Eduard Čech

Théorie générale des variétés et de leurs théoremes de dualité

Ann. of Math. (4) 34 (1933), 621-730

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501023

THÉORIE GÉNÉRALE DES VARIÉTÉS ET DE LEURS THÉORÈMES DE DUALITÉ[1].

Par EDUARD ČECH.

La topologie combinatoire a fait dans les dernières années des progrès très remarquables et elle constitue, tant intrinsèquement qu'au point de vue des applications, un des plus importants chapitres de la topologie. Ceci est vrai tout particulièrement pour la théorie de l'homologie; c'est en effet la branche la plus avancée de la topologie combinatoire[2]. D'autre part, la topologie générale, fondée sur la théorie abstraite des ensembles, constitue désormais un édifice immense occupant une des places centrales dans le vaste champ des mathématiques modernes.

A mon avis, on peut espérer d'arriver à étendre d'une manière inattendue le champ de recherches topologiques si on réussit à approcher mutuellement le plus près possible les méthodes combinatoires et celles de la théorie générale des ensembles. Le premier pas essentiel et général dans cette direction et qui a déjà eu des conséquences très remarquables a été fait par M. Vietoris qui a réussi à fonder la théorie de l'homologie dans chaque espace métrique et compact[3]. Néanmoins il y a encore un profond abîme entre les recherches combinatoires et celles abstraites dans la topologie. Mon opinion est *d'une part* que la topologie combinatoire doit complètement abandonner l'usage des polyèdres, c'est-à-dire des figures dont la nature topologique (au sens d'une description axiomatique complète) nous restera probablement pour longtemps cachée; *d'autre part* qu'il est impossible d'étudier profondément déjà p. ex. la topologie des sous-ensembles de l'espace ordinaire si on s'obstine à négliger systématiquement les notions combinatoires.

Un des plus beaux sujets de la topologie combinatoire est sans doute la théorie des *variétés* (Mannigfaltigkeiten, manifolds). Or toutes les définitions connues[4] d'une variété V supposent ou que V soit homéomorphe à un polyèdre ou du moins que chaque point de V possède un entourage[5] homéomorphe à un

[1] Received February 15, 1933. — J'ai exposé quelques résultats de ce Mémoire dans une communication au Congrès Int. de Zurich (septembre 1932) ainsi que dans un cycle de quatre conférences que j'ai faites à l'Université de Varsovie (novembre 1932).

[2] Une exposition complète de cette théorie se trouve dans l'excellent livre de M. Lefschetz, Topology, Amer. Math. Soc., Coll. Publ., vol. 12, 1930.

[3] Math. Annalen, 97, 1927, pp. 454—472. Cf. déjà L. E. J. Brouwer, Math. Annalen, 72, 1912, pp. 422—425.

[4] La plus générale de ces définitions est celle de MM. Lefschetz et Flexner (v. Proc. Nat. Acad. Sci., 16, 1930, pp. 530—533, et Annals of Math., 32, 1931, pp. 393—406 et 539—548).

[5] Un entourage d'un point a ou d'un ensemble A est un ensemble ouvert contenant a ou A.

logique de la notion de variété[6]. Dans le présent Ouvrage, je donne justement une telle définition comprenant du reste, comme on pourrait le démontrer sans difficulté, toutes les définitions connues comme des cas particuliers.

Je m'appuie dans ce qui suit très essentiellement sur mon Mémoire *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque*[7] dont la connaissance est indispensable au lecteur; je le cite par l'abréviation *Homologie.* Outre ce quit a été exposé dans l'*Homologie,* je ne suppose de la topologie *combinatoire* que la connaissance des nombres de Betti d'un simplexe. Je suppose d'ailleurs quelques connaissances de la topologie générale, en particulier de la théorie de la dimension (v. n° 2.2). Relativement à l'*Homologie,* quatre remarques sont nécéssaires:

I. Pour un (p, R)-cycle, j'emploie ici la courte notation C^p (p. ex.) au lieu de $\{C^p(\mathfrak{U})\}$ (*Homologie,* II, 20). Donc C^p est l'ensemble de tous les $C^p(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{U}$ parcourant tous les réseaux dans R.

II. La famille fondamentale de réseaux (*Homologie,* II, 1) est dans ce qui suit toujours la famille de tous les réseaux ouverts (v. *Homologie,* III, 2).

III. La notion d'un *affinement normal* (*Homologie,* II, 15) dépend essentiellement des deux ensembles A et α (v. l. c.); je parle donc toujours explicitement d'un *affinement normal rel. aux cycles mod α dans A* (l'attribut dans A sera omis si $A = R$; l'attribut mod α sera omis si $\alpha = 0$).

IV. Dans ce qui suit, les coefficients de toutes les chaînes appartiennent à l'ensemble $\mathfrak{R}$ des *nombres rationnels* (v. *Homologie,* I, 1 et II, 3); du reste, toute la théorie vaut sans aucune modification si $\mathfrak{R}$ désigne l'ensemble des entiers réduits mod p, p étant un nombre *premier*[8] (v. *Homologie,* V, 1).

Le présent Ouvrage est divisé en huit Chapitres.

Au Chap. I, j'introduis successivement les axiomes A_1 (n° 1), A_2 (n° 2), A_3 (n° 3) et A_4 (n° 7). Les deux axiomes A_1 et A_2 sont vérifiés en particulier si R est un espace *métrique et compact.* Bien que ce soit le cas le plus important, je n'ai pas voulu introduire explicitement la métrisabilité de R, d'autant mieux que cette hypothèse ne simplifie guère les démonstrations. On pourrait se passer entièrement de l'ensemble S introduit dans l'axiome A_3, en remplaçant A_1 et A_3 par l'axiome unique que $R - S$ soit un espace polyèdre. *Il n'existe donc jusqu'à présent aucune définition purement topo-*

---

[6] Après avoir terminé cet Ouvrage, j'ai pris connaissance d'un manuscript de M. Lefschetz intitulé *On generalized manifolds* (à paraître dans le Amer. Journal of Math.). L'illustre géomètre americain y étudie, avec une méthode entièrement différente, presque la même notion. Je voudrais insister sur une différence essentielle: pour démontrer le théorème de dualité entre les p-cycles et les $(n-p)$-cycles $(0 \leqq p \leqq n - p \leqq n)$, je n'ai besoin d'aucun axiome relatif aux cycles de dimensions $< n - p - 1$.

[7] Fund. Math., 19, 1932, pp. 149—183.

[8] J'espère de revenir ailleurs sur la possibilité d'étendre ma théorie des variétés au cas d'autres domaines $\mathfrak{R}$.

localement bicompact[9]; ce procédé, logiquement équivalent à celui du texte, introduirait peut-être quelques difficultés d'exposition. L'axiome A_4 dit que la *dimension* n (au sens de Menger-Urysohn) de l'espace $R-S$ est finie (et >0). En appliquant le *allgemeiner Zerlegungssatz* de M. Menger[10] je prouve au n° 8 que, un réseau $\mathfrak{Z}$ étant donné, on peut définir une famille complète de réseaux « *commodes* » $\mathfrak{U}$ jouissant de la propriété suivante: chaque $(k, \mathfrak{U})$-simplexe τ^k est situé dans un certain sens sur un $(h, \mathfrak{Z})$-simplexe σ^h[11] de manière qu'on ait toujours $k \leqq n-h$. On voit que les σ^h sont pour notre variété abstraite ce que les faces sont pour une variété polyèdrale (à un σ^h correspondant une $(n-h)$-face du polyèdre).

Au Chap. II, j'introduis successivement les axiomes B (n° 9), D_1 (n° 11), D_2 (n° 12), E (n° 13) et F (n° 16) relatifs à la manière dont se comportent les cycles à n ou à $n-1$ dimensions de l'espace $R-S$. A l'aide de ces axiomes, on démontre (n° 17) l'existence d'un (n, R)-cycle G^n mod S, recouvrant tout l'espace R et appelé le *cycle principal.* En considérant un réseau $\mathfrak{Z}$ et les réseaux commodes $\mathfrak{U}$ relatifs, on attache (n° 19) à chaque $(0, \mathfrak{Z})$-simplexe σ^0 une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $K^n(\sigma^0, \mathfrak{U})$ située dans σ^0 de manière que la somme de tous les K^n soit égale à $G^n(\mathfrak{U})$. Successivement, on attache alors à chaque $(h, \mathfrak{Z})$-simplexe σ^h une $(n-h, \mathfrak{U})$-chaîne $K^{n-h}(\sigma^h, \mathfrak{U})$ située dans σ^h de manière que *les relations d'incidence entre les* σ^h *soient duelles de celles entre les* $K^{n-h}(\sigma^h, \mathfrak{U})$. On voit déjà que le théorème de dualité subsiste entre les $(p, \mathfrak{Z})$-chaînes et entre les $(n-p, \mathfrak{U})$-*chaînes élémentaires,* c'est-à-dire de la forme $\sum c_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$. Ce théorème de dualité n'a d'ailleurs encore aucune signification géométrique et on doit encore vaincre trois différentes difficultés:

α. On doit prouver que l'on peut s'arranger de façon que $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \neq 0$.

β. On doit prouver que, C^{n-p} étant un $(n-p, R)$-cycle, $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ est homologue à une chaîne élémentaire.

γ. On doit prouver que si la chaîne élémentaire $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ est homologue à zéro, il existe une $(n-p+1)$-chaîne *élémentaire* $D^{n-p+1}(\mathfrak{U})$ telle que $D^{n-p+1}(\mathfrak{U}) \rightarrow C^{n-p}(\mathfrak{U})$[12].

Pour vaincre les difficultés α, β et γ, on a besoin de nouveaux axiomes (le nombre de ces axiomes croit avec p; pour $p=0$ aucun nouvel axiome n'est plus nécessaire).

La difficulté α est résolue au Chap. III (n° 25) à l'aide des axiomes G^k (v. n° 21), où $n-p \leqq k \leqq n-1$. L'axiome G^k dit que, dans $R-S$, les petits cycles à k dimensions sont ~ 0.

---

[9] Tous les axiomes ultérieurs se rapportent uniquement à l'espace $R-S$.

[10] C'est peut-être la première application de ce théorème très important à mon avis.

[11] τ^k est d'espèce σ^h dans la terminologie du texte (v. n° 8.3).

[12] En réalité, je démontrerai un énoncé un peu plus compliqué que γ.

La difficulté β est résolue au Chap. IV (n° 31) à l'aide des axiomes G^k $(n-p \leqq k \leqq n-1)$ et des nouveaux axiomes H^k (v. n° 27), où $\max(0, n-p-1) \leqq k \leqq n-2$. La démonstration est très compliquée et presque entièrement combinatoire.

La difficulté γ est résolue au Chap. V (n° 44); on n'a plus besoin d'aucun nouvel axiome. La démonstration est très analogue à celle du Chap. IV.

Au Chap. VI, j'introduis (n° 56) l'indice de Kronecker d'un couple de cycles dont les dimensions sont resp. p et $n-p$. Cette théorie est complète à l'exception de la loi commutative que je démontrerai dans un Mémoire qui fera suite au présent, et où j'exposerai la théorie complète des *intersections des cycles* sur une variété abstraite.

Au Chap. VII, je démontre le théorème général de dualité dans une variété abstraite; pour une variété polyèdrale, c'est la formule (7), p. 142 de la *Topology* de M. Lefschetz.

Au Chap. VIII je prouve d'abord que les axiomes $G^k \left(0 \leqq k \leqq \frac{n-1}{2}\right)$ et $H^k \left(0 \leqq k \leqq \frac{n}{2}-1\right)$ sont des conséquences des autres axiomes. Ensuite, je généralise à mes variétés quelques autres théorèmes de dualité (théorèmes de Poincaré et de MM. Alexander, Lefschetz et Pontrjagin).

I.

1. Axiome A_1: *L'espace R est bicompact*[13]. Cela signifie que de chaque famille $\mathfrak{F}$ de sous-ensembles ouverts on peut extraire une famille finie recouvrant R (= réseau dans R).

1.1. *Un sous-ensemble A de R est bicompact si et seulement si A est fermé dans R.*

Démonstration. Supposons en premier lieu que $A = \bar{A}$. Soit $\mathfrak{F}_0$ un recouvrement de A. A chaque $U_0 \in \mathfrak{F}_0$ attachons un ensemble U ouvert dans R et tel que $U_0 = U \cdot A$; en ajoutant $R - A$ à ces ensembles U, on obtient un recouvrement $\mathfrak{F}$ de R. L'espace R étant bicompact, il existe un recouvrement fini $\mathfrak{F}_1$ extrait de $\mathfrak{F}$. Les $U_0 = U \cdot A$, où $U \in \mathfrak{F}_1$, forment un recouvrement fini de A extrait de $\mathfrak{F}_0$. Supposons en second lieu que l'ensemble $A \subset R$ soit bicompact. Alors $A = \bar{A}$ (v. Alexandroff et Urysohn, l. c. sub [13]), p. 47, corollaire 1).

1.2. *L'espace R est normal.* Cela signifie que, U étant un entourage d'un sous-ensemble fermé A de R, il existe un entourage V de A tel que $V \Subset U$.

Pour la démonstration, v. Alexandroff et Urysohn, l. c., p. 26, I.

---

[13] L. Vietoris, *Stetige Mengen*, Monatshefte f. Math. u. Phys., t. 31, 1921; P. Alexandroff et P. Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verhandelingen Akad. Amsterdam, 1929.

1.3. *Chaque réseau* (*dans* R) $\mathfrak{U}$ *possède un affinement* $\mathfrak{V}$ *jouissant de la propriété suivante: A chaque sommet* V *de* $\mathfrak{V}$ *on peut attacher un sommet* U *de* $\mathfrak{U}$ *de manière que non seulement* $V \subset U$ *mais aussi* $V' \subset U$ *pour chaque sommet* V' *de* $\mathfrak{V}$ *tel que* $VV' \neq 0$.

Démonstration. Soient U_i $(1 \leq i \leq m)$ les sommets de $\mathfrak{U}$. D'après un lemme de M. Menger[14] on peut trouver des ensembles ouverts U_i' $(1 \leq i \leq m)$ tels que $U_i' \Subset U_i$, $\sum_1^m U_i' = R$. A chaque point a de R attachons un entourage V si petit que 1° $a \in U_i'$ entraîne $V \subset U_i'$; 2° $a \in \overline{U_i'}$ entraîne $V \subset U_i$; 3° $a \in R - \overline{U_i'}$ entraîne $VU_i' = 0$. D'après l'axiome A_1, il existe des points a_ν en nombre fini tels que les entourages V_ν correspondants constituent un réseau $\mathfrak{V}$. Pour chaque valeur de ν, il existe une valeur de i telle que $a_\nu \in U_i'$, d'où (d'après 1°) $V_\nu \subset U_i'$. Il suffit de montrer que $V_\mu V_\nu \neq 0$ entraîne $V_\mu \subset U_i$. Or soit $b \in V_\mu V_\nu$; alors $b \in V_\mu U_i'$, d'où $V_\mu U_i' \neq 0$ et donc (d'après 3°) $a_\mu \in \overline{U_i'}$ et par suite (d'après 2°) $V_\mu \subset U_i$.

2. Axiome A_2: *Chaque sous-ensemble ouvert de* R *est un* F_σ *dans* R.

2.1. *Chaque sous-ensemble de* R *satisfait à l'axiome* A_2[15].

2.2. Nous allons rappeler les théorèmes de la théorie de la dimension dont nous ferons usage dans ce qui suit. Ces théorèmes sont vrais dans chaque espace satisfaisant aux axiomes A_1 et A_2, et même plus généralement dans chaque espace topologique normal satisfaisant à l'axiome A_2. Pour les démonstrations je renvoie au livre de M. Menger: *Dimensionstheorie* (cité par M) pour le cas particulier d'un espace métrique séparable ainsi qu'à mon Mémoire: *Sur la dimension des espaces parfaitement normaux*[16] (cité par Č) pour le cas général.

2.21[17]. $\dim R = -1$ signifie que $R = 0$. A étant un sous-ensemble fermé de R, $\dim_A R \leq n$ signifie qu'à chaque entourage U de A on peut attacher un entourage $V \subset U$ de A tel qu'on ait $\dim \Phi \leq n-1$, où $\Phi = \overline{V} - V$. $\dim R = n$ signifie que: 1° $\dim_A R \leq n$ pour chaque sous-ensemble fermé A de R; 2° la relation $\dim_A R \leq n-1$ n'est pas vraie pour chaque sous-ensemble fermé A de R[18].

2.22[19]. $S \subset R$ entraîne que $\dim S \leq \dim R$.

[14] *Dimensionstheorie*, pp. 159–160, „Bemerkung". Le lemme est évidemment vrai dans chaque espace normal.

[15] V. Urysohn, *Über die Mächtigkeit zusammenhängender Mengen*, Math. Annalen, t. 94, p. 286, note [41]) au bas de la page.

[16] Bull. intern. de l'Acad. des Sc. de Bohème, 1932.

[17] M, Chap. II (v. aussi p. 116); Č, Chap. II.

[18] Dans cette définition, il est permis de limiter A aux points de R, si l'espace R jouit de la propriété suivante: de chaque famille de sous-ensembles ouverts recouvrant R on peut extraire une famille dénombrable recouvrant R (cette propriété vaut si R est un sous-ensemble d'un espace satisfaisant aux axiomes A_1 et A_2).

[19] M, p. 81; Č, n° 23.

2.23[20]. Soit $R = \sum_{\nu=1}^{\infty} R_\nu$, les R_ν étant fermés dans R. Alors $\dim R = \max.\dim R_\nu$.

2.24[21]. Soit $\dim R \leqq n$; soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R. Il existe un affinement $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$ dont l'ordre (v. cet Ouvrage, n° 7.2) est $\leqq n$.

2.25[22]. Soit $\dim R \leqq n$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R; soient $U_1, U_2, \cdots, U_m$ les sommets de $\mathfrak{U}$. Il existe des sous-ensembles fermés $F_1, F_2, \cdots, F_m$ de R tels que 1° $F_\nu \subset U_\nu$; 2° $\dim F_{\nu_0} \cdot F_{\nu_1} \cdot \cdots \cdot F_{\nu_h} \leqq n - h$ pour $0 \leqq h \leqq n+1$; 3° $\sum_1^m F_\nu = R$[23].

2.26[24]. Soit $R = R_0 \supset R_1 \supset \cdots \supset R_k$, les R_i étant fermés dans R. Soit $\dim R_i = n_i$. Soit $a \in R_k$. Soit U un entourage de a. Il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que $\dim R_i(\bar{V} - V) \leqq n_i - 1$ pour $0 \leqq i \leqq k$.

2.3. Si $R = R_0 \supset R_1 \supset \cdots \supset R_n$, les R_k étant des sous-ensembles fermés de R tels que $\dim R_k \leqq n-k$ pour $0 \leqq k \leqq n$, alors chaque réseau $\mathfrak{U}$ dans R possède un affinement $\mathfrak{V}$ jouissant de la propriété suivante: Si chaque sommet d'un $(h, \mathfrak{V})$-simplexe σ^h rencontre R_k $(0 \leqq k \leqq n)$, on a $h \leqq n-k$.

Démonstration. Le théorème étant évident pour $n = 0$ (v. 2.24), supposons le vrai pour la dimension $n-1$ (= l'hypothèse H). Soit donné le réseau $\mathfrak{U}$. A chaque point a de R attachons un entourage $V \subset U \in \mathfrak{U}$ tel que (v. 2.26) $\dim R_k F(V) \leqq n-k-1$ pour $0 \leqq k \leqq n$, en particulier $R_n F(V) = 0$. D'après l'axiome A_1, il existe des points a_ν $(1 \leqq \nu \leqq s)$ en nombre fini tels que $\sum_1^s V_\nu = R$. Posons

$$V_1' = V_1, \qquad V_\nu' = V_\nu - \sum_{i=1}^{\nu-1} \bar{V}_i \quad \text{pour} \quad 2 \leqq \nu \leqq s.$$

On a alors $\sum_1^s \bar{V}_\nu' = R$, $V_\mu' V_\nu' = 0$, d'où $V_\mu' F(V_\nu') = 0$ et enfin $F(V_\nu') \subset \sum_{i=1}^{\nu} F(V_\nu)$ et par suite (v. 2.23) $\dim R_k F(V_\nu') \leqq n-k-1$ pour $0 \leqq k \leqq n$, $1 \leqq \nu \leqq s$, en particulier $R_n \cdot F(V_\nu') = 0$. Posons $R_0' = \sum_1^s F(V_\nu')$, $R_k' = R_k \cdot R_0'$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$. Alors $\dim R_k' \leqq n-1-k$ pour $0 \leqq k \leqq n-1$. En vertu de 1.1 et 2.1, l'espace R_0' satisfait aux axiomes A_1 et A_2. Donc,

---

[20] M, Chap. III; Č, Chap. III.

[21] M, pp. 158—161; Č, n° 26.

[22] M, pp. 161—174; Č, n° 26.

[23] En réalité on trouve l. c. seulement la démonstration de l'existence d'un réseau fermé $\mathfrak{F}$ qui est un affinement de $\mathfrak{U}$ et tel que $\dim \Phi_{i_0} \Phi_{i_1} \cdots \Phi_{i_h} \leqq n-h$ pour $\Phi_i \in \mathfrak{F}$. Or il suffit de partager les sommets Φ de $\mathfrak{F}$ en m groupes de manière que $\Phi \subset U_\nu$ pour chaque Φ du $\nu^{\text{ème}}$ groupe et de désigner par F_ν la somme de tous les Φ de $\nu^{\text{ème}}$ groupe.

