Eduard Čech

Deformazione proiettiva di strati d'ipersuperficie

Convegno int. di geom. diff. 1953, Ediz. Cremonese, Roma (1954), 266-273

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501076

DEFORMAZIONE PROIETTIVA DI STRATI D'IPERSUPERFICIE

DI E. ČECH (PRAGA, CECOSLOVACCHIA)

1. Sia C una corrispondenza (analitica) fra due spazi lineari S_n e S'_n e sia Σ uno strato (sistema semplicente infinito) d'ipersuperficie di S_n. La corrispondenza C trasforma Σ in uno strato Σ' di S'_n. Dico che C è una deformazione, o applicabilità, proiettiva di Σ se, per ogni coppia A, A' di punti omologhi nella corrispondenza C, esiste una collineazione $K = K(A, A')$ fra S_n e S'_n tale che, per ogni curva γ di S_n passante per A, si ha nel punto omologo A' di S'_n un contatto analitico fra le due curve $C\gamma$ e $K\gamma$ trasformate di γ rispettivamente per C e per K, contatto del primo ordine in generale, ma che risulti contatto analitico del secondo ordine se γ giace sull'ipersuperficie dello strato Σ che passa per A. È evidente che una deformazione proiettiva dello strato Σ è necessariamente una deformazione proiettiva, nel senso classico di G. Fubini, di ogni ipersuperficie che fa parte dello strato Σ, ma non viceversa. È pure evidente che una corrispondenza *collineare* C fra S_n e S'_n è deformazione proiettiva di *ogni* strato Σ di S_n; nel seguito, si suppone che la corrispondenza C non sia collineare. Ciononondimeno, C può trasformare collinearmente ogni singola ipersuperficie dello strato Σ.

2. Se $n = 2$, la corrispondenza C è deformazione proiettiva per uno strato Σ di curve se e solo se Σ consta di *curve caratteristiche* di C. Adunque C è, in generale, deformazione proiettiva per *tre* strati Σ, ma il numero di tali strati può abbassarsi a *due* oppure ad *uno*. Nel seguito suppongo, eccetto al n° 4, che sia $n \geqq 3$.

3. Può darsi che le ipersuperficie di cui si compone lo strato Σ siano degli *iperpiani;* allora Σ' esso pure si compone d'iperpiani.

Inoltre, la corrispondenza C in tal caso trasforma *collinearmente* ogni iperpiano dello strato Σ. Viceversa, se vi è nello spazio S_n, uno strato Σ d'iperpiani e se la corrispondenza C fra S_n e S'_n trasforma collinearmente ogni iperpiano appartenente a Σ, si prova facilmente che C è deformazione proiettiva per lo strato Σ. Risulta che le corrispondenze fra S_n e S'_n decomponibili in ∞^1 transformazioni collineari d'iperpiani appartengono alla famiglia di deformazioni proiettive di strati, vi formano però una famiglia che può dirsi *triviale*, benchè abbiano delle proprietà non prive d'interesse.

4. Nella teoria generale di proprietà proiettive di corrispondenze C fra due spazi lineari, di cui la teoria delle deformazioni proiettive di strati non è che un capitolo speciale, il concetto più fondamentale è quello della *collineazione tangente* K relativa ad una coppia A, A' di punti omologhi, nozione analoga a quella dello spazio tangente in un punto ad una varietà. La collineazione tangente K può definirsi con la proprietà che, per ogni curva γ di S_n passante per A, si abbia in A' un contatto analitico del primo ordine fra le due curve $C\gamma$ e $K\gamma$. Data la coppia A, A' di punti omologhi, la collineazione tangente K non è univocamente determinata; se K ne è un valore particolare, la più generale collineazione tangente è il prodotto $H.K$, dove H è una omologia speciale di S_n sottoposta solo alla condizione che il centro d'omologia sia il punto A di modo che vi sono ∞^n collineazioni tangenti relative ad A, A'. Un'altra definizione di K si trova passando allo spazio $S_n \times S'_n$ delle coppie (X, X'), dove X è un punto qualunque di S_n, X' un punto qualunque di S'_n. L'immagine in $S_n \times S'_n$ della corrispondenza C è una varietà ∞^n e lo stesso vale per l'immagine di una collineazione arbitraria K. Se e solo se K è una collineazione tangente a C nella coppia A, A', vi è nel punto (A, A') di $S_n \times S'_n$ un contatto ordinario fra le immagini di C e di K, il che implica, naturalmente, che $KA = A' = CA$. Scelta comunque, per ogni coppia A, A' una collineazione tangente K, la C risulta, nello spazio $S_n \times S'_n$, inviluppo delle ∞^n immagini delle collineazioni K. Abbreviando, possiamo dire che ogni corrispondenza C fra S_n ed S'_n è inviluppo di una famiglia ∞^n di corrispondenze collineari. Può darsi che C sia, in questo senso, inviluppo di una famiglia ∞^r di corrispondenze collineari, con $r < n$. Il caso più semplice è quello $r = 1$ di corrispondenze sviluppabili. Per una tale corrispondenza C, esiste in S_n uno strato Σ d'iperpiani tale che C trasforma collinearmente ogni iperpiano di Σ, ma questa proprietà non basta a carat-

