Eduard Čech

Quadriques osculatrices a centre donné et leur signification projective

Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Wrocław 7 (1952), 9 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501073

Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Wrocław

Volume 7 *1952* *Année VII*

Communication n° 1

EDUARD ČECH (Prague), ***Quadriques osculatrices à centre donné et leur signification projective***

(présentée par BRONISŁAW KNASTER et WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI le 25 septembre 1952 à la séance de la Classe des Sciences mathématiques et naturelles)

Cette communication est un exposé des résultats énoncés dans ma conférence faite au VI Congrès Polonais de Mathématique à Varsovie, le 21 septembre 1948 *.

1. Soient, dans l'espace affine A_{n+1} à $n+1$ dimensions, O un point fixe et H une hypersurface donnée. Introduisons dans A_{n+1} un système de coordonnées linéaires $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dont l'origine est situé au point O. Si l'on suppose que O n'appartient pas à H, on voit sans peine que l'équation de H peut s'écrire dans la forme

$$f(x)=1, \tag{1.1}$$

$f(x)=f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ étant une fonction homogène de degré 2, c'est-à-dire qui satisfait à l'identité

$$f(tx_0, tx_1, \ldots, tx_n)=t^2 f(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Supposons que f possède des dérivées partielles du second ordre continues et posons, pour abréger,

$$f_i=\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i=0,1,\ldots,n),$$

$$f_{ik}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \qquad (i,k=0,1,\ldots,n).$$

* Voir le Supplément au volume XXII des Annales de la Société Polonaise de Mathématique, Cracovie 1950, p. 17.

Notons les relations, bien connues, d'Euler:

$$\sum_i f_i x_i = 2f, \tag{1.2}$$

$$\sum_k f_{ik} x_k = f_i, \tag{1.3}$$

$$\sum_{ik} f_{ik} x_i x_k = 2f, \tag{1.4}$$

toutes les sommations allant de 0 à n.

Pour chaque point $x=(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de l'hypersurface H, il existe une hyperquadrique $Q=Q(x)$ bien déterminée dont O est le centre et qui a au point x un contact du second ordre avec l'hypersurface H.

Nous allons montrer que, $y=(y_0, y_1, \dots, y_n)$ étant un point avec les coordonnées courantes, l'équation de Q a la forme

$$\sum_{ik} f_{ik} y_i y_k = 2, \tag{1.5}$$

dont la simplicité est remarquable.

La démonstration est tout-à-fait simple. Pour tous les points de l'hypersurface H, on a l'identité (1.1) et les identités suivantes qui s'en déduisent par différentiation:

$$\sum_i f_i dx_i = 0, \tag{1.6}$$

$$\sum_i f_i d^2x_i + \sum_{ik} f_{ik} dx_i dx_k = 0. \tag{1.7}$$

Il s'agit seulement de vérifier que l'expression

$$\sum_{ik} f_{ik} (x_i + dx_i + \frac{1}{2} d^2x_i + \dots)(x_k + dx_k + \frac{1}{2} d^2x_k + \dots) \tag{1.8}$$

ne diffère du nombre 2 que par une quantité infiniment petite d'ordre supérieur à 2. Si l'on néglige de telles quantités, l'expression (1.8) prend la forme

$$\sum_{ik} f_{ik} x_i x_k + 2\sum_{ik} f_{ik} x_i dx_k + \sum_{ik} f_{ik} x_i d^2x_k + \sum_{ik} f_{ik} dx_i dx_k, \tag{1.9}$$

Or, il suffit de vérifier que l'expression (1.9) est identiquement égale à 2. En vertu de (1.3) et (1.4), l'expression (1.9) est égale à

$$2f + 2\sum_i f_i dx_i + \sum_i f_i d^2x_i + \sum_{ik} f_{ik} dx_i dx_k,$$

ce qui est bien égal à 2 en vertu de (1.1), (1.6) et (1.7).

R e m a r q u e. Si l'on suppose pour un moment que f possède aussi des dérivées partielles du 3-me ordre continues, on prouve sans peine que l'expression (1.8) ne diffère de

$$2 - \frac{1}{2} \sum_{ijk} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \, dx_i dx_j dx_k$$

que d'une quantité infiniment petite d'ordre supérieur à 3. Il s'ensuit que l'intersection de $Q(x)$ avec H a un point triple en x, les tangentes au point triple satisfaisant à l'équation

$$\sum_{ijk} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \, dx_i dx_j dx_k = 0. \tag{1.10}$$

2. On peut se proposer beaucoup de problèmes sur la famille de quadriques $\{Q(x)\}$ attachées au divers points d'une hypersurface H et dont on peut indiquer, en faisant usage de l'équation (1.5) de $Q(x)$, des solutions presque banales, mais dont les démonstrations usuelles seraient incomparablement plus compliquées. Il suffit d'indiquer quelques exemples que le lecteur multipliera aisément.

