Eduard Čech

Deformazioni proiettive di congruenze e questioni connesse

Ist. Mat. Univ. Roma (1956), 44 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501089

E D U A R D Č E C H

DEFORMAZIONI PROIETTIVE DI CONGRUENZE E QUESTIONI CONNESSE

Roma-Istituto Matematico dell'Università, 1956

DEFORMAZIONI PROIETTIVE DI CONGRUENZE E QUESTIONI CONNESSE

Nello spazio S_3 consideriamo una retta

(1) $$g = [A_1, A_2]$$

dipendente da due parametri u , v, sicchè g genera una congruenza $\mathcal{L}$ che supponiamo non parabolica. Facciamo uso sistematico di un riferimento mobile

(2) $$A_1, A_2, A_3, A_4$$

tale che valga la (1) e che le trasformate di Laplace della $\mathcal{L}$ di partenza (che possono esser degeneri) siano generate dalle rette

(3) $$g_1 = [A_1\ A_3]\ ,\quad g_2 = [A_2\ A_4]\ .$$

Conviene inoltre supporre

(4) $$[A_1 A_2 A_3 A_4] = 1\ ,$$

sicchè il riferimento (2) dipende, oltre dai parametri principali u,v da altri 5 parametri secondari che saranno specializzati solo occasionalmente quando occorre. Posto come al solito

(5) $$d\,A_i = \omega_{i1}A_1 + \omega_{i2}A_2 + \omega_{i3}A_3 + \omega_{i4}A_4 \quad (i=1,2,3,4)$$

ed inoltre, per convenienza,

(6) $$\omega_{13} = \omega_1,\quad \omega_{24} = \omega_2,$$

la (4) implica

(7) $$\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} = 0$$

e le condizioni (3) sono espresse analiticamente dalle

(8) $$\omega_{14} = 0, \quad \omega_{23}=0$$

(9) $$[\omega_{12}\ \omega_2] = 0, \quad [\omega_{21}\,\omega_1] = 0.$$

Si ha inoltre

(10) $$[\omega_1\,\omega_2] \neq 0$$

giacchè la retta (1) dipende in modo essenziale da due parametri. Differenziando esteriormente le (8) si arriva alle equazioni

$$[\omega_{34}\ \omega_1] = 0, \qquad [\omega_{43}\ \omega_2] = 0$$

le quali insieme colle (9) si permettono di porre

(11) $$\omega_{12}=\alpha_1\ \omega_2, \qquad \omega_{21}=\alpha_2\ \omega_1, \quad \omega_{34}=\beta_2\ \omega_1,$$
$$\omega_{43}=\beta_1\ \omega_2.$$

Le (5) diventano quindi

(12)
$$\begin{aligned} dA_1 &= \omega_{11}A_1+\alpha_1\ \omega_2A_2+\omega_1A_3, \\ dA_2 &= \alpha_2\ \omega_1A_1+\omega_{22}A_2+\omega_2A_4, \\ dA_3 &= \omega_{31}A_1+\omega_{32}A_2+\omega_{33}A_3+\beta_2\ \omega_1A_4, \\ dA_4 &= \omega_{41}A_1+\omega_{42}A_2+\beta_1\ \omega_2A_3+\omega_{44}A_4. \end{aligned}$$

Insieme col riferimento puntuale (2) conviene considerare anche il riferimento duale con piani base

(13) $$E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,$$

dove

(14) $$E_1=[A_2A_3A_4], \quad E_2=-[A_1A_3A_4], \quad E_3=[A_1A_2A_4], \quad E_4=-[A_1A_2A_3].$$

Alle (12) corrispondono le equazioni duali

(15)
$$\begin{aligned} dE_1+\omega_{11}E_1+\alpha_2\ \omega_1E_2+\omega_{31}E_3+\omega_{41}E_4 &= 0 \\ dE_2+\alpha_1\ \omega_2E_1+\omega_{22}E_2+\omega_{32}E_3+\omega_{42}E_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$dE_3+\omega_1E_1+\omega_{33}E_3+\beta_1\ \omega_2E_4=0$$
$$dE_4+\omega_2E_2+\beta_2\ \omega_1E_3+\omega_{44}E_4=0$$

occorre anche notare le equazioni relative al riferimento rigato associato allo (2), che si ricavano facilmente dalle (12) e sono

$$\begin{aligned}
&d[A_1A_2]=(\omega_{11}+\omega_{22})[A_1A_2]+\omega_2[A_1A_4]-\omega_1[A_2A_3],\\
&d[A_1A_3]=\omega_{32}[A_1A_2]+(\omega_{11}+\omega_{33})[A_1A_3]+\beta_2\omega_1[A_1A_4]+\alpha_1\omega_2[A_2A_3],\\
&d[A_1A_4]=\omega_{42}[A_1A_2]+\beta_1\ \omega_2\ [A_1A_3]+(\omega_{11}+\omega_{44})[A_1A_4]+[A_2A_4]+\omega_1\cdot\\
&\qquad\qquad\alpha_1\omega_2\cdot[A_3A_4],\\
(16)\quad &d[A_2A_3]=-\omega_{31}[A_1A_2]+\alpha_2\,\omega_1[A_1A_3]+(\omega_{22}+\omega_{33})[A_2A_3]+\beta_2\omega_1\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot[A_2A_4]-\omega_2[A_3A_4],\\
&d[A_2A_4]=-\omega_{41}[A_1A_2]+\alpha_2\,\omega_1[A_1A_4]+\beta_1\omega_2[A_2A_3]+(\omega_{22}+\omega_{44})[A_2A_4]\\
&d[A_3A_4]=-\omega_{41}[A_1A_3]+\omega_{31}[A_1A_4]-\omega_{42}[A_2A_3]+\omega_{32}[A_2A_4]+(\omega_{33}+\omega_{44})\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot[A_3A_4]\ .
\end{aligned}$$

Importanza fondamentale per il seguito hanno anche le equazioni che si ottengono differenziando esteriormente le (11)

$$\begin{aligned}
&[\omega_{32}\omega_1]+[d\alpha_1+\alpha_1(2\omega_{22}-\omega_{11}-\omega_{44})\ \ \omega_2]=0,\\
&[d\alpha_2+\alpha_2(2\omega_{11}-\omega_{22}-\omega_{33})\ \omega_1]+[\omega_{41}\omega_2]=0,\\
(17)\ -&[\omega_{41}\ \omega_1]+[d\beta_1+\beta_1(\omega_{22}+\omega_{33}-2\omega_{44})\ \omega_2]=0,\\
&[d\beta_2+\beta_2(\omega_{11}-2\omega_{33}+\omega_{44})\,\omega_1]-[\omega_{32}\omega_2]=0.
\end{aligned}$$

Di spesso uso sono anche le

$$(18)\qquad [d\omega_1]=[\omega_{11}-\omega_{33}\ \omega_1],\qquad [d\omega_2]=[\omega_{22}-\omega_{44}\omega_2]$$

La congruenza studiata $\mathcal{L}$ può essere decomposta in due modi diversi in una famiglia ∞^1 di sviluppabili che distinguiamo come <u>prima</u> e <u>seconda</u> famiglia, la prima essendo data dall'equazione differenziale $\omega_1=0$ e la seconda dalla $\omega_2=0$. Alla prima famiglia di sviluppabili corrisponde il <u>primo fuoco</u> A_1 ed il <u>primo piano focale</u> E_3, alla seconda invece il <u>secondo fuoco</u> A_2 ed il <u>secondo piano focale</u> E_4. La distinzione fra la prima e seconda famiglia di sviluppabilip fra il primo e secondo fuoco, fra il primo e secondo piano focale sarà denominata <u>orientazione</u> della congruenza $\mathcal{L}$. Occorre motare che al cambiamento di orientazione corrisponde la sostituzione

$$(19) \qquad \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & \omega_1 & \omega_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ A_2 & A_1 & A_4 & A_3 & E_2 & E_1 & E_4 & E_3 & \omega_2 & \omega_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix}.$$

Notiamo anche che la dualità (se non si cambia l'orientazione) può essere espressa dalla sostituzione

$$(20) \qquad \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & \omega_1 & \omega_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ E_3 & E_4 & E_1 & E_2 & A_3 & A_4 & A_1 & A_2 & -\omega_1 & -\omega_2 & \beta_1 & \beta_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Nel nostro trattamento si farà poco esplicito uso dei parametri u,v, la cui scelta non ha dunque per noi molta importanza. Notiamo però che nei problemi che ci interessano è ben naturale far uso di <u>parametri</u> u,v sviluppabili, tali cioè che le sviluppabili della congruenza $\mathcal{L}$ siano date da v=cost. e da u=cost. Se la $\mathcal{L}$ è orientata, possiamo supporre che v=cost. per la prima famiglia di sviluppabili dimodochè

$$(21) \qquad [\omega_1 \, dv] = 0 \quad , \quad [\omega_2 \, du] = 0.$$

Abbiamo già notato che il riferimento (2) non dipende solo dai parametri principali u,v, ma anche da 5 parametri secondari. Seguendo E.Cartan, indichiamo con δ il simbolo di differenziazione estesa solo ai parametri secondari dimodochè $\omega_1(\delta)=\omega_2(\delta)=0$ e poniamo $\omega_{ij}(\delta)= e_{ij}$ sicchè, secondo

(7), (8), (11) e (17)

$$(22)\qquad \begin{aligned} &e_{14} = e_{23} = 0, \qquad e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44} = 0. \\ &e_{12} = e_{21} = e_{34} = e_{43} = 0, \qquad e_{32} = e_{41} = 0. \end{aligned}$$

Ora dalle (17) si ricava

$$(23)\qquad \begin{aligned} &\delta\alpha_1 = (e_{11} - 2e_{22} + e_{44})\alpha_1, \qquad \delta\alpha_2 = (e_{22} - 2e_{11} + e_{33})\alpha_2 \\ &\delta\beta_1 = -(e_{22} + e_{33} - 2e_{44})\beta_1, \qquad \delta\beta_2 = -(e_{11} + e_{44} - 2e_{33})\beta_2 \end{aligned}$$

e dalle (18)

$$(24)\qquad \delta\omega_1 = (e_{11} - e_{33})\omega_1, \qquad \delta\omega_2 = (e_{22} - e_{44})\omega_2$$

Ne consegue che le forme differenziali

$$(25)\qquad \varphi = \alpha_1\alpha_2\omega_1\omega_2, \quad \varphi^* = \beta_1\beta_2\omega_1\omega_2, \quad F_1 = \alpha_1\beta_1\frac{\omega_2^3}{\omega_1}, \quad F_2 = \alpha_2\beta_2\frac{\omega_1^3}{\omega_2}$$

legate dall'identità

$$(26)\qquad \varphi\cdot\varphi^* = F_1\cdot F_2$$

sono invarianti proiettivi differenziali della congruenza $\mathcal{L}$, e che invarianti sono pure le equazioni

$$(27)\qquad \beta_2\omega_1^2 + \alpha_1\omega_2^2 = 0, \qquad \alpha_2\omega_1^2 + \beta_1\omega_2^2 = 0.$$

L'insieme delle forme differenziali (25) e delle equazioni differenziali (27) sia detto <u>elemento lineare proiettivo</u> della congruenza $\mathcal{L}$. Noi non avremo occasione d'introdurre qui altri invarianti proiettivi della $\mathcal{L}$; notiamo solo che il classico invariante di Waelsch di una congruenza è identico al rapporto $\varphi^* : \varphi$. Dalla (19) si ricava che al cambiamento d'orientazione corrisponde la sostituzione

$$(28)\qquad \begin{pmatrix} \varphi & \varphi^* & F_1 & F_2 \\ \varphi & \varphi^* & F_2 & F_1 \end{pmatrix};$$

invece la (20) mostra che alla dualità corrisponde la sostituzione

$$(29) \qquad \begin{pmatrix} \varphi & \varphi^* & F_1 & F_2 \\ \varphi^* & \varphi & F_1 & F_2 \end{pmatrix} .$$

Alla forma φ daremo il nome forma puntuale della congruenza $\mathcal{L}$, alla φ^* quello di forma planare; le F_1 e F_2 chiameremo rispettivamente la prima e la seconda forma focale. La considerazione della forma puntuale e planare equivale in sostanza a quella dei classici "invarianti" di Laplace-Darboux. Un significato geometrico semplice della forma puntuale e planare fu dato da A.Terracini in 1927. Esso consegue facilmente dalle (12); infatti si vede subito che negligendo gli infinitesimi d'ordine superiore si ha

$$(A_1+d\,A_1)_{\omega_1=0} = A_1+\alpha_1\omega_2 A_2, \quad (A_2+dA_2)_{\omega_2=0}=A_2+\alpha_2\omega_1 A_1,$$

sosicchè il birapporto della quaterna di punti

$$A_1, \; A_2, \; (A_1+d\,A_1)_{\omega_1=0}, \quad (A_2+d\,A_2)_{\omega_2=0}$$

è uguale alla forma puntuale φ e dualmente quello della quaterna di piani

$$E_3, \; E_4, \; (E_3+d\,E_3)_{\omega_1=0}, \quad (E_4+d\,E_4)_{\omega_2=0}$$

è uguale alla forma planare φ^*. Pare che le forme focali compaiano solo in qualche mia recente conferenza. Non ho cercato la loro interpretazione geometrica; più importante mi pare d'indicare il significato geometrico di trasformazioni che lasciano inalterata la F_1 o F_2, il che sarà fatto nel seguito, spiegandosi così anche le denominazioni.