terizzare le corrispondenze sviluppabili. Limitandoci per semplicità al caso che gli iperpiani di Σ non passano per un punto fisso, una corrispondenza sviluppabile trasforma il punto

$$x_0 A(t) + x_1 \frac{dA}{dt} + \ldots + x_{n-1} \frac{d^{n-1} A}{dt^{n-1}}$$

nel punto

$$x_0 A'(t) + x_1 \frac{dA'}{dt} + \ldots + x_{n-1} \frac{d^{n-1} A'}{dt^{n-1}},$$

dove i punti analitici A e A' sono funzioni arbitrarie di t.

Incidentalmente osservo che ho determinato tutte le corrispondenze fra S_3 e S'_3 che sono inviluppo di ∞^2 corrispondenze collineari.

5. Ritorniamo al problema descritto al n° 1 e poniamoci la domanda se esistono dalle corrispondenze C fra S_n e S'_n che siano deformazioni proiettive per più di uno strato. Per $n \geqq 3$, il numero di tali strati non può superare due. Per $n \geqq 4$, tutte le corrispondenze fra S_n e S'_n che sono deformazioni proiettive di due strati diversi si riducono, mediante trasformazioni collineari degli spazi S_n e S'_n, alle corrispondenze fra due S_n sovrapposti che adesso vado a descrivere. In uno spazio lineare S_{n+1} si scelga una superficie P non sviluppabile appartenente ad uno S_3; siano M e M' due punti fissi di questo S_3; sia ancora V uno spazio lineare a $n-3$ dimensioni contenuto nello S_{n+1} e senza punti comuni coll'S_3 di sopra. Infine, scegliamo dentro S_{n+1} un S_n non passante nè per la retta MM' nè per V. Ciò posto, otteniamo una corrispondenza C fra due spazi sovrapposti collo S_n come segue. Sia X un punto arbitrario di S_n. Lo spazio a $n-1$ dimensioni XMV interseca il nostro S_3 secondo una retta e passa quindi per un punto Z della superficie P. Vi è allora sulla retta XM un punto Y tale che la retta YZ incontri lo spazio ZV. Il punto X' d'intersezione della retta YM' col nostro S_n è l'immagine del punto X nella corrispondenza C. La superficie P contiene due famiglie σ_1 e σ_2 di curve asintotiche; proiettando queste curve dal centro MV (che è uno spazio a $n-2$ dimensioni) e intersecando collo S_n si ottengono in S_n due strati Σ_1 e Σ_2 d'ipersuperficie coniche il cui centro comune è lo spazio a $n-3$ dimensioni intersezione di S_n collo spazio MV. Si prova allora che C è deformazione proiettiva per ciascuno dei due strati Σ_1 e Σ_2. Se la superficie P è rigata, σ_1 essendo la famiglia delle generatrici, allora Σ_1 consta d'iperpiani, si ha cioè caso triviale rispetto a Σ_1. Se la superficie P è una quadrica, si ha caso triviale tanto rispetto a

Σ_1 quanto rispetto a Σ_2; vale a dire, in questo caso otteniamo delle trasformazioni C di S_n tali che per ogni punto passano due iperpiani che la C transforma collinearmente. La più generale corrispondenza godente della stessa proprietà si ottiene combinando una tale C con una trasformazione collineare di S_n.

