Eduard Čech

Deformazioni di congruenze di rette

Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 14 (1954/55), 55-66

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501084

EDUARD ČECH

DEFORMAZIONI DI CONGRUENZE DI RETTE

(*Conferenza tenuta il 1° febbraio 1955*)

In questa conferenza si considereranno deformazioni proiettive di congruenze di rette in S_3, introdotte da E. CARTAN nel 1920, ed altre classi nuove di deformazioni di congruenze che ne sono delle generalizzazioni. Il punto di partenza per CARTAN era il concetto di deformazioni proiettive di superficie, introdotto da FUBINI nel 1916, e prima di passare al tema proprio della conferenza, mi pare opportuno di considerare rapidamente le deformazioni del FUBINI.

Consideriamo una corrispondenza puntuale C fra una superficie σ dello spazio S_3 ed una superficie σ' di S_3'; non importa se $S_3 = S_3'$ o no. Per brevità supponiamo che le σ, σ' non siano rigate. Per ogni coppia x, x' di punti corrispondentisi in C, un'omografia $H\,(S_3 \to S_3')$ si dirà

[1] tangente [2] osculatrice

a C in x se $Hx = x'$ e se ci è nel punto x' un contatto analitico del

[1] primo ordine (almeno) [2] secondo ordine (almeno)

fra le due superficie $H\sigma$ e σ'. Le omografie tangenti esistono per ogni C, mentre invece omografie osculatrici non esistono che per corrispondenze C speciali, dette *deformazioni proiettive* della superficie σ. Escludiamo il caso banale ove la C stessa sia una trasformazione omografica $\sigma \to \sigma'$.

Geometricamente è chiaro che ogni deformazione proiettiva di una superficie σ è una *trasformazione asintotica*, che cioè le curve asintotiche di σ vanno in asintotiche di σ'. È quindi opportuno di riferire le superficie considerate a parametri asintotici. Se u, v sono parametri asintotici di σ, è ben noto che le coordinate omogenee del punto $x = x(u, v)$ di σ soddisfano equazioni della forma

$$\text{[1]} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial x}{\partial v} + px \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \gamma \frac{\partial x}{\partial u} + \delta \frac{\partial x}{\partial v} + qx , \end{aligned}$$

dove per superficie non rigate si ha $\beta\gamma \neq 0$. Per il punto x' di σ' si hanno equazioni analaghe con coefficienti $\alpha', \dots, g'$. Se la corrispondenza C è espressa dall'uguaglianza di u, v in punti corrispondenti, condizione necessaria e sufficiente per la deformazione proiettiva è l'invarianza della forma differenziale

$$\text{[2]} \qquad \frac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{2du dv}$$

(elemento lineare proiettivo di σ introdotto dal FUBINI) che non dipende nè dalla scelta dei parametri asintotici u, v nè dal fattore delle coordinate omogenee di x. È chiaro che l'invarianza della [2] equivale a quella di due forme differenziali di struttura più semplice

$$\text{[3]} \qquad \frac{\beta du^2}{dv}, \qquad \frac{\gamma dv^2}{du} .$$

È spontanea la domanda del significato geometrico di quelle C per cui una sola delle [3], p. es. la prima, sia invariante. Nel 1928 osservai che, per una trasformazione asintotica C, l'invarianza di $\dfrac{\beta du^2}{dv}$ esprime che c'è in x' contatto geometrico del 2° ordine fra le asintotiche $dv = 0$ delle superficie $H\sigma$ e σ', H essendo un'omografia tangente a C in x (la scelta di H non importa). Chiamai tali C semideformazioni asintotiche di σ $\left(\text{relative alle asintotiche } dv = 0; \text{ quelle relative alle asintotiche } du = 0 \text{ essendo caratterizzate dall'invarianza di } \frac{\gamma dv^2}{du}\right)$.

Siccome una superficie σ dipende da una funzione arbitraria di due variabili, è naturale di aspettare che data $\beta(u, v) \neq 0$ ad arbitrio, esistono le σ con prima forma elementare $\beta \frac{du^2}{dv}$, dipendendo da un certo numero di funzioni arbitrarie di una variabile. Il calcolo conferma tale aspettativa ed ogni σ ammette semideformazioni asintotiche relative a $dv = 0$ che dipendono da 5 funzioni arbitrarie di una variabile (e similmente per quelle relative a $du = 0$).