Benchè le espressioni α_1, α_2, β_1, β_2 non siano invarianti, le (23) mostrano che il loro annullamento ha un significato geometrico.

Negligendo l'orientazione vi sono dieci tipi di congruenze non paraboliche: Tipo I: $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \neq 0$ di congruenze con due superficie focali non sviluppabili. Tipo II: $\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \neq 0 = \alpha_2$ oppure $\alpha_2 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \neq 0 = \alpha_1$ di congruenze con una superficie focale non sviluppabile ed una curva direttrice non rettilinea. Tipo II*: $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_1 \neq 0 = \beta_2$ oppure $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2 \neq 0 = \cdot \beta_1$ duale al tipo II. Tipo III: $\alpha_1 \cdot \beta_2 \neq 0$, $\alpha_2 = \beta_1 = 0$ oppure $\alpha_2 \cdot \beta_1 \neq 0$ $\alpha_1 = \beta_2 = 0$ di congruenze con una superficie focale non sviluppabile ed una retta direttrice. Tipo IV: $\alpha_1 \cdot \beta_2 \neq 0$, $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ oppure α_1 $\beta_1 \neq 0$, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ di congruenze con una superficie focale sviluppabile ed una curva direttrice non rettilinea. Tipo V: $\beta_1 \cdot \beta_2 \neq 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ di congruenze con due curve direttrici non rettilinee. Tipo V*: $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ duale al tipo V. Tipo VI: $\beta_2 \neq 0$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = 0$ oppure $\beta_1 \neq 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$ di congruenze con una retta direttrice ed una curva direttrice non rettilinea. Tipo VI*: $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ oppure $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ duale al tipo VI. Tipo VII: $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ di congruenze lineari non paraboliche.

Se $\alpha_1 \beta_2 \neq 0$, il primo fuoco A_1 genera una superficie (A_1) non sviluppabile, detta prima superficie focale, e si vede facilmente che la prima delle (27) dà le asintotiche di (A_1). Similmente per $\alpha_2 \cdot \beta_1 \neq 0$ il secondo fuoco A_2 genera la seconda superficie focale (A_2) che è non sviluppabile e le cui asintotiche son date dalla seconda delle (27). Si badi che il piano tangente alla <u>prima</u> superficie focale (A_1) è il <u>secondo</u> piano focale E_4 e similmente per (A_2).

E' ben noto che le rette di S_3 possono essere rappresentate coi punti di una ipersuperficie quadrica M di S_5. Indichiamo con $\bar{g}$ l'immagine su M della retta g. Le immagini $\bar{g}$ di tutte le rette g della congruenza $\mathcal{L}$ formano una superficie $\bar{\mathcal{L}}$ contenuta in M. La prima delle (16) mostra che il piano tangente a

$\overline{\mathcal{L}}$ in $\bar{g}$ congiunge i punti

$$(30)\qquad \left[\overline{A_1A_2}\right],\ \left[\overline{A_1A_4}\right],\ \left[\overline{A_2A_3}\right] .$$

Le (16) mostrano inoltre che lo spazio $\overline{\Omega}$ 2-tangente a $\overline{\mathcal{L}}$ nel punto $\bar{g}$ è determinato dai punti (30) insieme coi punti

$$(31)\qquad \left[\overline{A_3A_4}\right],\ \beta_1\cdot\left[\overline{A_1A_3}\right]+\alpha_1\left[\overline{A_2A_4}\right],\ \alpha_2\left[\overline{A_1A_3}\right]+\beta_2\left[\overline{A_2A_4}\right].$$

In generale, se cioè $\alpha_1\cdot\alpha_2\neq\beta_1\cdot\beta_2$ ossia $\varphi^*\neq\varphi$, lo spazio $\overline{\Omega}$ ha dimensione 5, coincide quindi col tutto S_5. Se invece $\alpha_1\cdot\alpha_2=\beta_1\,\beta_2$ ossia

$$(32)\qquad \varphi^*=\varphi\ ,$$

la dimensione di $\overline{\Omega}$ è minore di 5. Se $\mathcal{L}$ è una congruenza lineare(del tipo VII), tale dimensione è uguale a 3, lo spazio $\overline{\Omega}$ è fisso ed $\overline{\mathcal{L}}$ è una superficie quadrica, com'è ben noto. Escluso il tipo VII, se vale la (32) la dimensione di $\overline{\Omega}$ è uguale a 4, $\overline{\Omega}$ è dunque l'immagine di un complesso lineare Ω di rette di S_3, detto <u>complesso lineare osculatore</u> a $\mathcal{L}$ (nella retta g considerata). La (32) è verificata per tutte le congruenze dei tipi III, IV, VI e VI* e non è verificata per nessuna congruenza dei tipi II, II*, V e V*. Le congruenze dei tipi III, VI e VI* posseggono una retta direttrice d, il complesso Ω è speciale e consiste delle rette incidenti a d; per le congruenze del tipo IV, il complesso Ω non è speciale. Le congruenze del tipo I soddisfacenti la (32) formano una sottoclasse ben nota di congruenze del tipo I, la classe delle congruenze W definibile dalla proprietà che le rette di $\mathcal{L}$ determinano una corrispondenza <u>asintotica</u> fra le due superficie focali; il complesso lineare osculatore Ω non è speciale. E' chiaro che scelto comunque nello spazio S_3 un complesso lineare fisso Ω (speciale o non speciale), allora ogni congruenza $\mathcal{L}$ contenuta in Ω soddisfa la (32) e il complesso lineare osculatore relativo ad ogni retta g di $\mathcal{L}$ coincide con Ω. Viceversa, se una congruenza $\mathcal{L}$ soddisfa la (32) e se il suo complesso lineare osculatore Ω è fisso (indipendente dalla retta g di $\mathcal{L}$), allora la congruenza $\mathcal{L}$ è contenuta in Ω. Ciò accade per tutte le congruenze dei tipi III, VI e VI* (contenute in un complesso lineare fisso speciale), però fra le congruenze W e le congruenze del tipo IV soddisfacenti la (32) quelle che son contenute in un complesso lineare fisso (necessariamente non speciale) formano solo un caso particolare.

Ora consideriamo, insieme colla congruenza $\mathcal{L}$, un'altra congruenza $\mathcal{L}'$, pure non parabolica, contenuta in S_3' (la posizione relativa degli spazi S_3, S_3' non importa per i problemi che ci interessano). Per $\mathcal{L}'$ introduciamo notazioni affatto analoghe a quelle introdotte per $\mathcal{L}$, indicando con apici le espressioni relative ad $\mathcal{L}'$. Sarà pure conveniente di porre

$$\tau_{ij} = \omega_{ij}' - \omega_{ij} \tag{33}$$

sicchè p.es. [v. (7) e (8)]

$$\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} + \tau_{44} = 0 \tag{34}$$

$$\tau_{14} = 0 \quad , \quad \tau_{23} = 0 \quad . \tag{35}$$

Consideriamo una trasformazione T (retta $\rightarrow$ retta) fra $\mathcal{L}$ ed $\mathcal{L}'$. In queste conferenze ci limiteremo allo studio di corrispondenze <u>sviluppabili</u> nel senso di portare le rigate sviluppabili contenute in $\mathcal{L}$ nelle sviluppabili di $\mathcal{L}'$. Si può quindi supporre che per qualunque retta g di $\mathcal{L}$, le due rette g e $g' = T_g$ corrispondono agli stessi valori di u,v, i parametri u,v essendo sviluppabili per ambedue le congruenze. Il riferimento

(36) $\qquad A'_1,\ A'_2,\ A'_3,\ A'_4$

si può allora, come si vede facilmente, assoggettare alla condizione $\omega'_1 = \omega_1$, $\omega'_2 = \omega_2$ ossia

$$\tau_{13} = 0 \quad , \quad \tau_{24} = 0 \ . \tag{37}$$

Notiamo esplicitamente le equazioni

$$\omega'_{12} = \alpha'_1 \omega_2 \ , \quad \omega'_{21} = \alpha'_2 \omega_1 \ , \quad \omega'_{34} = \beta'_2 \omega_1 \ , \quad \omega'_{43} = \beta'_1 \omega_2 \tag{38}$$

che corrispondono alle (11). Differenziando esteriormente le (37) si ottiene

$$[\tau_{11} - \tau_{33} \quad \omega_1] = 0 \quad , \quad [\tau_{22} - \tau_{44} \quad \omega_2] = 0 \ , \tag{39}$$

Scelte comunque le u,v, un'omografia $H(S_3 \rightarrow S'_3)$ si dirà <u>tangente</u>, rispettivamente <u>osculatrice</u>, alla trasformazione T (nella retta g di $\mathcal{L}$ corrispondente ai valori scelti di u,v), se H realizza un contatto analitico del primo, rispettivamente secondo ordine, fra le due congruenze (nel senso della geometria rigata, cioè nell'S_5 rappresentativo H realizza contatto analitico puntuale del primo, rispettivamente secondo ordine fra le superficie $\bar{\mathcal{L}}$, $\bar{\mathcal{L}}'$). Condizioni analitiche per un'omografia tangente H sono (scegliendo convenientemente il fattore scalare)

$$H[A_1 A_2] = [A'_1 A'_2] \quad , \quad H d[A_1 A_2] = d[A'_1 A'_2] + \vartheta [A'_1 A'_2] \ ; \tag{40}$$

per un'omografia osculatrice bisogna aggiungere la condizione ulteriore

$$H d^2 [A_1 A_2] = d^2 [A'_1 A'_2] + 2\vartheta d [A'_1 A'_2] + (\cdot)[A'_1 A'_2] \ . \tag{41}$$

Facendo uso della prima delle (16) e ricordando le (37), possiamo dare alla condizione (40) la forma

$$(42)\qquad H[A_1A_2]=[A_1'A_2'],\ H[A_2A_3]=[A_2',A_3'+\lambda_1A_1'],\ H[A_1A_4]=[A_1',A_4'+\lambda_2A_2']$$

dove

$$(43)\qquad \vartheta=\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2-(\tau_{11}+\tau_{22}).$$