[24] M, p. 169; Č, n° 24.2.

d'après l'hypothèse H, il existe des ensembles v_μ $(1 \leqq \mu \leqq t)$ en nombre fini ouverts dans R'_0 et tels que: 1° $\sum_1^t v_\mu = R'_0$; 2° chaque v_μ fait partie d'un sommet U_u de $\mathfrak{U}$; 3° si les indices $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_h$ différents l'un de l'autre sont tels que $\prod_0^h v_{\mu_i} \neq 0$ et que (pour une certaine valeur de k, $0 \leqq k \leqq n-1$) $R'_k v_{\mu_i} \neq 0$ pour $0 \leqq i \leqq h$, alors $h \leqq n-k-1$. Pour $1 \leqq \mu \leqq t$, soit V''_μ un sous-ensemble ouvert de R tel que 1° $v_\mu \subset V''_\mu \subset U_\mu - R_n$; 2° si $v_\mu \cdot R'_k = 0$ $(1 \leqq \mu \leqq t,\ 1 \leqq k \leqq n-1)$, alors $V''_\mu \cdot R_k = 0$; 3° si $\prod_0^h v_{\mu_i} = 0$ alors $\prod_0^h V''_{\mu_i} = 0$[25]. Les ensembles V'_ν $(1 \leqq \nu \leqq s)$ et V''_μ $(1 \leqq \mu \leqq t)$ constituent l'affinement cherché $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}$.

3. Axiome A_3. *S est un sous-ensemble fermé de R; $S \neq R$.*

3.1. *Il existe une suite dénombrable $\{F_i\}$ de sous-ensembles bicompacts de $R-S$ telle que 1° $F_{i+1} \supset F_i$; 2° $R - S = \sum_1^\infty F_i$; 3° pour chaque sous-ensemble bicompact A de $R-S$ il existe une valeur de i telle que $A \subset F_i$. On peut même supposer $F_i = \bar{G}_i$, G_i étant un sous-ensemble ouvert de $R-S$, $G_i \Subset G_{i+1}$.*

Démonstration. D'après les axiomes A_2 et A_3, il existe une suite $\{\Phi_i\}$ de sous-ensembles bicompacts (v. 1.1) de $R-S$ telle que $R-S = \sum_1^\infty \Phi_i$. S et Φ_1 sont deux sous-ensembles fermés disjoints de l'espace R. D'après 1.2, il existe un ensemble ouvert G_1 tel que $\Phi_1 \subset G_1 \Subset R-S$. Plus généralement, supposons que, pour une certaine valeur de k $(=2, 3, \cdots)$, on ait déjà construit des ensembles ouverts G_i $(1 \leqq i \leqq k-1)$ tels que $G_{i-1} \Subset G_i$, $\Phi_i \subset G_i \Subset R-S$. Les ensembles $\Phi_k + \bar{G}_{k-1}$ et S étant fermés dans l'espace normal R et disjoints, il existe un ensemble ouvert G_k tel que $\Phi_k + \bar{G}_{k-1} \subset G_k \Subset R-S$. La suite $\{G_i\}$ étant ainsi construite par récurrence, il suffit de poser $F_i = \bar{G}_i$. En effet, si A est un sous-ensemble bicompact de $R-S$, on a $\sum_1^\infty AG_i = A$, d'où, d'après la définition même de la bicompacticité, $A = \sum_1^k AG_i$ pour une certaine valeur de k, et donc $A \subset \sum_1^k G_i = G_k \subset F_k$.

4. Un *réseau gén.* (= généralisé) $\mathfrak{P}$ est une famille $\{P_i\}$ au plus dénombrable de sous-ensembles ouverts et non vides de $R-S$ telle que: 1° $R-S = \sum_1^\infty P_i$; 2° pour chaque sous-ensemble bicompact A de $R-S$ on a $AP_i = 0$ pour presque toutes les valeurs de i. En particulier, un

[25] V. *Homologie*, III, 21. L'hypothèse que l'espace soit complètement normal est ici vérifiée en vertu de 1.3 et 2.3 (v. Urysohn, l. c. sub [15]).

point $a \in R - S$ ne peut appartenir qu'à un nombre fini des P_i. Les P_i sont les *sommets* du réseau gén. $\mathfrak{P}$.

Dans le cas particulier $S = 0$ [ou, plus généralement, si $R - S$ est fermé dans R] l'ensemble $R - S$ est bicompact; en vertu de la condition 2°, les ensembles P_i sont alors en nombre fini et le réseau gén. est simplement un réseau dans $R - S$.

4.1. Soit $\mathfrak{P}$ une famille de sous-ensembles ouverts de $R - S$ (en particulier, $\mathfrak{P}$ peut être un réseau gén.). Soit $\mathfrak{Q}$ un réseau gén. On dit que $\mathfrak{Q}$ constitue un *affinement* de $\mathfrak{P}$, si chaque sommet Q de $\mathfrak{Q}$ est contenu dans un élément (sommet) de $\mathfrak{P}$.

4.2. *Soit $\mathfrak{P}$ une famille comme dans* 4.1. *Il existe un réseau gén. $\mathfrak{Q}$ qui soit un affinement de $\mathfrak{P}$.*

Démonstration. Déterminons $\{F_i\}$ d'après 3.1. Les ensembles F_i étant bicompacts et $\subset R - S$, pour chaque valeur de i il existe un nombre fini d'éléments $P_{i1}, P_{i2}, \cdots, P_{i\lambda_i}$ de $\mathfrak{P}$ recouvrant F_i. Posons $Q_{ik} = P_{ik} - F_{i-1}$ $(1 \leqq k \leqq \lambda_i)$, où $F_0 = 0$. La suite Q_{ik} $(i = 1, 2, 3, \cdots; k = 1, 2, \cdots, \lambda_i)$ dont on supprime les membres vides, constitue le réseau gén. $\mathfrak{Q}$ cherché.

4.3. *Chaque réseau gén. $\mathfrak{P}$ possède un affinement $\mathfrak{Q}$ jouissant de la propriété suivante: Pour chaque $Q \in \mathfrak{Q}$ il existe un $P \in \mathfrak{P}$ tel que $Q \Subset P$. En particulier $Q \Subset R - S$ pour chaque sommet Q de $\mathfrak{Q}$.*

Démonstration. Déterminons les P_{ik} $(i = 1, 2, 3, \cdots; k = 1, 2, \cdots, \lambda_i)$ comme dans 4.2. Pour chaque valeur de i les ensembles ouverts $P_{i1}, P_{i2}, \cdots, P_{i\lambda_i}$ recouvrent le sous-ensemble fermé F_i de l'espace normal R. Il existe donc (v. [14]) des ensembles Q_{ik} $(k = 1, 2, \cdots, \lambda_i)$ tels que $Q_{ik} \Subset P_{ik}$, $\sum_{k=1}^{\lambda_i} Q_{ik} \supset F_i$. Les Q_{ik} $(i = 1, 2, 3, \cdots; k = 1, 2, \cdots, \lambda_i)$ constituent le réseau gén. $\mathfrak{Q}$ cherché.

4.4. *Chaque réseau gén. $\mathfrak{P}$ possède un affinement $\mathfrak{Q}$ jouissant de la propriété suivante: A chaque sommet Q de $\mathfrak{Q}$ on peut attacher un sommet P de $\mathfrak{P}$ de manière que non seulement $Q \subset P$ mais aussi $Q' \subset P$ pour chaque sommet Q' de $\mathfrak{Q}$ tel que $QQ' \neq 0$.*

Démonstration. Déterminons $\{F_i\}$ d'après 3.1. On peut (v. 4.3) déterminer deux suites $\{P_i\}$ et $\{P_i'\}$ d'ensembles ouverts telles que $P_i \in \mathfrak{P}$, $P_i' \Subset P_i$, $\sum_1^\infty P_i' = \sum_1^\infty P_i = R - S$. A chaque point a de $R - S$ attachons un entourage Q si petit que: 1° $a \in P_i'$ entraîne $Q \subset P_i'$; 2° $a \in \overline{P_i'}$ entraîne $Q \subset P_i$; 3° $a \in R - \overline{P_i'}$ entraîne $QP_i' = 0$[26]; 4° $a \in R - F_i$ entraîne $QF_i = 0$. Les

[26] On ne peut préscrire qu'un nombre fini de telles conditions à l'entourage Q. Or d'après la définition même du réseau gén., la relation $a \in P_i$ (et *a fortiori* $a \in P_i'$ ou $a \in \overline{P_i'}$) ne peut avoir lieu que pour un nombre fini d'indices i de manière que 1° et 2° n'imposent qu'un nombre fini de conditions. Quant à 3°, déterminons un entourage U de a tel que

ensembles F_i étant bicompacts, de la relation $R - S = \sum_1^\infty F_i$ on voit qu'il existe une suite dénombrable $\{a_\nu\}$ de points de $R - S$ telle que les Q_ν correspondants recouvrent $R - S$; de plus, pour une valeur donnée de k, on a $a_\nu \in F_k$ pour un nombre fini d'indices ν, d'où, en vertu de 4°, $Q_\nu F_k = 0$ pour presque toutes les valeurs de ν. Les Q_ν constituent donc (v. 3.1) un réseau gén. $\mathfrak{Q}$. Pour chaque valeur de ν, il existe une valeur de i telle que $a_\nu \in P_i'$, d'où $Q_\nu \subset P_i'$ d'après 1°. Si $Q_\mu Q_\nu \neq 0$, on a $Q_\mu P_i' \neq 0$ et donc (d'après 3°) $a_\mu \in \bar{P}_i'$ et par suite (d'après 2°) $Q_\mu \subset P_i$.

5.1. On dit qu'un réseau $\mathfrak{U}$ est un *affinement mod* S d'un réseau gén. $\mathfrak{P}$, si chaque sommet U de $\mathfrak{U}$ tel que $US = 0$ est un sous-ensemble d'un sommet de $\mathfrak{P}$.

5.2. Une famille Φ de réseaux dans R s'appellera *parfaitement complète* si, $\mathfrak{U}$ étant un réseau et $\mathfrak{P}$ étant un réseau gén., il existe dans Φ un affinement de $\mathfrak{U}$ qui soit un affinement mod S de $\mathfrak{P}$. Une famille parfaitement complète est complète (dans le sens de *Homologie,* II, 30 et relativement à la famille fondamentale Z constituée par tous les réseaux ouverts dans R).

5.3. *Soit* $\mathfrak{U}$ *un réseau; soit* $\mathfrak{P}$ *un réseau gén. Il existe un réseau* $\mathfrak{V}$ *tel que* 1° $\mathfrak{V}$ *est un affinement de* $\mathfrak{U}$; 2° $\mathfrak{V}$ *est un affinement mod* S *de* $\mathfrak{P}$; 3° *les sommets rencontrant* S *sont les mêmes dans les deux réseaux* $\mathfrak{U}$ *et* $\mathfrak{V}$; 4° $V \in \mathfrak{V}$, $VS = 0$ *entraîne* $\bar{V}S = 0$.

Démonstration. Soit G la somme de tous les sommets de $\mathfrak{U}$ rencontrant S. Soient $U_i\,(1 \leq i \leq k)$ les autres sommets de $\mathfrak{U}$. Soit $P_\nu\,(1 \leq \nu \leq m)$ les sommets de $\mathfrak{P}$ rencontrant $R - G$ (ces sommets sont en nombre fini, car $R - G$ est un sous-ensemble bicompact de $R - S$). L'ensemble $R - G$ étant fermé dans l'espace normal R et recouvert par les ensembles $U_i \cdot P_\nu\,(1 \leq i \leq k$, $1 \leq \nu \leq m)$, il existe, d'après le lemme [14], des ensembles ouverts, $V_{i\nu}'$ tels que $V_{i\nu} \Subset U_i \cdot P_\nu$, $\sum V_{i\nu} \supset R - G$. Le réseau $\mathfrak{V}$ s'obtient de $\mathfrak{U}$ en remplaçant chaque $U_i\,(1 \leq i \leq k)$ par les $V_{i\nu}\,(1 \leq \nu \leq m)$, dont on omet ceux qui sont vides.

5.4. *Soit* $\mathfrak{U}$ *un réseau; soit* $\mathfrak{P}$ *un réseau gén.; soit* Φ *une famille parfaitement complète de réseaux. La famille de tous les réseaux* $\mathfrak{V}$ *tels que* 1° $\mathfrak{V} \in \Phi$; 2° $\mathfrak{V}$ *est un affinement de* $\mathfrak{U}$; 3° $\mathfrak{V}$ *est un affinement mod* S *de* $\mathfrak{P}$, *est parfaitement complète.*

La démonstration est banale.

5.5. *Soit* Φ *la famille de tous les réseaux* $\mathfrak{U}$ *tels que:* 1° $\mathfrak{U}$ *est régulier par rapport à* S (v. *Homologie,* III, 22); 2° $U \in \mathfrak{U}$, $US = 0$ *entraîne* $\bar{U}S = 0$. *La famille* Φ *est parfaitement complète.*

Cela résulte de 5.3 et de *Homologie,* III, 23.

$U \Subset R - S$ et posons la nouvelle condition 5° : $Q \subset U$. La condition 3° est alors vérifiée pour tous les indices i tels que $0 = \bar{U}P_i \supset \bar{U}P_i'$. Or $\bar{U}$ étant un sous-ensemble bicompact de $R - S$, l'inégalité $\bar{U}P_i \neq 0$ n'a lieu que pour un nombre fini d'indices i. Enfin, d'après 3.1 on a $a \in F_i$ pour presque toutes les valeurs de i.

6.1. *Déterminons* $\{G_i\}$ *d'après* 3.1. *Soit* $p = 0, 1, 2, \cdots$. *Pour chaque valeur de* i *soit* L_i *un système linéaire de* (p, R)*-cycles mod* $(R - G_i)$ *tel que* $C^p \in L_i$ *pour chaque* (p, R)*-cycle* C^p *mod* $(R - G_i)$ *jouissant de la propriété que, pour chaque réseau* $\mathfrak{U}$ *d'une famille complète donnée il existe un* $C_i^p \in L_i$ *tel que* $C^p(\mathfrak{U}) \sim C_i^p(\mathfrak{U})$ *mod* $(R - G_i)$. *Si* $i < k$, *supposons qu'à chaque* $C_k^p \in L_k$ *on puisse attacher un* $C_i^p \in L_i$ *de manière que* $C_i^p \sim C_k^p$ *mod* $(R - G_i)$. *Il existe un* (p, R)*-cycle* C^p *mod* S *tel que pour chaque valeur de* i *il existe un* $C_i^p \in L_i$ *jouissant de la propriété* $C^p \sim C_i^p$ *mod* $(R - G_i)$.

Démonstration. Soit Φ la famille complète du nº 5.5. Soit $\mathfrak{U} \in \Phi$. Soit K la somme de tous les sommets de $\mathfrak{U}$ disjoints à S. D'après la définition de la famille Φ, on a $K \Subset R - S$, de manière qu'il existe (v. 3.1) un indice i_0 tel que $K \subset G_i$ pour $i \geqq i_0$. Alors si un sommet U de $\mathfrak{U}$ rencontre $R - G_i$ $(i \geqq i_0)$, il rencontre aussi S; le réseau $\mathfrak{U}$ étant (v. 5.5) régulier par rapport à S, on a plus généralement: si le noyau d'un $\mathfrak{U}$-simplexe rencontre $R - G_i$ $(i \geqq i_0)$, il rencontre aussi S. Donc les frontières, cycles, homologies mod S et mod $(R - G_i)$ $(i \geqq i_0)$ coïncident dans le réseau $\mathfrak{U}$.

Pour $i \geqq i_0$, soit $\varDelta_i^p(\mathfrak{U})$ la famille de tous les $(p, \mathfrak{U})$-cycles $C^p(\mathfrak{U})$ mod S (ou, ce qui est la même chose, mod $(R - G_i)$) tels qu'il existe un $C_i^p \in L_i$ tel que $C^p(\mathfrak{U}) \sim C_i^p(\mathfrak{U})$ mod $(R - G_i)$ (et donc mod S). On voit sans peine que $\varDelta_i^p(\mathfrak{U}) \neq 0$ et que $\varDelta_k^p(\mathfrak{U}) \subset \varDelta_i^p(\mathfrak{U})$ pour $k > i \geqq i_0$. Donc

$$\prod_{i \in N} \varDelta_i^p(\mathfrak{U}) = \Pi(N) \neq 0$$

pour chaque ensemble fini N d'indices $i \geqq i_0$, car $\Pi(N) = \varDelta_k^p(\mathfrak{U})$ pour $k = \max. N$. $\varDelta_i^p(\mathfrak{U})$ est évidemment un système linéaire contenu dans le module fini de toutes les $(p, \mathfrak{U})$-chaînes. Par suite (v. *Homologie,* I, 15) la partie commune $\varDelta^p(\mathfrak{U})$ de tous les $\varDelta_i^p(\mathfrak{U})$ $(i \geqq i_0)$ est non vide; c'est donc un système linéaire.

Or, soit $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V} \in \Phi$ et supposons que $\mathfrak{V}$ soit un affinement de $\mathfrak{U}$, $\pi = Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. On voit sans peine que $\pi \varDelta^p(\mathfrak{V}) \subset \varDelta^p(\mathfrak{U})$. Donc (v. *Homologie,* II, 21) il existe un (p, R)-cycle C^p mod S tel que $C^p(\mathfrak{U}) \in \varDelta^p(\mathfrak{U})$ pour chaque réseau $\mathfrak{U} \in \Phi$. Soit donnée une valeur de i; on doit prouver que $C^p \sim C_i^p$ mod $(R - G_i)$, $C_i^p \in L_i$. On peut même démontrer que $C^p \in L_i$. Il suffit de prouver que pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$ il existe un $C_i^p \in L_i$ tel que $C^p(\mathfrak{U}) \sim C_i^p(\mathfrak{U})$ mod $(R - G_i)$. Or soit $\mathfrak{U} \in \Phi$; soit $k \geqq i_0$. On a $C^p(\mathfrak{U}) \in \varDelta^p(\mathfrak{U}) \subset \varDelta_k^p(\mathfrak{U})$, d'où $C^p(\mathfrak{U}) \sim C_k^p(\mathfrak{U})$ mod S avec $C_k^p \in L_k$. Or on peut attacher à C_k^p un $C_i^p \in L_i$ tel que $C_k^p \sim C_i^p$ mod $(R - G_i)$, d'où $C^p(\mathfrak{U}) \sim C_i^p(\mathfrak{U})$ mod $(R - G_i)$.

6.2. *Déterminons* G_i *d'après* 3.1. *Soit* $p = 0, 1, 2, \cdots$. *Soit* C^p *un* (p, R)*-cycle mod* S *tel que* $C^p \sim 0$ *mod* $(R - G_i)$ *pour chaque* i. *Alors* $C^p \sim 0$ *mod* S.

Démonstration. La famille Φ du nº 5.5 étant complète, il suffit de voir que $C^p(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod S pour chaque réseau $\mathfrak{U} \in \Phi$. Or nous venons de voir que, $\mathfrak{U}$ étant donné, il existe une valeur de i telle que $C^p(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod (R - G_i)$ (ce qui a été supposé pour chaque i) entraîne $C^p(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod S$.

6.3. *Soient R_1, R_2 deux espaces; soit $S_1 \subset R_1$, $S_2 \subset R_2$. Supposons que R_1 et S_1, ainsi que R_2 et S_2, vérifient les axiomes A_1, A_2, A_3. Supposons de plus que $R_1 - S_1$ soit homéomorphe à $R_2 - S_2$. Alors, pour $p = 0, 1, 2, \cdots$, le $p^{\text{ème}}$ groupe de Betti de R_1 mod S_1 est isomorphe au $p^{\text{ème}}$ groupe de Betti de R_2 mod S_2.*

Démonstration. Soit φ l'homéomorphie donnée entre $R_1 - S_1$ et $R_2 - S_2$. Dans l'espace $R_1 - S_1$, définissons la suite $\{G_i\}$ comme dans 3.1. La suite $\{G'_i\}$, où $G'_i = \varphi G_i$, jouit de propriétés analogues par rapport à $R_2 - S_2$. Soit C^p un (p, R_1)-cycle mod S_1. Pour $i = 1, 2, \cdots$, soit C^p_i un $(p, \overline{G}_i)$-cycle mod $(\overline{G}_i - G_i)$ tel qu'on ait $C^p \sim C^p_i \bmod (R_1 - G_i)$. On voit sans peine que de tels cycles existent. Posons ${}^*C^p_i = \varphi C^p_i$; c'est un $(p, \overline{G}'_i)$-cycle mod $(\overline{G}'_i - G'_i)$ que l'on peut considérer aussi comme un (p, R_2)-cycle mod $(R_2 - G'_i)$. Evidemment on a pour $i < k$: ${}^*C^p_i = {}^*C^p_k \bmod (R_2 - G'_i)$. D'après 6.1 il existe un (p, R_2)-cycle mod S_2: ${}^*C^p$ tel que ${}^*C^p \sim {}^*C^p_i \bmod (R_2 - G'_i)$ pour chaque i. Posons ${}^*C^p = \psi C^p$. De 6.2 il résulte aisément que ψ définit une isomorphie entre les deux groupes de Betti considérés.

