Eduard Čech

Classe différentielle des courbes. Cercles osculateurs et sphères osculatrices

Bul. Inst. Politehn. Iaşi 5 (9) (1959), 1-4

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501102

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul V (IX), Fasc. 1–2, 1959

CLASSE DIFFÉRENTIELLE DES COURBES. CIRCLES OSCULATEURS ET SPHÈRES OSCULATRICES

PAR

EDUARD ČECH

Une courbe C de l'espace ordinaire soit dite *régulière* si les deux courbures k_1, k_2 sont des fonctions continues de l'arc s qui ne s'annulent jamais. C possède en chaque point X une tangente T et un plan osculateur P. Le paramètre t du point mobile de C est dit *régulier* si $dt/ds \neq 0$ partout. Outre s, les quantités $\sigma_1 = \int k_1 \, ds$, $\sigma_2 = \int k_2 \, ds$ sont des paramètres réguliers. En posant $\mathrm{cl}\, f(t) \geqq r$ si la fonction f possède une dérivée r-ième continue, le nombre min $[k_1(t), k_2(t)]$ a la même valeur r pour $t = s, \sigma_1, \sigma_2$. Dans ce qui suit on suppose que $r < \infty$. J'ai déterminé [1] les nombres $\mathrm{cl}\, X(t)$, $\mathrm{cl}\, T(t)$, $\mathrm{cl}\, P(t)$ pour $t = s$, σ_1, σ_2; d'ailleurs si t parcourt tous les paramètres réguliers on a toujours

$$\max \ \mathrm{cl}\, X(t) = \mathrm{cl}\, X(s), \ \max \ \mathrm{cl}\, T(t) = \mathrm{cl}\, T(\sigma_1), \ \max \ \mathrm{cl}\, P(t) = \mathrm{cl}\, P(\sigma_2).$$

Pour la commodité du lecteur je repète ci-dessous les valeurs de $X(s)$, $X(\sigma_1)$, $X(\sigma_2)$. La courbe C possède en chaque point un cercle osculateur g. Outre g je considère aussi la sphère osculatrice h; les résultats que je vais énoncer pour h supposent que $r \geqq 2$ et que $\mathrm{cl}\, [\varrho(\sigma_2) + d^2 \varrho(\sigma_2)/d\sigma_2^2] \neq 0$ partout, où $\varrho = 1/k_1$, ce qui implique que le centre de h décrit une courbe régulière. Notons que

$$\varrho(\sigma_2) + d^2 \varrho(\sigma_2)/d\sigma_2^2 \equiv 0$$

pour les courbes sphériques.

Après ces préliminaires je vais énoncer mes résultats relatifs aux nombres $\mathrm{cl}\, g(t)$ et $\mathrm{cl}\, h(t)$; les démonstrations seront données au *Czechoslovak Mathematical Journal*. On voit sans peine que les résultats énoncés ici impliquent ceux de la Note [2].

I. Soit $\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) = r$. Alors

$$\max \mathrm{cl}\, X(t) = \mathrm{cl}\, X(s) = r + 2, \ \mathrm{cl}\, X(\sigma_1) = r + 1,$$

$$\mathrm{cl}\, X(\sigma_2) = \begin{cases} r + 1 \ \text{pour} \ k_2(\sigma_2) = r, \\ r + 2 \ \text{pour} \ k_2(\sigma_2) \geqq r + 1; \end{cases}$$

$$\max \mathrm{cl}\ g(t) = \mathrm{cl}\, g(s) = \mathrm{cl}\, g(\sigma_1) = \mathrm{cl}\, g(\sigma_2) = r;$$

$$\max \mathrm{cl}\ h(t) = r, \mathrm{cl}\, h(s) = \mathrm{cl}\, h(\sigma_1) = \mathrm{cl}\, h(\sigma_2) = r - 1.$$

II. Soit $\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) = r + 1$. Alors

$$\max \mathrm{cl}\, X(t) = \mathrm{cl}\, X(s) = r + 3, \ \ \mathrm{cl}\, X(\sigma_2) = r + 1,$$

$$\mathrm{cl}\ X(\sigma_1) = \begin{cases} r + 2 \ \text{pour} \ k_1(\sigma_1) = r + 1, \\ r + 3 \ \text{pour} \ k_1(\sigma_1) \geqq r + 2; \end{cases}$$

$$\max \mathrm{cl}\, g(t) = \mathrm{cl}\, g(s) = \mathrm{cl}\, g(\sigma_1) = \mathrm{cl}\, g(\sigma_2) = r + 1,$$

$$\max \mathrm{cl}\, h(t) = r + 1, \ \mathrm{cl}\, h(s) = \mathrm{cl}\, h(\sigma_1) = \mathrm{cl}\, h(\sigma_2) = r.$$

III. Soit $\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) \geqq r + 2$. Alors

$$\max \mathrm{cl}\, X(t) = \mathrm{cl}\, X(s) = r + 3, \ \mathrm{cl}\, X(\sigma_1) = r+2, \ \mathrm{cl}\, X(\sigma_2) = r + 1;$$

$$\max \mathrm{cl}\, g(t) = \mathrm{cl}\, g(\sigma_2) = r + 2, \ \mathrm{cl}\, g(s) = \mathrm{cl}\, g(\sigma_1) = r + 1.$$