Vediamo che omografie tangenti H esistono per ogni T sviluppabile (invece non esisterebbero se T non fosse sviluppabile) e sono

$$(44)\qquad \begin{aligned} H\,A_1 &= \rho A_1' \\ H\,A_2 &= \rho^{-1}A_2' \\ H\,A_3 &= \rho(A_3'+\lambda_1A_1')+\mu_1A_2', \\ H\,A_4 &= \rho^{-1}(A_4'+\lambda_2A_2')+\mu_2A_1', \end{aligned}$$

dove $\rho\neq 0$, λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 possono scegliersi a piacere sicchè per dati valori di u,v si hanno ∞^5 omografie tangenti H. Notiamo che il cambiamento del segno di ρ ha solo un significato formale giacchè la sostituzione

$$(45)\qquad \begin{pmatrix} \rho & \lambda_1 & \lambda_2 & \mu_1 & \mu_2 \\ -\rho & \lambda_1 & \lambda_2 & -\mu_1 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

non cambia che il fattore scalare di H. L'espressione di H in coordinate di piani è

$$(46)\qquad \begin{aligned} H\,E_1 &= \rho^{-1}(E_1'-\lambda_1E_3')-\mu_2E_4', \\ H\,E_2 &= \rho(E_2'-\lambda_2E_4')-\mu_1E_3' \\ H\,E_3 &= \rho^{-1}E_3' \\ H\,E_4 &= \rho\,E_4' \end{aligned}$$

e in coordinate di retta

$$
(47)\quad
\begin{aligned}
H\,[A_1A_2] &= [A_1'A_2'] \\
H\,[A_1A_3] &= \rho^2 [A_1'A_3'] + \rho\mu_1\, [A_1'A_2'] \\
H\,[A_1A_4] &= [A_1'A_4'] + \lambda_2\, [A_1'A_2'] \\
H\,[A_2A_3] &= [A_2'A_3'] - \lambda_1 [A_1'A_2'] \\
H\,[A_2A_4] &= \rho^{-2}[A_2'A_4'] - \rho^{-1}\mu_2\, [A_1'A_2'] \\
H\,[A_3A_4] &= [A_3'A_4'] + (\lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2)\,[A_1'A_2'] + \\
&\quad + \lambda_1 [A_1'A_4'] - \lambda_2 [A_2'A_3'] - \rho\mu_2 [A_1'A_3'] + \rho^{-1}\mu_1\, [A_2'A_4']
\end{aligned}
$$

E' chiaro che cambiando l'orientazione di $\mathcal{L}$ si deve cambiare anche quella di $\mathcal{L}'$; per tale cambiamento d'orientazione si ha, oltre (19) e l'analoga relativa a $\mathcal{L}'$, ancora la

$$
(48)\quad
\begin{pmatrix}
\rho & \lambda_1 & \lambda_2 & \mu_1 & \mu_2 \\
\rho^{-1} & \lambda_2 & \lambda_1 & \mu_2 & \mu_1
\end{pmatrix}
$$

Le dualità è espressa dalla (20) insieme colla

$$
(49)\quad
\begin{pmatrix}
\rho & \lambda_1 & \lambda_2 & \mu_1 & \mu_2 \\
\rho^{-1} & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\mu_2 & -\mu_1
\end{pmatrix}
$$

La nozione dell'omografia tangente non dipende dall'orientazione ed è autoduale. Dalle (16) segue

$$
(50)\quad
\begin{aligned}
d^2 [A_1A_2] &= \left(d\,\overline{\omega_{11}+\omega_{22}} - \overline{\omega_{11}+\omega_{22}}^{\,2} + \omega_{31}\omega_1 + \omega_{42}\omega_2\right) [A_1A_2] + \\
&+ \left(d\omega_2 + 2\omega_{11}+\omega_{22}+\omega_{44}\cdot\omega_2\right) [A_1A_4] - \left(d\omega_1 + \overline{\omega_{11}+2\omega_{22}+\omega_{33}}\cdot\omega_1\right) [A_2A_3] + \\
&+ \left(\beta_1\omega_2^2 - \alpha_2\omega_1^2\right) [A_1A_3] + \left(\alpha_1\omega_2^2 - \beta_2\omega_1^2\right) [A_2A_4] + 2\omega_1\omega_2 [A_3A_4]
\end{aligned}
$$

e relazione analoga si ha anche per $\mathcal{L}'$. Osservando (43) e (47) si ottiene

$$
\begin{aligned}
(51)\quad H d^2 [A_1 A_2] &= d^2 [A'_1 A'_2] + 2\,\theta d\,[A'_1 A'_2] + (1)\,[A'_1 A'_2] - \\
&-(\tau_{11} - \tau_{33} - 2\lambda_1\omega_1)\omega_1 [A'_2 A'_3] + (\tau_{22} - \tau_{44} - 2\lambda_2\omega_2)\omega_2 [A'_1 A'_4] + \\
&+\left\{(\alpha'_2 - \rho^2\alpha_2)\omega_1^2 - (\beta'_1 - \rho^2\beta_1)\omega_2^2 - 2\rho\mu_2\omega_1\omega_2\right\}[A'_1 A'_3] + \\
&+\left\{(\beta'_2 - \rho^{-2}\beta_2)\omega_1^2 - (\alpha'_1 - \rho^{-2}\alpha_1)\omega_2^2 - 2\rho^{-1}\mu_1\omega_1\omega_2\right\}[A'_2 A'_4].
\end{aligned}
$$

Le (39) permettono di porre

$$(52)\qquad \tau_{11} - \tau_{33} = f_1\omega_1, \qquad \tau_{22} - \tau_{44} = f_2\omega_2.$$

Il confronto di (50) con (41) prova che H è un'omografia osculatrice se e solo se

$$(53)\qquad \alpha'_1 = \rho^{-2}\alpha_1, \quad \alpha'_2 = \rho^2\alpha_2, \quad \beta'_1 = \rho^2\beta_1, \quad \beta'_2 = \rho^{-2}\beta_2,$$

$$(54)\qquad 2\lambda_1 = f_1, \quad 2\lambda_2 = f_2, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0.$$

Una trasformazione T (necessariamente sviluppabile) della congruenza $\mathcal{L}$ si dice deformazione <u>proiettiva</u>, se per ogni scelta di parametri u,v esiste un'omografia osculatrice. Abbiamo quindi provato che condizione necessaria e sufficiente per deformazione proiettiva di una congruenza non parabolica è l'esistenza di un $\rho \neq 0$ tale che valgano le (53). Segue che il <u>tipo</u> (v.pag.6) di una congruenza non cambia per deformazioni proiettive. Se $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ sono congruenze lineari (tipo VII), le (53) sono identicamente soddisfatte sicchè ogni trasformazione sviluppabile $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ è allora una deformazione proiettiva, e date le u,v, vi è ancora nell'omografia osculatrice un parametro arbitrario $\rho^2 \neq 0$. Per tutti gli altri tipi si ha invece che le equazioni (53) (supposte risolubili) determinano univocamente ρ^2 sicchè, date le u,v l'omografia osculatrice è <u>unica</u>. Si vede che nel caso dei tipi VI e VI* di nuovo ogni trasformazione sviluppabile $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ è deformazione proiettiva, il che non è più vero per gli altri tipi.

Notiamo ancora che, secondo (44) e (54), l'omografia osculatrice, che indichiamo con H_0, è data da

$$
(55)\qquad
\begin{aligned}
H_0A_1 &= \rho A_1' \\
H_0A_2 &= \rho^{-1} A_2' \\
H_0A_3 &= \rho\, (A_3' + \tfrac{1}{2} f_1 A_1') \\
H_0A_4 &= \rho^{-1} (A_4' + \tfrac{1}{2} f_2\, A_2')
\end{aligned}
$$

dove ρ soddisfa le (53).

Torniamo al caso generale di una trasformazione sviluppabile qualsiasi e indichiamo con H una qualunque omografia tangente. Se $\alpha_1 \neq 0 \neq \alpha'_1$, allora per $\omega_1=0$ il punto A_1 descrive una curva C_1 ed il punto A_1' descrive una curva C_1'. Si vede subito che le due curve $H\, C_1$ e C_1' hanno nel punto comune A_1' contatto geometrico del primo ordine e lo stesso piano osculatore, sicchè si può calcolare l'invariante di contatto (v.p.es. Fubini-Cech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces p.32) che indichiamo con j_1. Avendosi

$$H A_1 = \rho A_1' ,\quad H d A_1 \equiv \rho\omega_{11} A_1' + \rho^{-1}\alpha_1\omega_2 A_2' ,\quad d A_1' \equiv (\omega_{11}+\tau_{11}) A_1' + \alpha_1'\omega_2 A_2' \quad (\mathrm{mod}\ \omega_1),$$

si ottiene

$$(56)\qquad j_1 = \frac{\rho^2\alpha_1'}{\alpha_1};$$

similmente se $\alpha_2 \neq 0 \neq \alpha'_2$, per $\omega_2=0$ il punto A_2 descrive una curva C_2 e il punto A_2' descrive una curva C_2' e l'omografia H realizza contatto geometrico del primo ordine di C_2 e C_2' con invariante di contatto

$$(57)\qquad j_2 = \frac{\alpha_2'}{\rho^2\alpha_2}$$

Dualmente: se $\beta_1 \neq 0 \neq \beta'_1$, allora H realizza contatto geometrico del primo ordine fra le curve duali descritte per $\omega_1=0$ dai piani E_3 e E'_3 e l'invariante di tale contatto è

$$\mathcal{J}_1^* = \frac{\beta'_1}{\rho^2 \beta_1}, \tag{58}$$

se $\beta_2 \neq 0 \neq \beta'_2$, allora H realizza contatto geometrico del primo ordine fra le curve duali descritte per $\omega_2=0$ dai piani E_4 e E'_4 e l'invariante di tale contatto è

$$\mathcal{J}_2^* = \frac{\rho^2 \beta'_2}{\beta_2} \tag{59}$$

E' notevole che gli invarianti di contatto che abbiamo indotto dipendono solo da ρ^2 e non da λ_1, λ_2, μ_1, μ_2. Ora H trasforma la punteggiata $[A_1A_2]$ nella punteggiata $[A'_1\ A'_2]$ mediante una proiettività Π :

$$\Pi A_1 = \rho A'_1, \qquad \Pi A_2 = \rho^{-1} A'_2 \tag{60}$$

ed il fascio di piani d'asse $[A_1A_2]$ nel fascio di piani d'asse $[A'_1A'_2]$ mediante una proiettività Π^*:

$$\Pi^* E_3 = \rho^{-1} E'_3, \qquad \Pi^* E_4 = \rho E'_4 \tag{61}$$

La proiettività Π porta il primo fuoco A_1 nel primo fuoco A'_1, il secondo fuoco A_2 nel secondo fuoco A'_2; la proiettività Π^* porta il primo piano focale E_3 nel primo piano focale E'_3, il secondo piano focale E_4 nel secondo piano focale E'_4. Scelto ρ^2, le due proiettività Π, Π^* son ben determinate; viceversa la scelta dell'una delle due proiettività Π, Π^* determina ρ^2 e quindi anche l'altra. E' facile di descrivere geometricamente la relazione fra le Π, Π^*. Scegliendo ρ^2, son date le proiettività Π, Π^* ed in conseguenza possiamo estendere la trasformazione T ($\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$, retta $\to$ retta) da una parte in una trasformazione puntuale $S_3 \to S'_3$, che indicheremo con T(Π)

e dall'altra in una trasformazione planare $S_3^* \to S_3'^*$ (essendo S_3^*, $S_3'^*$ gli spazi duali rispetto ad S_3, S_3'), che indicheremo con $T(\pi^*)$. Si ha

(62) $$T(\pi)(x_1A_1+x_2A_2)=\rho x_1A_1'+\rho^{-1}x_2A_2',$$

(63) $$T(\pi^*)(x_1E_3+x_2E_4)=\rho^{-1}x_1E_3'+\rho x_2E_4'.$$

Ponendo le u,v uguali a funzioni di un parametro t scelto comunque purchè $[\omega_1 dt]\neq 0\neq[\omega_2 dt]$, si ottiene una rigata sghemba R contenuta in $\mathcal{L}$ cui corrisponde in $\mathcal{L}'$ una rigata sghemba R'. Ora le (12) danno

$$[A_1, A_2, d(x_1A_1+x_2A_2)]=[A_1, A_2, x_1\omega_1 A_3+x_2\omega_2 A_4]$$

sicchè secondo (14) il piano tangente a R nel punto

$$X=x_1A_1+x_2A_2$$

è

$$X^*=x_2\omega_2E_3-x_1\omega_1E_4$$

Similmente il piano tangente a R nel punto,

$$\pi X=\rho x_1A_1'+\rho^{-1}x_2A_2'$$

è

$$[A_1', A_2', \rho x_1\omega_1 A_3'+\rho^{-1}x_2\omega_2 A_4'],$$

che coincide col piano π^*X^*, ciò che dà la descrizione geometrica richiesta della relazione fra le due proiettività π, π^*.