I. Soit p une droite fixe passant par O. Cherchons les hypersurfaces H telles que, pour chaque point x de H, la droite p soit située sur le cône asymptotique de $Q(x)$. On peut choisir le système de coordonnées de façon que l'on ait $x_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ pour tous les points de p. D'après (1.5), la condition est $f_{00} = 0$. Donc, les hypersurfaces cherchées sont données par l'équation

$$x_0 F_1(x_1, \ldots, x_n) + F_2(x_1, \ldots, x_n) = 1, \tag{2.1}$$

la fonction F_1 étant homogène de degré 1 et la fonction F_2 l'étant de degré 2.

II. Soient p et q deux droites fixes différentes, passant par O. Cherchons les hypersurfaces H telles que, pour chaque point x de H, les droites p et q soient mutuellement conjuguées par rapport au cône asymptotique de $Q(x)$. On peut choisir le système de coordonnées de façon que l'on ait $x_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ pour les points de p et $x_j = 0$ $(0 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq 1)$ pour les points de q. D'après (1.5), la condition est $f_{01} = 0$. Donc, les hypersurfaces cherchées sont données par l'équation

$$x_0 F_1(x_2, \ldots, x_n) + x_1 G_1(x_2, \ldots, x_n) = 1, \tag{2.2}$$

les deux fonctions F_1 et G_1 étant homogènes de degré 1.

III. Soit P un point fixe différent de O. Cherchons les hypersurfaces H telles que, pour chaque point x de H, la quadrique $Q(x)$ passe par P. On peut choisir le système de coordonnées de façon que l'on ait $x_0 = 1$ et $x_i = 0$ $(1 \leqslant f \leqslant n)$ au point P. D'après (1.5), la condition est $f_{00} = 2$. Donc, les hypersurfaces cherchées sont données par l'équation

$$x_0^2 + x_0 F_1(x_1, \ldots, x_n) + F_2(x_1, \ldots, x_n) = 1, \tag{2.3}$$

la fonction F_1 étant homogène de degré 1 et la fonction F_2 l'étant de degré 2.

IV. Soient p une droite fixe passant par O et π un hyperplan fixe passant aussi par O. Cherchons les hypersurfaces H telles que, pour chaque point x de H, π soit l'hyperplan diamétral de $Q(x)$ conjugué à la direction de p.

Si l'on suppose d'abord que la droite p n'est pas située sur l'hyperplan π, on peut choisir le système de coordonnées de façon que l'on ait $x_0=0$ pour les points de π et $x_i=0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ pour ceux de p. La condition est alors $f_{0i}=0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et les hypersurfaces cherchées sont données par l'équation

$$c x_0^2 + F_2(x_1, \ldots, x_n) = 1, \tag{2.4}$$

où c est une constante et F_2 est une fonction hemogène de degré 2.

Si, au contraire, la droite p est contenue dans l'hyperplan π, de manière qu'il s'agit de trouver les hypersurfaces H telles que, en chaque point x de H, le cône asymptotique de $Q(x)$ contienne p et touche π le long de p, on peut choisir le système de coordonnées de manière que l'on ait $x_1=0$ pour les points de π et $x_i=0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ pour ceux de p. La condition est alors $f_{0j}=0$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$ où $j \neq 1$ et les hypersurfaces cherchées sont données par l'équation

$$c x_0 x_1 + F_2(x_1, \ldots, x_n) = 1, \tag{2.5}$$

où c est une constante et F_2 est une fonction homogène de degré 2.

V. Soient P un point fixe différent de O et π un hyperplan fixe ne passant pas par O. Cherchons les hypersurfaces H telles que, pour chaque point x de H, π soit l'hyperplan polaire de P par rapport à $Q(x)$.