6. Per $n \geqq 4$, non esistono altre corrispondenze fra S_n e S'_n che siano deformazioni proiettive per due strati diversi. Ma ve ne sono delle altre per $n=3$ e queste corrispondenze, intimamente legate colla deformazione proiettiva di superficie non rigate di S_3, hanno delle altre proprietà notevolissime, come vedremo nel seguito. Consideriamo la deformazione proiettiva di una superficie P non rigata di S_3 e indichiamo con P' l'immagine di P, che è una superficie non rigata di un S'_3. Per ogni coppia A, A' di punti omologhi di P, P', esistono ∞^1 collineazioni K che realizzano la deformazione proiettiva, tali cioè che, per ogni curva γ di P passante per A, si abbia nel punto A' contatto analitico fra le due curve $C\gamma$ e $K\gamma$. Data la coppia A, A', la collineazione K non è univocamente determinata; se K_0 ne è un valore particolare, la più generale K ha la forma HK_0, dove H percorre tutte le omologie speciali di centro A il cui piano d'omologia α è il piano tangente alla superficie P nel punto A. Risulta che, nonostante l'indeterminazione di K, i punti KX sono ben determinati per tutti i punti X appartenenti al piano α. Sia t una tangente a P nel punto A. Dirò che t è una *tangente di Cartan* per la deformazione proiettiva di P se, per ogni curva γ di P di cui t sia la tangente in A, si ha in A' contatto geometrico del terzo ordine fra le curve $C\gamma$ e $K\gamma$ (la scelta di K non importa). In generale, vi sono in ogni punto A di P due tangenti di Cartan e le curve di P che le toccano formano una rete coniugata che si dice rete R appartenente alla deformazione proiettiva di P; il luogo delle t consta di due congruenze R. (Non mi trattengo sulle proprietà caratteristiche ben note di una rete o congruenza R). Può darsi che non vi sia che una sola tangente di Cartan che è allora una tangente asintotica; chiamo asintotiche R_0 quelle che toccano le tangenti asintotiche di Cartan e congruenza R_0 la congruenza parabolica luogo di tali tangenti.

7. Ciò che si è detto al n° 6 sulla deformazione proiettiva di P è ormai classico, a differenza di ciò che segue. Scegliamo in ogni punto A di P una tangente t a P che descrive una congruenza L,

di cui P è una falda focale. Tale scelta determina una corrispondenza C fra S_n e S'_n nella quale l'immagine di un punto X qualunque di t è il punto KX, $K = K(A)$ essendo una collineazione che realizza la deformazione proiettiva di P. Si noti che C è ben determinata, per quanto le K non lo siano finora. Domandiamoci se è possibile di scegliere le K in modo che, per ogni punto A di S_n, K sia una collineazione tangente a C relativamente a tutti i punti della retta t corrispondente. Si trova che ciò ha luogo se e solo se, per ogni punto A di P, t è una tangente di Cartan per la deformazione proiettiva di P; inoltre, le K sono poi determinate univocamente.

8. Al n° 7 abbiamo visto che una deformazione proiettiva di una superficie non rigata P determina, in due modi differenti o in un sol modo una corrispondenza C fra S_n e S'_n che porta una congruenza L di S_n in una congruenza L' di S'_n; la congruenza L è quella R o R_0 associata classicamente alla deformazione proiettiva di P. Ora la C ha una proprietà che mi pare bellissima; essa è infatti una *trasformazione asintotica della congruenza* L nel senso che, scelta comunque una rigata Q dentro la congruenza L, e designando con Q' la rigata trasformata, la C trasforma ogni curva asintotica di Q in un'asintotica di S'_n. È naturale porsi la domanda se le congruenze R e R_0 siano le sole suscettibili di una trasformazione asintotica e se ogni trasformazione asintotica di una congruenza R o R_0 sia associata ad una deformazione proiettiva di una superficie non rigata in modo da noi descritto. Si trova che la risposta è positiva per le congruenze L che soddisfano alla condizione di possedere una (almeno) falda focale che non degeneri in una linea. Se questa condizione non è soddisfatta, esistono ancora delle transformazioni asintotiche delle congruenze lineari e di tutte le congruenze paraboliche di cui l'unica falda focale degenera in una linea, curva o retta. Non mi trattengo qui a descrivere geometricamente le trasformazioni asintotiche di tali congruenze eccezionali.

9. Ritornando a quel che si è detto al principio del n° 6, le corrispondenze fra S_3 e S'_3 che siano deformazioni proiettive di due strati distinti Σ_1 e Σ_2, oltre quelle descritte al n° 5, sono precisamente le trasformazioni asintotiche C di congruenze. Nel caso che C è associata ad una deformazione proiettiva di una superficie non rigata P, i due strati Σ_1 e Σ_2 si compongono di quelle rigate della

congruenza che toccano P lungo un'asintotica. Risulta che una deformazione proiettiva D di una superficie non rigata P è intimamente legata con due famiglie ∞^1 di deformazioni proiettive di superficie rigate, D essendo, in un senso che qui non preciserò, inviluppo di ciascuna delle due famiglie. Nel caso R_0 una delle due famiglie consta di deformazioni proiettive di superficie sviluppabili.