Consideriamo in brevità le asintotiche curve delle rigate R,R'. Dalle (12) si deduce

$$
\begin{aligned}
&[A_1, A_2, d^2(x_1A_1+x_2A_2)]^{*}n = \\
&= (2\omega_1 dx_1 + x_1 d\omega_1 + x_1 \cdot \overline{\omega_{11}+\omega_{33}}\,\omega_1 + x_2 \cdot \overline{\alpha_2\omega_1^2+\beta_1\omega_2^2})\,[A_1 A_2 A_3] + \\
&+(2\omega_2 dx_2 + x_2 d\omega_2 + x_2 \cdot \overline{\omega_{22}+\omega_{44}}\cdot\omega_2 + x_1 \cdot \overline{\alpha_1\omega_2^2+\beta_2\omega_1^2})\,[A_1 A_2 A_4],
\end{aligned}
$$

sicchè l'equazione differenziale delle asintotiche della rigata R è

$$
\begin{aligned}
&2\omega_1\omega_2(x_2dx_1 - x_1dx_2) - x_1^2(\alpha_1\omega_2^2+\beta_2\omega_1^2)\omega_1 + x_2^2(\alpha_2\omega_1^2+\beta_1\omega_2^2) + \\
&+ x_1x_2(\omega_2 d\omega_1 - \omega_1 d\omega_2 + \overline{\omega_{11}-\omega_{22}+\omega_{33}-\omega_{44}}\cdot\omega_1\omega_2) = 0
\end{aligned}
\tag{64}
$$

Similmente l'equazione differenziale delle asintotiche della rigata R' è

$$
\begin{aligned}
&2\omega_1\omega_2(x_2dx_1 - x_1dx_2) - \rho^2x_1^2(\alpha_1'\omega_2^2+\beta_2'\omega_1^2)\omega_1 + \rho^{-2}x_2^2(\alpha_2'\omega_1^2+\beta_1'\omega_2^2)\omega_2 + \\
&+ x_1x_2\{\omega_2 d\omega_1 - \omega_1 d\omega_2 + (2\frac{d\rho}{\rho} + \omega_{11}-\omega_{22}+\omega_{33}-\omega_{44}+\tau_{11}-\tau_{22}+\tau_{33}-\tau_{44})\omega_1\omega_2\} = 0
\end{aligned}
$$

Sottraendo si ricava

$$
\begin{aligned}
&x_1^2(\overline{\alpha_1-\rho^2\alpha_1'}\cdot\omega_2^2 + \overline{\beta_2-\rho^2\beta_2'}\cdot\omega_1^2) - x_2^2(\overline{\alpha_2-\rho^{-2}\alpha_2'}\cdot\omega_1^2 + \overline{\beta_1-\rho^{-2}\beta_1'}\cdot\omega_2^2)\omega_2 + \\
&+ x_1x_2(2\frac{d\rho}{\rho} + \tau_{11}-\tau_{22}+\tau_{33}-\tau_{44})\omega_1\omega_2 = 0
\end{aligned}
\tag{65}
$$

In queste conferenze non discuterò l'equazione (65) per trasformazioni sviluppabili generali, limitandomi a considerare più tardi il caso di deformazioni proiettive.

Per mancanza di tempo mi limiterò nel seguito a considerare solo il caso di corrispondenze sviluppabili fra due congruenze non paraboliche del tipo I:

$$\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0 \neq \alpha'_1\alpha'_2\beta'_1\beta'_2, \tag{66}$$

$\mathcal{L}$ possiede dunque due superficie focali non sviluppabili (A_1), (A_2) e similmente anche $\mathcal{L}'$.

La condizione (53) della deformazione proiettiva è una condizione tripla. Ora la congruenza $\mathcal{L}$ dipende da due funzioni arbitrarie di due variabili e la stessa generalità ha anche $\mathcal{L}'$; perchè una corrispondenza sviluppabile fra $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ date non dipende che da (due) funzioni di una variabile, si vede che la T più grande dipende da quattro funzioni arbitrarie di due variabili. Si può quindi aspettare che una generica $\mathcal{L}$ è proiettivamente indeformabile, vale a dire che ogni sua deformazione proiettiva è una trasformazione omografica $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$, e che le congruenze $\mathcal{L}$ proiettivamente deformabili dipendono da una funzione arbitraria di due variabili. Che proprio è così, constatò già E.Cartan nel 1924 nella sua comunicazione al Congresso di Strassburgo, che contiene i primi risultati positivi nella teoria piuttosto complicata della deformazione proiettiva di congruenze rettilinee. Si può anche aspettare che una delle due superficie focali, sia (A_1), può scegliersi ad arbitrio e che le congruenze $\mathcal{L}$ proiettivamente deformabili con una superficie focale (A_1) data dipendono da un certo numero di funzioni arbitrarie di una variabile. Ma una dimostrazione rigorosa e la precisazione necessaria non fu data che recentemente da Bam-Zelikovic nel seminario dell'università di Mosca condotto dal Prof. Finikov (v.S.P.Finikov Teorija kongruencij, 1950, p.497/9, 506); le congruenze $\mathcal{L}$ proiettivamente deformabili a superficie focale (A_1) data dipendono da sette funzioni arbitrarie di una variabile.

Io trovai indipendentemente qualche anno fa lo stesso risultato mediante calcoli un po' lunghi che però promettono risultati ulteriori più generali.

E' naturale la domanda sulla caratterizzazione geometrica delle trasformazioni sviluppabili T che soddisfano solo <u>una</u> delle quattro condizioni (53). A tale uopo si osservi che in virtù della supposizione (66) son definiti e diversi da zero tutti e quattro invarianti di contatto j_1, j_2, j_1^*, j_2^* e l'arbitrarietà della scelta di $\rho^2 \neq 0$ permette di prescrivere ad arbitrio il valore, purchè diverso da zero, di uno di essi. Ora $j_1=1$ è la condizione perchè H realizzi per $\omega_1=0$ contatto analitico (del primo ordine) $A_1 \rightarrow A_1'$, $j_2=1$ è la condizione perchè H realizzi per $\omega_2=0$ contatto analitico $A_2 \rightarrow A_2'$, $j_1^*=1$ è la condizione perchè H realizzi per $\omega_1=0$ contatto analitico $A_2 \rightarrow A_2'$, $j_2^*=1$ è la condizione perchè H realizzi per $\omega_1=0$ contatto analitico $E_4 \rightarrow E_4'$. Ma dalle (12) e (14) segue

$$HA_1 = \rho A_1', \; H dA_1 = d(\rho A_1') + (\cdot) A_1' + (\mu_1\omega_1 + \rho^{-1}\overline{\alpha_1 - \rho\alpha_1'}\,\omega_2) A_2'$$

e similmente per A_2, E_3, E_4. Dunque (senza le limitazioni $\omega_1=0$ o $\omega_2=0$):

$$\left.\begin{matrix} j_1=1, & \mu_1=0 \\ j_2=1, & \mu_2=0 \\ j_1^*=1, & \mu_2=0 \\ j_2^*=1, & \mu_1=0 \end{matrix}\right\} \text{ è la condizione perchè H realizzi contatto analitico del primo ordine } \left\{\begin{matrix} A_1 \rightarrow A_1' \\ A_2 \rightarrow A_2' \\ E_3 \rightarrow E_3' \\ E_4 \rightarrow E_4' \end{matrix}\right.$$

Si ottiene così il significato geometrico di tali trasformazioni sviluppabili $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ che lasciano inalterata una delle quattro forme differenziali (25). Vediamo in primo luogo che $\varphi = \varphi'$ (uguaglianza delle forme puntuali) se e solo se per qualunque scelta di u,v esiste un'omografia $H(S_3 \rightarrow S_3')$ che realizza contatto analitico del primo ordine tanto per $A_1 \rightarrow A_1'$ quanto per $A_2 \rightarrow A_2'$ (si verifica facilmente che una tale H è necessariamente tangente per T, vale a dire che essa realizza anche con tatto analitico $[A_1A_2] \rightarrow [A_1'A_2']$) e che dualmente $\varphi^* = \varphi^{*\prime}$ (uguaglianza delle forme planari) se e solo se per qualunque u,v esiste un'omografia H ($S_3 \rightarrow S_3'$) che realizza contatto analitico del primo ordine tanto per $E_3 \rightarrow E_3'$ quanto per $E_4 \rightarrow E_4'$. Tutto ciò è evidentemente conseguenza della caratterizzazione geometrica data dal Terracini (v.pag.6) della forma φ (è della forma duale φ^*) e non dà quindi niente essenzialmente nuovo. E' invece nuovo che $F_1 = F_1'$ (uguaglianza delle prime forme focali) se e solo se per qualunque u,v esiste un'omografia H($S_3 \rightarrow S_3'$) che realizza contatto analitico del primo ordine simultaneamente per $A_1 \rightarrow A_1'$, per $E_3 \rightarrow E_3'$ e per $[A_1A_2] \rightarrow [A_1'A_2']$; similmente $F_2 = F_2'$ (uguaglianza delle secondo forme focali) se e solo se per qualunque u,v esiste un'omografia H($S_3 \rightarrow S_3'$) che realizza contatto analitico del primo ordine simultaneamente per $A_2 \rightarrow A_2'$, per $E_4 \rightarrow E_4'$ e per $[A_1A_2] \rightarrow [A_1'\ A_2']$. Dunque la condizione $\varphi = \varphi'$ riguarda solo i fuochi A_1 e A_2, la condizione $\varphi^* = \varphi^{*\prime}$ solo i piani focali E_3 e E_4, la condizione $F_1 = F_1'$ solo il primo fuoco A_1 ed il primo piano focale E_3, la condizione $F_2 = F_2'$ solo il secondo fuoco A_2 ed il secondo piano focale E_4. Son quindi ormai chiare le ragioni per le denominazioni forma puntuale φ, forma planare φ^*, prima e seconda forma focale F_1 e F_2 ed è naturale chiamare <u>deformazioni puntuali</u> le trasformazioni sviluppabili T che conservano φ; <u>deformazioni planari</u> quelle che conservano φ^*, <u>deformazioni focali</u> di prima e di seconda specie quelle che conservano F_1, risp. F_2. E' pure opportuno di chiamare <u>deformazioni asintotiche</u> di prima specie le trasformazioni sviluppabili che determinano una corrispondenza asintotica fra le prime superficie focali (A_1) e (A_1') e deformazioni asintotiche di seconda specie quelle che determinano una corrispondenza asintotica fra le seconde superficie focali (A_2) e (A_2'). Tutte queste sono insomma 6 specie particolari di trasformazioni sviluppabili T e le deformazioni proiettive son quelle che appartengono simultaneamente a tutte le sei specie; viceversa [sotto la condizione (66)] le trasformazioni sviluppabili che appartengono a tre qualunque fra le sei specie appartengono necessariamente alle altre tre e son quindi deformazioni proiettive. E' chiaro che per qualunque delle sei specid di deformazioni che abbiam introdotte la prima congruenza $\mathcal{L}$ (del tipo I) può scegliersi ad arbitrio e la seconda $\mathcal{L}'$ (pure del tipo I) dipende poi da <u>una</u> funzione arbitraria di <u>due</u> variabili.