7. Axiome A_4 : *La dimension* (v. 2.21) *de $R - S$ est égale à n* $(= 1, 2, 3, \cdots)$.

7.1. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R. Un $\mathfrak{U}$-simplexe (en particulier un sommet de $\mathfrak{U}$) sera dit *intérieur* si aucun de ses sommets ne rencontre S, *extérieur* dans le cas contraire.

7.2. L'*ordre* d'un réseau $\mathfrak{U}$ dans R est la plus grande dimension d'un $\mathfrak{U}$-simplexe. L'*ordre mod S* de $\mathfrak{U}$ est la plus grande dimension m d'un $\mathfrak{U}$-simplexe intérieur; si chaque sommet de $\mathfrak{U}$ rencontre S, on pose $m = -1$.

7.3. *Soit $\mathfrak{U}$ un réseau; soit $\mathfrak{P}$ un réseau gén. Il existe un réseau $\mathfrak{V}$ tel que 1° $\mathfrak{V}$ est un affinement de $\mathfrak{U}$; 2° $\mathfrak{V}$ est un affinement mod S de $\mathfrak{P}$; 3° les sommets rencontrant S sont les mêmes dans les deux réseaux $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$; 4° l'ordre mod S de $\mathfrak{V}$ est $\leqq n$.*

Démonstration. Soit G la somme des sommets extérieures de $\mathfrak{U}$. Soient U_i $(1 \leqq i \leqq k)$ les sommets intérieurs de $\mathfrak{U}$. Les ensembles $(R - G)\, U_i$ constituent un réseau $\mathfrak{U}'$ dans $R - G$. Soient $P_1, P_2, \cdots, P_m$ les sommets de $\mathfrak{P}$ rencontrant $R - G$; les ensembles $P_\nu - G$ $(1 \leqq \nu \leqq m)$ constituent un réseau $\mathfrak{W}'$ dans $R - G$. Puisque $R - G$ est un espace bicompact de dimension $\leqq n$, il existe un affinement $\mathfrak{V}'$ simultané de $\mathfrak{U}'$ et de $\mathfrak{W}'$ dont l'ordre est $\leqq n$. Soient V'_j $(1 \leqq j \leqq h)$ les sommets de $\mathfrak{V}'$. Déterminons (v. *Homologie,* III, 21) des sous-ensembles ouverts V_j de $R - S$ de manière que $(R - G)\, V_j = V'_j$ et que $\Pi\, V'_{j_\nu} = 0$ entraîne $\Pi\, V_{j_\nu} = 0$. $\mathfrak{V}'$ étant un affinement de $\mathfrak{U}'$ et de $\mathfrak{W}'$ on peut s'arranger de manière que chaque V_j fasse partie d'un U_i et d'un sommet de $\mathfrak{P}$. En ajoutant aux V_j les sommets extérieurs de $\mathfrak{U}$, on obtient le réseau cherché $\mathfrak{V}$.

7.4. *Soit Φ_1 la famille de tous les réseaux $\mathfrak{U}$ de la famille Φ du n° 5.5 dont l'ordre mod S est $\leqq n$. La famille Φ_1 est parfaitement complète.*

D'après 5.5 et 7.3.

8. Soit $\mathfrak{Z}$ un réseau de la famille Φ_1 du n° 7.4 possédant des sommets intérieurs. Soit G la somme de tous les sommets extérieurs de $\mathfrak{Z}$. Pour $h = 0, 1, 2, \cdots$ soient $\sigma_i^h (1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ tous les $(h, \mathfrak{Z})$-simplexes intérieurs rangés dans un ordre déterminé. (On a $\alpha_h = 0$ pour $h > n$.) En particulier $\sigma_i^0 (1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ sont les sommets intérieurs de $\mathfrak{Z}$ de manière que les $\sigma_i^0 - G$ constituent un réseau dans l'espace bicompact $R - G$. Puisque $\dim (R - S) \leqq n$, d'après 2.25 il existe des sous-ensembles bicompacts T_i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ de $R - S$ tels que $T_i \subset \sigma_i^0$, $\sum_1^{\alpha_0} T_i \supset R - G$[27] et enfin $\dim R_k \leqq n - k$ pour $0 \leqq k \leqq n+1$, où R_k désigne l'ensemble de tous les points de R appartenant à $k+1$ au moins parmi les ensembles T_i. (On a en particulier $R_0 = \sum_1^{\alpha_0} T_i$, $R_{n+1} = 0$.) Désignons par $\mathfrak{T}$ le réseau fermé dans R_0 aux sommets T_i. Pour $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$, $\sigma_i^h = (\sigma_{i_0}^0, \sigma_{i_1}^0, \cdots, \sigma_{i_h}^0)$ soit $T(\sigma_i^h) = \prod_0^h T_{i_\nu}$. En particulier $T(\sigma_i^0) = T_i$. Les $T(\sigma_i^h)$ sont d'ailleurs les noyaux des $\mathfrak{T}$-simplexes (si on exclut les $T(\sigma_i^h) = 0$).

8.1. $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{T}$ étant donnés, un réseau $\mathfrak{U}$ dans R s'appellera *commode par rapport à* $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$, ou *commode* tous court[28], s'il jouit des propriétés suivantes: 1° $\mathfrak{U}$ appartient à la famille Φ du n° 5.5; 2° aucun sommet de $\mathfrak{U}$ ne rencontre simultanément R_0 et S; 3° l'ordre mod S de $\mathfrak{U}$ est $\leqq n$; 4° pour $1 \leqq k \leqq n$, si chaque sommet d'un $(h, \mathfrak{U})$-simplexe rencontre R_k, on a $h \leqq n - k$; 5° pour $U \in \mathfrak{U}$, $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$ la relation $UT(\sigma_i^h) = 0$ entraîne $\bar{U} T(\sigma_i^h) = 0$; 6° si le sommet U de $\mathfrak{U}$ recontre $T_{i_0}, T_{i_1}, \cdots, T_{i_h}$, alors les $\sigma_{i_0}^0, \sigma_{i_1}^0, \cdots, \sigma_{i_h}^0$ sont les sommets d'un $(h, \mathfrak{Z})$-simplexe σ_i^h et on a $UT(\sigma_i^h) \neq 0$.

8.2. *Les réseaux commodes forment une famille parfaitement complète.* La démonstration fera l'objet des n^{os} 8.21—8.22.

8.21. Soit R_0^* un ensemble bicompact tel que $R_0 \subset R_0^* \subset R - S$. D'après 2.1, l'espace R_0^* satisfait à l'axiome A_2.

LEMME L_p $(0 \leqq p \leqq n)$: Soit $\mathfrak{B}$ un réseau dans R_0^*. Il existe un affinement $\mathfrak{B}_p$ de $\mathfrak{B}$ jouissant des propriétés P_1, P_2, P_3 et P_4^q $(p \leqq q \leqq n)$ ci-après. *Propriété* P_1: L'ordre (7.2) du réseau $\mathfrak{B}_p$ est $\leqq n$. *Propriété* P_2: Pour $1 \leqq k \leqq n$, chaque $\mathfrak{B}_p$-simplexe dont tous les sommets rencontrent R_k a la

---

[27] On pourrait même supposer que $\sum T_i = R - G$; mais ce ne serait pas commode plus tard (v. n° 40).

[28] Cette définition est provisoire. Plus tard (dans 18.1) nous allons un peu restreindre cette notion.

dimension $\leqq n-k$. *Propriété* P_3 : $V_0, V_1, \cdots, V_k$ étant des sommets de $\mathfrak{V}_p$, la relation $\prod_0^k V_\nu = 0$ entraîne $\prod_0^k \bar{V}_\nu = 0$; en outre, pour $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$, la relation $\prod_0^k V_\nu T(\sigma_i^h) = 0$ entraîne $\prod_0^k \bar{V}_\nu T(\sigma_i^h) = 0$. Nous exprimerons cette propriété comme il suit: Les incidences dans $\bar{\mathfrak{V}}_p + \mathfrak{T}$ sont les mêmes que dans $\mathfrak{V}_p + \mathfrak{T}$. [Une *incidence* dans $\mathfrak{V}_p + \mathfrak{T}$, p. ex., est un groupe de sommets de $\mathfrak{V}_p$ et de $\mathfrak{T}$ dont le produit n'est pas vide.] *Propriété* P_4^q : Soit V_p un sommet de $\mathfrak{V}_p$ tel que 1° pour $q+1 \leqq Q \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_Q$, on a $V_p T(\sigma_i^Q) = 0$; 2° il existe une valeur i_0, $1 \leqq i_0 \leqq \alpha_q$ telle que $V_p T(\sigma_{i_0}^q) \neq 0$; alors, pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$, ou bien $V_p T_i = 0$, ou bien σ_i^0 est un sommet du simplexe $\sigma_{i_0}^q$. La démonstration du lemme L_p sera donnée dans 8.211 et 8.212.

8.211. Démontrons d'abord le lemme L_n. Pour chaque couple i, j tel que $1 \leqq i \leqq \alpha_0$, $1 \leqq j \leqq n$ et tel que σ_i^0 ne soit pas un sommet de σ_j^n, on a $T_i T(\sigma_j^n) = 0$ (car autrement on aurait $R_{n+1} \neq 0$). Il existe un affinement $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{V}$ tel qu'aucun sommet de $\mathfrak{U}$ ne rencontre simultanément T_i et $T(\sigma_j^n)$, pour aucun de nos couples i, j[29]. Puisque $R_0^* \supset R_1 \supset \cdots \supset R_n$, dim $R_0^* \leqq n$, dim $R_k \leqq n-k$, $\bar{R}_k = R_k$, d'après 2.3 il existe un affinement $\mathfrak{V}_n'$ du réseau $\mathfrak{U}$ jouissant des propriétés P_1 et P_2. Le réseau $\mathfrak{U}$, et donc évidemment aussi son affinement $\mathfrak{V}_n'$, jouit de la propriété P_4^n. Il ne reste qu'à satisfaire à P_3. Or les propriétés P_1, P_2 et P_4^n du réseau $\mathfrak{V}_n'$ restent évidemment intactes si l'on rapetisse[30] les sommets de $\mathfrak{V}_n'$. On peut donc choisir le réseau $\mathfrak{V}_n'$ de manière que, si $\mathfrak{V}_n''$ en est un rapetissement quelconque, les incidences dans $\mathfrak{V}' + \mathfrak{T}$ (qui sont en nombre fini) soient les mêmes que dans $\mathfrak{V}_n'' + \mathfrak{T}$. Le réseau $\mathfrak{V}_n'$ étant ainsi choisi, on voit sans peine que chaque rapetissement fort $\mathfrak{V}_n$ de $\mathfrak{V}_n'$ jouit de la propriété P_3.

8.212. Le lemme L_n étant démontré, supposons pour une certaine valeur de $p\,(0 \leqq p \leqq n-1)$ la validité du lemme L_{p+1}. Il s'agit d'en déduire le lemme L_p. Soit donc $\mathfrak{V}$ un réseau donné dans R_0^*. Soit $\mathfrak{V}'$ un rapetissement fort de $\mathfrak{V}$. D'après L_{p+1}, déterminons un affinement $\mathfrak{V}_{p+1}$ de $\mathfrak{V}'$ jouissant des propriétés P_1, P_2, P_3 et P_4^q $(p+1 \leqq q \leqq n)$.

Soit $V_1, V_2, \cdots, V_r$ la suite de tous les sommets de $\mathfrak{V}_{p+1}$, $M_1 = \bar{V}_1$, $M_2 = \bar{V}_2, \cdots, M_r = \bar{V}_r$ celle de tous les sommets de $\bar{\mathfrak{V}}_{p+1}$ et $M_{r+1}, M_{r+2}, \cdots, M_{r+s}$

[29] En effet, les ensembles disjoints T_i et $T(\sigma_j^n)$ étant fermés dans l'espace normal R_0^*, il existe deux sous-ensembles ouverts U_{ij}' et U_{ij}'' de R_0 tels que $U_{ij}' \supset T_i$, $U_{ij}'' \supset T(\sigma_j^n)$, $U_{ij}' \cdot U_{ij}'' = 0$. Les ensembles U_{ij}', U_{ij}'' et $R_0 - (T_i + T(\sigma_j^n))$ constituent un réseau $\mathfrak{U}_{ij}$ dans R_0. Il suffit de prendre comme $\mathfrak{U}$ un affinement simultané de $\mathfrak{V}$ et de tous les réseaux $\mathfrak{U}_{ij}$.

[30] *Rapetisser* les sommets $U_1, U_2, \cdots, U_m$ d'un réseau $\mathfrak{U}$ signifie que l'on passe de $\mathfrak{U}$ à un réseau $\mathfrak{V}$ aux sommets $V_1, V_2, \cdots, V_m$ tels que $V_i \subset U_i$. Le rapetissement $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$ est dit *fort* si $V_i \Subset U_i$. *Chaque réseau* $\mathfrak{U}$ *possède un rapetissement fort* (v. le lemme [14]).

celle de tous les noyaux $T(\sigma_i^h)$ des $\mathfrak{T}$-simplexes. D'après *Homologie,* III, 21 il existe des sous-ensembles ouverts $U_1', U_2', \cdots, U_{r+s}'$ de R_0^* tels que 1° $U_\nu' \supset M_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq r+s)$; 2° pour chaque combinaison $(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_h)$ d'indices $1, 2, \cdots, r+s$ $(1 \leqq h \leqq r+s)$ la relation $\prod_{i=1}^{h} M_{\nu_i} = 0$ entraîne $\prod_{i=1}^{h} U_{\nu_i}' = 0$. Pour chaque ν $(1 \leqq \nu \leqq r)$ il existe un sommet V_ν' de $\mathfrak{V}$ tel que $M_\nu \subset V_\nu'$. Posons $U_\nu = U_\nu' V_\nu'$ $(1 \leqq \nu \leqq r)$. Les ensembles $U_1, U_2, \cdots, U_r$ constituent un réseau $\mathfrak{U}$ dans R_0^* tel que 1° $\overline{V_\nu} \Subset U_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq r$; 2° les incidences dans $\mathfrak{U} + \mathfrak{T}$ sont les mêmes que dans $(\overline{\mathfrak{V}}_{p+1} + \mathfrak{T}$ et par suite, $\mathfrak{V}_{p+1}$ jouissant de la propriété P_3, les mêmes que dans) $\mathfrak{V}_{p+1} + \mathfrak{T}$; 3° $\mathfrak{U}$ est un affinement de $\mathfrak{V}$.

Pour chaque couple composé d'un sommet V_ν de $\mathfrak{V}_p$ et du noyau $T(\sigma_i^h)$ d'un $\mathfrak{T}$-simplexe tel que $p+1 \leqq h \leqq n$, $V_\nu T(\sigma_i^h) \neq 0$, choisissons un point $b_{\nu hi} \in V_\nu T(\sigma_i^h)$. Appelons *points distingués* ces points $b_{\nu hi}$ (qui sont en nombre fini).

Désignons par M la somme de tous les sommets de $\overline{\mathfrak{V}}_{p+1}$ n'ayant aucun point commun avec $R_{p+1} = \sum_{i=1}^{\alpha_{p+1}} T(\sigma_i^{p+1})$. Considérons tous les couples T_i, $T(\sigma_j^p)$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0,\ 1 \leqq j \leqq \alpha_p)$ tels que σ_i^0 ne soit pas un sommet de σ_j^p. Évidemment les ensembles MT_i et $MT(\sigma_j^p)$ sont fermés et disjoints. Il existe donc[31] un réseau $\mathfrak{W}_1$ dans R_0^* dont aucun sommet ne rencontre simultanément les deux ensembles MT_i et $MT(\sigma_j^p)$ (pour aucun de nos couples T_i, $T(\sigma_j^p)$).

L'espace R_0^* étant bicompact et le réseau $\mathfrak{V}_{p+1}$ un rapetissement fort de $\mathfrak{U}$, il existe évidemment un réseau $\mathfrak{W}_2$ dans R_0^* tel que si $W \in \mathfrak{W}_2$, $W V_\nu \neq 0$, on a $W \subset U_\nu$.

D'après 1.3, on construit un réseau $\mathfrak{W}_3$ dans R_0^* tel que, si $W, W' \in W_3$, $WW' \neq 0$ et si W contient le point distingué $b_{\nu hi}$, on a $W + W' \subset V_\nu$.

En vertu du lemme L_{p+1}, il existe un affinement simultané $\mathfrak{W}$ des réseaux $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ et $\mathfrak{W}_3$ jouissant des propriétés P_1, P_2, P_3 et P_4^q $(p+1 \leqq q \leqq n)$. Le réseau $\mathfrak{W}$ possède évidemment les propriétés de chacun des trois réseaux $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ et $\mathfrak{W}_3$.

Partageons les sommets V_ν $(1 \leqq \nu \leqq p+1)$ de $\mathfrak{V}_{p+1}$ en deux espèces, les sommets de première espèce étant ceux qui rencontrent un des ensembles $T(\sigma_i^{p+1})$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_{p+1})$.

Partageons aussi les sommets de $\mathfrak{W}$ en deux espèces de manière que $W \in \mathfrak{W}$ est de première espèce si, et seulement si, $W V_\nu \neq 0$ pour un sommet V_ν de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$. $\mathfrak{W}$ étant un affinement de $\mathfrak{W}_2$, on a alors $W \subset U_\nu$.

---

[31] Cf. la note [29].

W étant un sommet de première espèce de $\mathfrak{W}$, distiguons deux cas : Si W ne contient aucun point distingué, choisissons, parmi les sommets V_ν de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$ tels que $W V_\nu \neq 0$, *un* sommet V_{ν_0} et attachons W à V_{ν_0}. Si W contient un point distingué, attachons W à *chaque* sommet V_ν de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$ tel que $W V_\nu \neq 0$. Pour chaque sommet V_ν de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$, soit V'_ν la somme de tous les $W \in \mathfrak{W}$ attachés à V_ν. On a alors $V'_\nu \subset U_\nu$.

Les sommets du réseau $\mathfrak{V}_p$ sont : 1° les ensembles V'_ν que nous venons d'attacher à chaque sommet V_ν de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$ (ce sont les sommets de première espèce de $\mathfrak{V}_p$) ; 2° les sommets de seconde espèce de $\mathfrak{W}$ (ce sont les sommets de seconde espèce de $\mathfrak{V}_p$). Les réseaux $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{W}$ étant des affinements de $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}_p$ est aussi un affinement de $\mathfrak{V}$. Il s'agit de voir si le réseau $\mathfrak{V}_p$ possède les propriétés P_1, P_2, P_3 et P_4^q $(p \leqq q \leqq n)$.

Commençons par les propriétés P_1 et P_2. A cet effet, choisissons un point $a \in R_0^*$. On doit prouver que les propriétés P_1 et P_2 sont vérifiées pour tous les $\mathfrak{V}_p$-simplexes dont le noyau contient a. Deux cas sont à distinguer. *En premier lieu*, supposons qu'aucun des sommets de $\mathfrak{W}$ contenant a ne contient aucun point distingué. Chaque sommet de $\mathfrak{U}_p$ était la somme d'un certain groupe de sommets de $\mathfrak{W}$; dans notre cas, chaque sommet de $\mathfrak{W}$ contenant a appartient à un seul de ces groupes. Le réseau $\mathfrak{W}$ jouissant des propriétés P_1 et P_2, on voit que cela a lieu aussi pour le réseau $\mathfrak{V}_p$ relativement aux $\mathfrak{V}_p$-simplexes dont le noyau contient a. *En second lieu*, supposons que, parmi les sommets de $\mathfrak{W}$ contenant a, il y en ait au moins un, soit W_0, contenant un point distingué, soit $b_{\nu_0 h_0 i_0}$.

Le réseau $\mathfrak{W}$ étant un affinement de $\mathfrak{W}_3$, il en résulte que pour chaque sommet W de $\mathfrak{W}$ contenant a on a l'inclusion $W \subset V_{\nu_0}$. Puisque $p+1 \leqq h_0 \leqq n$, $b_{\nu_0 h_0 i_0} \in V_{\nu_0} T(\sigma_{i_0}^{h_0}) \neq 0$, V_{ν_0} est un sommet de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$, donc $W \subset V_{\nu_0}$ en est un de $\mathfrak{W}$. Il en résulte que tous les sommets de $\mathfrak{V}_p$ contenant a sont de première espèce ; soient V'_{ν_1}, V'_{ν_2}, $\cdots$, V'_{ν_k} ces sommets. On a alors $V'_{\nu_i} \subset U_{\nu_i}$ $(1 \leqq i \leqq k)$. Puisque $V_\nu \subset U_\nu$, et puisque les incidences dans $\mathfrak{W}_{p+1} + \mathfrak{T}$ sont les mêmes que dans $\mathfrak{U} + \mathfrak{T}$, le réseau $\mathfrak{U}$ jouit des propriétés P_1 et P_2 (car $\mathfrak{V}_{p+1}$ en jouit par supposition). De $V'_{\nu_i} \subset U_{\nu_i}$ on conclut que le réseau $\mathfrak{V}_p$ jouit des propriétés P_1 et P_2 relativement aux $\mathfrak{V}_p$-simplexes dont le noyau contient a.