Si l'on suppose d'abord que l'hyperplan π n'est pas parallèle à la droite OP (ce qui signifie que la droite OP n'est pas située sur le cône asymptotique de $Q(x)$), on peut choisir le système de coordonnées de façon à avoir $x_0=a\neq 0$ $(a=\text{const.})$, $x_i=0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ au point P et $x_0=1$ aux points de π. La condition est alors

$$f_{00}=\frac{2}{a} \qquad \text{et} \qquad f_{0i}=0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

et les hypersurfaces cherchées sont données par l'équation (2.4) où $c=1/a$.

Si l'hyperplan π est parallèle à la droite OP, on peut choisir le système de coordonnées de façon que $x_0=1$, $x_i=0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ au point P et $x_1=1$ aux points de π. La condition est alors

$$f_{01}=2 \qquad \text{et} \qquad f_{0i}=0 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant j \leqslant n \quad \text{où} \quad j \neq 1$$

et les hypersurfaces cherchées sont données par l'équation (2.5) où $c=2$.

Il est clair que l'on peut aisément former d'autres exemples. Aussi, le lecteur trouvera sans peine des constructions géométriques pour les hypersurfaces définies par les équations (2.1)-(2.5).

3. À la page 153 du livre G. FUBINI et E. ČECH, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces* (1931), j'ai introduit la notion de *correspondance polaire.* Pour la commodité du lecteur, je reproduis ici ce qui est dit loco cit. (où je me suis limité au cas $n=2$). Soit P_n l'espace projectif à n dimensions; introduisons-y un système $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de coordonnées homogènes. À chaque point $x=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ d'une région Ω de P_n, attachons un hyperplan ξ de P_n ne passant pas par x, de manière que

$$(3.1) \qquad x\,|\,\xi \neq 0 \quad \text{où} \quad x\,|\,\xi = x_0\xi_0 + x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n.$$

Nous obtenons ainsi ce que nous appellerons une *correspondance réciproque* dans P_n. Fixons, pour chaque position du point x dans Ω, le facteur arbitraire de coordonnées homogènes de x et de ξ et introduisons des coordonnées curvilignes $u=(u_1, \ldots, u_n)$ de manière que les coordonnées de x et celles de ξ soient des fonctions bien déterminées de u dont nous supposerons l'existence et la continuité des dérivées partielles du second ordre. Supposons aussi que

$$(3.2) \qquad \left[x\,\frac{\partial x}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x}{\partial u_n}\right] \neq 0,$$

de manière que, localement, on ait une correspondance biunivoque entre les valeurs des paramètres u et les positions correspondantes des points x. Si l'on a aussi

$$(3.3) \qquad \left[\xi\,\frac{\partial \xi}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial \xi}{\partial u_n}\right] \neq 0,$$

on dira que la correspondance réciproque est *régulière.*

Ceci étant, comme l'hyperplan ξ ne contient pas le point x, on peut déterminer des fonctions l_r $(1 \leqslant r \leqslant n)$ des paramètres u de façon que l'hyperplan ξ soit déterminé par les points

$$(3.4) \qquad \frac{\partial x}{\partial u_r} + l_r x \qquad (1 \leqslant r \leqslant n).$$

On voit sans peine que la forme de Pfaff

$$(3.5) \qquad \lambda = \sum_{r=1}^{n} l_r\, du_r$$

est *intrinsèque,* c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix des coordonnées curvilignes u. Au contraire, λ n'est pas *invariante* (au sens de FUBINI), puisqu'elle dépend du choix du facteur arbitraire des coordonnées homogènes de x. Si l'on remplace x par ϱx, on voit sans peine qu'il faut remplacer λ par

$$(3.6) \qquad \lambda^* = \lambda - \frac{d\varrho}{\varrho}.$$

On dit que la correspondance réciproque est *polaire*, si l'on peut choisir le facteur des coordonnées homogènes de x de façon que la forme de Pfaff λ soit identiquement égale à zéro. Si l'on ne spécifie pas ce facteur, il résulte de (3.6) que la correspondance réciproque est polaire, si, et seulement si, λ est une différentielle exacte.

On voit que la notion de correspondance polaire est une géométrisation de la notion de choix du facteur des coordonées homogènes d'un point x décrivant une région Ω dans l'espace P_n: le choix fait, on a une correspondance polaire dans laquelle à chaque point x correspond l'hyperplan contenant tous les points dx obtenus par différentiation de x. Réciproquement, la correspondance polaire étant donnée, le choix correspondant du facteur de x est bien déterminé à un facteur *constant* près.

