}) nebo (14_{II}). To pak má ten význam, že prostá hodnota právě označené funkce vzrůstá nad všechny meze, když X_m blíží se k nulle posloupností shora vytčenou. Totéž platí přirozeně o prostých hodnotách funkce

$$\Theta(X_m - i\gamma).$$

Přímým důsledkem této věty jest pak výrok:

Jestliže γ jest číslo irracionálné menší než 1 a jestliže X blíží se **spojitě** k nulle kladnými hodnotami pak $\Theta(X \pm i\gamma)$ neblíží se k žádné konečné limitě.

4. Na začátku odstavce 1. zavedli jsme označení $\xi = e^{-\pi z}$. Tím přejde funkce $\Theta(z)$ v obyčejnou řadu potenční

$$f(\zeta) = 1 + 2\,(\zeta^{1^2} + \zeta^{2^2} + \zeta^{3^2} + \ldots + \xi^{n^2} + \ldots) \quad \ldots \quad (15)$$

s jednotkovou kružnicí $|\zeta| = 1$ jako přirozenou hranicí. V předcházejících odstavcích zjistili jsme, jak chová se tato funkce, jestliže ζ blíží se k obvodu kružnice konvergenční po některém z poloměrů této kružnice. Funkční hodnota blíží se při tom ke konečné limitě jen při těch poloměrech, které svírají s reálnou osou úhel $\pi\, m/n$, kdež obě celistvá čísla m, n jsou lichá.

Z toho plyne ihned tento poznatek:

Funkce $f(\zeta)$ definovaná rovnicí (15) není monogenní podle Borela v žádném oboru C,*) který by přesahoval jednotkovou kružnici.

Takový obor C vznikne totiž tím způsobem, že ze spojité části roviny ζ, kterážto část přesahuje jednotkovou kružnici, vyloučíme spočetné množství kruhů vzájemně se neprotínajících. Zbytek jmenované části roviny tvoří obor C. Funkce monogenní v oboru C jest pak spojita v oboru tom a má derivaci v každém vnitřním bodě toho oboru, to jest v každém bodě, který nepřísluší k hranicím oboru.

Kdyby takový obor C širší nežli kruh $|\zeta| \leqq 1$ pro funkci $f(\zeta)$ existoval, musily by středy vyloučených kruhů ležeti buď vně jednotkové kružnice, nebo na jejím obvodu, neboť celý vnitřek konverg. kružnice patří k oboru monogenity. Z posice vyloučených kruhů a z té okolnosti, že se neprotínají (ani nedotýkají) by však plynulo, že nespočetné množství

*) Definici takového oboru viz Borel l. c.

obvodových bodů kružnice $|\zeta| = 1$ patří k oboru C a to tak, že každý poloměr kružnice $|\zeta| = 1$ směřující k takovému bodu neprotíná žádný vyloučený kruh, ani se ho nedotýká. Potom by však funční hodnota $f(\zeta)$ musila se blížiti ke konečné hodnotě, když blížíme se k obvodu kružnice $|\zeta| = 1$ po kterémkoliv z onoho nespočetného množství poloměrů.

To však jest ve sporu s tím, co jsme v předešlých odstavcích seznali.

Obor, v němž jest funkce $f(\zeta)$ monogenní podle Borela, nepřesahuje tedy obor, v němž jest analytickou podle Weierstrassa.

Jest jisto, že uvažovaná funkce není jedinou toho druhu. Velmi pravděpodobně lze očekávati obdobné vlastnosti u mnohých funkcí modulových a automorfních, které mají funkční rovnice obdobné rovnici (2).

5. Přistupme nyní k obecnějšímu problemu, formulovanému v úvodě.

Funce $f(\zeta)$ není tedy monogenní, dokonce ani nepřipouští přímkového pokračování až na obvod konvergenční kružnice po nespočetném množství poloměrů. Avšak víme, že takové pokračování jest možno po onom spočetném množství poloměrů, které svíraji s reálnou osou úhly $\pm(2k+1)\pi/(2l+1)$. V příslušných bodech konvergenční kružnice splňuje naše funkce podmínky A) a B), jak jsme je v úvodu formulovali. Funkční hodnota blíží se tam k nulle a rovněž hodnota její derivace. Lze vskutku sestrojiti arithmetický výraz $F(\zeta)$, který má význam vně i uvnitř kružnice jednotkové, uvnitř shoduje se s funkcí $f(\zeta)$ a při tom představuje spojitou funkci proměnné ζ, když sledujeme jeho průběh podle zmíněného již spočetného množství poloměrů i skrze obvod kružnice $|\zeta| = 1$; rovněž konečné derivace tam existují a mění se spojitě. O tom však se zde dále šířiti nebudeme, aby práce příliš nevzrostla. Pokusíme se spíše o pravý opak, to jest o jakési »ucpání« i toho spočetného množství bodů na kružnici $|\zeta| = 1$, ve kterých přímkové pokračování ještě jest snad možno.