Chaque sommet de $\mathfrak{U}_p$ étant la somme d'un groupe de sommets de $\mathfrak{W}$ et le réseau $\mathfrak{W}$ jouissant de la propriété P_3, on voit sans peine que le réseau $\mathfrak{U}_p$ en jouit également.

Ensuite montrons que pour $p+1 \leqq q \leqq n$ le réseau $\mathfrak{V}_p$ jouit de la propriété P_4^q. Soit donc V^* un sommet de $\mathfrak{V}_p$ tel que 1° pour $q+1 \leqq Q \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_Q$, on a $V^* T(\sigma_i^Q) \neq 0$; 2° il existe une valeur i_0, $1 \leqq i_0 \leqq \alpha_q$

telle que $V^* \, T(\sigma_{i_0}^q) \neq 0$. Soit $i \, (1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ un indice tel que σ_i^0 n'est pas un sommet de $\sigma_{i_0}^q$. On doit montrer que $V^* \, T_i = 0$. Si le sommet V^* de $\mathfrak{V}_p$ est de seconde espèce, cela est clair, car V^* est alors un sommet du réseau $\mathfrak{W}$ qui jouit de la propriété P_4^q. Supposons donc que $V^* = V_\nu'$ soit un sommet de première espèce de $\mathfrak{V}_p$. On a alors $V_\nu' \subset U_\nu$ de manière qu'il suffit de montrer que $U_\nu \, T_i = 0$. L'inclusion $V_\nu' \subset U_\nu$ montre d'ailleurs que $U_\nu \, T(\sigma_{i_0}^q) \neq 0$. Or les incidences dans $\mathfrak{U} + \mathfrak{T}$ étant les mêmes que dans $\mathfrak{V}_{p+1} + \mathfrak{T}$, on voit que $V_\nu \cdot T(\sigma_{i_0}^q) \neq 0$, et qu'il suffit de montrer que $V_\nu T_i = 0$. Supposons par impossible que $V_\nu \, T_i \neq 0$. Le réseau $\mathfrak{V}_{p+1}$ jouissant de la propriété P_4^q, il en résulte qu'il existe des indices Q, j tels que $V_\nu T(\sigma_j^Q) \neq 0$. Il existe alors un point distingué $b_{\nu jQ} \in V_\nu T(\sigma_j^Q)$. Soit W un sommet de $\mathfrak{W}$ tel que $b_{\nu jQ} \in W$. Le sommet W contenant le point distingué $b_{\nu jQ}$, on a l'inclusion $W \subset V_\nu'$ d'après la définition même de V_ν'. Donc $b_{\nu jQ} \in V_\nu' \cdot T(\sigma_j^Q) = V^* T(\sigma_j^Q) \neq 0$, ce qui est une contradiction.

Il ne reste qu'à prouver que le réseau $\mathfrak{V}_p$ jouit de la propriété P_4^p. Soit donc V^* un sommet de $\mathfrak{V}_p$ tel que 1° pour $p+1 \leqq Q \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_Q$, on a $V^* \, T(\sigma_i^Q) = 0$; 2° il existe une valeur i_0, $1 \leqq i_0 \leqq \alpha_p$ telle que $V^* T(\sigma_{i_0}^p) \neq 0$. Soit $i \, (1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ un indice tel que σ_i^0 n'est pas un sommet de $\sigma_{i_0}^p$. On doit montrer que $V^* T_i = 0$. Remarquons d'abord que V^* est un sommet de seconde espèce de $\mathfrak{V}_p$. En effet, dans le cas contraire on aurait $V^* = V_\nu'$. V_ν étant un sommet de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$, il existerait un indice j $(1 \leqq j \leqq \alpha_{p+1})$ tel que $V_\nu \, T(\sigma_j^{p+1}) \neq 0$, d'où $b_{\nu, j, p+1} \in V_\nu \, T(\sigma_j^{p+1})$. W étant un sommet de $\mathfrak{W}$ contenant $b_{\nu, j, p+1}$, on aurait $W \subset V_\nu'$ (par la définition même de V_ν') d'où $b_{\nu, j, p+1} \in V_\nu' T(\sigma_j^{p+1}) = V^* T(\sigma_j^{p+1}) \neq 0$, ce qui est une contradiction. Donc V^* est un sommet de seconde espèce de $\mathfrak{V}_p$; cela signifie que $V^* = W$ est un sommet de $\mathfrak{W}$ ne rencontrant aucun sommet de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$, d'où $V^* \subset M$ en vertu de la définition des sommets de première espèce de $\mathfrak{V}_{p+1}$ et de la définition de M. Le réseau $\mathfrak{W}$ étant un affinement de $\mathfrak{V}_1$, le sommet V^* de $\mathfrak{W}$ ne peut rencontrer simultanément les deux ensembles ($M T_i$ et $M T(\sigma_{i_0}^p)$ et par suite, en vertu de l'inclusion $V^* \subset M$, les deux ensembles) T_i et $T(\sigma_{i_0}^p) \neq 0$. Or $V^* \, T(\sigma_{i_0}^p) \neq 0$, donc $V^* \, T_i = 0$.

8.22. Nous venons de démontrer le lemme L_0. Or soit $\mathfrak{V}$ un réseau donné dans R et soit $\mathfrak{P}$ un réseau gén. donné. Les ensembles R_0 et S étant fermés et disjoints, il existe un affinement $\mathfrak{V}_1$ de $\mathfrak{V}$ tel qu'aucun sommet de $\mathfrak{V}_1$ ne rencontre simultanément R_0 et S. Soit (v. 5.4) $\mathfrak{V}_2$ un réseau de la famille Φ du nº 5.5 qui soit un affinement de $\mathfrak{V}_1$ et un affinement mod S de $\mathfrak{P}$. Soi M la somme de tous les sommets intérieurs (v. 7.1) de $\mathfrak{V}_2$. Soit N la somme de tous les autres sommets de $\mathfrak{V}_2$. Soit $R_0^* = R - N$, de manière que R_0^* est un ensemble bicompact tel que $R_0 \subset R_0^* \subset M \subset R - S$.

V_2 parcourant les sommets du réseau $\mathfrak{V}_2$, les ensembles $R_0^* V_2$ (dont on supprime ceux qui sont vides) sont les sommets d'un réseau $\mathfrak{V}^*$ dans R_0^*. D'après le lemme L_0, il existe dans l'espace R_0^* un affinement $\mathfrak{U}^*$ du réseau $\mathfrak{V}^*$ jouissant des propriétés P_1, P_2, P_3 et P_4^q $(0 \leqq q \leqq n)$. $U_1^*, U_2^*, \cdots, U_m^*$ étant les sommets du réseau $\mathfrak{U}^*$, déterminons [v. *Homologie*, III, 21] des ensembles $U_1, U_2, \cdots, U_m$ ouverts dans $M \supset R_0^*$ et tels que 1° $U_\nu^* \subset U_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq m)$; 2° $R_0^* U_i = U_i^*$; 3° $R_0^* \overline{U}_i = \overline{U}_i^*$; 4° $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_h$ étant une combinaison des indices $1, 2, \cdots, m$, la relation $\prod_1^h U_{\nu_i}^* = 0$ entraîne $\prod_1^h U_{\nu_i} = 0$; chaque U_ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ est un sous-ensemble d'un sommet intérieur de $\mathfrak{V}_2$. En ajoutant aux $U_1, U_2, \cdots, U_m$ les sommets extérieurs de $\mathfrak{V}_2$, on obtient un réseau $\mathfrak{U}$ dans R qui est évidemment un affinement du réseau $\mathfrak{V}$ et un affinement mod S de $\mathfrak{P}$. On voit sans peine que le réseau $\mathfrak{U}$ est commode.

8.3. Soit U un sommet d'un réseau commode $\mathfrak{U}$. Si $UR_0 = 0$, disons que U est d'espèce σ^{-1} (où le symbole σ^{-1}, appelé aussi $(-1, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur, n'a aucune signification). Si $UR_0 \neq 0$, d'après la propriété 6° d'un réseau commode (v. 8.1), il existe des indices h, i $(0 \leqq h \leqq n,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ tels que $UT(\sigma_i^h) \neq 0$, tandis que $UT(\sigma_j^0) = 0$ pour toutes les valeurs de j $(1 \leqq j \leqq \alpha_0)$ telles que σ_j^0 n'est pas un sommet de σ_i^h [et donc, plus généralement, $UT(\sigma_j^k) \neq 0$ $(0 \leqq k \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq \alpha_k)$ si, et seulement si, le simplexe σ_j^k est une k-face du simplexe σ_i^h, ce qui exige en particulier $k \leqq h$]. Nous disons alors que U est d'espèce σ_i^h. Chaque sommet U du rèseau commode $\mathfrak{U}$ possède donc une espèce bien déterminée; cette espèce est un $(h, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur; le nombre h $(-1 \leqq h \leqq n)$ est appelé *rang* du sommet U.

Soit maintenant $\tau^k = (U_0, U_1, \cdots, U_k)$ un $(k, \mathfrak{U})$-simplexe. Supposons que le sommet U_ν $(0 \leqq \nu \leqq k)$ soit d'espèce $\sigma_{i_\nu}^{h_\nu}$. Soit σ_i^h la face commune de dimension maxima de tous les $k+1$ $\mathfrak{Z}$-simplexes $\sigma_{i_\nu}^{h_\nu}$. [Si $h_\nu = -1$ pour une valeur de ν $(0 \leqq \nu \leqq k)$, ou bien si les $k+1$ $\mathfrak{Z}$-simplexes n'ont aucun sommet commun à tous, on a $\sigma_i^h = \sigma^{-1}$.] Nous disons alors que τ^k est d'espèce σ_i^h; le nombre h $(-1 \leqq h \leqq n)$ est le *rang* de τ^k.

8.31. *Si le $(k, \mathfrak{U})$-simplexe τ^k est extérieur* (v. 7.1), *en particulier si $k \geqq n+1$, alors τ^k est d'espèce σ^{-1}.*

C'est une conséquence immédiate des propriétés 2° et 3° d'un réseau commode (v. 8.1).

8.32. *Si le noyau d'un $(k, \mathfrak{U})$-simplexe τ^k rencontre R_h $(0 \leqq h \leqq n)$, le rang de τ^k est $\geqq h$. En effet, il existe un indice i $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ tel que $\mathfrak{J}(\tau^k)\, T(\sigma_i^h) \neq 0$, d'où $UT(\sigma_i^h) \neq 0$ pour chaque sommet U de τ^k.*

8.33. *Soit τ^k un $(k, \mathfrak{U})$-simplexe de rang $h \geqq 0$. Alors $h \leqq n-k$.* C'est une conséquence immédiate des propriétés 3° et 4° d'un réseau commode.

8.34. *Soit* $\tau^{k'}$ *une* k'*-face d'un* $(k, \mathfrak{U})$*-simplexe* τ^k, *avec* τ^k *et* $\tau^{k'}$ *resp. d'espèce* σ_i^h, $\sigma_{i'}^{h'}$. *Alors le* $\mathfrak{Z}$*-simplexe* σ_i^h *est une* h*-face du* $\mathfrak{Z}$*-simplexe* $\sigma_{i'}^{h'}$; *en particulier on a* $h \leqq h'$, *et* $h = h'$ *entraîne* $\sigma_{i'}^{h'} = \sigma_i^h$. [Le symbole σ^{-1} est ici considéré comme une (-1)-face de chaque $\mathfrak{Z}$-simplexe intérieur.] C'est une conséquence aisée des définitions.

8.35. *Soient* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_1$ *deux réseaux commodes,* $\mathfrak{U}_1$ *étant un affinement de* $\mathfrak{U}$; *soit* $\pi = Pr: (\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U})$. *Soit* τ^k *un* $(k, \mathfrak{U}_1)$*-simplexe d'espèce* σ_i^{n-k}. *Alors ou bien* $\pi\tau^k = 0$, *ou bien* $\pi\tau^k$ *est un* $(k, \mathfrak{U})$*-simplexe d'espèce* σ_i^{n-k}. C'est une conséquence facile de la définition de l'espèce et de 8.33.

II.

9. Axiome B. *Chaque point* $a \in R - S$ *possède un entourage* U *tel que,* Γ^n *étant un* (n, R)*-cycle (absolu) dans* $\overline{U}$, *on a l'homologie* $\Gamma^n \sim 0 \bmod S$[32].

9.1. *Chaque entourage suffisamment petit de chaque point* $a \in R - S$ *possède la propriété suivante: Chaque* (n, R)*-cycle* Γ^n *dans* $\overline{U}$ *est* ~ 0 *dans* $\overline{U}$. *Il existe même* (v. 7.4) *un réseau* $\mathfrak{B}$ *dans* R *tel que, si* Γ^n *est un* (n, R)*-cycle dans* $\overline{U}$, *on a* $\Gamma^n(\mathfrak{U}) = 0$ *pour chaque affinement* $\mathfrak{U}$ *de* $\mathfrak{B}$ *qui soit d'ordre* $\leqq n \bmod S$.

Démonstration. Déterminons un entourage $U \Subset R - S$ du point a d'après l'axiome B. Soit $\mathfrak{B}_1$ un réseau tel qu'aucun sommet de $\mathfrak{B}_1$ ne rencontre simultanément $\overline{U}$ et S. Déterminons un affinement $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{B}_1$ jouissant de la propriété du n° 1.3. Alors, si V', V'' sont deux sommets de $\mathfrak{B}$ tels que $V'\overline{U} \neq 0$, $SU'' \neq 0$, on a $V'V'' = 0$ et la même propriété appartient à chaque affinement de $\mathfrak{B}$. Soit $\mathfrak{U}$ un affinement de $\mathfrak{B}$ d'ordre $\leqq n \bmod S$. Puisque $\Gamma^n \sim 0 \bmod S$, il existe une $(n+1, \mathfrak{U})$-chaîne $\Delta^{n+1}(\mathfrak{U})$ telle que

$$(*) \qquad F\Delta^{n+1}(\mathfrak{U}) - \Gamma^n(\mathfrak{U}) \subset S.$$

Supposons, par impossible, que $\Gamma^n(\mathfrak{U}) \neq 0$. Alors il existe un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe σ^n qui se trouve dans la chaîne $\Gamma^n(\mathfrak{U})$ [avec un coefficient $\neq 0$]. Puisque $\Gamma^n \subset \overline{U}$, chaque sommet de σ^n rencontre $\overline{U}$ et ne peut donc rencontrer S. Par suite $(*)$ montre que la chaîne $\Delta^{n+1}(\mathfrak{U})$ contient un $(n+1, \mathfrak{U})$-simplexe σ^{n+1} dont σ^n est une n-face. Puisque $\mathfrak{U}$ est un affinement de $\mathfrak{B}$ et puisque les sommets de σ^n rencontrent $\overline{U}$, aucun sommet de σ^{n+1} ne peut rencontrer S. Or ceci est une contradiction, car le réseau $\mathfrak{U}$ est d'ordre $\leqq n \bmod S$.

---

[32] En vertu de *Homologie*, II, 28, cet axiome peut être énoncé comme il suit: *Chaque point* $a \in R - S$ *possède un entourage* U *tel que,* $\mathfrak{U}$ *étant un réseau et* $\Gamma^n(\mathfrak{U})$ *étant un* $(n, \mathfrak{U})$*-cycle essentiel dans* $\overline{U}$, *on a l'homologie* $\Gamma^n(\mathfrak{U}) \sim 0$ *dans* $\overline{U}$. De la même manière on peut modifier aussi l'énoncé de presque tous les axiomes suivants. Il est important que le lecteur se rappelle constamment la possibilité de cette modification.

9.2. *Il existe un réseau gén.* $\mathfrak{P}_1$ *jouissant de la propriété suivante: Lorsque* $P_1 \in \mathfrak{P}_1$, *on a* $\overline{P_1} \Subset R - S$ *et si* Γ^n *est un* (n, R)*-cycle dans* $\overline{P_1}$, *on a* $\Gamma^n \sim 0$ *dans* $\overline{P_1}$; *on peut même attacher à chaque sommet* P_1 *de* $\mathfrak{P}_1$ *un réseau* $\mathfrak{V}(P_1)$ *tel que, si* Γ^n *est un* (n, R)*-cycle dans* $\overline{P_1}$, *on a* $\Gamma^n(\mathfrak{U}) = 0$ *pour chaque affinement* $\mathfrak{U}$ *de* $\mathfrak{V}(P_1)$ *d'ordre* $\leqq n$ *mod* S. C'est une conséquence de 4.2 et de 9.1.

9.3. Déterminons un réseau gén. $\mathfrak{P}_1$ d'après 9.2, puis un affinement $\mathfrak{P}_2$ de $\mathfrak{P}_1$ jouissant de la propriété suivante: A chaque sommet P_2 de $\mathfrak{P}_2$ on peut attacher un sommet P_1 de $\mathfrak{P}_1$ de manière que, si P_2' est un sommet de $\mathfrak{P}_2$ tel que $\overline{P_2}\,\overline{P_2'} \neq 0$, on ait $\overline{P_2'} \subset P_1$. [Le réseau gén. $\mathfrak{P}_2$ existe en vertu de 4.3 et 4.4.] Soit $\mathfrak{P}_3$ un affinement de $\mathfrak{P}_2$ jouissant par rapport à $\mathfrak{P}_2$ de la même propriété que $\mathfrak{P}_2$ par rapport à $\mathfrak{P}_1$. On suppose dans tout ce Chapitre que le choix des réseaux gén. $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ ait été fait d'une manière bien determinée.

10. Soit $i = 1, 2$, ou 3. Soit $A \neq 0$ un sous-ensemble bicompact de $R - S$. Soit Γ^{n-1} un $(n-1, R)$-cycle dans A. Supposons qu'il existe un sommet P_i du réseau gén. $\mathfrak{P}_i$ tel qu'on ait l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $\overline{P_i}$ (d'où $A \subset \overline{P_i}$). Nous dirons alors que Γ^{n-1} est un $(n-1, R)$*-cycle du type* t_i *dans* A.

10.1 *Soit* Γ^{n-1} *un* $(n-1, R)$*-cycle du type* t_i $(i = 1, 2, 3)$ *dans* A. *Soit* P_i *un sommet correspondant du réseau gén.* $\mathfrak{P}_i$. *Il existe un* (n, R)*-cycle* C^n *mod* A *dans* $\overline{P_i}$ *jouissant des propriétés suivantes:* 1° $FC^n \sim \Gamma^{n-1}$ *dans* A; 2° *il existe un réseau* $\mathfrak{V}(P_i)$ [*ne dépendant que de* P_i] *tel que si le réseau* $\mathfrak{U}_2$ *est un affinement de* $\mathfrak{U}_1$ *et si* $\mathfrak{U}_1$ *est un affinement de* $\mathfrak{V}(P_i)$, *si enfin* $\mathfrak{U}_1$ *et* $\mathfrak{U}_2$ *sont d'ordre* $\leqq n$ *mod* S, *on a* $\pi C^n(\mathfrak{U}_2) = C^n(\mathfrak{U}_1)$ *mod* A, *où* $\pi = Pr.(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$. *Le cycle relatif* C^n *est bien déterminé à une homologie mod* A *dans* $\overline{P_i}$ *près; pour chaque affinement* $\mathfrak{U}$ *de* $\mathfrak{V}(P_i)$ *d'ordre* $\leqq n$ *mod* S *on peut même affirmer que* $C^n(\mathfrak{U})$ *est bien déterminé mod* A. *Le cycle relatif* C^n *reste inaltéré (dans le sens qui vient d'être précisé) si on remplace* Γ^{n-1} *par un* $(n-1, R)$*-cycle* $\Gamma_1^{n-1} \sim \Gamma^{n-1}$ *dans* A.

Démonstration. Déterminons un réseau $\mathfrak{V}(P_i)$ jouissant de la propriété du n° 9.2. Cette propriété restant intacte si on remplace $\mathfrak{V}(P_i)$ par son affinement, on peut supposer qu'aucun sommet de $\mathfrak{V}(P_i)$ ne rencontre simultanément les deux ensembles $\overline{P_i}$ et S (qui sont fermés et disjoints). Désignons par Φ la famille de tous les affinements de $\mathfrak{V}(P_i)$ qui soient d'ordre $\leqq n$ mod S; c'est (v. 7.3) une famille complète de réseaux.

A chaque réseau $\mathfrak{U} \in \Phi$ attachons un affinement $\mathfrak{U}_1 \in \Phi$ normal relativement aux cycles dans $\overline{P_i}$, et choisissons une projection $\pi_1 = Pr.(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U})$, puis un $(n-1, \mathfrak{U}_1)$-cycle $\Gamma_1^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}_1)$ dans A, enfin une $(n, \mathfrak{U}_1)$-chaîne dans $\overline{P_i}$: $C_1^n(\mathfrak{U}_1)$ telle que $FC_1^n(\mathfrak{U}_1) = \Gamma_1^{n-1}(\mathfrak{U}_1)$ et posons $C^n(\mathfrak{U}) = \pi_1 C_1^n(\mathfrak{U}_1)$. Démontrons le lemme L suivant: La $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $C^n(\mathfrak{U})$ reste inaltérée mod A si l'on fait un autre choix $\mathfrak{U}_2$, π_2, $\Gamma_2^{n-1}(\mathfrak{U}_2)$, $C_2^n(\mathfrak{U}_2)$ de $\mathfrak{U}_1$, π_1,

$\Gamma_1^{n-1}(\mathfrak{U}_1)$, $C_1^n(\mathfrak{U}_1)$. On voit sans peine qu'il résulte du lemme L que le cycle relatif C^n, s'il existe, est bien déterminé dans le sens énoncé dans le théorème.