10. Veniamo infine allo studio generale delle corrispondenze C fra due spazi S_n e S'_n $(n \geqq 3)$ che siano deformazioni proiettive per *uno* strato Σ d'ipersuperficie di S_n. Se $n = 3$, lo strato Σ può consistere di superficie non sviluppabili. Si ottengono delle deformazioni proiettive di strati composti di superficie R o R_0, le prime dipendendo da 10 e le seconde da 9 funzioni arbitrarie di un argomento. Ricordo che una singola superficie R o R_0 dipende da 6, risp. da 5 funzioni arbitrarie di un argomento. Questi due tipi di deformazioni proiettive meritano senza dubbio uno studio più approfondito.

11. Eccettuato il caso triviale e quello accennato nel n° 10, che esiste solo per $n = 3$, le deformazioni proiettive di uno strato Σ non sono possibili che se Σ è uno strato che chiamerò *parabolico.* Le ipersuperficie di un tale strato sono *sviluppabili,* cioè inviluppi di ∞^1 iperpiani, sicchè si ha insomma una famiglia Φ ∞^2 d'iperpiani tangenti alle ipersuperficie di Σ. Ogni iperpiano ϱ_0 della famiglia Φ tocca un'ipersuperficie di Σ lungo uno $S_{n-2}\,\varrho_1$ e contiene uno $S_{n-3}\,\varrho_2$ lungo il quale ϱ_0 tocca l'inviluppo di tutta la famiglia ∞^2 Φ. Ora nel caso di uno strato parabolico, quando ci si muove lungo l'ipersuperficie dello strato, ϱ_1 descrive un'ente ∞^1 che tocca il suo inviluppo precisamente secondo il ϱ_2 predetto. Le cose diventano più chiare usando una trasformazione dualistica che trasforma Φ in una superficie Δ, le ϱ_0 nei punti di Δ, le ϱ_2 nei piani tangenti di Δ, le ipersuperficie dello strato Σ in una famiglia α di linee tracciate su Δ, le ϱ_1 nelle tangenti alle curve della famiglia α. Nel caso di uno strato parabolico, le linee della famiglia α sono linee *asintotiche* di Δ. La dimensione d dello spazio d'appartenenza di Δ sarà detta *classe* dello strato Σ. Si ha $2 \leqq d \leqq n$. Se $d = 2$, Δ è un piano, lo spazio ϱ_2 è fisso e Φ è la famiglia degli iperpiani passanti per ϱ_2. Se $d \geqq 3$, siano ϱ_3, $\varrho_4, \ldots, \varrho_d$ gli spazi a $n-4$, $n-5, \ldots, n-d-1$ dimensioni le cui trasformate dualistiche sono gli spazi a $3, 4, \ldots, d$ dimensioni osculatori alle curve della famiglia α; se $d = n$, ϱ_d è lo spazio vuoto e non esiste nessun punto comune a tutti gli iperpiani della fami-

glia Φ; se $d < n$, ϱ_d non è vuoto ed è l'intersezione di tutti gli iperpiani della famiglia Φ. Si può provare che gli spazi ϱ_d sono sempre ben determinati.

12. Adesso conviene ricordare che, data una corrispondenza qualunque, C fra S_n e S'_n e scelta, per ogni coppia A, A' di punti omologhi, una collineazione K tangente a C, esiste nella stella A una trasformazione $\varLambda$ che chiamo *k-linearizzante* e qui non descriverò geometricamente, in generale quadratica e razionale, ma non birazionale, che nel caso della deformazione proiettiva di uno strato è *un'omografia* della stella A, che può essere degenere. Data la coppia A, A' la K non è univocamente determinata e la $\varLambda$ ne dipende. In generale non è possibile di scegliere K in modo che $\varLambda$ risulti degenere in tal maniera che essa trasformi tutta la stella A nell'iperpiano ϱ_0. Per questo caso generale, il risultato è che ogni strato parabolico ammette delle deformazioni proiettive che dipendono da $2n+2$ funzioni arbitrarie di un argomento.

13. Rimane il caso in cui si può scegliere K in modo che $\varLambda x$ stia nell'iperpiano ϱ_0 per ogni retta x della stella A. Tal caso si divide in molti sottocasi fra cui taluni che sono possibili per ogni strato parabolico di una classe data, ed altri che chiamerò *speciali* e che non dipendono che da un certo numero di funzioni arbitrarie di un argomento, mentre gli strati parabolici di una classe $d \geqq 3$ data dipendono da una funzione arbitraria di due argomenti. Nei n[i] seguenti darò l'elenco di tutte le possibilità.