Siccome una congruenza $\mathcal{L}$ non parabolica dipende da due funzioni arbitrarie di due variabili, non si possono scegliere arbitrariamente tre delle quattro forme (25) (il che determinerebbe, facendo uso dell'identità (26), anche la quarta), ma può aspettarsi che <u>due</u> relazioni fra le quattro forme (25) possono prescriversi ad arbitrio. Ciò si conferma col calcolo che segue. Si vede facilmente che è sempre possibile di scegliere il riferimento (2) in modo she si abbia

$$(67) \qquad \omega_1 = dv \qquad \omega_2 = du;$$

allora

$$\varphi = \alpha_1 \alpha_2 \, du \, dv, \qquad \varphi^* = \beta_1 \beta_2 \, du \, dv, \quad F_1 = \alpha_1 \beta_1 \frac{du^3}{dv}$$

Cerchiamo le congruenze $\mathcal{L}$ (del tipo I) tali che

$$(68) \qquad \Phi(\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2, \alpha_1 \beta_1, u, v) = 0, \quad \Psi(\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2, \alpha_1 \beta_1, u, v) = 0$$

dove $\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, u, v)$, $\Psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, u, v)$ son date funzioni di cinque variabili sottoposte alla condizione che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_3} \end{pmatrix}$$

è uguale a 2 anche per $\Phi = \Psi = 0$. Dobbiamo integrare il sistema di Pfaff (8)+(17)+(67) sotto la condizione (68) da cui si ricavano per differenziazione due equazioni della forma

$$(69) \quad \begin{aligned} & h_1 d(\alpha_1\alpha_2) + h_2 d(\beta_1\beta_2) + h_3 d(\alpha_1\beta_1) + h_4 du + h_5 dv = 0, \\ & k_1 d(\alpha_1\alpha_2) + k_2 d(\beta_1\beta_2) + k_3 d(\alpha_1\beta_1) + k_4 du + k_5 dv = 0, \end{aligned}$$

dove h_i, k_i son funzioni conosciute di 5 variabili $\alpha_1 \alpha_2$, β_1 β_2, α_1 β_1, u,v tali che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$$

è uguale a 2 anche se valgono le (68). La differenziazione esteriore del nostro sistema di Pfaff dà le relazioni

$$(70) \qquad [\omega_{11} - \omega_{33}\ dv] = 0, \qquad [\omega_{22} - \omega_{44}\ du] = 0$$

e le relazioni (17), in cui le quantità α_1, α_2, β_1, β_2 e i loro differenziali sono legati dalle (68) e (69). Ponendo

$$D\alpha_1 = d\alpha_1 + \alpha_1(\omega_{22} - \omega_{11}) \qquad D\alpha_2 = d\alpha_2 - \alpha_2(\omega_{22} - \omega_{11}),$$

$$D\beta_1 = d\beta_1 - \beta_1(\omega_{22} - \omega_{11}), \qquad D\beta_2 = d\beta_2 + \beta_2(\omega_{22} - \omega_{11}),$$

le equazioni (69) assumono la forma

$$h_1(\alpha_1 D\alpha_2+\alpha_2 D\alpha_1)+h_2(\beta_1 D\beta_2+\beta_2 D\beta_1)+h_3(\alpha_1 D\beta_1+\beta_1 D\alpha_1)+h_4 du+h_5 dv=0,$$

$$k_1(\alpha_1 D\alpha_2+\alpha_2 D\alpha_1)+k_2(\beta_1 D\beta_2+\beta_2 D\beta_1)+k_3(\alpha_1 D\beta_1+\beta_1 D\alpha_1)+k_4 du+k_5 dv=0,$$

e le (17) la forma

$$[\omega_{31}\omega_1]+[D\alpha_1\omega_2]=0,\quad [D\alpha_2\omega_1]+[\omega_{41}\omega_2]=0,$$

$$[\omega_{41}\omega_1]-[D\beta_1-\beta_1(\omega_{11}-\omega_{33})\omega_2]=0,\quad [D\beta_2-\beta_2(\omega_{22}-\omega_{44})\omega_1]-[\omega_{32}\omega_2]=0$$

Siccome il determinante

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & -\omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_2 & 0 & 0 & 0 & h_1\alpha_1+h_3\beta_1 & k_1\alpha_2+k_3\beta_1 \\ 0 & \omega_1 & 0 & 0 & h_1\alpha_1 & k_1\alpha_1 \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 & h_2\beta_2+h_3\alpha_1 & k_2\beta_2+k_3\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1 & h_2\beta_1 & k_2\beta_1 \end{vmatrix} =$$

$$=(h_1k_2-h_2k_1)(\alpha_1\beta_2\omega_2^4-\alpha_2\beta_2\omega_1^4)-(h_2k_3-h_3k_2)\beta_1\beta_2\omega_1^4+(h_3k_1-h_1k_3)(\alpha_1\beta_1\omega_2^2-\alpha_1\alpha_2\omega_1^2)\omega_1^2$$

non è uguale a zero identicamente in ω_1, ω_2, il sistema di Pfaff considerato è in involuzione con soluzioni dipendenti da sei funzioni arbitrarie di una variabile.

Gli invarianti di contatto j_1, j_2, j_1^*, j_2^* dipendono dalla scelta di φ, ma le loro combinazioni

(71) $$j_1 j_2,\quad j_1 j_1^*,\quad j_2 j_2^*$$

ne sono indipendenti ed il nostro risultato si può enunciare dicendo che, data la congruenza $\mathcal{L}$, se per ogni sua retta g son prescritte due relazioni fra le (71) (in modo che può dipendere dalla retta g), allora le trasformazioni sviluppabili T soddisfacenti le relazioni prescritte esistono e dipendono da sei funzioni arbitrarie di una variabile.

Vi sono casi particolari notevoli del teorema generale ottenuto. Se domandiamo che esista un valore di ρ^2 ~~che~~ soddisfi tre relazioni scelte fra le (53), otteniamo tali deformazioni puntuali o planari della congruenza $\mathcal{L}$ che determinano una trasformazione asintotica di <u>una</u> superficie focale; il teorema generale ci insegna che, data $\mathcal{L}$ ad arbitrio, le deformazioni richieste dipendono da sei funzioni di una variabile. Possiamo anche domandare che esista un valore di ρ^2 soddisfacente due fra le (53), ed un altro valore di ρ^2 soddisfacente le rimanenti due. Si ottengono così tre tipi particolari di trasformazioni sviluppabili: (1) tali che sono simultaneamnnte deformazioni puntuali e planari; (2) tali che sono deformazioni focali simultaneamente di prima e di seconda specie; (3) tali che determinano una trasformazione asintotica di ciascuna delle due superficie focali. Di nuovo, scelta $\mathcal{L}$ ad arbitrio, le deformazioni richieste dipendono da sei funzioni di una variabile.

Ritornando allo studio di una trasformazione sviluppabile T arbitraria, scegliamo ρ^2 o, ciò che è lo stesso, scegliamo le proiettività π(60). Essendo H=H(π) un'omografia tangente (44) appartenente al valore scelto di ρ^2 , esaminiamola in connessione colla trasformazione puntuale T(π) introdotta a pag. 15. All'uopo osserviamo che, secondo (12) e (44),

$$\begin{aligned} (72)\qquad & \rho x_1 A'_1+\rho^{-1}x_2 A'_2 = H(x_1 A_1+x_2 A_2),\\ & d(\rho x_1 A'_1+\rho^{-1}x_2 A'_2) = H\,d(x_1 A_1+x_2 A_2)+\\ & +\Big\{\rho x_1\Big(\frac{d\rho}{\rho}+\tau_{11}-\lambda_1\omega_1\Big)+x_2\big(\overline{\rho^{-1}\alpha'_2-\rho\alpha_2}\cdot\omega_1-\mu_2\omega_2\big)\Big\}A'_1+\\ & +\Big\{x_1\big(-\mu_1\omega_1+\overline{\rho\alpha_1-\rho^{-1}\alpha_1}\cdot\omega_2\big)+\rho^{-1}x_2\Big(-\frac{d\rho}{\rho}+\tau_{22}-\lambda_2\omega_2\Big)\Big\}A'_2. \end{aligned}$$

Dalle (72) si deduce facilmente che se il punto

$$X = x_1A_1 + x_2A_2 \tag{73}$$

descrive nello spazio S_3 una linea qualunque C, cui corrisponde nello spazio S'_3 la linea C' descritta dal punto

$$X' = \pi X = \rho x_1 A'_1 + \rho^{-1} x_2 A'_2 , \tag{74}$$

allora nel punto X' corrispondente ai valori iniziali di u,v le tangenti alle due curve C' e HC stanno in un piano che passa per la retta $g' = [A'_1 \, A'_2]$ e questa è una proprietà caratteristica di quelle omografie tangenti che appartengono al valore scelto di ρ. Domandiamoci quand'è che nel punto X' si ha contatto analitico delle due linee C' e HC. La condizione è

$$\begin{vmatrix} \rho x_1 & \rho x_1\left(\frac{d\rho}{\rho} + \tau_{11} - \lambda_1\omega_1\right) + x_2\left(\overline{\rho^{-1}\alpha_2^1 - \rho\alpha_2}\cdot\omega_1 - \mu_2\omega_2\right) \\ \rho^{-1}x_2 & x_1\left(-\mu_1\omega_1 + \overline{\rho\alpha_1^1 - \rho^{-1}\alpha_1}\cdot\omega_2\right) + \rho^{-1}x_2\left(-\frac{d\rho}{\rho} + \tau_{22} - \lambda_2\omega_2\right) \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{aligned} &\rho x_1^2\left(-\mu_1\omega_1 + \overline{\rho\alpha_1^1 - \rho^{-1}\alpha_1}\cdot\omega_2\right) - \rho^{-1}x_2^2\left(\overline{\rho^{-1}\alpha_2^1 - \rho\alpha_2}\cdot\omega_1 - \mu_2\omega_2\right) - \\ &- x_1 x_2\left(2\frac{d\rho}{\rho} + \tau_{11} - \tau_{22} - \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2\right) = 0 \end{aligned} \tag{75}$$

Se si sceglie $\mu_1 = \mu_2 = 0$ e se si determinano le λ_1, λ_2 dall'equazione

$$2\frac{d\rho}{\rho} + \tau_{11} - \tau_{22} - \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 = 0, \tag{76}$$

la (75) assume la forma [v. (56) e (57)]

$$(j_1 - 1)\alpha_1\omega_2 x_1^2 - (j_2 - 1)\alpha_2\omega_1 x_2^2 = 0 \tag{77}$$

Si ottiene così un'omografia tangente ben determinata dalla scelta di ρ^2 , che indichiamo con K(Π). Si ha dunque

$$(78)\qquad \begin{aligned} &K(\Pi)A_1=\rho A'_1, && K(\Pi)A_2=\rho^{-1}A'_2,\\ &K(\Pi)A_3=\rho(A'_3+\lambda_1 A'_1), && K(\Pi)A_4=\rho^{-1}(A'_4+\lambda_2 A'_2)\end{aligned}$$

con λ_1 , λ_2 soddisfacenti la (76). Proprietà geometriche caratteristiche dell'omografia K(Π) sono le seguenti: Per quelle linee C, per cui $\omega_2=0$ si ha nel punto (74) contatto analitico del primo ordine fra le curve C' e K(Π) C o (se è $j_2=1$) <u>sempre</u> oppure (se è $j_2\neq 1$) <u>se e solo se</u> C passa per A_1 (se cioè $x_2=1$); per quelle linee C, per cui $\omega_1=0$, si ha nel punto (74) contatto analitico del primo ordine fra le curve C' e K(Π)C o (se è $j_1=1$) <u>sempre</u> oppure (se è $j_1\neq 1$) <u>se e solo se</u> C passa per A_2 (se cioè $x_1=1$). Nel caso $j_1j_2=1$ di una deformazione puntuale vi è un'unica scelta di ρ^2 per cui $j_1=j_2=1$; l'omografia K (Π) corrispondente sia detta <u>puntualmente associata</u> alla deformazione puntuale T e si indichi con K_0. La trasformazione puntuale T(Π) corrispondente al valore scelto di ρ^2 (ricordiamo che $\alpha'_1=\rho^{-2}\alpha_1$, $\alpha'_2=\rho^2\alpha_2$) è l'<u>inviluppo</u> delle ∞^2 omografie K_0.