Démontrons d'abord le lemme L dans deux cas particuliers: I. Soit $\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_1$, $\pi_2 = \pi_1$. On a alors $\Gamma_1^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \sim \Gamma_2^{n-1}(\mathfrak{U}_1)$ dans A; il existe donc une $(n, \mathfrak{U}_1)$-chaîne dans A: $D^n(\mathfrak{U}_1)$ telle que

$$FD^n(\mathfrak{U}_1) = \Gamma_2^{n-1}(\mathfrak{U}_1) - \Gamma_1^{n-1}(\mathfrak{U}_1) = FC_2^n(\mathfrak{U}_1) - FC_1^n(\mathfrak{U}_1).$$

Alors $\Delta^n(\mathfrak{U}_1) = D^n(\mathfrak{U}_1) + C_1^n(\mathfrak{U}_1) - C_2^n(\mathfrak{U}_1)$ est un $(n, \mathfrak{U}_1)$-cycle dans $\overline{P}_i$. $\mathfrak{U}_1$ étant un affinement de $\mathfrak{U}$ normal relativement aux $(n, \mathfrak{U})$-cycles dans $\overline{P}_1$, il en résulte que $\pi_1 \Delta^n(\mathfrak{U}_1) = \pi_1 D^n(\mathfrak{U}_1) + \pi_1 C_1^n(\mathfrak{U}_1) - \pi_1 C_2^n(\mathfrak{U}_1)$ est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle *essentiel* dans $\overline{P}_i$. Or le réseau $\mathfrak{U}$ est un affinement d'ordre $\leqq n \bmod S$ du réseau $\mathfrak{V}(P_i)$, d'où il résulte (v. 9.2) que $\pi_1 \Delta^n(\mathfrak{U}_1) = 0$. Or ceci donne $\pi_1 C_1^n(\mathfrak{U}_1) = \pi_1 C_2^n(\mathfrak{U}_1) \bmod A$, car $D^n(\mathfrak{U}_1) \subset A$ entraîne $\pi_1 D^n(\mathfrak{U}_1) \subset A$. II. Soit $\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_1$, $\Gamma_2^{n-1}(\mathfrak{U}_2) = \Gamma_1^{n-1}(\mathfrak{U}_1)$, $C_2^n(\mathfrak{U}_2) = C_1^n(\mathfrak{U}_1)$. On a alors $\pi_2 C_1^n(\mathfrak{U}_1) - \pi_1 C_1^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod A$ dans $\overline{P}_i$. Or le réseau $\mathfrak{U}_1$ est d'ordre $\leqq n \bmod S$ et aucun sommet de $\mathfrak{U}_1$ ne rencontre simultanément $\overline{P}_i$ et S; on en déduit sans peine que l'homologie précédente entraîne $\pi_2 C_1^n(\mathfrak{U}_1) = \pi_1 C_1^n(\mathfrak{U}_1) \bmod A$.

Ceci étant, passons à la démonstration du lemme L dans le cas général. Soit $\mathfrak{U}_3$ un affinement simultané des réseaux $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ normal relativement aux cycles dans $\overline{P}_i$; soit $\pi_3 = Pr.(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_3' = Pr.(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$. Soit $C_3^n(\mathfrak{U}_3)$ une $(n, \mathfrak{U}_3)$-chaîne dans $\overline{P}_i$ telle que $FC_3^n(\mathfrak{U}_3) = \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}_3)$. D'après I on a $\pi_1 C_1^n(\mathfrak{U}_1) = \pi_1 \pi_3 C_3^n(\mathfrak{U}_3) \bmod A$, $\pi_2 C_2^n(\mathfrak{U}_2) = \pi_2 \pi_3' C_3^n(\mathfrak{U}_3) \bmod A$; d'après II on a $\pi_1 \pi_3 C_3^n(\mathfrak{U}_3) = \pi_2 \pi_3' C_3^n(\mathfrak{U}_3) \bmod A$. Donc $\pi_1 C_1^n(\mathfrak{U}_1) = \pi_2 C_2^n(\mathfrak{U}_2) \bmod A$.

Le lemme L étant démontré, il reste à voir que les $(n, \mathfrak{U})$-chaînes $C^n(\mathfrak{U})$ construites plus haut pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$, jouissent des propriétés suivantes: 1° $C^n(\mathfrak{U}) \subset \overline{P}_1$; 2° $FC^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans $\overline{P}_i$; 3° si $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2 \in \Phi$, si $\mathfrak{U}_2$ est un affinement de $\mathfrak{U}_1$ et si $\pi = Pr.(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, on a $\pi C^n(\mathfrak{U}_2) = C^n(\mathfrak{U}_1) \bmod A$. Les propriétés 1° et 2° étant évidentes, démontrons 3°. A cet effet, soit $\mathfrak{U}_3$ un affinement simultané des réseaux $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ normal relativement aux cycles dans $\overline{P}_1$ et soit $\pi_3 = Pr.(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$. D'après le lemme L, on a $C^n(\mathfrak{U}_2) = \pi_3 C^n(\mathfrak{U}_3) \bmod A$, $C^n(\mathfrak{U}_1) = \pi\pi_3 C^n(\mathfrak{U}_3) \bmod A$, d'où $\pi C^n(\mathfrak{U}_2) = C^n(\mathfrak{U}_1) \bmod A$.

10.2. Étant donné un $(n-1, R)$-cycle Γ^{n-1} du type t_i $(i = 1, 2, 3)$ dans A, il peut exister *plusieurs* sommets P_i de $\mathfrak{P}_i$ tels que $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $\overline{P}_i$. Or, *si $i = 2$ ou $i = 3$, le cycle relatif C^n du n° 10.1 est indépendant du choix de P_i dans le sens suivant: Il existe un réseau $\mathfrak{W}$ tel que dans chaque affinement $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{W}$ qui soit d'ordre $\leqq n \bmod S$ le cycle relatif $C^n(\mathfrak{U})$ est bien déterminé à mod A près.*

Démonstration. Soient P_{i1}, P_{i2} deux choix de P_i et soient C_1^n, C_2^n les deux cycles relatifs correspondants. On a $\overline{P_{i1}\,P_{i2}} \supset A \neq 0$. Il existe donc (v. 9.3) un sommet P_{i-1} du réseau gén. $\mathfrak{P}_{i-1}$ tel que $P_{i1} + P_{i2} \subset P_{i-1}$. Il en résulte que Γ^{n-1} est un $(n-1, R)$-cycle du type t_{i-1} dans A, P_{i-1} étant le sommet correspondant de $\mathfrak{P}_{i-1}$. Soit C_0^n le cycle relatif correspondant. Soit $\mathfrak{W}$ un affinement simultané des trois réseaux $\mathfrak{V}(P_{i1})$, $\mathfrak{V}(P_{i2})$, $\mathfrak{V}(P_{i-1})$. Chacun des deux cycles relatifs C_1^n, C_2^n jouit évidemment des propriétés du cycle relatif C_0^n. Ces propriétés déterminant C_0^n univoquement, on a pour chaque affinement $\mathfrak{U}$ d'ordre $\leqq n \bmod S$ du réseau $\mathfrak{W}$ les relations $C_1^n(\mathfrak{U}) = C_2^n(\mathfrak{U}) = C_0^n(\mathfrak{U}) \bmod A$.

10.3. *Soit Γ^{n-1} un $(n-1, R)$-cycle du type t_i ($i = 2$ ou $i = 3$) dans A. Il existe un ensemble bicompact H tel que 1° $A \subset H \subset R - S$; 2° $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans H; 3° $H \subset \overline{P_i}$, où $P_i \in \mathfrak{P}_i$; 4° si K est un ensemble bicompact tel que $A \subset K \subset \overline{P'_i}$, $P'_i \in \mathfrak{P}_i$ et $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans K, alors $H \subset K$.*

La démonstration fera l'objet des n[os] 10.31—10.33. L'ensemble H est évidemment bien déterminé (v. aussi 10.4); nous l'appellerons le *porteur de l'homologie* $\Gamma^{n-1} \sim 0$.

10.31. LEMME. Soit Γ^{n-1} un $(n-1, R)$-cycle du type t_i ($i = 1, 2, 3$) dans A. Soit $A \subset B_1 B_2$, B_1 et B_2 étant des ensembles bicompacts tels que $B_1 + B_2 \subset \overline{P_i}$, $P_i \in \mathfrak{P}_i$. Soit $\Gamma^{n-1} \sim 0$ et dans B_1 et dans B_2. C^n étant le cycle relatif du n° 10.1, C^n est situé dans $B_1 B_2$.

Démonstration. Soit Φ la famille de tous les affinements $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{V}(P_i)$ d'ordre $\leqq n \bmod S$. On voit sans peine que $C^n(\mathfrak{U}) \subset B_1$ et $C^n(\mathfrak{U}) \subset B_2$ pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$. Il s'agit d'en déduire que $C^n(\mathfrak{U}) \subset B_1 B_2$. Soit donc $\mathfrak{U}$ un réseau donné de la famille Φ. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement de $\mathfrak{U}$ régulier (v. *Homologie*, III, 22 et 23) par rapport à $B_1 B_2$. Déduisons de $\mathfrak{V}$ un nouveau réseau $\mathfrak{W}$ de la manière suivante : Un sommet V de $\mathfrak{V}$ tel que $V B_1 B_2 \neq 0$ est un sommet de $\mathfrak{W}$; au lieu d'un sommet $V \in \mathfrak{V}$ tel que $V B_1 B_2 = 0$ le réseau $\mathfrak{W}$ possède deux sommets $V - B_1$ et $V - B_2$. Évidemment le réseau $\mathfrak{W}$ est un affinement de $\mathfrak{U}$ régulier par rapport à $B_1 B_2$; en outre $\mathfrak{W}$ possède la propriété suivante : Si $W \in \mathfrak{W}$, $W B_1 \neq 0$, $W B_2 \neq 0$, on a aussi $W B_1 B_2 \neq 0$. Soit $\mathfrak{U}_1 \in \Phi$ un affinement de $\mathfrak{W}$ qui soit en même temps un affinement de $\mathfrak{U}$ normal relativement aux cycles dans $\overline{P_i}$. Soit $\pi_1 = Pr.(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{W})$, $\pi_2 = Pr.(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$. D'après 10.1, on a $C^n(\mathfrak{U}) = \pi_2 \pi_1 C^n(\mathfrak{U}_1) \bmod A$. Puisque $C^n(\mathfrak{U}_1) \subset B_1$ et $C^n(\mathfrak{U}_1) \subset B_2$, chaque sommet de chaque simplexe de la $\mathfrak{U}_1$-chaîne $C^n(\mathfrak{U}_1)$ rencontre B_1 et B_2. Il en résulte que chaque sommet de chaque simplexe de la $\mathfrak{W}$-chaîne $\pi_1 C^n(\mathfrak{U}_1)$ rencontre B_1 et B_2, et par suite aussi $B_1 B_2$ d'après la propriété du réseau $\mathfrak{W}$. Le réseau $\mathfrak{W}$ étant régulier par rapport à $B_1 B_2$, il en résulte que $\pi_1 C^n(\mathfrak{U}_1) \subset B_1 B_2$, d'où $\pi_2 \pi_1 C^n(\mathfrak{U}_1) \subset B_1 B_2$ et par suite aussi $C^n(\mathfrak{U}) \subset B_1 B_2$.

10.32. LEMME. Soit Γ^{n-1} un $(n-1, R)$-cycle du type t_i ($i = 1, 2, 3$)

dans A. Soit $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{P}_i$, $P_i \in \mathfrak{P}_i$. Soit $\alpha > 0$ un nombre ordinal donné. A chaque nombre ordinal $\xi < \alpha$ soit attaché un ensemble bicompact B_ξ de manière que: 1° $B_0 = \bar{P}_i$; 2° Pour $\xi < \eta < \alpha$ on a $B_\xi \supset B_\eta$; 3° $A \subset B_\xi$ pour chaque $\xi < \alpha$; 4° $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans B_ξ pour chaque $\xi < \alpha$. Posons $B_\alpha = \prod_{\xi<\alpha} B_\xi$. Alors $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans B_α.

Démonstration. Soit C^n le cycle relatif du n° 10.1. Pour chaque $\xi < \alpha$ on a évidemment $C^n \subset B_\xi$. Soit Φ la famille de tous les affinements $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{B}(P_i)$ d'ordre $\leqq n \bmod S$. Soit $\mathfrak{U} \in \Phi$. Il s'agit de montrer que $C^n(\mathfrak{U}) \subset B_\alpha$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un rapetissement fort (v. [30]) de $\mathfrak{U}$. Évidemment $\mathfrak{U}_1 \in \Phi$. Soient U_ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ les sommets de $\mathfrak{U}$ et $U'_\nu \Subset U_\nu$ les sommets correspondants de $\mathfrak{U}_1$. En posant $\pi U'_\nu = U_\nu$, on a $\pi = Pr.(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U})$. D'après 10.1 on a $C^n(\mathfrak{U}) = \pi C^n(\mathfrak{U}_1) \bmod A$. Soit $(U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \cdots, U_{\nu_n})$ un simplexe de la chaîne $C^n(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{J} = \prod_{k=0}^{n} U_{\nu_k}$ son noyau. On doit montrer que $\mathfrak{J} B_\alpha \neq 0$. Ceci est clair si $\mathfrak{J} A \neq 0$, car $A \subset B_\alpha$. Supposons donc que $\mathfrak{J} A = 0$. Puisque $C^n(\mathfrak{U}) = \pi C^n(\mathfrak{U}_1) \bmod A$, la chaîne $C^n(\mathfrak{U}_1)$ contient le simplexe $\sigma^n = (U'_{\nu_0}, U'_{\nu_1}, \cdots, U'_{\nu_n})$. Pour chaque $\xi < \alpha$ le noyau de σ^n rencontre B_ξ, car $C^n(\mathfrak{U}_1) \subset B_\xi$. En posant $K = \prod_{k=0}^{n} U'_{\nu_k}$, K est un sous-ensemble bicompact de $\mathfrak{J}$ tel que $K B_\xi \neq 0$ pour chaque $\xi < \alpha$. $\{K B_\xi\}$ étant une suite monotone d'ensembles bicompacts et non vides, on a $\prod_{\xi<\alpha} K B_\xi = K B_\alpha \neq 0$, d'où $\mathfrak{J} B_\alpha \neq 0$.

10.33. Passons à la démonstration de l'énoncé du n° 10.3. Choisissons $P_i \in \mathfrak{P}_i$ de manière que $A \subset \bar{P}_i$, $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{P}_i$. Choisissons un nombre transfini β dont la puissance soit supérieure à celle de $R - S$ et définissons par récurrence une suite transfinie $\{B_\xi\}$ $(\xi < \beta)$ telle que: 1° les B_ξ sont des sous-ensembles bicompacts de $R - S$; 2° $B_\xi \supset B_\eta$ pour chaque $\xi < \eta < \beta$; 3° $B_0 = \bar{P}_i$; 4° $B_\xi \supset A$ pour chaque $\xi < \beta$; 5° $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans B_ξ pour chaque $\xi < \beta$. Soit $\eta > 0$ et $< \beta$ un nombre ordinal donné et supposons qu'on ait déjà défini les B_ξ pour tous les $\xi < \eta$. Deux cas sont à distinguer: *Premièrement* soit $\eta = \xi + 1$ un nombre de première espèce. Dans ce cas choisissons l'ensemble bicompact B_η de manière que $A \subset B_\eta \subset B_\xi$ et que $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans B_η; c'est vérifié en posant $B_\eta = B_\xi$; or *si cela est possible* choisissons $B_\eta \neq B_\xi$. *En second lieu* soit η un nombre de seconde espèce. Dans ce cas posons $B_\eta = \prod_{\xi<\eta} B_\xi$ ce qui est loisible en vertu du lemme du n° 10.32. La construction de la suite transfinie $\{B_\xi\}$ $(\xi < \beta)$ est ainsi achevée. De la propriété 2° résulte l'existence d'un nombre ordinal $\alpha < \beta$ tel que $B_\alpha = B_{\alpha+1}$. Posons $H = B_\alpha$. Les propriétés 1°, 2°, 3° du n° 10.3 sont évidentes. Soit donc K un ensemble bicompact tel que $A \subset K \subset \bar{P}'_i$, $P'_i \in \mathfrak{P}_i$ et $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans K; il s'agit de montrer que $H \subset K$. Puisque

$\overline{P}_i \overline{P}'_i \supset A \neq 0$, il existe (v. 9.3) un sommet P_{i-1} de $\mathfrak{P}_{i-1}$ tel que $\overline{P}_i + \overline{P}'_i \subset P_{i-1}$, d'où $H + K \subset P_{i-1}$. Puisque $\Gamma^{n-1} \sim 0$ et dans H et dans K, on a $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans HK en vertu du lemme du nº 10.31. Puisque $H = B_\alpha = B_{\alpha+1}$, on ne peut avoir $HK \neq H$ par la définition même de $B_{\alpha+1}$. Donc $HK = H$, c'est-à-dire $H \subset K$.

10.41. Soit Γ^{n-1} un $(n-1, R)$-cycle du type t_3 dans A. On peut alors considérer Γ^{n-1} aussi comme un $(n-1, R)$-cycle du type t_2 dans A. Evidemment ceci est sans influence sur le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$.

10.42. *Pour* $\nu = 1, 2$ *soit* Γ_ν^{n-1} *un* $(n-1, R)$*-cycle du type* t_2 *dans* A_ν *et soit* $\Gamma_\nu^{n-1} \sim 0$ *dans* $\overline{P}_2$, $P_2 \in \mathfrak{P}_2$; *soit* H_ν *le porteur de l'homologie* $\Gamma_\nu^{n-1} \sim 0$. *Soit* $\Gamma_1^{n-1} \sim \Gamma_2^{n-1}$ *dans* $A_1 + A_2$. *Alors* $H_1 - (A_1 + A_2) = H_2 - (A_1 + A_2)$.

Démonstration. Il existe un $(n-1, R)$-cycle Γ^{n-1} dans $A_1 + A_2$ tel que $\Gamma^{n-1} \sim \Gamma_\nu^{n-1}$ dans $A_1 + A_2$ $(\nu = 1, 2)$, $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $\overline{P}_2$. [Il suffit de poser p. ex. $\Gamma^{n-1} = \Gamma_1^{n-1}$.] Évidemment Γ^{n-1} est un $(n-1, R)$-cycle du type t_2 dans $A_1 + A_2$; soit H le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$. Il suffit de montrer que $H_1 + A_2 = H_2 + A_1 = H$. Or $H + H_1 + H_2 \subset \overline{P}_2$. On a $H \supset A_1 + A_2$, $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans H, $\Gamma^{n-1} \sim \Gamma_1^{n-1}$ dans $A_1 + A_2$, donc $\Gamma_1^{n-1} \sim 0$ dans H, d'où $H \supset H_1$ (par la définition de H_1), et par suite $H \supset H_1 + A_2$. D'autre part on a $\Gamma_1^{n-1} \sim 0$ dans H_1, donc aussi dans $H_1 + A_2 \supset A_1 + A_2$, et $\Gamma_1^{n-1} \sim \Gamma^{n-1}$ dans $A_1 + A_2$, donc $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $H_1 + A_2$, d'où $H_1 + A_2 \supset H$ (par la définition de H). Il est ainsi prouvé que $H_1 + A_2 = H$, et on prouve pareillement que $H_2 + A_1 = H$.

10.43. *Pour* $\nu = 1, 2$ *soit* Γ_ν^{n-1} *un* $(n-1, R)$*-cycle du type* t_3 *dans* A_ν. *Soit* H_ν *le porteur de l'homologie* $\Gamma_\nu^{n-1} \sim 0$. *Soit* $A_1 + A_2 \subset \overline{P}_3$, $P_3 \in \mathfrak{P}_3$. *Soit* $\Gamma_1^{n-1} \sim \Gamma_2^{n-1}$ *dans* $A_1 + A_2$. *Alors* $H_1 - (A_1 + A_2) = H_2 - (A_1 + A_2)$.

Démonstration. Soit $\Gamma_\nu^{n-1} \sim 0$ dans $\overline{P}_{3\nu}$, $P_{3\nu} \in \mathfrak{P}_3$ $(\nu = 1, 2)$. Alors $\overline{P}_3 \overline{P}_{3\nu} \supset A_\nu \neq 0$. Il existe donc (v. 9.3) un sommet P_2 de $\mathfrak{P}_2$ tel que $\overline{P}_3 + \overline{P}_{31} + \overline{P}_{32} \subset \overline{P}_2$. Il suffit donc d'appliquer 10.41 et 10.42.