14. Nell'iperpiano ϱ_0 esiste una retta x passante per A e tale che $\varLambda x$ non stia nello spazio ϱ_1. Questo è caso speciale dipendente da $4n-3$ funzioni (arbitrarie di un argomento, il che ometterò a scrivere qui ed in seguito).

15. $\varLambda$ trasforma ϱ_0 (vale a dire l'insieme delle rette passanti per A e giacenti in ϱ_0) in ϱ_1, ma esiste nella stella A una retta x tale che $\varLambda x$ non stia in ϱ_1. Caso speciale dipendente da $4n-4$ funzioni.

16. In tutti i rimanenti casi $\varLambda x$ sta in ϱ_1 per tutte le rette della stella A. Si ha $n \geqq 4$. Qui importa tener conto della classe d dello strato Σ.

17. Ogni strato parabolico Σ di classe 2 ammette deformazioni proiettive del tipo considerato che dipendono da $2n-4$ funzioni.

18. Sia $d = 3$. Vi sono due possibilità:

(a) A trasforma ϱ_1 in $A\,\varrho_3$; (b) caso contrario. Ogni strato parabolico di classe 3 ammette deformazioni proiettive del tipo (a) che dipendono da $2n - 6$ funzioni. Il caso (b) è speciale e dipende da $2n - 1$ funzioni.

19. Sia $d = 4$. Vi sono tre possibilità:

(a) A trasforma ϱ_1 in $A\,\varrho_4$ (se $n = 4$, $A\,\varrho_1 = 0$); (b) A trasforma ϱ_1 in $A\,\varrho_3$, ma non in $A\,\varrho_4$; (c) A non trasforma ϱ_1 in $A\,\varrho_3$. Il caso (a) è impossibile se $n \geqq 4$; se $n \geqq 5$, ogni strato parabolico di classe 4 ammette deformazioni proiettive del tipo (a) che dipendono da $2n - 8$ funzioni. I casi (b) e (c) esistono per $n \geqq 4$, ma sono speciali; (b) dipende da $2n$, (c) da $2n + 1$ funzioni.

20. Sia $d = 5$. Vi sono quattro possibilità:

(a) A trasforma ϱ_1 in $A\,\varrho_5$ (se $n = 5$, $A\,\varrho_1 = 0$); (b) A trasforma ϱ_1 in $A\,\varrho_4$, ma non in $A\,\varrho_5$; (c) A trasforma ϱ_1 in $A\,\varrho_3$, ma non in $A\,\varrho_4$; (d) A non trasforma ϱ_1 in $A\,\varrho_3$. Il caso (a) è impossibile se $n = 5$; se $n \geqq 6$, ogni strato parabolico di classe 5 ammette deformazioni proiettive del tipo (a) che dipendono da $2n - 10$ funzioni. I casi (b), (c), (d) esistono per $n \geqq 5$, ma sono speciali; (b) dipende da $2n - 2$, (c) da $2n + 2$, (d) da $2n + 3$ funzioni.

21. Sia $d \geqq 6$. Cominciamo col caso che A trasformi ϱ_1 in $A\,\varrho_d$ (se $n = d$, $A\,\varrho_1 = 0$); tal caso è impossibile se $n = d$; invece, se $n > d$, ogni strato parabolico di classe d ammette tali deformazioni proiettive che dipendono da $2(n - d)$ funzioni.

22. Sia $d \geqq 6$ e supponiamo che esista un intero h tale che $4 \leqq h \leqq d - 1$ e che A trasformi ϱ_1 in $A\,\varrho_h$, ma non in $A\,\varrho_{h+1}$. Tali casi son tutti speciali e dipendono, per ogni h *impari*, da $2(n + d - h - 1)$ funzioni, per ogni h *pari* da $2(n + d - h - 2)$ funzioni.

23. Sia $d \geqq 6$ e supponiamo che A trasformi ϱ_1 in $A\,\varrho_3$, ma non in $A\,\varrho_4$. Questo è un caso speciale che dipende da $2n + 2d - 8$ funzioni.

24. Sia $d \geqq 6$ e supponiamo che A non trasformi ϱ_1 in $A\,\varrho_3$. Questo è un caso speciale che dipende da $2n + 2d - 7$ funzioni.