Quant à la sphère osculatrice, on doit distinguer trois cas:

III a. Si $\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) = r + 2$, alors

$$\max \mathrm{cl}\, h(t) = r + 2, \ \mathrm{cl}\, h(\sigma_2) = r + 1,$$

$$\mathrm{cl}\, h(s) = \mathrm{cl}\, h(\sigma_1) = \begin{cases} r + 1 \ \text{pour} \ \mathrm{cl}\, f(\sigma_2) = r, \\ r + 2 \ \text{pour} \ \mathrm{cl}\, f(\sigma_2) \geqq r + 1, \end{cases}$$

où

$$f(\sigma_2) = k_2(\sigma_2)\,[1 + \varrho(\sigma_2) + \mathrm{d}^2 \varrho(\sigma_2) / \mathrm{d}\, \sigma_2^2], \ \ \varrho = 1/k_1.$$

III b. Si $\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) = r + 3$, alors

$$\max \mathrm{cl}\, h(t) = r + 3, \mathrm{cl}\, h(\sigma_2) = r + 2, \ \ \mathrm{cl}\, h(s) = \mathrm{cl}\, h(\sigma_1) = r + 1.$$

III c. Si $\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) \geqq r+4$ (il se peut que $\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) = \infty$ ou même que $k_1 = \mathrm{const.}$) alors

$$\max \mathrm{cl}\, h(t) = \mathrm{cl}\, h(\sigma_2) = r+3, \quad \mathrm{cl}\, h(s) = \mathrm{cl}\, h(\sigma_1) = r+1.$$

Reçu le 14 IV 1959

Académie des Sciences, Prague, Tchécoslovaquie

BIBLIOGRAPHIE

1. Čech E., Czech. Math. Journal, 1957, **7** (**82**), pp. 599—631.
2. — Colloquium Mathematicum, 1958, **6**, pp. 141—143.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ КЛАСС КРИВЫХ. СОПРИКАСАЮЩИЕСЯ ОКРУЖНОСТИ И СОПРИКАСАЮЩИЕСЯ СФЕРЫ

(Резюме)

Пополняя результаты заметки [1], автор устанавливает, на основании нижеизложенного, порядок дифференцируемости соприкасающихся окружностей и соприкасающихся сфер пространственной кривой определяемой её формулами Френе.

Пусть C — пространственная кривая, s — дуга C, k_1 — кривизна, k_2 — кручение, g — соприкасающаяся окружность C, h — соприкасающаяся сфера, $\sigma_1 = \int k_1\, ds$, $\sigma_2 = \int k_2\, ds$.

Предполагается, что всюду $k_1 k_2 \neq 0$ и что g и h не стационарны ни в одной точке C. Пусть символ cl обозначает порядок непрерывной дифференцируемости. Если

$$r = \min[\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2),\ \mathrm{cl}\, k_2(\sigma_2)],$$

(где σ_2 может быть заменено s или же σ_1) и если $r < \infty$, вычисляются числа $\mathrm{cl}\, g(t)$ $\mathrm{cl}\, h(t)$ для $t = s, \sigma_1, \sigma_2$ а так же и для t, при котором эти числа приннмают максимальные значения. Устанавливается, что вообще достаточно знать, кроме r, число $\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2)$. Исключение имеет место когда $\mathrm{cl}\, h(s) = \mathrm{cl}\, h(\sigma_1)$ в случае $\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) = r+2$.

CLASA DIFERENŢIALĂ A CURBELOR. CERCURI OSCULATOARE ŞI SFERE OSCULATOARE

(Rezumat)

Completînd rezultatele notei [1] autorul descrie — după cum urmează din cele de mai jos — ordinul de diferenţiabilitate a cercurilor osculatoare şi a sferelor osculatoare ale unei curbe strîmbe, determinată prin formulele sale Frenet.

Fie C o curbă strîmbă, s arcul lui C, k_1 — curbura, k_2 — torsiunea, g — cercul osculator la C, h — sfera osculatoare, $\sigma_1 = \int k_1\, ds$, $\sigma_2 = \int k_2\, ds$. Se presupune că $k_1 k_2 \neq 0$

peste tot şi că g şi h nu sînt staţionare în nici un punct al lui C. Notînd prin cl ordinul de diferenţiabilitate continuă şi punînd

$$r = \min [\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2),\ \mathrm{cl}\, k_2(\sigma_2)]$$

(în care σ_2 poate fi înlocuit prin s sau prin σ_1) şi presupunînd $r < \infty$, se calculează numerele cl $g(t)$, cl $h(t)$, pentru $t = s, \sigma_1, \sigma_2$ precum şi pentru t astfel ca aceste numere să aibă valori maxime. Se stabileşte că este suficient să se cunoască în general, în afară de r, numărul cl $k_1(\sigma_2)$. Excepţie face cazul în care numărul cl $h(s) =$ cl $h(\sigma_1)$ în ipoteza că cl $k_1(\sigma_2) = r + 2$.