10.44. *Soit* Γ^{n-1} *un* $(n-1, R)$*-cycle qui peut être considéré comme un cycle dans* A_1 *ou comme un cycle dans* A_2, *dans les deux cas du type* t_2. *Soit* H_ν $(\nu = 1, 2)$ *le porteur de l'homologie* $\Gamma^{n-1} \sim 0$, *en considérant* Γ^{n-1} *comme un cycle dans* A_ν. *Alors* $H_1 - (A_1 + A_2) = H_2 - (A_1 + A_2)$.

Démonstration. D'après la définition d'un $(n-1, R)$-cycle du type t_2, il existe un sommet $P_2 \in \mathfrak{P}_2$ tel que $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $\overline{P}_2$, d'où $A_1 + A_2 \subset \overline{P}_2$. Il suffit donc appliquer 10.42 en y posant $\Gamma_1^{n-1} = \Gamma_2^{n-1} = \Gamma^{n-1}$.

10.5. *Pour* $\nu = 1, 2$ *soit* Γ_ν^{n-1} *un* $(n-1, R)$*-cycle du type* t_3 *dans* A_ν. *Soit* H_ν *le porteur de l'homologie* $\Gamma_\nu^{n-1} \sim 0$. *Soit* $H_1 H_2 \neq 0$. *Soit* $c_\nu \in \mathfrak{R}$. *Alors* $c_1 \Gamma_1^{n-1} + c_2 \Gamma_2^{n-1}$ *est un* $(n-1, R)$*-cycle du type* t_2 *dans* $A_1 + A_2$ *et le porteur* H *de l'homologie* $c_1 \Gamma_1^{n-1} + c_2 \Gamma_2^{n-1} \sim 0$ *est contenu dans* $H_1 + H_2$.

Démonstration. Soit $\Gamma_\nu^{n-1} \sim 0$ dans $\overline{P}_{3\nu}$, $P_{3\nu} \in \mathfrak{P}_3$ $(\nu = 1, 2)$. Alors (v. 10.3) on a $\overline{P}_{3\nu} \supset H_\nu$, donc $\overline{P}_{31} \overline{P}_{32} \supset H_1 H_2 \neq 0$. Il existe donc (v. 9.3) un sommet P_2 de $\mathfrak{P}_2$ tel que $P_{31}+P_{32}\subset P_2$. Il en résulte que $A_1+A_2\subset\overline{P}_2$, $c_1\Gamma_1^{n-1}+c_2\Gamma_2^{n-1}\sim 0$ dans $\overline{P}_2$, de manière que $c_1\Gamma_1^{n-1}+c_2\Gamma_2^{n-1}$ est un $(n-1, R)$-cycle du type t_2 dans A_1+A_2. Puisque $c_1\Gamma_1^{n-1}+c_2\Gamma_2^{n-1}\sim 0$ dans $H_1+H_2\subset\overline{P}_{31}+\overline{P}_{32}\subset\overline{P}_2$, on a $H\subset H_1+H_2$ d'après 10.3.

11. Axiome D_1: *Soit Γ^{n-1} un $(n-1, R)$-cycle du type t_2 (ou t_3, v. 10.41) dans A. Soit H le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1}\sim 0$. L'ensemble $H-A$ est ouvert dans R (donc dans $R-S$).*

L'ensemble $H-A$ sera appelé l'*intérieur* du cycle Γ^{n-1}. La manière dont il dépend de A est éclaircie dans les n$^{\text{os}}$ 10.42 et 10.43.

11.1. *Soit Γ^{n-1} un $(n-1, R)$-cycle du type t_2 dans A. Soit H le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1}\sim 0$. Soit a un point de l'intérieur de Γ^{n-1}. Il existe un entourage W de a jouissant de la propriété suivante: A chaque entourage $V\subset W$ de a on peut attacher un $(n-1, R)$-cycle Δ^{n-1} du type t_2 dans $F(V)=\overline{V}-V$ tel que: 1° le porteur de l'homologie $\Delta^{n-1}\sim 0$ est $\overline{V}$ (de manière que le point a est à l'intérieur de Δ^{n-1}); 2° on a l'homologie $\Gamma^{n-1}\sim\Delta^{n-1}$ dans $H-V$. V étant donné, le cycle Δ^{n-1} est bien déterminé à une homologie dans $F(V)$ près.*

Démonstration. Soit W un entourage de a si petit que $W\Subset H-A$. W existe en vertu de l'axiome D_1. Soit V un entourage de a tel que $V\subset W$. Soit C^n le (n, R)-cycle relatif du n° 10.1. C'est donc un (n, R)-cycle mod A dans H. Soit N la famille complète de réseaux dans H qui s'obtient de la famille N définie dans *Homologie*, IV, 2, en y remplaçant R, R_1, R_2, $R_3=R_1R_2$, α, $\alpha_1=R_1\alpha$, $\alpha_2=R_2\alpha$, $\alpha_3=R_3\alpha$ respectivement par H, $\overline{V}$, $H-V$, $F(V)=\overline{V}(H-V)$ (car $V\Subset H$), A, 0 (car $\overline{V}A=0$), A, 0. Soit Ψ la famille de tous les réseaux $\mathfrak{U}$ dans R qui s'obtiennent d'un réseau $\mathfrak{V}\in N$ de la manière suivante: Soient $V_1, V_2, \cdots, V_m$ les sommets de $\mathfrak{V}$; d'après *Homologie*, III, 21 on peut déterminer des ensembles U_i $(1\leqq i\leqq m)$ ouverts dans R tels que $V_i=HU_i$ et que $\prod_{\nu=0}^{k}V_{i_\nu}=0$ entraîne $\prod_{0}^{k}U_i=0$; soient $U_{m+1}, U_{m+2}, \cdots, U_{m+s}$ les sommets d'un réseau arbitraire dans $R-H$: les sommets de $\mathfrak{U}$ sont $U_1, U_2, \cdots, U_{m+s}$. Ψ est évidemment une famille complète de réseaux dans R et les réseaux de la famille N sont les intersections de ceux de la famille Ψ avec l'espace H. Pour chaque $\mathfrak{U}\in\Psi$, on peut poser (*Homologie*, IV, 6, où l'on remplace n par $n-1$) $C^n(\mathfrak{U})=K_1^n(\mathfrak{U})-K_2^n(\mathfrak{U})$, les $(n, \mathfrak{U})$-chaînes $K_1^n(\mathfrak{U})$ et $K_2^n(\mathfrak{U})$ étant telles que $K_1^n(\mathfrak{U})\subset\overline{V}$, $K_2^n(\mathfrak{U})\subset H-V$, et on peut définir un $(n-1, \mathfrak{U})$-cycle absolu dans $F(V)$: $\Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ tel que $K_1^n(\mathfrak{U})\rightarrow\Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$, $K_2^n(\mathfrak{U})\rightarrow\Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ mod A. Les $\Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ définissent (v. *Homologie*, IV, 13) un $(n-1, R)$-cycle Δ^{n-1} dans $F(V)$. Puisque $K_1^n(\mathfrak{U})\subset\overline{V}$, on a $\Delta^{n-1}\sim 0$ dans $\overline{V}\subset H\subset\overline{P}_2$, $P_2\in\mathfrak{P}_2$. Δ^{n-1} est donc un $(n-1, R)$-cycle du type t_2 dans $F(V)$ et, H_0 étant le porteur de l'homologie $\Delta^{n-1}\sim 0$, on a $H_0\subset\overline{V}$. D'après 10.3, on a pour chaque $\mathfrak{U} \in \Psi$: $\Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}) \sim FC^n(\mathfrak{U}) = FK_1^n(\mathfrak{U}) - FK_2^n(\mathfrak{U})$ dans A. Or $FK_1^n(\mathfrak{U}) = \Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ et $K_2^n(\mathfrak{U}) \subset H - V$, d'où $FK_2^n(\mathfrak{U}) \subset H - \bar{V}$; enfin $A \subset H - V$. Donc $\Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}) \sim \Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans $H - V$ pour chaque $\mathfrak{U} \in \Psi$, d'où $\Gamma^{n-1} \sim \Delta^{n-1}$ dans $H - V$. Si Δ_1^{n-1} est un autre $(n-1, R)$-cycle dans $F(V)$ tel que $\Delta_1^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{V}$ et $\Gamma^{n-1} \sim \Delta_1^{n-1}$ dans $H - V$, on a $\Delta^{n-1} - \Delta_1^{n-1} \sim 0$ et dans $\bar{V}$ et dans $H - V$. Puisque $\bar{V} + (H - V) = H \subset P_2$, $P_2 \in \mathfrak{P}_2$, $\Delta^{n-1} - \Delta_1^{n-1}$ est un $(n-1, R)$-cycle du type t_2 dans $F(V)$ et, H_1 étant le porteur de l'homologie $\Delta^{n-1} - \Delta_1^{n-1} \sim 0$, on a $H_1 \subset \bar{V}$ et $H_1 \subset H - V$, d'où $H_1 \subset F(V)$ et par suite $\Delta^{n-1} \sim \Delta_1^{n-1}$ dans $F(V)$. Le cycle Δ^{n-1} est donc bien déterminé à une homologie dans $F(V)$ près. On doit encore démontrer que $H_0 = \bar{V}$. (Nous savons déjà que $H_0 \subset \bar{V}$.) D'après la définition de H_0, il existe pour chaque $\mathfrak{U} \in \Psi$ une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $L^n(\mathfrak{U}) \subset H_0$ telle que $L^n(\mathfrak{U}) \to \Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$. Or $K_1^n(\mathfrak{U}) \to \Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ et

$$FC^n(\mathfrak{U}) = FK_1^n(\mathfrak{U}) - FK_2^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$$

dans A, de manière qu'il existe une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $M^n(\mathfrak{U})$ telle que $K_1^n(\mathfrak{U}) - K_2^n(\mathfrak{U}) \to \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}) + FM^n(\mathfrak{U})$. Il en résulte que $L^n(\mathfrak{U}) - K_2^n(\mathfrak{U}) - FM^n(\mathfrak{U}) \to \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ pour chaque $\mathfrak{U} \in \Psi$. Or, $L^n(\mathfrak{U}) \subset H_0$, $K_2^n(\mathfrak{U}) \subset H - V$, $FM^n(\mathfrak{U}) \subset A \subset H - V$, de manière que $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $H_0 + (H - V) \subset H$. H étant le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$, on a donc $H_0 + (H - V) = H$, d'où $V = H - (H - V) \subset H_0$ et par suite, H_0 étant fermé, $\bar{V} \subset H_0$. Comme nous savons que $H_0 \subset \bar{V}$, nous arrivons bien à la conclusion $\bar{V} = H_0$.

12. Axiome D_2: *Chaque point $a \in R - S$ est intérieur à un $(n-1, R)$-cycle du type t_2.*

12.1. *Chaque point $a \in R - S$ possède un entourage W_0 jouissant de la propriété suivante: Si $V \subset W_0$ est un entourage de a, il existe un $(n-1, R)$-cycle Δ^{n-1} du type t_3 dans $F(V)$ tel que le porteur de l'homologie $\Delta^{n-1} \sim 0$ soit $\bar{V}$.* (Le point a est par suite à l'intérieur de Δ^{n-1}).

Démonstration. Soit P_3 un sommet de réseau gén. $\mathfrak{P}_3$ contenant le point a. En vertu de l'axiome D_2, il existe un ensemble bicompact $A \subset R - S - (a)$ et un $(n-1, R)$-cycle Γ^{n-1} du type t_2 dans A tel que le point a appartienne à l'intérieur de Γ^{n-1}. Déterminons W d'après 11.1 et posons $W_0 = WP_3$. Pour chaque $V \subset W_0 \subset W$, on a, d'après 11.1, un $(n-1, R)$-cycle Δ^{n-1} du type t_2 dans $F(V)$, tel que le porteur de l'homologie $\Delta^{n-1} \sim 0$ soit $\bar{V}$. Puisque $\Delta^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{V} \subset P_3$, Δ^{n-1} est un $(n-1, R)$-cycle du type t_3 dans $F(V)$.

12.2. *La dimension de l'espace $R - S$ en chaque point a est égale à n.*

Démonstration. D'après l'axiome A_4 (nº 7) on a $\dim_a(R - S) \leq n$. Supposons par impossible qu'on ait $\dim_a(R - S) < n$. Le point a possède alors des entourages V arbitrairement petits tels que $\dim F(V) \leq n - 2$. La famille Ψ de tous les réseaux $\mathfrak{U}$ tels que les dimensions des $\mathfrak{U}$-simplexes dont le noyau rencontre $F(V)$ sont $\leqq n-2$ est alors une famille complète. D'autre part, si V est suffisamment petit, il existe d'après 12.1 un $(n-1, R)$-cycle Δ^{n-1} dans $F(V)$ tel que $\Delta^{n-1} \not\sim 0$ dans $F(V)$. Or pour tous les réseaux $\mathfrak{U} \in \Psi$ on a évidemment $\Delta^{n-1}(\mathfrak{U}) = 0$ ce qui est une contradiction.

13. Axiome E: *A chaque point $a \in R - S$ et à chaque entourage Q de a on peut attacher un entourage $Q_1 \subset Q$ jouissant de la propriété suivante: Pour chaque entourage Q_2 de a tel que $Q_2 \subset Q_1$ il existe un entourage Q_3 de a tel que: 1° $Q_3 \subset Q_2$; 2° si les $(n-1, R)$-cycles Γ_1^{n-1}, Γ_2^{n-1} sont situés dans $\bar{Q}_1 - Q_2$ et sont homologues à zéro dans $\bar{Q}_1$, il existe deux nombres r_1, $r_2 \in \mathfrak{R}$, dont un au moins $\neq 0$, tels que $r_1 \Gamma_1^{n-1} + r_2 \Gamma_2^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{Q} - Q_3$.*

13.1. De l'axiome E on déduit d'après 4.2: *$\mathfrak{Q}$ étant un réseau gén. donné, il existe un affinement $\mathfrak{Q}_1$ de $\mathfrak{Q}$ et une projection $\pi = Pr.(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q})$ qui jouissent de la propriété suivante: $\mathfrak{Q}_2$ étant un affinement quelconque de $\mathfrak{Q}_1$, on peut déterminer un affinement $\mathfrak{Q}_3$ de $\mathfrak{Q}_2$ ainsi qu'une projection $\pi' = Pr.(\mathfrak{Q}_3, \mathfrak{Q}_2)$ de manière que l'énoncé suivant soit vrai: Pour chaque sommet Q_3 de $\mathfrak{Q}_3$ et pour chaque sommet Q_1 de $\mathfrak{Q}_1$ tel que $Q_1 \supset \pi' Q_3$ on peut attacher à chaque couple de $(n-1, R)$-cycles Γ_1^{n-1}, Γ_2^{n-1} situés dans $\bar{Q}_1 - \pi' Q_3$ et homologues à zéro dans $\bar{Q}_1$ un couple de nombres r_1, $r_2 \in \mathfrak{R}$ dont un au moins $\neq 0$, tels que $r_1 \Gamma_1^{n-1} + r_2 \Gamma_2^{n-1} \sim 0$ dans $\overline{\pi Q_1} - Q_3$.*

14.1. *Soit $a \in R - S$; soit U un entourage de a. Il existe un entourage $V \subset U$ de a jouissant de la propriété suivante: A chaque couple C_1^n, C_2^n de (n, R)-cycles mod $(R - U)$ on peut attacher deux nombres r_1, $r_2 \in \mathfrak{R}$, dont un au moins $\neq 0$, tels que $r_1 C_1^n + r_2 C_2^n \sim 0$ mod $(R - V)$.*

Démonstration. Soit $Q \Subset U$ un entourage de a si petit que $Q \subset P_2 \in \mathfrak{P}_2$ (v. 9.3). Q étant donné, déterminons un entourage $Q_1 \subset Q$ d'après l'axiome E. Choisissons l'entourage $Q_2 \subset Q_1$ de a arbitrairement et déterminons l'entourage $Q_3 \subset Q_2$ de a d'après l'axiome E.

Soit Ψ la famille complète de réseaux dans R qui s'obtient de la famille N définie dans *Homologie,* IV, 2 en y remplaçant R, R_1, R_2, $R_3 = R_1 R_2$, α, $\alpha_1 = R_1 \alpha$, $\alpha_2 = R_2 \alpha$, $\alpha_3 = R_3 \alpha$ respectivement par R, $\bar{Q}_1$, $R - Q_1$, $F(Q_1)$, $R - U$, 0, $R - U$, 0. Soit $\nu = 1, 2$. D'après l. c. nº 6 (où l'on remplace C^{n+1} par C_ν^n) il existe pour chaque $\mathfrak{U} \in \Psi$ deux $(n, \mathfrak{U})$-chaînes $K_\nu^n(\mathfrak{U}) \subset \bar{Q}_1$, $L_\nu^n(\mathfrak{U}) \subset R - Q_1$ telles que $C_\nu^n(\mathfrak{U}) = K_\nu^n(\mathfrak{U}) - L_\nu^n(\mathfrak{U})$ et un $(n-1, \mathfrak{U})$-cycle $\Gamma_\nu^{n-1}(\mathfrak{U}) \subset F(Q_1)$ tel que $K_\nu^n(\mathfrak{U}) \to \Gamma_\nu^{n-1}(\mathfrak{U})$. D'après l. c. nº 13 $\Gamma_\nu^{n-1}(\mathfrak{U})$ définissent un $(n-1, R)$-cycle Γ_ν^{n-1} dans $F(Q_1)$. Comme $K_\nu^n(\mathfrak{U}) \subset \bar{Q}_1$, on a $\Gamma_\nu^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{Q}_1$. Puisque les cycles Γ_ν^{n-1} sont situés dans $F(Q_1) \subset \bar{Q}_1 - Q_2$, il résulte de l'axiome E l'existence de deux nombres r_1, $r_2 \in \mathfrak{R}$, dont un au moins $\neq 0$, tels que $r_1 \Gamma_1^{n-1} + r_2 \Gamma_2^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{Q} - Q_3$.

Soit $\mathfrak{U} \in \Psi$ un réseau donné. On doit montrer que $r_1 C_1^n(\mathfrak{U}) + r_2 C_2^n(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod $(R - V)$. Soit $\mathfrak{B}$ un affinement de $\mathfrak{U}$ tel que $\Delta^n(\mathfrak{B}) = 0$ pour chaque $(n, \mathfrak{B})$-cycle essentiel dans $\bar{P}_2$. [$\mathfrak{B}$ existe en vertu de 9.2.] Soit $\mathfrak{U}' \in \Psi$ un affinement de $\mathfrak{B}$ normal relativement aux cycles dans $\bar{P}_2$. Soit $\pi = Pr.(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, $\pi' = Pr.(\mathfrak{U}', \mathfrak{B})$. D'après l'homologie $r_1 \Gamma_1^{n-1} + r_2 \Gamma_2^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{Q} - Q_3$, il existe une $(n, \mathfrak{U}')$-chaîne $D^n(\mathfrak{U}')$ dans $\bar{Q} - Q_3$ telle que $D^n(\mathfrak{U}') \to r_1 \Gamma_1^{n-1}(\mathfrak{U}') + r_2 \Gamma_2^{n-1}(\mathfrak{U}')$. Comme $\Gamma_\nu^{n-1}(\mathfrak{U}') = FK_\nu^n(\mathfrak{U}')$ $(\nu = 1, 2)$, on a $D^n(\mathfrak{U}') - r_1 K_1^n(\mathfrak{U}') - r_2 K_2^n(\mathfrak{U}') \to 0$. Le premier membre de cette relation est un $(n, \mathfrak{U}')$-cycle dans $(\bar{Q} - Q_3) + \bar{Q}_1 \subset \bar{Q} \subset \bar{P}_2$. Donc $\pi'[D^n(\mathfrak{U}') - r_1 K_1^n(\mathfrak{U}') - r_2 K_2^n(\mathfrak{U}')]$ est un $(n, \mathfrak{B})$-cycle essentiel dans P_2 et il est par suite égal à zéro. Donc on a aussi

$$\pi\pi'[r_1 K_1^n(\mathfrak{U}') + r_2 K_2^n(\mathfrak{U}')] = \pi\pi' D^n(\mathfrak{U}') \subset \bar{Q} - Q_3 \subset R - Q_3.$$

D'autre part, on a aussi $K_\nu^n(\mathfrak{U}') - C_\nu^n(\mathfrak{U}') = L_\nu^n(\mathfrak{U}') \subset R - Q_1 \subset R - Q_3$. Donc

$$\pi\pi'[r_1 C_1^n(\mathfrak{U}') + r_2 C_2^n(\mathfrak{U}')] = 0 \mod (R - Q_3).$$

Or $\pi\pi' C_\nu^n(\mathfrak{U}') \sim C_\nu^n(\mathfrak{U}) \mod (R - U) \subset R - Q_3$, car C_ν^n est un (n, R)-cycle $\mod (R - U)$. Donc

$$r_1 C_1^n(\mathfrak{U}) + r_2 C_2^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \mod (R - Q_3)$$

pour chaque $\mathfrak{U} \in \Psi$. Il suffit donc de poser $V = Q_3$.