I piani di S_3 sono punti dello spazio duale S_3^*; i piani tangenti a σ formano una superficie di S_3^* e similmente la σ' di S_3' dà una superficie σ'^* dello $S_3'^*$ duale a S_3'. L'elemento lineare proiettivo di σ è

$$- \frac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{2du dv} .$$

Risulta che ogni deformazione proiettiva $\sigma \rightarrow \sigma'$ è simultaneamente una deformazione proiettiva $\sigma^* \rightarrow \sigma'^*$. Più precisamente le stesse H osculatrici a $\sigma \rightarrow \sigma'$ sono osculatrici anche a $\sigma^* \rightarrow \sigma'^*$. Per ogni x di σ si hanno ∞^1 tali H.

Essendo C una deformazione proiettiva $\sigma \rightarrow \sigma'$, ne sia H un'omografia osculatrice. Per un punto generico x di σ passa un'asintotica, sia γ_1, $dv = 0$, ed una γ_2, $du = 0$. Nel punto corrispondente x' di σ' si ha sempre contatto geometrico del 3° ordine p. e. di $H\gamma_1$ e $C\gamma_1$ ed anche di $H\gamma_2$ e $C\gamma_2$. Se, per qualche scelta di H, c'è un contatto *analitico* del 3° ordine p. e. di $H\gamma_1$ e $C\gamma_1$, lo stesso accade per *ogni* scelta di H e si dice che la deformazione proiettiva C è del tipo R_0 rispetto alle asintotiche $dv = 0$. (Escludendo il caso banale che C stessa sia una trasformazione asintotica, C non può essere del tipo R_0 simultaneamente rispetto alle $dv = 0$ ed alle $du = 0$). In tale caso, la congruenza parabolica delle tangenti asintotiche $dv = 0$ della superficie σ si dirà *associata* alla deformazione proiettiva.

Se la deformazione proiettiva C non è del tipo R_0, si dice che è del tipo R. Sulla superficie σ esiste allora una rete coniugata, che dirò *associata* a C. Se t_1 e t_2 sono le tangenti alle curve della rete in un punto generico x di σ, allora le due congruenze generate da t_1 e t_2 si diranno pure *associate* a C. Se H è un'omografia osculatrice a C in x e se γ è una curva di σ passante per x, condizione necessaria e sufficiente per il contatto geometrico del 3° ordine fra $H\gamma$ e $C\gamma$ nel punto $x' = Cx$ di σ è che la tangente a γ in x o sia asintotica o sia una della t_1 e t_2. Vi sono due particolari omografie osculatrici H_1 e H_2 ($H_1 \neq H_2$) tali che il contatto del 3° ordine fra $H_1\gamma$ e $C\gamma$ in x' è analitico se γ tocca t_1 e similmente per quello fra $H_2\gamma$ e $C\gamma$ se γ tocca t_2.

Adunque c'è una sola congruenza associata ad una deformazione proiettiva del tipo R_0, che è parabolica e di cui σ è l'unica falda focale, mentre invece ci sono due congruenze non paraboliche associate ad una deformazione proiettiva del tipo R che sono trasformate di LAPLACE l'una dell'altra ed hanno σ come una falda focale. Ambedue tali congruenze sono W. Inversamente, se σ è la falda focale comune a due congruenze W transformate di LAPLACE l'una dell'altra, vi sono ∞^1 deformazioni proiettive di σ a cui tali congruenze sono associate. Simultaneamente con σ, anche la seconda falda focale di ciascuna delle due congruenze subisce una deformazione proiettiva, se questa falda non degenera in una linea, necessariamente retta.

Passiamo infine alla considerazione di una corrispondenza T (retta $\rightarrow$ retta) fra una congruenza L di S_3 ed una congruenza L' di S_3'. Per ogni coppia di rette g e g' corrispondentisi in T, un'omografia H ($S_3 \rightarrow S_3'$) si dirà

[1] tangente, [2] osculatrice

a T in g se $Hg = g'$ e se vi è nella retta g' un contatto analitico

[1] del primo ordine (almeno) ,

[2] del secondo ordine (almeno)

fra le due congruenze HL e L'. Qui il contatto s'intende nel senso rigato (in coordinate di retta o, ciò che è lo stesso, rappresentando le due congruenze mediante superficie sulla quadrica di S_5).