La scelta di ρ^2 determina anche le proiettività Π^*(61) che generano la trasformazione planare T(Π^*) ($S_3^*\rightarrow S_3^{*\prime}$). Si hanno formole duali alle (72):

$$(79)\qquad \begin{aligned} &\rho^{-1}x_1E'_3+\rho x_2E'_4=H(x_1E_3+x_2E_4),\\ &d(\rho^{-1}x_1E'_3+\rho x_2E'_4)=H\,d(x_1E_3+x_2E_4)-\\ &-\left\{\rho^{-1}x_1\left(\frac{d\rho}{\rho}+\tau_{33}+\lambda_1\omega_1\right)+x_2\left(\rho\beta'_2-\rho^{-1}\beta_2\cdot\omega_1+\mu_1\omega_2\right)\right\}E'_3-\\ &-\left\{x_1\left(\rho^{-1}\beta'_1-\rho\beta_1\cdot\omega_2+\mu_2\omega_1\right)+\rho x_2\left(-\frac{d\rho}{\rho}+\tau_{44}+\lambda_2\omega_2\right)\right\}E'_4.\end{aligned}$$

All'omografia K(Π) è duale l'omografia K(Π^*):

$$K(\pi^*)A_1 = \rho A'_1, \qquad K(\pi^*)A_2 = \rho^{-1}A'_2,$$

(80)

$$K(\pi^*)A_3 = \rho(A'_3 + \lambda^*_1 A'_1), \quad K(\pi^*)A_4 = \rho^{-1}(A'_4 + \lambda^*_2 A'_2)$$

con λ^*_1 , λ^*_2 soddisfacenti la relazione

(81) $$2\frac{d\rho}{\rho} + \tau_{33} - \tau_{44} + \lambda^*_1\omega_1 - \lambda^*_2\omega_2 = 0,$$

all'equazione (77) è duale la

(82) $$(j^*_1 - 1)\beta_1\omega_2 x_1^2 - (j^*_2 - 1)\beta_2\omega_1 x_2^2 = 0$$

Nel caso $j^*_1 j^*_2 = 1$ di una deformazione planare vi è un'unica scelta di ρ^2 per cui $j^*_1 = j^*_2 = 1$; la $K(\pi^*)$ corrispondente si dirà <u>planarmente associata</u> alla deformazione planare T e s'indicherà con K^*_0. La trasformazione planare $T(\pi^*)$ corrispondente al valore scelto di ρ^2 (per cui $\beta'_1 = \rho^2\beta_1$, $\beta'_2 = \rho^{-2}\beta_2$) è l'inviluppo delle ∞^2 omografie K^*_0.

Le due omografie $K(\pi)$, $K(\pi^*)$ corrispondenti allo stesso valore di ρ^2 sono in generale diverse l'una dall'altra. Esse coincidono se e solo se

(83) $$4\frac{d\rho}{\rho} + \tau_{11} - \tau_{22} + \tau_{33} - \tau_{44} = 0$$

Si calcola facilmente che, perchè la (83) sia completamente integrabile, occorre e basta

$$\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 = \alpha'_1\alpha'_2 - \beta'_1\beta'_2$$

ossia

(84) $$\varphi - \varphi^* = \varphi' - \varphi^{*\prime}.$$

Se $\mathcal{L}$ è una congruenza W, vale la (84) se e solo se anche la $\mathcal{L}'$ è W. Se (83) è completamente integrabile, essa non determina ρ^2 che a meno di una costante; la proiettività Π su una retta g di $\mathcal{L}$ può scegliersi ad arbitrio (purchè porti i fuochi A_1, A_2 rispettivamente nei fuochi A_1', A_2'); la (83) determina poi univocamente tutte le proiettività Π.

Con ciò lasciamo le considerazioni frammentarie sulle trasformazioni sviluppabili generali per volgerci allo studio delle deformazioni proiettive. Per ragioni di brevità, continuiamo a limitarci al caso (66) di congruenze del tipo I. E' chiaro che il riferimento (36) può essere specializzato in modo che l'omografia osculatrice (55) abbia l'espressione analitica semplice

(85) $H_0A_1=A_1'$, $H_0A_2=A_2'$, $H_0A_3=A_3'$, $H_0A_4=A_4'$

Si ha allora [v. (52), (53), (54)] d'una parte

$$\alpha_1'=\alpha_1, \quad \alpha_2'=\alpha_2, \quad \beta_1'=\beta_1, \quad \beta_2'=\beta_2$$

ossia

$$\tau_{12}=\tau_{21}=\tau_{34}=\tau_{43}=0, \tag{86}$$

e d'altra

$$\tau_{11}-\tau_{33}=0, \quad \tau_{22}-\tau_{44}=0 \tag{87}$$

Differenziando esteriormente otteniamo dalle (86)

$$\begin{gathered}
[\tau_{32}\,\omega_1]-\alpha_1[\tau_{11}-\tau_{22}\,\omega_2]=0,\\
\beta_2[\tau_{11}-\tau_{22}\,\omega_1]+[\tau_{32}\,\omega_2]=0,\\
[\tau_{41}\,\omega_1]-\beta_1[\tau_{11}-\tau_{22}\,\omega_2]=0,\\
\alpha_2[\tau_{11}-\tau_{22}\,\omega_1]+[\tau_{41}\,\omega_2]=0
\end{gathered} \tag{88}$$

e dalle (87)

$$(89) \qquad [\tau_{31}\omega_1]=0, \qquad [\tau_{42}\omega_2]=0$$

Le (88) permettono di porre

$$(90) \qquad \tau_{22}-\tau_{11} = c_1\omega_1 - c_2\omega_2$$

Osserviamo che

$$(91) \qquad [d(\tau_{22}-\tau_{11})]=0,$$

cosicchè

$$(92) \qquad c_1\omega_1 - c_2\omega_2 = dc .$$

è un differenziale esatto.

Una deformazione proiettiva è simultaneamente deformazione puntuale e planare; possiamo quindi considerare, oltre l'omografia osculatrice H_0, anche l'omografia puntualmente associata K_0 e l'omografia planarmente associata K_0^*. Le espressioni analitiche di K_0 e K_0^* si ottengono da (76),(78),(80) e (81) ponendo $\rho=1$ e sono

$$(93) \qquad K_0A_1=A_1', \quad K_0A_2=A_2', \quad K_0A_3=A_3'-c_1A_1', \quad K_0A_4=A_4'-c_2A_2',$$

$$(94) \qquad K_0^*A_1=A_1', \quad K_0^*A_2=A_2', \quad K_0^*A_3=A_3'+c_1A_1', \quad K_0^*A_4=A_4'+c_2A_2'.$$

Le tre omografie H_0, K_0, K_0^* coincidono sulla punteggiata $[A_1A_2]$ ma le tre immagini di un punto di S_3 situato fuori $[A_1A_2]$ sono in generale mutualmente diverse. Se coincidono (due e quindi tutte) le tre omografie H_0,K_0,K_0^*, la deformazione proiettiva

T è singolare. La condizione analitica per una deformazione proiettiva singolare è $c_1=c_2=0$ ossia

$$\tau_{11}-\tau_{22}=0 \tag{95}$$

Se T non è singolare, può darsi nondimeno che anche fuori di $[A_1A_2]$ esistono punti, le cui immagini nelle tre omografie H_0, K_0, K_0^* coincidono; la T si dice allora semisingolare e tali punti riempiono necessariamente uno dei due piani focali. La condizione analitica per una deformazione semisingolare è $c_2=0$ ossia

$$[\tau_{11}-\tau_{22}\,\omega_1]=0 \tag{96}$$

se coincidono le tre immagini dei punti situati nel primo piano focale E_3, e $c_1=0$ ossia

$$[\tau_{11}-\tau_{22}\,\omega_2]=0 \tag{97}$$

se coincidono quelle dei punti situati nel secondo piano focale E_4.

Si ottengono proprietà geometriche caratteristiche del caso singolare, e semisingolare esaminando le trasformazioni puntuali $A_1\rightarrow A_1'$ e $A_2\rightarrow A_2'$ fra superficie focali che nascono dalla trasformazione rigata T. Osserviamo prima di tutto che dalle (88) e (90) si ricava

$$\tau_{32}=\beta_2c_2\,\omega_1+\alpha_1c_1\,\omega_2,\quad \tau_{41}=\alpha_2c_2\,\omega_1+\beta_1c_1\,\omega_2 \tag{98}$$

Ora da (87), (90) e (98) segue

$$\begin{gathered}A_1'=H_0A_1,\qquad dA_1'=H_0\,dA_1,\\ d^2A_1'=H_0d^2A_1+2\tau_{11}\,dA_1'+(\beta_2c_1\omega_1^2+2\alpha_1c_1\omega_1\omega_2-\alpha_1c_2\omega_2^2)A_2'+(\cdot)A_1',\end{gathered} \tag{99}$$

$$A_2' = H_0 A_2, \qquad dA_2' = H_0\, dA_2,$$

(100)
$$d^2 A_2' = H_0 d^2 A_2 + 2\gamma_{22}\, dA_2' + (-\alpha_2 c_1 \omega_1^2 + 2\alpha_2 c_2 \omega_1 \omega_2 + \beta_1 c_1 \omega_2^2) A_1' + (\cdot) A_2'.$$

Nel caso della deformazione proiettiva T singolare l'omografia H_0 osculatrice per T è osculatrice anche per le corrispondenze puntuali $A_1 \to A_1'$, $A_2 \to A_2'$, sicchè la deformazione proiettiva singolare di una congruenza non parabolica $\mathcal{L}$ determina una deformazione proiettiva di ambedue superficie focali. Viceversa, se la deformazione proiettiva T della congruenza $\mathcal{L}$ determina una deformazione proiettiva di almeno una superficie focale di $\mathcal{L}$, allora T è necessariamente singolare. Eccettuato il caso singolare, l'omografia H_0 è soltanto <u>tangente</u> alle corrispondenze puntuali $A_1 \to A_1'$ e $A_2 \to A_2'$ e su ciascuna delle due superficie focali vi sono due direzioni <u>caratteristiche</u> nel senso che H_0 è osculatrice rispetto a $A_1 \to A_1'$ per quelle curve tracciate su (A_1) $[su(A_2)]$ che toccano in A_1 (in A_2) una direzione caratteristica. Le direzioni caratteristiche su (A_1) sono

(101)
$$\beta_2 c_2 \omega_1^2 + 2\alpha_1 c_1 \omega_1 \omega_2 - \alpha_1 c_2 \omega_2^2 = 0$$

e su (A_2)

(102)
$$-\alpha_2 c_2 \omega_1^2 + 2\alpha_2 c_2 \omega_1 \omega_2 + \beta_1 c_1 \omega_2^2 = 0$$

Ricordando che le direzioni (27) sono asintotiche sulle superficie focali, si riconosce subito che su ognuna delle due superficie focali le direzioni caratteristiche son coniugate. Si vede pure che nel caso semisingolare (96) su (A_1) le due direzioni $\omega_1 = 0$ e $\omega_2 = 0$ son caratteristiche; mentre su (A_2) le direzioni $\omega_1 = 0$ e $\omega_2 = 0$ separano armonicamente le direzioni caratteristiche; similmente si dica pel caso semisingolare (97).