14.2. De 14.1 on déduit d'après 4.2 : *$\mathfrak{P}$ étant un réseau gén., il existe un affinement $\mathfrak{Q}$ de $\mathfrak{P}$ et une projection $\pi = Pr.(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P})$ jouissant de la propriété suivante : Si $Q \in \mathfrak{Q}$ et si C_1^n, C_2^n sont deux (n, R)-cycles mod $(R - \pi Q)$, il existe deux nombres $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$, dont un au moins $\neq 0$, tels que $r_1 C_1^n + r_2 C_2^n \sim 0$ mod $(R - Q)$.*

15. Soit $a \in R - S$. Soit $\Theta_i(a)$ $(i = 2, 3)$ la famille de tous les $(n-1, R)$-cycles du type t_i dans A, A étant assujetti à la condition de ne pas contenir a. *Orienter l'espace $R - S$ au point a* signifie que l'on attache à chaque $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$ un nombre $\omega(a, \Gamma^{n-1}) \in \mathfrak{R}$ tel que 1° $\omega(a, \Gamma^{n-1}) = 0$ si et seulement si le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$ ne contient pas a; 2° pour $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$, $r \in \mathfrak{R}$ on a $\omega(a, r\Gamma^{n-1}) = r\omega(a, \Gamma^{n-1})$; 3° si $\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}, \Gamma_1^{n-1} + \Gamma_2^{n-1} \in \Theta_2(a)$, on a $\omega(a, \Gamma_1^{n-1} + \Gamma_2^{n-1}) = \omega(a, \Gamma_1^{n-1}) + \omega(a, \Gamma_2^{n-1})$.

Remarque 1. Si $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$ en le considérant comme un $(n-1, R)$-cycle du type t_2 dans A_1 ou A_2, le nombre $\omega(a, \Gamma^{n-1})$ doit être le même dans les deux cas. Ceci est d'accord avec la condition 1° (v. 10.44).

Remarque 2. Si $\Gamma^{n-1} \in \Theta_i(a)$ $(i = 2, 3)$, $r \in \mathfrak{R}$, évidemment $r\Gamma^{n-1} \in \Theta_i(a)$.

Remarque 3. Si $\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1} \in \Theta_3(a)$ et si $\omega(a, \Gamma_1^{n-1}) \neq 0$, $\omega(a, \Gamma_2^{n-1}) \neq 0$, $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$, on a $r_1 \Gamma_1^{n-1} + r_2 \Gamma_2^{n-1} \in \Theta_2(a)$. *Démonstration.* Soit $(\nu = 1, 2)$ H_ν le porteur de l'homologie $\Gamma_\nu^{n-1} \sim 0$. D'après 1° $a \in H_1 H_2$. Il suffit donc d'appliquer 10.5.

15.1 *Le point $a \in R - S$ étant donné, il est possible d'orienter $R - S$ en a. Si ω_1, ω_2 sont deux orientations de $R - S$ en a, il existe un nombre $s \in \mathfrak{R}$, $s \neq 0$, tel que $\omega_2(a, \Gamma_{n-1}) = s\omega_1(a, \Gamma^{n-1})$ pour chaque $\Gamma_{n-1} \in \Theta_2(a)$. Inver-*

sement, si ω_1 *est une orientation donnée de* $R-S$ *en* a *et si* $s \in \Re$, $s \neq 0$, *on obtient une orientation* ω_2 *de* $R-S$ *en* a *en posant* $\omega_2(a, \Gamma^{n-1}) = s\,\omega_1(a, \Gamma^{n-1})$ *pour chaque* $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$.

Démonstration. D'après l'axiome D_2 (v. 12) il existe un $(n-1, R)$-cycle Γ_0^{n-1} du type t_2 dans A_0 dont l'intérieur $H_0 - A_0$ contient le point a. Choisissons l'entourage W de a correspondant au cycle Γ_0^{n-1} d'après 11.1. Soit P_3 un sommet du réseau gén. $\mathfrak{P}_3$ (v. 9.3) contenant a. Soit $\mathcal{A}$ la famille de tous les entourages V de a tels que $V \subset WP_3$. A chaque $V \in \mathcal{A}$ correspond d'après 11.1 un $(n-1, R)$-cycle $\Delta^{n-1}(V)$ du type t_2 dans $F(V)$ tel que : 1° le porteur de l'homologie $\Delta^{n-1}(V) \sim 0$ est $\overline{V}$; 2° on a l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim \Delta^{n-1}(V)$ dans $H_0 - V$. D'ailleurs, comme $\overline{V} \subset \overline{P}_3$, les cycles $\Delta^{n-1}(V)$ sont du type t_3. Si $V_1, V_2 \in \mathcal{A}$; $V_2 \subset V_1$, on a $\Delta^{n-1}(V_2) - \Delta^{n-1}(V_1) \sim 0$ dans $\overline{V}_1 + \overline{V}_2 = \overline{V}_1 \subset \overline{P}_3$, de manière que $\Delta^{n-1}(V_2) - \Delta^{n-1}(V_1)$ est un cycle du type t_2 (et aussi du type t_3) et le porteur H_{12} de l'homologie $\Delta^{n-1}(V_2) - \Delta^{n-1}(V_1) \sim 0$ satisfait à la condition $H_{12} \subset \overline{V}_1$. D'autre part, on a $\Gamma^{n-1} \sim \Delta^{n-1}(V_1)$ dans $H_0 - V_1 \subset H_0 - V_2$ et $\Gamma^{n-1} \sim \Delta^{n-1}(V_2)$ dans $H_0 - V_2$, d'où $\Delta^{n-1}(V_2) - \Delta^{n-1}(V_1) \sim 0$ dans $H_0 - V_2 \subset H_0 \subset \overline{P}_2$, où $P_2 \in \mathfrak{P}_2$ (car Γ_0^{n-1} est un cycle du type t_2), et par suite $H_{12} \subset H_0 - V_2$. On a donc la relation $H_{12} \subset \overline{V}_1 - V_2$ de manière que le point a n'est pas à l'intérieur de $\Delta^{n-1}(V_2) - \Delta^{n-1}(V_1)$. Donc on a, dans chaque orientation ω de l'espace $R-S$ en a, la relation $\omega[a, \Delta^{n-1}(V_2) - \Delta^{n-1}(V_1)] = 0$. Il en résulte que le nombre $s = \omega[a, \Delta^{n-1}(V)] \in \Re$ est indépendant du choix de $V \in \mathcal{A}$. Comme le point a est situé à l'intérieur V du cycle $\Delta^{n-1}(V)$, on a $s \neq 0$.

Soit maintenant $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$. Γ^{n-1} est un $(n-1, R)$-cycle du type t_2 dans A; soit H le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$. On a $a \in R - A$. Si $a \in R - H$, on a $\omega(a, \Gamma^{n-1}) = 0$. Si $a \in H$, on a $a \in H - A$. L'ensemble $H - A$ étant ouvert (v. 11), il existe un $V \in \mathcal{A}$ tel que $V \subset H - A$. Si V est suffisamment petit, d'après 11.1 il existe un $(n-1, R)$-cycle ${}^*\Delta^{n-1}(V)$ du type t_3 dans $F(V)$ tel que $\Gamma^{n-1} \sim {}^*\Delta^{n-1}(V)$ dans $H-V$ d'où $\omega[a, \Gamma^{n-1} - {}^*\Delta^{n-1}(V)] = 0$ et par suite $\omega(a, \Gamma^{n-1}) = \omega[a, {}^*\Delta^{n-1}(V)]$. Le porteur de l'homologie ${}^*\Delta^{n-1}(V)$ est $\overline{V}$. Puisque $\Delta^{n-1}(V)$, ${}^*\Delta^{n-1}(V)$ sont deux cycles dans $F(V)$ homologues à zéro dans $\overline{V}$, il résulte de l'axiome E (v. 13) que, si V est suffisamment petit, il existe un entourage Q_3 de a ainsi que deux nombres $r_1, r_2 \in \Re$ dont au moins un est $\neq 0$ tels que $r_1 \Delta^{n-1}(V) + r_2 {}^*\Delta^{n-1}(V) \sim 0$ dans $H - Q_3$. Donc $\omega[a, r_1 \Delta^{n-1}(V) + r_2 {}^*\Delta^{n-1}(V)] = 0$, d'où $r_1 s + r_2 \omega[a, {}^*\Delta^{n-1}(V)] = 0$. Si l'on avait $r_2 = 0$, on aurait $r_1 \neq 0$, $r_1 s = 0$, d'où la contradiction $s = 0$. Donc $r_2 \neq 0$ et $\omega(a, \Gamma^{n-1}) = \omega[a, {}^*\Delta^{n-1}(V)] = -\dfrac{r_1 s}{r_2}$.

On voit que l'orientation ω, *si elle existe,* est complètement déterminée par la connaissance du nombre s. Il s'agit encore de voir qu'on arrive ainsi effectivement à une orientation. En premier lieu, on doit prouver que le nombre $\omega(a, \Gamma^{n-1})$ est déterminé sans aucune ambiguité. Or si l'entourage V est fixe, le rapport $r_1 : r_2$ dans la relation $r_1\,\Delta^{n-1}(V) + r_2\,{}^*\Delta^{n-1}(V) \sim 0$ dans $H - Q_3$, est bien déterminé, car autrement on arriverait à la contradiction $\Delta^{n-1}(V) \sim 0$ dans $H - Q_3$ (c'est une contradiction, car $H - Q_3$ ne contient pas le porteur $\overline{V}$ de l'homologie $\Delta^{n-1}(V) \sim 0$). D'autre part, si $V_1, V_2 \in \mathcal{A}$; $V_1 \supset V_2$, nous avons vu que $\Delta^{n-1}(V_2) - \Delta^{n-1}(V_1) \sim 0$ dans $\overline{V}_1 - V_2$; et si V_1 est suffisamment petit, on a tout pareillement ${}^*\Delta^{n-1}(V_2) - {}^*\Delta^{n-1}(V_1) \sim 0$ dans $\overline{V}_1 - V_2$, de manière que la relation $r_1\,\Delta^{n-1}(V_2) + r_2\,{}^*\Delta^{n-1}(V_2) \sim 0$ dans $H - Q_3$ $(Q_3 \subset V_2)$ entraîne $r_1\,\Delta^{n-1}(V_1) + r_2\,{}^*\Delta^{n-1}(V_1) \sim 0$ dans $H - Q_3$. Enfin on vérifie sans peine que le nombre $\omega(a, \Gamma^{n-1})$ satisfait aux conditions 1°, 2°, 3° du n° 15.

16. Axiome F: *L'espace $R - S$ est orientable, c'est-à-dire il existe une orientation ω de $R - S$ simultanée (en tous ses points) jouissant de la propriété suivante: Si $a \in R - S$, $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$, il existe un entourage U de a tel que $x \in U$ entraîne $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(x)$ et $\omega(x, \Gamma^{n-1}) = \omega(a, \Gamma^{n-1})$.*

Dans tout ce qui suit, on suppose que l'espace $R - S$ soit orienté, c'est-à-dire que l'on en ait choisi une orientation ω bien déterminé (jouissant de la propriété qui vient d'être énoncée).

16.1. *Dans la théorie* mod 2 *l'axiome F est superflu et l'orientation de $R - S$ est possible d'une seule manière.*

Démonstration. Soit $\Gamma^{n-1} \in \Theta_2(a)$ un $(n-1, R)$-cycle du type t_2 dans A; soit H le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$. Il n'y a que deux possibilités: 1° $a \in R - S - H$; alors $\omega(x, \Gamma^{n-1}) = \omega(a, \Gamma^{n-1}) = 0$ pour tous les $x \in R - S - H$, ce qui est un entourage de a; 2° $a \in H - A$, alors $\omega(x, \Gamma^{n-1}) = \omega(a, \Gamma^{n-1}) = 1$ pour tous les $x \in H - A$ ce qui est (v. 11) un entourage de a.

17. Nous allons construire un certain (n, R)-cycle mod S dans R, dit *cycle principal* que nous désignerons par G^n.

17.1. D'après l'axiome D_2 (v. 12 et 12.1) on peut attacher à chaque point b de $R - S$ un $(n-1, R)$-cycle Γ^{n-1} du type t_3 dans A, de manière que $b \in H - A$, où H est le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$. Les $H - A$ étant des sous-ensembles ouverts de $R - S$, d'après 4.2 et 4.3 il existe une suite $\{M_i\}$ d'ensembles ouverts constituant un réseau gén. $\mathfrak{M}$ et une suite $\{b_i\}$ de points de $R - S$ telle que, si on désigne par Γ_i^{n-1}, A_i, H_i les Γ^{n-1}, A, H correspondant au point b_i, on ait $M_i \Subset H_i - A_i$ pour chaque i. D'après 10.1 à chaque Γ_i^{n-1} correspond un (n, R)-cycle C_i^n mod A_i dans H_i. Déterminons un affinement $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$ jouissant de la propriété du n° 4.4.

17.11. Ceci étant donné à chaque point $a \in R - S$ attachons un entourage $P \Subset R - S$ si petit qu'il satisfasse aux cinq conditions suivantes: 1° $a \in N \in \mathfrak{N}$ entraîne $P \subset N$; 2° $a \in H_i - A_i$ entraîne que pour chaque $x \in P$ on a $x \in H_i - A_i$

et $\omega(x, \Gamma_i^{n-1}) = \omega(a, \Gamma_i^{n-1})$; 3° $a \in M_i$ entraîne $P \subset M_i$; 4° $a \in R - \bar{M}_i$ entraîne $P \subset R - \bar{M}_i$[33] ; 5° pour chaque couple d'indices i, j $(i \neq j)$ tel que $a \in M_i M_j$ posons $\omega_{ai} = \omega(a, \Gamma_i^{n-1})$, $\omega_{aj} = \omega(a, \Gamma_j^{n-1})$; comme $\omega_{ai} \neq 0$, $\omega_{aj} \neq 0$ [car $a \in M_i M_j \subset (H_i - A_i)(H_j - A_j)$] et comme $\Gamma_i^{n-1}, \Gamma_j^{n-1} \in \Theta_3(a)$, on a $\omega_{aj}\Gamma_i^{n-1} - \omega_{ai}\Gamma_j^{n-1} = \Gamma_{aij}^{n-1} \in \Theta_2(a)$ (v. 15, remarque 3) ; donc $\omega(a, \Gamma_{aij}^{n-1}) = \omega_{aj}\,\omega(a, \Gamma_i^{n-1}) - \omega_{ai}\,\omega(a, \Gamma_j^{n-1}) = 0$ de manière que le porteur H_{aij} de l'homologie $\Gamma_{aij}^{n-1} \sim 0$ ne contient pas le point a ; choisissons alors P de manière que $\bar{P} H_{aij} \neq 0$.

17.12. D'après 4.2 on peut déterminer une suite $\{a_\nu\}$ de points de $R - S$ telle que les ensembles $P = P_\nu$ correspondant aux points $a = a_\nu$ constituent un réseau gén. $\mathfrak{P}$[34]. Pour chaque couple ν, i tel que $a_\nu \in M_i$ posons $\omega_{\nu i} = \omega(a_\nu, \Gamma_i^{n-1}) \in \mathfrak{R}$ de manière qu'alors (d'après 2° et d'après l'inclusion $M_i \subset H_i - A_i$) $0 \neq \omega_{\nu i} = \omega(x, \Gamma_i^{n-1})$ pour chaque $x \in P_\nu$. Pour ν, i, j tels que $i \neq j$, $a_\nu \in M_i M_j$ soit $H_{\nu ij}$ le porteur de l'homologie $\omega_{\nu j}\Gamma_i^{n-1} - \omega_{\nu i}\Gamma_j^{n-1} \sim 0$ de manière qu'alors (en vertu de 5°) $\bar{P}_\nu H_{\nu ij} = 0$.

17.13. Soit Φ_2 la famille de tous les réseaux $\mathfrak{U}$ de la famille Φ_1 du n° 7.4 qui soient des affinements mod S de $\mathfrak{P}$. Φ_2 est (v. 5.4 et 7.4) une famille parfaitement complète de réseaux dans R. En remarquant qu'un sous-ensemble bicompact de $R - S$ ne peut rencontrer qu'un nombre fini de fermetures de sommets d'un réseau gén., on démontre sans peine (cf. la démonstration de 7.3) que la famille Ψ est aussi parfaitement complète si Ψ désigne la famille de tous les réseaux $\mathfrak{U} \in \Phi_2$ satisfaisant aux deux propriétés suivantes : 1° P_2^* étant un sommet quelconque du réseau gén. $\mathfrak{P}_2$ (v. 9.3), ou bien aucun sommet intérieur de $\mathfrak{U}$ ne rencontre $\bar{P}_2^*$, ou bien $\mathfrak{U}$ est un affinement du réseau $\mathfrak{V}(P_2^*)$ du théorème 10.1 ; 2° pour $i = 1, 2, 3, \cdots$ aucun sommet intérieur de $\mathfrak{U}$ ne rencontre simultanément les deux ensembles $\bar{M}_i$ et A_i[35].

17.14. Ceci étant donné soient $\mathfrak{U} \in \Psi$ et σ_k^n $(1 \leq k \leq m)$ tous les $(n, \mathfrak{U})$-simplexes $\neq 0 \bmod S$. Le réseau $\mathfrak{U}$ étant régulier par rapport à S (v. 5.5 et 7.4) un sommet au moins de chaque σ_k^n est un sommet intérieur de $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{J}_k$ étant le noyau de σ_k^n, il existe donc (par définition même de la famille $\Phi_2 \supset \Psi$) un indice ν tel que $\mathfrak{J}_k \subset P_\nu$. $\mathfrak{M}$ étant un réseau gén., il existe un indice i tel que $a_\nu \in M_i$, d'où $P_\nu \subset M_i$ en vertu de la condition 3° pour les P_ν. Le nombre $\omega_{\nu i} \in \mathfrak{R}$ étant $\neq 0$, il existe un nombre $r_k \in \mathfrak{R}$ tel que le coefficient du simplexe σ_k^n dans la $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $C_i^n(\mathfrak{U})$ soit $r_k\,\omega_{\nu i}$[36].

---

[33] Comme au n° 4.4, on voit que toutes ces conditions sont simultanément réalisables.

[34] En réalité, du théorème 4.2 résulte seulement l'existence d'une suite $\{Q_\nu\}$ constituant un réseau telle que chaque Q_ν fasse partie d'un $P = P_\nu$ attaché au point $a = a_\nu$. Or on voit sans peine que l'on peut s'arranger de manière que $a_\nu \in Q_\nu$ pour chaque ν, d'où résulte immédiatement que les cinq conditions 1°—5° restent intactes en y remplaçant P par Q.

[35] Ces ensembles sont disjoints, car $M_i \Subset H_i - A_i$.