Abbiamo visto che ogni corrispondenza fra due surpeficie possiede omografie tangenti. Invece una corrispondenza fra due congruenze non possiede omografie tangenti che nel caso che sulle due congruenze si corrispondono le sviluppabili, e solo tali corrispondenze sono considerate nel seguito. Come nel caso delle superficie, chiameremo T *deformazione proiettiva* nel caso che esistono omografia osculatrici. Escludiamo il caso banale ove T stessa sia omografica.

Mi limiterò in questa conferenza al caso di congruenze non paraboliche con due famiglie ∞^1 di sviluppabili. Una tale congruenza L sia riferita a parametri u, v tali che le sviluppabili siano date da $dv = 0$ e $du = 0$. Se x, y sono i due fuochi, $x\,(y)$ corrispondendo a sviluppabili $dv = 0$ $(du = 0)$, si hanno equazioni della forma

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a_1 x + a_2 y, , \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = b_1 x + b_2 y \ ,$$

[4] $$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = p_1 x + p_2 y + p_3 \frac{\partial x}{\partial v} + p_4 \frac{\partial y}{\partial u} \ ,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = q_1 x + q_2 y + q_3 \frac{\partial y}{\partial u} + q_4 \frac{\partial y}{\partial u} \ ,$$

ed è

$$\left(xy \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \neq 0 .$$

I piani focali sono

$$\xi = \left(xy \frac{\partial y}{\partial u} \right), \qquad \eta = \left(xy \frac{\partial x}{\partial v} \right),$$

$\xi\,(\eta)$ corrispondendo a sviluppabili $dv = 0$ $(du = 0)$. Diremo $x\,(y)$ il primo (secondo) fuoco, $\xi\,(\eta)$ il primo (secondo) piano focale. Ci limiteremo nel seguito al caso

[5] $$a_2 b_1 p_4 q_3 \neq 0 \ ,$$

ove i fuochi x, y descrivono superficie focali non sviluppabili

(x), (y); il primo (secondo) piano focale $\xi\,(\eta)$ è il piano tangente alla seconda (prima) falda focale (y), $[(x)]$.

Per la congruenza L' introduciamo notazioni analoghe con apici (x' primo fuoco, y' secondo fuoco, coefficienti $a_1', a_2', b_1', \dots, L_4'$). La corrispondenza T sia espressa dall'uguaglianza di u, v nelle rette corrispondenti.

$$g = (xy)\,, \qquad g' = (x'y')\,.$$

A differenza dal caso delle superficie, dalla deformazione proiettive di congruenze le omografie osculatrici $H = H(u, v)$ sono *univocamente* determinate. Analogamente all'elemento lineare [2] A. TERRACINI introdusse nel 1933 l'elemento lineare proiettivo di una congruenza che è, nelle notazioni [4],

$$\text{[6]} \qquad \frac{(a_2 du^2 + p_4 dv^2)\,(q_3 du^2 + b_1 dv^2)}{4du dv}\;;$$

l'equazione $a_2 du^2 + p_4 dv^2 = 0$ ($q_3 du^2 + b_1 dv^2 = 0$) dà le asintotiche della prima (seconda) falda focale. L'elemento lineare proiettivo [6] è invariante per deformazione proiettiva. Inversamente, se [6] è invariante per la corrispondenza T, due casi sono possibili: o T stessa è deformazione proiettiva oppure T diviene deformazione proiettiva sostituendo una delle L, L' con una congruenza duale (correlativa).

Similmente come la [2] del FUBINI si può sostituire con le forme più semplici [3] del BOMPIANI, la forma [6] del TERRACINI si può sostituire con quattro forme differenziali più semplici