E' ben noto che le deformazioni proiettive singolari di congruenze non paraboliche dipendono da sei funzioni arbitrarie di una variabile ; a pag.   si vedrà che questo risultato si ~~può riguardare~~ come caso particolare del teorema generale enunciato a pag. 21. Per determinare la generalità delle deformazioni proiettive semisingolari, basta esaminare il caso (96). Si vede facilmente che una scelta conveniente del sistema di riferimento (2) permette di supporre $\alpha_1 = \beta_1 = c_1 = 1$, mentre $c_2 = 0$. Si deve allora esaminare il sistema di Pfaff

$$\omega_{14} = \omega_{23} = 0, \ \omega_{12} = \omega_2, \ \omega_{43} = \omega_2, \ \omega_{21} = \alpha_2 \omega_1, \ \omega_{34} = \beta_2 \omega_1,$$

$$\tau_{14} = \tau_{23} = \tau_{13} = \tau_{24} = \tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{34} = \tau_{43} = \tau_{11} - \tau_{33} = \tau_{22} - \tau_{44} = 0, \tag{103}$$

$$\tau_{22} - \tau_{11} = \omega_1, \quad \tau_{32} = \omega_2, \quad \tau_{41} = \omega_2.$$

La differenziazione esteriore fornisce le relazioni

$$[\omega_{32}\omega_1] - [\omega_{11} - 2\omega_{22} + \omega_{44}\,\omega_2] = 0,$$

$$[\omega_{41}\omega_1] - [\omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{44}\,\omega_2] = 0,$$

$$[d\alpha_2 + \alpha_2(2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33})\omega_1] + [\omega_{41}\omega_2] = 0,$$

$$[d\beta_2 + \beta_2(\omega_{11} - 2\omega_{33} + \omega_{44})\omega_1] - [\omega_{32}\omega_2] = 0,$$

$$[\tau_{31}\omega_1] = 0, \ [\tau_{42}\omega_2] = 0, \ [\omega_{11} - \omega_{33}\,\omega_1] = 0,$$

$$[\beta_2\tau_{42} - \omega_{32}\omega_1] - [\tau_{31} - 2\omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} - \omega_1\,\omega_2] = 0,$$

$$[\alpha_2\tau_{42} - \omega_{41}\omega_1] - [\tau_{31} + \omega_{11} + \omega_{22} - 2\omega_{44} - \omega_1\,\omega_2] = 0.$$

Il sistema (103) è in involuzione ed arriviamo al risultato <u>che le deformazioni proiettive semisingolari di congruenze non paraboliche esistono e dipendono da nove funzioni arbitrarie di una variabile.</u>

Essendo T una deformazione proiettiva arbitraria della congruenza non parabolica $\mathcal{L}$, consideriamo la trasformazione puntuale $T(\pi)$ $(S_3 \rightarrow S_3')$ dove $\pi A_1 = A_1'$, $\pi A_2 = A_2'$ d'accordo con (85). Avendosi attualmente $\alpha_1 = \alpha_1'$, $\alpha_2 = \alpha_2'$, $\beta_1 = \beta_1'$ $\beta_2 = \beta_2'$, $\rho = 1$, la (65) assume, tenendo conto di (87), la forma semplice

$$\tau_{11} - \tau_{21} = 0 .$$

Ricordando il significato della (65) otteniamo in primo luogo il risultato noto che se T è singolare, la corrispondenza puntuale $T(\pi)$ è <u>totalmente asintotica</u> nel senso che per una qualunque rigata sghemba R contenuta in $\mathcal{L}$, la corrispondenza $R \rightarrow R'$ subordinata a $T(\pi)$ è asintotica. Se invece la deformazione proiettiva T non è nè singolare nè semisingolare, allora si vede che

(104) $\qquad c = \text{cost.}$

[v.(92)] è una decomposizione di $\mathcal{L}$ in una famiglia ∞^1 di rigate sghembe che chiamiamo <u>decomposizione asintotica</u> di $\mathcal{L}$ (relativa alla deformazione proiettiva T) perchè tutte le superficie rigate della decomposizione son trasformate asintoticamente dalla $T(\pi)$, il che non è più vero per le altre rigate sghembe contenute in $\mathcal{L}$.

Se T è singolare, la decomposizione asintotica di $\mathcal{L}$ diventa indeterminata, Se invece T è semisingolare, allora (104) è una decomposizione di $\mathcal{L}$ in ∞^1 rigate <u>sviluppabili</u> che continuiamo a chiamare decomposizione asintotica, ma l'interpretazione geometrica data sopra non vale più ed occorre cercarne un'altra. All'uopo ricordiamo il concetto della deformazione proiettiva di una superficie σ. Se $D(\sigma \rightarrow \sigma')$ è una tale deformazione e se A è un punto scelto comunque su σ, allora per definizione esistono omografie H osculatrici (in infinità ∞^1) che realizzano contatto analitico del secondo ordine fra σ e σ'; in altre parole, tali che le immagini di punti di σ infinitamente vicini ad A rispettivamente per D e per H differiscono l'una dall'altra solo per quantità infinitesime del terzo ordine. Ora se σ non è sviluppabile, allora le H posseggono anche la proprietà duale P che dice che le immagini di piani tangenti a σ nei punti infinitamente vicini ad A rispettivamente per D e per H differiscono l'una dall'altra solo per quantità infinitesime del terzo ordine. Se invece σ è sviluppabile, allora la proprietà P non vale in generale per nessuna delle ∞^1 omografie H; ma se (in un punto generico A di σ) la proprietà P vale per una delle ∞^1 H, essa vale per tutte. Sia adesso $T(\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}')$ una deformazione proiettiva qualunque e sia R una rigata sviluppabile contenuta in $\mathcal{L}$. Allora la trasformazione di R subordinata alla trasformazione puntuale $T(\Pi)$ di S_3 è sempre una deformazione proiettiva, ma essa possiede la proprietà P se e solo se R fa parte della decomposizione asintotica di $\mathcal{L}$; T è allora semisingolare. (Se T è singolare, la proprietà P vale per ambedue i sistemi di sviluppabili contenute in $\mathcal{L}$).

La decomposizione (104) di $\mathcal{L}$ si può anche interpretare senza far uso delle asintotiche di rigate contenute in $\mathcal{L}$. Basta considerare la decomposizione corrispondente di una delle due superficie focali, sia (A_1), in ∞^1 curve. Infatti si vede subito che la tangente, in un punto qualunque A_1 di (A_1), alla curva di decomposizione che vi passa, è la coniugata armonica di $[A_1A_2]$ rispetto alla coppia (101) di tangenti caratteristiche di (A_1).

Abbiamo già occasionalmente considerato, insieme collo spazio S_3, anche lo spazio duale S_3^* i cui punti sono i piani di S_3. Una retta g di S_3 consideriamo come un'insieme di punti;

ad ogni retta g di S_3 corrisponde allora una retta ben determinata g^* di S_3^* che chiamiamo <u>dualizzazione</u> della retta g; g^* è quindi il fascio di piani di S_3 passanti per g. Data una congruenza $\mathcal{L}$ di S_3, se sostituiamo ogni retta g di $\mathcal{L}$ per la sua dualizzazione g^*, otteniamo una congruenza $\mathcal{L}^*$ di S_3^*. Il passaggio $g \to g^*$ considerato come relazione biunivoca fra $\mathcal{L}$ ed $\mathcal{L}^*$ sia detto <u>dualizzazione</u> della congruenza $\mathcal{L}$. La dualizzazione di una congruenza $\mathcal{L}$ è un caso particolare notevole di trasformazione sviluppabile. Per studiarla, possiamo porre

(105) $A_1' = E_3,\ A_2'=-E_4,\ A_3'=-E_1,\ A_4'=E_2$

dopodichè

$$\omega_1' = \omega_1,\ \omega_2' = \omega_2,\ \alpha_1' = \beta_1,\ \alpha_2' = \beta_2,\ \beta_1' = \alpha_1,\ \beta_2' = \alpha_2,$$

(106) $$\tau_{13} = \tau_{24} = \tau_{14} = \tau_{23} = 0,$$

$$\omega_{11}' = -\omega_{33},\ \omega_{22}' = -\omega_{44},\ \omega_{33}' = -\omega_{11},\ \omega_{44}' = -\omega_{22},$$

$$\tau_{11} - \tau_{33} = 0,\quad \tau_{22} - \tau_{44} = 0.$$

Ci limiteremo al caso particolarmente interessante di congruenze W la cui dualizzazione è una deformazione proiettiva. Si ha $\alpha_1 \alpha_2 = \beta_1 \beta_2$ e il riferimento (2) può specializzarsi in modo da avere

(107) $$\alpha_1 = \beta_1 \ ; \quad \alpha_2 = \beta_2$$

ossia

(108) $$\omega_{12} = \omega_{43} \ , \quad \omega_{21} = \omega_{34}$$

Ormai si ha

(109) $$\tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{43} = \tau_{34} = 0,$$

cioè son soddisfatte le (86) e (97), sicchè l'omografia osculatrice relativa alla dualizzazione ha la forma semplice (85) ovvero, visto (105), la forma

$H_0A_1=E_3$, $H_0A_2=-E_4$, $H_0E_3=-E_1$, $H_0A_4=E_2$;

H_0 è dunque la polarità rispetto al complesso lineare osculatore Ω_0 :

$$[A_1A_3] - [A_2A_4] \qquad (110)$$

Dalle (106) si ha $\tau_{22} - \tau_{11} = \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44}$, sicchè la dualizzazione della congruenza W, pensata come una deformazione proiettiva, è singolare se $\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44} = 0$ ed è semisingolare se $[\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44} \cdot \omega_1] = 0$ oppure $[\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44}\, \omega_2] = 0$. Ora dalle (16) si ha

$$d\left([A_1A_3] - [A_2A_4]\right) = (\omega_{41} + \omega_{32})[A_1A_2] + (\omega_{11} + \omega_{33})[A_1A_3] - (\omega_{22} - \omega_{44})[A_2A_4] \qquad (111)$$

e differenziando esteriormente le (108) si ottiene

$$\alpha_1[\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44}\, \omega_2] - [\omega_{41} + \omega_{32}\, \omega_1] = 0,$$

$$\alpha_2[\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44}\, \omega_1] + [\omega_{41} + \omega_{32}\, \omega_2] = 0.$$

Risulta che nel caso $\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44} = 0$ si ha anche $\omega_{41} + \omega_{32} = 0$ ed il complesso Ω_0 è fisso. Quindi la dualizzazione di una congruenza W $\mathcal{L}$ non può essere una deformazione proiettiva singolare che se $\mathcal{L}$ sta in un complesso lineare Ω_0 fisso; la deformazione è allora una semplice omografia.

La specializzazione (107), che dice che il complesso lineare osculatore Ω_0 ha la forma (110), può completarsi colla spesializzazione

$$\alpha_1 + \beta_2 = 0, \quad \alpha_2 + \beta_1 = 0,$$

che dice che le asintotiche sulle superficie focali son date dall'equazione

(112) $$\omega_1^2 - \omega_2^2 = 0$$

Si trova facilmente che una nuova specializzazione permette di porre $\alpha_4=1$ sicchè insomma

(113) $$\omega_{12} = \omega_2\,, \quad \omega_{21} = -\omega_1\,, \quad \omega_{34} = -\omega_1\,, \quad \omega_{43} = \omega_2\,;$$

una specializzazione ulteriore dà ancora

(114) $$\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} + \omega_{44} = 0\,.$$

Differenziando esteriormente le (113) s'ottengono le (17) dove adesso

(115) $$\alpha_1 = 1\,, \quad \alpha_2 = -1\,, \quad \beta_1 = 1\,, \quad \beta_2 = -1\,,$$

sicchè si può porre

(116) $$\begin{aligned} \omega_{11} - \omega_{33} &= \omega_{22} - \omega_{44} = z_1\,\omega_1 + z_2\,\omega_2\,, \\ \omega_{11} - \omega_{22} &= \omega_{33} - \omega_{44} = t_1\,\omega_1 + t_2\,\omega_2\,, \end{aligned}$$

(117) $$\begin{aligned} \omega_{32} &= (z_2 - t_2)\,\omega_1 + (z_1 - t_1)\,\omega_2\,, \\ \omega_{41} &= -(z_2 + t_2)\,\omega_1 - (z_1 + t_1)\,\omega_2\,. \end{aligned}$$

Dalle (116) e (117) si ottiene per differenziazione esteriore

(118) $$[\omega_{31}\,\omega_1] - [\omega_{42}\,\omega_2] - 2\,[\omega_1\,\omega_2] = 0\,,$$

(119) $$[dz_1 + \omega_{31}\,\omega_1] + [dz_2 + \omega_{42}\,\omega_2] = 0\,,$$

(120) $$[dt_1\,\omega_1] + [dt_2\,\omega_2] + (z_1 t_2 - z_2 t_1)\,[\omega_1\,\omega_2] = 0\,,$$

(121) $$[dt_2\,\omega_1] + [dt_1\,\omega_2] + 3\,(z_1 t_1 - z_2 t_2)\,[\omega_1\,\omega_2] = 0\,,$$

$$(122)\quad [dz_2-\omega_{42}\omega_1]+[dz_1-\omega_{31}\omega_2]+(2z_1^2+t_1^2-2z_2^2-t_2^2)[\omega_1\omega_2]=0.$$

Il riferimento mobile (2) relativo ad una congruenza W è ormai completamente specializzato (non vi sono più parametri secondari) bensì solo irrazionalmente; al posto di (2) si può ancora mettere

$$(123)\quad \varepsilon_1 A_1\ ,\quad \varepsilon_2 A_2,\quad \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2} A_3,\quad \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} A_4\ ,$$

dove

$$(124)\quad \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \pm 1\ .$$

Giova notare le formole

$$(125)\quad [d\omega_1] = -z_2[\omega_1\omega_2],\quad [d\omega_2]=z_1[\omega_1\omega_2]$$

ed osservare che

$$(126)\quad [d(t_1\omega_1+t_2\omega_2)] = 0,$$

che cioè $t_1\omega_1+t_2\omega_2$ è un differenziale esatto. L'equazione $t_1\omega_1+t_2\omega_2=0$ definisce la decomposizione asintotica di $\mathcal{L}$ relativa alla dualizzazione. E' $t_1=t_2=0$ per congruenze appartenenti ad un complesso lineare fisso.