Seřaďme tyto body libovolným způsobem a označme je $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Zvolme si dále posloupnost kladných čísel

$C_1, C_2, C_3, \ldots$, která má tu vlastnost, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n$$

konverguje. Utvořme dále funkci komplexní proměnné

$$g(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{\zeta - \alpha_n} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Při tom volme za odmocninu onu větev dvojznačné funkce, která pro $\zeta = 0$ se redukuje na

$$i \sqrt[+]{|\alpha_n|} \cdot e^{\frac{1}{2} arc\, \alpha_n} .$$

Funkce $g(\zeta)$ konverguje stejnoměrně uvnitř jednotkové kružnice, což vyplývá z té okolnosti, že tam jest

$$|\sqrt{\zeta - \alpha_n}| < \sqrt{2}$$

$g(\zeta)$ jest tedy analytická funkce v oné kružnici. Jest tedy i její derivace funkcí téže vlastnosti a platí

$$g'(\zeta) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\sqrt{\zeta - \alpha_n}}$$

Lze snadno nahlédnouti tyto dvě vlastnosti funkce $g(\zeta)$:

1. Ať blížíme se k obvodu kružnice $|\zeta| = 1$ po kterémkoliv poloměru, vždy funkční hodnoty $g(\zeta)$ blíží se ke konečné limitě, která nepřesahuje svou absol. hodnotou číslo

$$\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n$$

2. Když blížíme se po poloměru k některému z bodů $\zeta = \alpha_n$, prostá hodnota derivace $g'(\zeta)$ vzrůstá nad všechny meze.

Důkaz 1. jest téměř samozřejmý a pokud se důkazu věty 2. týče, dá se provésti touž methodou, která jest vyložena n. př. v citované knize Borelově v kapit. I. při výrazech tvaru

$$\sum \frac{A_n}{z - \alpha_n} .$$

Všimněme si nyní funkce definované součtem $f(\xi) + g(\zeta)$ Když blížíme se k bodu kružnice $\xi = 1$ po poloměru, který svírá s osou reálnou úhel nesouměřitelný s π pak $f(\zeta)$ nemá.

limity a $g(\zeta)$ má ji. Tedy součet nemá limity. Jestliže úhel onen jest $\pi\, m/n$, kdež jedno z celých čísel m, n jest sudé a druhé liché, platí totéž co pro úhel nesouměřitelný. Jestliže konečně obě čísla m, n jsou lichá, pak součet sice má limitu avšak jeho derivace $f'(\zeta) + g'(\zeta)$ limity nemá.

Tím jest řešen i druhý problém v úvodu naznačený a dokázána platnost věty, kterou úvod jest ukončen.

A remark on the Borels theorie of monogeneous functions.

(Abstract of the precedent article.)

The thetafunction

$$f(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}$$

has following known properties.

If we put $z = r e^{\frac{i\pi p}{q}}$, where p, q are integral numbers without common factor and if $r \to 1$, then

$f(z) \to 0$ (p, q both odd) or $f(z) \to \infty$ (p, q no both odd).

The principal result of the precedent investigation is the theorem:

If $z = r e^{i\pi\gamma}$, where γ is any irracional number and if $r \to 1$, then $f(z)$ cannot have a limit.

Two immediate consequences of this are:

1. The circle of convergence $|z| < 1$ is the region (C) of Borels monogeneity of the thetafunction.

2. We denote by $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ the set of all different numbers $e^{\frac{i\pi p}{q}}$, where p, q are both odd and by $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a convergent series of positive constants. Then defines the equation

$$F(z) = f(z) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\alpha_n - z}$$

a function, which have following remarkable property:

Is φ in $z = r e^{i\varphi}$ any fix number and if $r \to 1$, then $F(z)$ and $F'(z)$ cannot have simultaneously finite limits.