$$\text{[7]} \qquad \varphi = a_2 b_1 du dv\,,$$

$$\text{[8]} \qquad \varphi^* = p_4 q_3 du dv\,,$$

$$\text{[9]} \qquad f_1 = a_2 q_3 \frac{du^3}{dv}\,,$$

$$\text{[10]} \qquad f_2 = b_1 p_4 \frac{dv^3}{du}\,,$$

legate dall'identità

$$\text{[11]} \qquad \varphi\varphi^* = f_1 f_2\,.$$

L'elemento lineare proiettivo [6] è identico a

$$\frac{1}{4}\,(\varphi + \varphi^* + f_1 + f_2)\,.$$

Le forme [7]-[10] son indipendenti dalla scelta dei parametri u, v (supposti sempre tali che le sviluppabili siano date da $dv = 0$ e $du = 0$) e da quella dei fattori delle coordinate omogenee di x e y; sotto la nostra supposizione [5] le forme [7]-[10] sono diverse da zero. Queste forme sono invarianti per deformazioni proiettive e l'invarianza di tutte quattro [che, secondo [11], è conseguenza dell'invarianza di tre scelte comunque fra di esse] è sufficiente perchè T sia una deformazione proiettiva. Se i parametri u, v (e quindi anche i fuochi x, y) si scambiano fra di loro, le φ, φ^* rimangono inalterate e f_1, f_2 si scambiano. Invece sostituendo L con una congruenza correlativa, non cambiano le f_1, f_2 e si scambiano le φ, φ^*.

La forma φ sia detta *forma puntuale* della congruenza L. Secondo [4] si ha

$$\text{[12]} \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = a_0 x + a_1 \frac{\partial x}{\partial u} + a_2 \frac{\partial x}{\partial v}\,,$$

$$\text{[13]} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \beta_0 y + \beta_1 \frac{\partial y}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial y}{\partial v}\,,$$

dove

$$a_0 = \frac{\partial a_1}{\partial v} - a_1 \frac{\partial \log a_2}{\partial v} + a_2 b_1 - a_1 b_2\,, \quad a_1 = \frac{\partial \log a_2}{\partial v} + b_2\,, \quad a_2 = a_1\,,$$

$$\beta_0 = \frac{\partial b_2}{\partial u} - b_2 \frac{\partial \log \beta_1}{\partial u} + a_2 b_1 - a_1 b_2\,, \quad \beta_1 = b_2\,, \quad \beta_2 = \frac{\partial \log b_1}{\partial u} + a_1\,,$$

cosicchè il coefficiente di [7]

$$a_2 b_1 = a_0 + a_1 a_2 - \frac{\partial a_2}{\partial v} = \beta_0 + \beta_1 \beta_2 - \frac{\partial \beta_1}{\partial u}$$

è il secondo invariante di LAPLACE-DARBOUX della [12] e, simultaneamente, il primo invariante di L.-D. della [13]. TERRACINI indicò nel 1927 un significato geometrico semplice della φ;

essa è la parte principale del birapporto

$$\left(x, y, x + \frac{\partial x}{\partial u}\, du\,, \qquad y + \frac{\partial y}{\partial v}\, dv\right).$$

La forma φ^* sia detta *forma planare* della congruenza L; il suo significato è duale a quello della forma puntuale φ. Le forme f_1 e f_2 sono nuove; esse siano dette *forme focali* della L; f_1 è prima forma focale (relativa al primo fuoco x), f_2 è seconda forma focale.

La trasformazione $T\,(L \rightarrow L')$ conservante le sviluppabili sia detta:

deformazione puntuale, se la forma puntuale φ è invariante;

deformazione planare, se la forma planare φ è invariante;

deformazione focale di prima (seconda) specie se la prima (seconda) forma focale f_1 (f_2) è invariante;

deformazione asintotica di prima (seconda) specie se T induce una trasformazione asintotica della prima (seconda) falda focale, o analiticamente, se l'equazione di MONGE

$$a_2 du^2 + p_4 dv^2 = 0 \qquad (q_3 du^2 + b_1 dv^2 = 0)$$

è invariante.

Il significato geometrico di deformazioni asintotiche è chiaro. Passiamo alla descrizione geometrica delle deformazioni puntuali. Essendo T una deformazione puntuale, risulta dall'interpretazione geometrica della forma φ data dal TERRACINI che per ogni u, v esiste una proiettività $\pi = \pi\,(u, v)$ fra le punteggiate $g = (xy)$ e $g' = (x'y')$ che porta i punti (geometrici)

$$x, y, x + \frac{\partial x}{\partial u}\, du\,, \qquad y + \frac{\partial y}{\partial v}\, dv$$

ordinatamente in punti

$$x', y', x' + \frac{\partial x'}{\partial u}\, du\,, \qquad y' + \frac{\partial y'}{\partial v}\, dv\,;$$