Condizione perchè la dualizzazione di $\mathcal{L}$ sia semisingolare (ma non singolare) è che sia

$$(127)\quad t_2 = 0 \neq t_1$$

oppure $t_2\neq 0=t_1$, le due possibilità differendo solo nell'orientazione di $\mathcal{L}$. Sia dunque (127). Allora le (120) e (121) dànno

$$(128)\quad dt_1 + t_1(3z_1\omega_1+z_2\omega_2) = 0$$

donde risulta per differenziazione esteriore

$$(129)\qquad 3[dz_1\omega_1]+[dz_2\omega_2]-2z_1z_2[\omega_1\omega_2]=0$$

Il sistema di Pfaff (8)+(113)+(116)+(117)+(128) ha nell'ipotesi (127) condizioni d'integrabilità (118)+(119)+(122)+(129), nelle quali compiano oltre ω_1, ω_2 quattro forme dz_1, dz_2, ω_{31}, ω_{42} con determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 & 3\omega_1 \\ 0 & \omega_2 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_1 & -\omega_2 & 0 \\ -\omega_2 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{vmatrix} = -8\omega_1^3\omega_2 \neq 0.$$

Quindi <u>le congruenze W con dualizzazioni semisingolari</u> (ma non singolari) <u>dipendono da quattro funzioni arbitrarie di una variabile</u>.

Una classe notevolissima di congruenze W si ottiene supponendo che la decomposizione asintotica relativa alla dualizzazione corrisponda ad una famiglia d'asintotiche delle superficie focali. Per brevità chiamiamo <u>congruenze W</u> con <u>dualizzazione asintotica</u> le congruenze testè introdotte. La decomposizione asintotica è espressa o da $\omega_1+\omega_2=0$ o da $\omega_1-\omega_2=0$ e si ha nel primo caso

$$(130)\qquad t_1 = t_2$$

e nel secondo

$$(131)\qquad t_1 = -t_2$$

con $t_1\neq 0$; i due casi non differiscono che formalmente l'uno dall'altro.

Nell'ipotesi (130) (con $t_1\neq 0$) si deduce dalle (120) e (121) che

(132) $$z_1 = z_2$$

ed inoltre

(133) $$\left[d\, t_1 \quad \omega_1 + \omega_2\right] = 0$$

Il sistema di Pfaff (8)+(113)+(116)+(117) ha nelle ipotesi (130) e (132), se $t_1 \neq 0$, le condizioni d'integrabilità (118)+(119)+ +(122)+(123) nelle quali compaiono oltre ω_1, ω_2 quattro forme dz_1, dt_1, ω_{31}, ω_{42} con determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \omega_1+\omega_2 & \omega_1+\omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1+\omega_2 \\ \omega_1 & \omega_1 & -\omega_2 & 0 \\ -\omega_2 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{vmatrix} = (\omega_1+\omega_2)^3 \neq 0,$$

sicchè le congruenze W con dualizzazione asintotica dipendono da quattro funzioni arbitrarie di una variabile. Si prova facilmente che <u>gli elementi lineari proiettivi delle congruenze</u> W <u>con dualizzazione asintotica dipendono da tre funzioni arbitrarie di una variabile</u> sicchè <u>ogni congruenza</u> W c<u>on dualizzazione asintotica ammette deformazioni dipendenti da una funzione arbitraria di una variabile</u>. Si dimostra pure che, se la congruenza del tipo esaminato non è R, allora le forme ω_{31}, ω_{42} sono univocamente determinate dall'elemento lineare proiettivo, mentre la quantità t_1 resta arbitraria eccetto che essa deve essere costante lungo le asintotiche $\omega_1 + \omega_2 = 0$. Per la congruenze R a dualizzazione è possibile indicare formole esplicite:

(134) $$\begin{gathered} \omega_1 = f\,dv, \quad \omega_2 = f\,du \\ z_1 = z_2 = \frac{f'}{f^2}, \quad t_1 = t_2 = g \\ \omega_{31} = \frac{c}{f}\,dv - f(du - 2dv), \quad \omega_{42} = \frac{c}{f}\,du - f(2du + dv), \end{gathered}$$

dove $f \neq 0$ e g sono funzioni arbitrarie della sola $u+v$ e c è una costante arbitraria.

Le congruenze W con dualizzazione asintotica appaino, come s'è visto testè, nella ricerca importante di congruenze che ammettono "molte" deformate proiettive. Però noi qui non proseguiremo tale ricerca. Un altro problema importante di cui però non ho ancora finito lo studio è quello delle congruenze che ammettono un gruppo continuo di deformazioni proiettive in sè. Mi limito qui ad indicare che per congruenze del tipo I tale gruppo ha al più due parametri e che, se è così, l'elemento lineare proiettivo ha (in parametri sviluppabili u, v convenientemente scelti) una delle tre forme

$$\varphi = c_1\,du\,dv\,,\ \varphi^* = c_2\,du\,dv\,,\ F_1 = c_3\frac{du^3}{dv}\,,\ F_2 = c_4\frac{dv^3}{du}\,,$$

$$\varphi = \frac{c_1}{u^2}\,du\,dv\,,\ \varphi^* = \frac{c_2}{u^2}\,du\,dv\,,\ F_1 = \frac{c_3}{u^2}\frac{du^3}{dv}\,,\ F_2 = \frac{c_4}{u^2}\frac{dv^3}{du}\,,$$

$$\varphi = \frac{c_1}{(u+v)^2}\,du\,dv\,,\ \varphi^* = \frac{c_2}{(u+v)^3}\,du\,dv\,,\ F_1 = \frac{c_3}{(u+v)^3}\frac{du^3}{dv}\,,\ F_2 = \frac{c_4}{(u+v)^3}\frac{dv^3}{du}$$

con c_1, c_2, c_3, c_4 costanti.

Passiamo alla considerazione di congruenze paraboliche. Qui mi limito ad un breve elenco di risultati relativi alla loro deformazione proiettiva. Come nel caso non parabolico, c'è anche qui il caso di deformazioni proiettive singolari e semisingolari, e si trasporta al caso parabolico anche la nozione di decomposizione asintotica di una congruenza $\mathcal{L}$ relativa ad una sua deformazione proiettiva.

Le congruenze paraboliche possono esser divisi in quattro tipi.

Tipo I di congruenze paraboliche $\mathcal{L}$ con una superficie focale σ. La σ non è sviluppabile ed $\mathcal{L}$ consiste di una famiglia di tangenti asintotiche di σ

Tipo II di congruenze $\mathcal{L}$ con una curva direttrice D non rettilinea; $\mathcal{L}$ consiste di ∞ fasci di rette i cui centri stanno nei punti di D ed il piano del fascio è tangente, ma non osculatore, a D.

Tipo III di congruenze $\mathcal{L}$ con una curva direttrice D non rettilinea nè piana; $\mathcal{L}$ consiste di ∞^1 fasci di rette i cui centri stanno nei punti di D ed i cui piani sono osculatori a D.

Tipo IV di congruenze $\mathcal{L}$ con una retta direttrice D; $\mathcal{L}$ consiste di ∞^1 fasci di rette tali che D appartiene a ciascuno di essi.

Se $\mathcal{L}$ è una congruenza parabolica del tipo I, sia

$$\frac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{2\, du\, dv}$$

l'elemento lineare proiettivo della superficie focale σ, sicchè u, v sono parametri asintotici di σ. Supponiamo pure che $\mathcal{L}$ consista delle tangenti alle asintotiche v=cost. di σ; tali asintotiche quindi non sono rettilinee, sicchè la forma elementare del Bompiani

$$\frac{\beta du^2}{dv} \tag{135}$$

è diversa da zero. Le deformazioni proiettive di $\mathcal{L}$ sono identiche a quelle trasformazioni di $\mathcal{L}$ che sono generate dalle trasformazioni asintotiche C di σ tali che la forma differenziale (135) resta invariante; le C son quindi quelle che nel 1928 chiamai <u>semideformazioni asintotiche</u>. Risulta che ogni $\mathcal{L}$ parabolica del tipo I è proiettivamente deformabile e che le deformazioni proiettive di $\mathcal{L}$ dipendono da cinque funzioni arbitrarie di una variabile. Le deformazioni proiettive singolari di $\mathcal{L}$ son quelle per cui C è una deformazione proiettiva di σ del tipo R_o, la $\mathcal{L}$ essendo la congruenza R_o corrispondente. Risulta che le congruenze $\mathcal{L}$ proiettivamente deformabili in modo singolare dipendono da cinque funzioni arbitrarie di una variabile. Si può provare che le congruenze $\mathcal{L}$ proiettivamente deformabili in modo semisingolare dipendono da otto funzioni arbitrarie di una variabile.

Quanto alle congruenze dei tipi II,III,IV (con una curva direttrice D) mi limito qui alle osservazioni seguenti. Anche queste congruenze son tutte proiettivamente deformabili; c'è però contro il caso del tipo I la differenza fondamentale che le omografie osculatrici H non sono più univocamente determinati dalla scelta di una retta g di $\mathcal{L}$. Particolarmente interessanti sono i casi dove H può scegliersi in modo che dipende solo dal punto d'incontro di g con D, sicchè la stessa H serve per tutte le rette d'un fascio contenuto in $\mathcal{L}$. Si arriva così a dei risultati troppo speciali per meritare di esser trattati in queste conferenze. Ciò nondimeno essi sono importanti, perchè si tratta di proprietà tutt'altro che banali di striscie od[1] di elementi di contatto (punto + piano) le quali, ne sono sicuro, troveranno applicazioni interessanti nella geometria proiettiva di curve tracciate su una superficie di S_3 che è un campo di ricerche poco sviluppato finora.

Chiudo queste conferenze con tre osservazioni relative alle ricerche qui non accennate.

Non ho considerato qui che una congruenza $\mathcal{L}$ isolata; vi sono però risultati interessanti riguardanti la trasformazione sviluppabile simultanea di due congruenze trasformate di Laplace l'una dell'altra.

Per classificare le deformazioni proiettive ho fatto uso esclusivo della decomposizione asintotica. Esiste però una classificazione affatto diversa basata sulla rappresentazione delle congruenze mediante superficie sulla quadrica di S_5 che tratterò altrove.

Mi sono limitato qui a congruenze in S_3, negligendo completamente il ~~vasto~~ campo di ~~generalizzazioni~~ iperspaziali.