A l'endroit précité, j'ai donné aussi (pour $n=2$) une interprétation géométrique de la notion de correspondance polaire, que je reproduis ici (pour n quelconque) sans démonstration. Étant donné une correspondance réciproque qui attache au point x l'hyperplan ξ, si le point x se déplace, en partant de sa position initiale, dans la direction $[x\, dx]$, le plan correspondant ξ touche son enveloppe suivant l'espace à $n-2$ dimensions $[\xi\, d\xi]$. Si l'on attache à la droite $[x\, dx]$ de l'étoile x l'hyperplan de la même étoile contenant l'espace $[\xi\, d\xi]$, on obtient une corrélation R. Or, la corrélation R est polaire (dans le sens usuel de la géométrie algébrique), si, et seulement si, la correspondance entre x et ξ est polaire (au sens défini plus haut).

4. Dans le cas où $n=3$, on peut indiquer une propriété intéressante (et caractéristique) des correspondances polaires. Si le point x décrit une surface S et si, pour chaque position de x sur S, l'on choisit une droite p située sur le plan tangent à S en x, alors, pendant que le point x décrit la surface S, la droite p décrit une congruence qui s'appelle *harmonique* à S lorsqu'il existe sur S un réseau conjugué correspondant à deux familles de développables de la congruence.

On sait (voir par exemple G. Fubini et E. Čech, *Geometria proiettiva differenziale*, I, p. 146, ou bien l'*Introduction* précitée, p. 92) que la congruence est harmonique à S, si, et seulement si, elle est engendrée par la droite $\left[\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}\right]$ pour un choix convenable du facteur du point $x=x(u,v)$ de la surface S. Il en résulte sans peine ceci:

Soit une correspondance polaire dans P_3 attachant au point x le plan ξ. Choisissons une surface arbitraire S et attachons à chaque point x de S la droite d'intersection de ξ avec le plan tangent à S en x. Alors cette droite décrit, pour chaque choix de la surface S, une congruence harmonique à S.

5. Soit une correspondance polaire dans P_n attachant au point x de la région Ω l'hyperplan ξ. On peut donc choisir le facteur arbitraire de x de façon que, pour chaque choix de x, l'hyperplan correspondant ξ contienne tous les

points dx obtenus de x par différentiation. On peut déterminer une fonction homogène

$$f(x)=f(x_0,x_1,\ldots,x_n)$$

de degré $g\neq 0$ arbitrairement préscrit de manière à avoir l'identité (1.1) pour le choix donné du facteur arbitraire de x. Or, par différentiation de (1.1), on obtient (1.6), d'où il résulte que l'on peut poser

$$\xi=(f_0,f_1,\ldots,f_n). \tag{5.1}$$

Réciproquement, si l'on choisit d'une manière arbitraire une fonction homogène $f(x)$ de degré $g\neq 0$, on obtient évidemment une correspondance polaire en attachant au point x l'hyperplan (5.1).

En particulier, il se peut que f soit un *polynôme* homogène de degré g. On doit alors supposer que le point x est situé en dehors de l'hypersurface algébrique donnée par l'équation $f=0$; la correspondance polaire en question attache alors au point x l'hyperplan ξ qui est, au sens ordinaire de la géométrie algébrique, la *polaire linéaire* du point x par rapport à l'hypersurface $f=0$.

On peut considérer le P_n projectif, dans lequel les $x_0,x_1,\ldots,x_n$ sont des coordonnées *homogènes*, comme l'hyperplan à l'infini de l'espace affine A_{n+1} à $n+1$ dimensions, dans lequel les $x_0,x_1,\ldots,x_n$ sont des coordonnées *non homogènes*. Dans A_{n+1}, l'équation (1.1) définit une hypersurface H à l'aide de laquelle on peut décrire très simplement la correspondance polaire envisagée (voir *Introduction*, loco cit.): le point x de P_n, joint avec l'origine O, détermine une droite qui rencontre H dans un point déterminé, et l'hyperplan tangent à H en ce point rencontre P_n dans l'hyperplan ξ correspondant à x.

En remplaçant $f(x)$ par $[f(x)]^{2/g}$, on peut admettre que *le degré de la fonction homogène f est égal à* 2, ce que nous ferons dorénavant.