analiticamente si ha

$$\pi\,(t_1 x + t_2 y) = \varrho t_1 x' + \varrho^{-1} t_2 y'\,,$$

dove

$$a_2 = \varrho^2 a_2', \qquad b_1' = \varrho^2 b_1 ;$$

le due espressioni di ϱ coincidono in virtù dell'invarianza della forma [7]. Ora le ∞^2 proiettività π prese insieme formano una corrispondenza puntuale $C(S_3 \rightarrow S_3')$ che è *inviluppo* di ∞^2 omografie $K = K(u, v)$ nel senso che, se il punto

$$z = t_1 x + t_2 y$$

descrive una curva arbitraria γ di S_3, si ha per ogni punto z di γ nel punto corrispondente

$$z' = \varrho t_1 x' + \varrho^{-1} t_2 y'$$

contatto analitico fra le due curve $C\gamma$ e $K(u, v)\gamma$, i valori di u, v corrispondendo alla scelta di z. Inversamente, ogni corrispondenza puntuale non omografica $S_3 \rightarrow S_3'$ che è inviluppo di ∞^2 omografie nasce mediante ∞^2 proiettività π da una corrispondenza T fra due congruenze L, L' conservante le sviluppabili e se L (e poi anche L') ha due falde focali distinte, che sono superficie non sviluppabili, si è nel caso di una delle nostre deformazioni puntuali. Le omografie K sian dette *omografie puntuali* (della deformazione puntuale); ogni proiettività π fa parte della K corrispondente agli stessi valori di u, v.

Il significato geometrico delle deformazioni planari è correlativo a quello delle deformazioni puntuali. Al posto delle proiettività π fra le punteggiate g e g' si hanno adesso proiettività π^* fra i fasci di piani di sostegno g e g', analiticamente determinate da

$$\pi^*(t_1\xi + t_2\eta) = \sigma t_1 \xi' + \sigma^{-1} t_2 \eta',$$

dove

$$q_3 = \sigma^2 q_3', \qquad \sigma^2 p_4 = p_4' .$$

Le due espressioni di σ coincidono in virtù dell'invarianza della forma [8]. Al posto delle omografie puntuali si hanno adesso *omografie planari* $K^* = K^*(u, v)$.

Per descrivere geometricamente le deformazioni focali, consideriamo nello spazio S_3 la prima falda focale di L come superficie luogo (x) generata dal primo fuoco x e la seconda falda focale (ξ) come superficie inviluppo generata dal primo piano focale ξ cui corrisponde in S_3' la superficie luogo (x') e la superficie inviluppo (ξ'). La trasformazione T (retta $\rightarrow$ retta) induce una trasformazione M (punto $\rightarrow$ punto) di (x) in (x') ed una trasformazione M^* (piano $\rightarrow$ piano) di (ξ) in (ξ'); alla coppia generica di rette g e $g' = Tg$ corrisponde la coppia di punti x e $x' = Mx$ e la coppia di piani ξ e $\xi' = M^*\xi$. Ciò posto, T è una deformazione focale di prima specie se e solo se per ogni retta g esiste un'omografia P ($S_3 \rightarrow S_3'$) tale che $Pg = g'$, $Px = x'$, $P\xi = \xi'$ e che si abbia contatto analitico del primo ordine simultaneamente

delle superficie luogo $P(x)$ e $M(x) = (x')$ nel punto x',
delle superficie inviluppo $P(\xi)$ e $M(\xi) = (\xi')$ nel piano ξ'
e delle congruenze PL e $TL = L'$ nella retta g';

il primo contatto s'intende calcolato in coordinate di punto, il secondo in coordinate di piano e il terzo in coordinate di retta. L'omografia P non è univocamente determinata. Scambiando le due falde focali, si ottiene il significato geometrico delle deformazioni focali di seconda specie.

Per brevità indichiamo con

P una deformazione puntuale,
Π una deformazione planare,
F_1 (F_2) una deformazione focale di prima (seconda) specie,
A_1 (A_2) una deformazione asintotica di prima (seconda) specie di una congruenza L. Per ciascuno dei sei tipi la congruenza L può scegliersi ad arbitrio e la trasformata L' dipende poi ancora da una funzione arbitraria di due variabili (mentre la congruenza generale dipende da due tali funzioni).

Passiamo alla considerazione delle deformazioni doppie, appartenenti cioè simultaneamente a due fra i sei tipi. Qui bisogna osservare che una deformazione che appartiene a due fra i tre tipi

[14] P, F_1, A_2 o P, F_2, A_1 oppure Π, F_1, A_1 od infine Π, F_2, A_2,

appartiene necessariamente anche al terzo. Inoltre non sono essenzialmente diversi fra loro per es. i tipi doppi PA_1 e PA_2

che non differiscono che per la denominazione dei fuochi, nè per es. i tipi doppi PA_1 e ΠA_1 che sono mutuamente correlativi. Rimangono così solo quattro tipi doppi essenzialmente distinti fra loro

$$P\Pi, \quad PA_1, \quad A_1A_2, \quad F_1F_2 .$$

Per ciascun tipo doppio, la congruenza L può scegliersi ad arbitrio e la trasformata L' dipende poi ancora da quattro funzioni arbitrarie di una variabile.

Una deformazione proiettiva apppartiene simultaneamente a tutti i sei tipi considerati. D'altra parte ogni T di cui si sa che essa appartiene ad una terna scelta fra i sei tipi diversamente dalle terne [14] è necessariamente una deformazione proiettiva. Risulta che nel campo delle trasformazioni di congruenze che conservano le sviluppabili le deformazioni proiettive son delle specializzazioni triple; ciò è d'accordo col fatto ben noto che le congruenze proiettivamente deformabili dipendono da una funzione arbitraria di due variabili.

Le deformazioni proiettive sono un caso speciale delle deformazioni $P\Pi$. Essendo T una deformazione $P\Pi$ della congruenza L, abbiamo per ogni coppia u, v l'omografia puntuale K e l'omografia planare K^*. Allora T è deformazione proiettiva se, e solo se, le due omografie K e K^* coincidono sulla retta $g = (xy)$. Supponiamo che sia così e indichiamo con π la proiettività fra le punteggiate g e $g' = (x'y')$ subordinata a K ed a K'. La proiettività π è subordinata anche all'omografia osculatrice H. Per un punto z di S_3 non situato sulla retta g i tre punti

$$Kz, \qquad K^*z, \qquad Hz \tag{15}$$

son generalmente diversi fra loro, ma se due fra essi coincidono, lo stesso accade per il terzo.

La deformazione proiettiva T della congruenza L induce una trasformazione asintotica M_1 della prima falda focale (x) ed una trasformazione asintotica M_2 della seconda falda focale (y). T si dice *deformazione proiettiva singolare* della congruenza L se le due trasformazioni M_1 e M_2 son deformazioni proiettive. Le due deformazioni proiettive M_1 e M_2 son necessariamente del tipo R e la congruenza L è *associata* ad ambedue nel senso descritto sopra. Se una delle M_1 e M_2 è deformazione proiettiva, lo stesso vale per l'altra e la T è singolare. Inversamente partiamo dalla deformazione proiettiva M_1 del tipo R di una superficie non sviluppabile (x) e sia L una delle due congruenze associate a M_1; la trasformazione M_1 di (x) induce una trasformazione della L che è una deformazione proiettiva singolare.

Per una deformazione proiettiva T della congruenza L la coincidenza delle tre omografie K, K^*, H è condizione necessaria e sufficiente perchè la T sia singolare. Chiamiamo T *semisingolare* se, T non essendo singolare, esistono però anche fuori della retta g dei punti z per cui le tre immagini [15] sono coincidenti. Il luogo di tali punti è necessariamente uno dei due piani focali. Le congruenze proiettivamente deformabili in modo semisingolare dipendono da nove funzioni arbitrarie di una variabile.

Se T è deformazione proiettiva arbitraria di una congruenza L, consideriamo su ogni retta g di L' la trasformazione proiettiva π di g che è comune alle tre omografie K, K^* e H. Le ∞^2 proiettività π prese insieme determinano una trasformazione puntuale C dello S_3 a cui la T è subordinata. Se la T è singolare, allora la C trasforma asintoticamente *ogni* rigata sghemba contenuta in L. Se la T è semisingolare, la C non trasforma asintoticamente *nessuna* rigata sghemba contenuta in L. Se infine la T non è nè singolare nè semisingolare, allora per ogni retta di L passa *una sola* rigata sghemba contenuta in L e trasformata asintoticamente mediante la C.