En considérant toujours P_n comme l'hyperplan à l'infini de l'espace affine A_{n+1}, envisageons la quadrique $Q(x)$ de l'espace A_{n+1} donnée par l'équation (1.5). L'espace P_n rencontre $Q(x)$ dans la quadrique $q(x)$ dont l'équation en coordonnées *homogènes* $y_0,y_1,\ldots,y_n$ est

$$\sum_{ik} f_{ik}y_iy_k=0. \tag{5.2}$$

Nous allons indiquer une signification géométrique *projective* de la quadrique $q(x)$ de P_n, que nous appellerons la *quadrique fondamentale* de la correspondance polaire (correspondant au couple initial x,ξ). Remarquons que, tandis que la quadrique $Q(x)$ de l'espace affine A_{n+1} est toujours réelle, la quadrique $q(x)$ de l'espace projectif P_n ne contient que des points imaginaires lorsque $Q(x)$ est un ellipsoïde. Ce qui est toujours réel, c'est la polarité (ordinaire) par rapport à $q(x)$, et c'est précisement cette polarité dont nous allons indiquer la propriété géométrique en question (le lecteur vérifiera sans peine que cette propriété suffira pour caractériser $q(x)$).

La correspondance polaire donnée attache au point x l'hyperplan aux coordonnées

$$f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x). \tag{5.3}$$

Il résulte de (1.3) que (5.3) est aussi l'hyperplan polaire de x par rapport à $q(x)$. Or, la correspondance polaire donnée attache à un point $x+dx$ infiniment voisin à x l'hyperplan aux coordonnées

$$f_0(x+dx), \quad f_1(x+dx), \quad \ldots, \quad f_n(x+dx) \tag{5.4}$$

et nous allons voir que (5.4) coïncide, en négligeant des quantités infiniment petites du second ordre, avec l'hyperplan polaire de $x+dx$ par rapport à $q(x)$. En effet, il résulte de (1.3) que, à infiniment petits du second ordre près, on a pour $0 \leqslant r \leqslant n$

$$f_r(x+dx) = f_r(x) + \sum_{s=0}^{n} f_{rs}(x)\, dx_s = \sum_{s=0}^{n} f_{rs}(x) \cdot (x_s + dx_s).$$

Les exemples des problèmes I, II et IV du n° 2 peuvent être interprétés comme des problèmes sur la famille des quadriques fondamentales d'une correspondance polaire et on peut aisément formuler et résoudre d'autres problèmes de ce genre. Par exemple, il résulte de (2.1) que la correspondance polaire dans P_n, la plus générale qui jouisse de la propriété que toutes les quadriques fondamentales passent par le point fixe $(1,0,\ldots,0)$ attache au point $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ l'hyperplan $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ où

$$\xi_0 = F_1 \quad \text{et} \quad \xi_i = x_0 \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

F_r ($r=1$ et 2) étant ici une fonction homogène de degré r des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soit φ un polynôme homogène de degré $g \geqslant 3$ en $x_0, x_1, \ldots, x_n$; l'équation $\varphi = 0$ définit dans P_n une hypersurface algébrique h de degré g. Nous savons qu'on obtient une correspondance polaire dans P_n en attachant à chaque point situé en dehors de h son hyperplan polaire ξ par rapport à h, dont l'équation est

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_r} y_r = 0$$

en coordonnées courantes $y_0, y_1, \ldots, y_n$. D'après la définition usuelle de géométrie algébrique, l'équation de la quadrique polaire η de x par rapport à h est

$$\sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_r \partial x_s} y_r y_s = 0.$$

L'équation

$$\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_r\partial x_s}y_r y_s-\lambda\left(\sum_{r=0}^{n}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_r}y_r\right)^2=0 \tag{5.5}$$

définit un faisceau de quadriques; pour $\lambda=0$, on a la quadrique η et pour $\lambda=\infty$, l'hyperplan ξ^2 (ξ compté deux fois). On vérifie sans peine que, pour $\lambda=(g-1):g$, (5.5) définit le cône ζ au sommet x contenant l'intersection de la quadrique η avec l'hyperplan ξ. Or, la quadrique $q=q(x)$ est donnée par l'équation (5.2) où $f=\varphi^{2/g}$.

Il en résulte aisément que la quadrique q est donnée par l'équation (5.2) si $\lambda=g:(g-2)$. On en déduit que la quadrique q appartient au faisceau (5.5) et y est déterminée par le rapport anharmonique

$$(\eta,\xi^2,\zeta,q)=\frac{(g-1)(g-2)}{g^2}.$$