[36] Soit P_2^* un sommet du réseau gén. $\mathfrak{P}_2$ tel que $H_i \subset \bar{P}_2^*$. Remarquons que $C_i^n(\mathfrak{U}) \subset H_i \subset \bar{P}_2^*$. Donc si aucun sommet intérieur de $\mathfrak{U}$ ne rencontre $\bar{P}_2^*$, la chaîne $C_i^n(\mathfrak{U})$ ne contient

17.15. Il s'agit maintenant de montrer que le nombre $r_k \in \mathfrak{R}$ est bien déterminé, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du choix des indices ν et i. *En premier lieu,* l'indice ν étant donné, remplaçons l'indice i par j et désignons par r'_k la valeur correspondante de r_k. On a $\mathfrak{J}_k \subset P_\nu \subset M_i M_j$, en particulier $a_\nu \in M_i M_j$, d'où $\overline{P}_\nu H_{\nu ij} = 0$. Comme $\mathfrak{J}_k \subset P_\nu$, on a $\mathfrak{J}_k H_{\nu ij} = 0$. Comme $\mathfrak{J}_k \subset M_i M_j \subset (H_i - A_i)(H_j - A_j)$, on a $\mathfrak{J}_k (A_i + A_j) = 0$. Soit C^n le (n, R)-cycle $\bmod (A_i + A_j)$ dans $H_{\nu ij}$ correspondant au $(n-1, R)$-cycle $\omega_{\nu j} \Gamma_i^{n-1} - \omega_{\nu i} \Gamma_j^{n-1}$ du type t_2 dans $(A_i + A_j)$. Comme $P_\nu \subset M_i M_j \subset H_i H_j$, on a $H_i H_j \neq 0$. Γ_i^{n-1} étant un $(n-1, R)$-cycle du type t_3, il existe un sommet P_{3i}^* du réseau gén. $\mathfrak{P}_3$ tel que $H_i \subset \overline{P}_{3i}^*$; pareillement il existe un sommet P_{3j}^* de $\mathfrak{P}_3$ tel que $H_j \subset \overline{P}_{3j}^*$. Comme $H_i H_j \neq 0$, on a $\overline{P}_{3i}^* \overline{P}_{3j}^* \neq 0$. Il existe donc (v. 9.3) un sommet P_2^* du réseau gén. $\mathfrak{P}_2$ tel que $\overline{P}_{3i}^* + \overline{P}_{3j}^* \subset P_2^*$. Puisque $H_i \subset \overline{P}_{3i}^*$, $H_j \subset \overline{P}_{3j}^*$, $H_{\nu ij} \subset H_i + H_j$, on a $P_2^* \supset H_i + H_j + H_{\nu ij}$. Donc les chaînes $C_i^n(\mathfrak{U})$, $C_j^n(\mathfrak{U})$, $C^n(\mathfrak{U})$ sont dans $\overline{P}_2^*$. Si aucun sommet intérieur de $\mathfrak{U}$ ne rencontre $\overline{P}_2^*$, les chaînes $C_i^n(\mathfrak{U})$ et $C_j^n(\mathfrak{U})$ ne peuvent contenir aucun sommet intérieur et par suite $r_k \omega_{\nu i} = 0$, $r'_k \omega_{\nu j} = 0$, d'où $r_k = r'_k = 0$. Supposons donc qu'il existe un sommet intérieur de $\mathfrak{U}$ rencontrant $\overline{P}_2^*$; en vertu de la propriété 1° de la famille Ψ, le réseau $\mathfrak{U}$ est un affinement de $\mathfrak{V}(P_2^*)$. D'après 10.1, on en déduit sans peine que $C^n(\mathfrak{U}) = \omega_{\nu j} C_i^n(\mathfrak{U}) - \omega_{\nu i} C_j^n(\mathfrak{U}) \bmod (A_i + A_j)$. Comme $\mathfrak{J}_k H_{\nu ij} = 0$, $C^n(\mathfrak{U}) \subset H_{\nu ij}$, la chaîne $C^n(\mathfrak{U})$ ne peut pas contenir le simplexe σ_k^n, dont le noyau est $\mathfrak{J}_k$. Comme $\mathfrak{J}_k(A_i + A_j) = 0$, la chaîne $\omega_{\nu j} C_i^n(\mathfrak{U}) - \omega_{\nu i} C_j^n(\mathfrak{U})$ ne contient non plus le simplexe σ_k^n. Or cette chaîne contient le simplexe σ_k^n avec le coefficient $\omega_{\nu j} \cdot r_k \omega_{\nu i} - \omega_{\nu i} \cdot r'_k \omega_{\nu j}$. Comme $\omega_{\nu i} \neq 0$, $\omega_{\nu j} \neq 0$, on a donc $r_k = r'_k$. *En second lieu,* remplaçons l'indice ν par μ. Quant à l'indice i, nous pouvons le supposer inaltéré. En effet, $\mathfrak{N}$ étant un réseau gén., il existe deux sommets N_ν et N_μ de $\mathfrak{N}$ tels que $a_\nu \in N_\nu$, $a_\mu \in N_\mu$. D'après la condition 1° pour les P_ν, on a alors $P_\nu \subset N_\nu$, $P_\mu \subset N_\mu$. Or $\mathfrak{J}_k \subset P_\nu P_\mu$, d'où $N_\nu N_\mu \neq 0$. D'après la définition du réseau gén. $\mathfrak{N}$, il existe donc un sommet M_i de $\mathfrak{M}$ tel que $N_\nu + N_\mu \subset M_i$, d'où $P_\nu \subset M_i$, $P_\mu \subset M_i$, de manière que cette valeur de i est admissible dans les deux cas. Soient r_k, r'_k les deux valeurs de r_k. D'après la définition même de ces nombres, on a $r_k \omega_{\nu i} = r'_k \omega_{\mu i}$. Or choisissons un point $x \in \mathfrak{J}_k \subset P_\nu P_\mu$. En vertu de la condition 2° pour les P_ν, on a $\omega_{\nu i} = \omega(x, \Gamma_i^{n-1})$, $\omega_{\mu i} = \omega(x, \Gamma_i^{n-1})$, d'où $\omega_{\nu i} = \omega_{\mu i} \neq 0$ et par suite $r_k = r'_k$.

17.16. *Les nombres $r_k \in \mathfrak{R}$ étant bien déterminés posons* $G^n(\mathfrak{U}) = \sum_{k=1}^{m} r_k \sigma_k^n$.

---

aucun $(n, \mathfrak{U})$-simplexe intérieur, d'où $r_k \omega_{\nu i} = 0$. Dans le cas contraire, d'après la propriété 1° de la famille Ψ, $\mathfrak{U}$ est un affinement de $\mathfrak{V}(P_2^*)$. D'après 10.1, la chaîne $C_i^n(\mathfrak{U})$ est donc bien déterminée à mod A_i près. Comme $\mathfrak{J}_k \subset P_\nu \subset M_i \subset H_i - A_i$, on a $\mathfrak{J}_k A_i = 0$, de sorte que le coefficient $r_k \omega_{\nu i}$ du simplexe σ_k^n dans la chaîne $C_i^n(\mathfrak{U})$ est bien déterminé.

Remarque. Observons que la $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $G^n(\mathfrak{U})$ ainsi définie ne contient que des $(n, \mathfrak{U})$-simplexes $\neq 0 \bmod S$.

17.2. *Pour chaque* $\mathfrak{U} \in \Psi$, $G^n(\mathfrak{U})$ *est un* $(n, \mathfrak{U})$-*cycle mod* S.

Démonstration. Soit σ^{n-1} un $(n-1, \mathfrak{U})$-simplexe $\neq 0 \bmod S$. Il faut montrer que la chaîne $FG^n(\mathfrak{U})$ ne contient pas le simplexe σ^{n-1}. Pour $1 \leqq k \leqq m$, soit $\eta_k \in \mathfrak{R}$ le coefficient de σ^{n-1} dans la chaîne $F\sigma_k^n$. On doit montrer que $\sum_{k=1}^{m} \eta_k r_k = 0$, ou bien que $\sum_{k \in Z} \eta_k r_k = 0$ où Z est l'ensemble de tous les indices k $(1 \leqq k \leqq m)$ tels que $\eta_k \neq 0$. Puisque $\sigma^{n-1} \neq 0 \bmod S$ et puisque le réseau $\mathfrak{U}$ est régulier par rapport à S, σ^{n-1} possède un sommet U tel que $US \neq 0$. Comme $\mathfrak{U} \in \Phi$, il existe un indice ν tel que $U \subset P_\nu$, d'où $K \subset P_\nu$, K étant le noyau de σ^{n-1}. D'après la condition 3° pour les P_ν (v. 17.11), il existe un indice i tel que $P_\nu \subset M_i$. Si $k \in Z$, on a évidemment $\mathfrak{J}_k \subset K \subset P_\nu \subset M_i$ de manière que le coefficient de σ_k^n dans la chaîne $C_i^n(\mathfrak{U})$ est $r_k \omega_{\nu i}$. Donc le coefficient de σ^{n-1} dans la chaîne $FC_i^n(\mathfrak{U})$ est $\sum_{k \in Z} \eta_k r_k \omega_{\nu i}$. Or $\sigma^{n-1} \neq 0 \bmod S$ et $C_i^n(\mathfrak{U}) \rightarrow 0 \bmod S$. Donc $\sum_{k \in Z} \eta_k r_k \omega_{\nu i} = 0$ et par suite $\sum_{k \in Z} \eta_k r_k = 0$, car $\omega_{\nu i} \neq 0$.

17.3. *Soit* $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_1 \in \Psi$; *soit* $\mathfrak{U}_1$ *un affinement de* $\mathfrak{U}$; *soit* $\pi = Pr.(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U})$. *Alors* $\pi G^n(\mathfrak{U}_1) = G^n(\mathfrak{U})$ *mod* S.

Les $G^n(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{U} \in \Psi$ définissent donc un (n, R)-cycle mod S. C'est le cycle principal G^n annoncé dans 17.

Démonstration. Soit σ^n un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe donné $\neq 0 \bmod S$. Soient τ_h^n $(1 \leqq h \leqq s)$ tous les $(n, \mathfrak{U}_1)$-simplexes tels que $\pi\tau_h^n = \pm\sigma^n$. Nous pouvons d'ailleurs choisir les orientations des τ_h^n de manière que $\pi\tau_h^n = \sigma^n$ $(1 \leqq h \leqq s)$. Soit $\mathfrak{J}$ le noyau de σ^n; soient K_h $(1 \leqq h \leqq s)$ les noyaux de τ_h^n. On a évidemment $K_h \subset \mathfrak{J}$ pour $1 \leqq h \leqq s$. Comme nous le savons, il existe des indices ν, i tels que $\mathfrak{J} \subset P_\nu \subset M_i$. Soit r le coefficient de σ^n dans $G^n(\mathfrak{U})$; soient r'_h $(1 \leqq h \leqq s)$ les coefficients des τ_h^n dans $G^n(\mathfrak{U}_1)$. Il faut montrer que $r = \sum_{h=1}^{s} r'_h$. Soit P_2^* un sommet du réseau gén. $\mathfrak{P}_2$ tel que $H_i \subset \bar{P}_2^*$. Si aucun sommet intérieur de $\mathfrak{U}$ ne rencontre $\bar{P}_2^*$, on a, comme nous le savons, $r = 0$; or dans ce cas $\mathfrak{J}\bar{P}_2^* = 0$, d'où $K_h \bar{P}_2^* = 0$ $(1 \leqq h \leqq s)$; on en déduit sans peine que $r'_h = 0$ $(1 \leqq h \leqq s)$, donc $r = \sum_{h=1}^{s} r'_h$. Dans le cas contraire, nous savons que $\mathfrak{U}$, par suite aussi $\mathfrak{U}'$, est un affinement du réseau $\mathfrak{B}(P_2^*)$ du n° 10.1, d'où $C_i^n(\mathfrak{U}) = \pi C_i^n(\mathfrak{U}')$. Or le coefficient de σ^n dans $C_i^n(\mathfrak{U})$ est $r\omega_{\nu i}$ et les coefficients de τ_h^n $(1 \leqq h \leqq s)$ dans $C_i^n(\mathfrak{U}')$ sont $r'_h\omega_{\nu i}$. Par suite $r\omega_{\nu i} = \sum_{h=1}^{s} r'_h \omega_{\nu i}$, et donc $r = \sum_{h=1}^{s} r'_h$, car $\omega_{\nu i} \neq 0$.

17.4. La construction (v. 17.1–17.16) du cycle principal G^n possède un certain dégré d'arbitraire. Or on peut démontrer que (l'orientation de $R-S$ étant donnée), le cycle G^n est bien déterminé dans le sens suivant : *Il existe une famille complète Φ de réseaux dans R telle que la $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $G^n(\mathfrak{U})$ est déterminée sans aucune ambiguité pour chaque* $\mathfrak{U} \in \Phi$. (Cf. la remarque à la fin du nº 17.16.) Nous laissons la démonstration de cet énoncé, dont nous ne ferons aucun usage, au soin du lecteur.

17.5. *Soit A un sous-ensemble bicompact de R; soit $\overline{R-S-A} \neq 0$. Le cycle principal G^n n'est pas situé dans A.*

Démonstration. Il existe évidemment un point $a \in (R-S)-A$. Choisissons les indices ν, i de manière que $a \in P_\nu \subset M_i \Subset H_i - A_i$. Soit V un entourage de a si petit que 1° $\overline{V} \subset (R-S)-A$; 2° $\overline{V} \subset P_\nu$. Il suffit de démontrer qu'il existe un réseau $\mathfrak{U} \in \Psi$ tel que $G^n(\mathfrak{U})$ contienne un n-simplexe σ^n dont le noyau $\mathfrak{J}$ ne rencontre pas A. Comme H_i est le porteur de l'homologie $\Gamma_i^{n-1} \sim 0$ et comme $H_i - V_i \subset H_i$, $\overline{H_i - V} = \overline{H_i - V} \neq H_i$, on a $C_i^n(\mathfrak{U}) \subset H_i$ mais il existe des réseaux $\mathfrak{U} \in \Psi$ arbitrairement petits tels que qu'on n'a pas $C_i^n(\mathfrak{U}) \subset H_i - V$. Choisissons un tel réseau $\mathfrak{U}$ assujetti à la condition qu'aucun sommet de $\mathfrak{U}$ ne rencontre simultanément $\overline{V}$ et A, ou bien $\overline{V}$ et $R-P_\nu$, ou enfin $\overline{V}$ et S. Comme la chaîne $C_i^n(\mathfrak{U})$ est dans H_i, mais non dans $H_i - V$, elle contient un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe σ^n dont le noyau $\mathfrak{J}$ rencontre $\overline{V}$. On a alors $\mathfrak{J}A = 0$, $\mathfrak{J} \subset P_\nu \subset M_i$, $\mathfrak{J}S = 0$. Comme $\mathfrak{J} \subset P_\nu \subset M_i$, la chaîne $G^n(\mathfrak{U})$, comme $C_i^n(\mathfrak{U})$, doit contenir le simplexe σ^n. Puisque $\mathfrak{J}A = 0$, on ne peut avoir $G^n(\mathfrak{U}) \subset A$.

Remarque. Puisque les réseaux de la famille Ψ sont d'ordre $\leqq n \bmod S$ (v. 7.4), nous avons démontré plus généralement que le *cycle principal G^n n'est pas homologue à zéro mod A* ($A = \overline{A}$, $\overline{R-S-A} \neq 0$).

18. Faisons de nouveau les conventions des nºs 8, 8.1 et 8.3. Choisissons (arbitrairement) l'orientation de chaque simplexe σ_i^h $(0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h)$. Puisque les faces d'un $(h+1, \mathfrak{Z})$-simplexe $(0 \leqq h \leqq n-1)$ intérieur sont des $(h, \mathfrak{Z})$-simplexes intérieurs, il existe des nombres $\eta_{ij}^h \in \mathfrak{R}$ $(0 \leqq h \leqq n-1,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1},\ 1 \leqq j \leqq \alpha_h)$ tels que

$$\sigma_i^{h+1} \to \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h \sigma_j^h \qquad (0 \leqq h \leqq n-1,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1}).$$

Les nombres η ne prennent d'ailleurs que les valeurs 0, 1, -1.

Comme $F\sigma_i^{h+1} \to 0$, on a pour $1 \leqq h \leqq n-1$, $1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1}$, $1 \leqq k \leqq \alpha_{h-1}$:

$$\sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h \eta_{jk}^{h-1} = 0.$$

Remarque. ι^k étant un simplexe d'espèce σ^{-1} d'un réseau commode $\mathfrak{U}$, d'après 8.32 le noyau de ι^k ne rencontre pas R_0 et par suite $\iota^k = 0$ mod $\overline{R-R_0}$.

18.1. Soit Ψ_0 la famille de tous les réseaux commodes (dans le sens du nº 8.1) qui appartiennent à la famille Ψ du nº 17.13. On voit sans peine que Ψ_0 est une famille parfaitement complète de réseaux. *Dorénavant seuls les réseaux de la famille* Ψ_0 *seront appelés commodes.*

19.1. *Soit* $\mathfrak{U}$ *un réseau commode. A chaque simplexe intérieur* σ_i^h $(0 \leqq h \leqq n,$ $1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ *du réseau* $\mathfrak{Z}$ *on peut attacher une* $(n-h, \mathfrak{U})$*-chaîne* $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ *de la manière suivante:* 1° *Chaque simplexe de chaque chaîne* $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ *est* $\neq 0 \bmod \overline{R-R_0}$; 2° *chaque simplexe de la chaîne* $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ *est d'espèce* σ_i^h; 3° *pour* $1 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq j \leqq \alpha_{h-1}$ *on a*

$$K^{n-h+1}(\sigma_j^{h-1}, \mathfrak{U}) \to \sum_{i=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^{h-1} K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) \bmod \overline{R-R_0};$$

4° *on a* (v. 17)

$$G^n(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) \bmod \overline{R-R_0}.$$

Les chaînes $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ *sont déterminées sans aucune ambiguité par les propriétés* 1°, 2°, 3°, 4°. *On a d'ailleurs pour* $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$: 5° $K^{n-h}(-\sigma_i^h, \mathfrak{U}) = -K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$.

Nous appellerons les $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ les $\mathfrak{U}$*-chaînes fondamentales.* Chaque $(n-h, \mathfrak{U})$-chaîne $(0 \leqq h \leqq n)$ de la forme $\sum_{i=1}^{\alpha_h} c_i K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$, $c_i \in \mathfrak{R}$ sera appelée une $(n-h, \mathfrak{U})$*-chaîne élémentaire.*

Démonstration. Commençons par les $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U})$. D'après 8.33 chaque simplexe de la chaîne $G^n(\mathfrak{U})$ est de rang 0 ou -1. D'après la remarque du nº 18, les simplexes de rang -1 sont $= 0 \bmod \overline{R-R_0}$. D'après 19 1°, 2°, 4° on doit donc entendre par $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U})$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ la partie de la chaîne $G^n(\mathfrak{U})$ dont les simplexes sont $\neq 0 \bmod \overline{R-R_0}$ et d'espèce σ_i^0. Les conditions 1°, 2°, 5° $(h=0)$ et 4° du nº 19 sont immédiatement vérifiées.

Supposons donc que pour une certaine valeur de p $(1 \leqq p \leqq n)$ on ait déjà défini les chaînes $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ $(0 \leqq h \leqq p-1,$ $1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ de manière que les conditions 1°, 2°, 3°, 4° du nº 19 soient vérifiées pour $0 \leqq h \leqq p-1$, et que l'on ait reconnu que les chaînes $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ $(0 \leqq h \leqq n-1)$ sont univoquement déterminées par ces conditions. Il s'agit de définir les chaînes $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$ de manière à satisfaire aux conditions 1°, 2°, 3° du nº 19 pour $h = p$ et de prouver que cela n'est possible que d'une seule manière[37].

Ce dernier fait est évident; en effet, la condition 3° donne pour $h = p$

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} \eta_{ij}^{p-1} K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) = F K^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}) \bmod \overline{R-R_0}.$$

[37] On doit aussi observer la validité de 5° pour $h = p$, en la supposant pour $h = p-1$.

Pour définir $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ pour une valeur donnée de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$, on doit donc choisir l'indice j $(1 \leqq j \leqq \alpha_{p-1})$ de manière que $\eta_{ij}^{p-1} \neq 0$ (ce qui est toujours possible) et définir comme $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ la partie de la chaîne $\eta_{ij}^{p-1} FK^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U})$ dont les simplexes sont $\neq 0 \bmod \overline{R-R_0}$ et d'espèce σ_i^p. Les conditions 1°, 2° et 5° $(h=p)$ sont immédiatement vérifiées. Il s'agit de prouver que 1° la définition de $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ est indépendante du choix de l'indice j; 2° les conditions 3° $(h=p)$ sont satisfaites.

A cet effet, considérons une chaîne $FK^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U})$ $(1 \leqq j \leqq \alpha_{p-1})$. D'après 8.33, un simplexe de cette chaîne est de rang $\leqq p$; d'après 8.34 et 2°, ce rang est $\geqq p-1$ et si le rang égale $p-1$, l'espèce du simplexe est σ_j^{p-1}, tandis que, si le rang du simplexe égale p, son espèce est σ_i^p, l'indice i étant tel que $\eta_{ij}^{p-1} \neq 0$. Soit donc $H_j^{n-p}(\mathfrak{U})$ la partie de la chaîne $FK^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U})$ dont les simplexes sont $\neq 0 \bmod \overline{R-R_0}$ et d'espèce σ_j^{p-1} et soit $\eta_{ij}^{p-1} H_{ij}^{n-p}(\mathfrak{U})$ la partie de la même chaîne dont les simplexes sont $\neq 0 \bmod \overline{R-R_0}$ et d'espèce σ_i^p, de manière que

$$(*) \qquad FK^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}) = H_j^{n-p}(\mathfrak{U}) + \sum_{i=1}^{\alpha_p} \eta_{ij}^{p-1} H_{ij}^{n-p}(\mathfrak{U}) \bmod \overline{R-R_0}.$$

Distinguons deux cas. *En premier lieu*, soit $p=1$. On a d'après 4° $\sum_{j=1}^{\alpha_0} FK^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}) = 0 \bmod \overline{R-R_0}$, car $FG^n(\mathfrak{U}) = 0 \bmod S \subset \overline{R-R_0}$. Donc

$$\sum_{j=1}^{\alpha_0} H_j^{n-1}(\mathfrak{U}) + \sum_{i=1}^{\alpha_1} \sum_{j=1}^{\alpha_0} \eta_{ij}^0 H_{ij}^{n-1}(\mathfrak{U}) = 0 \quad \bmod \overline{R-R_0},$$

d'où

$$H_j^{n-1}(\mathfrak{U}) = 0 \qquad (1 \leqq j \leqq \alpha_0)$$

et

$$(**) \qquad \sum_{j=1}^{\alpha_0} \eta_{ij}^0 H_{ij}^{n-1}(\mathfrak{U}) = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq \alpha_1).$$

On voit bien que la définition de $K^{n-1}(\sigma_i^1, \mathfrak{U})$ est indépendante du choix de l'indice j; en effet, pour une valeur donnée de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_1)$, il y a justement deux valeurs $j=j_1$ et $j=j_2$ de l'indice j tels que $\eta_{ij}^0 \neq 0$ et on a $\eta_{ij_1}^0 + \eta_{ij_2}^0 = 0$ de manière que $(**)$ donne

$$H_{ij_1}^{n-1}(\mathfrak{U}) = H_{ij_2}^{n-1}(\mathfrak{U}),$$

de manière qu'on définit sans ambiguité

$$K^{n-1}(\sigma_i^1, \mathfrak{U}) = H_{ij_1}^{n-1}(\mathfrak{U}) = H_{ij_2}^{n-1}(\mathfrak{U}).$$

La relation $(*)$ prend la forme

$$FK^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \eta_{ij}^0 K^{n-1}(\sigma_i^1, \mathfrak{U}) \qquad (1 \leqq j \leqq \alpha_0);$$

or c'est précisément la relation 3° $(h=p=1)$ qui était à démontrer.

En second lieu, soit $p \geqq 2$. Pour $1 \leqq k \leqq \alpha_{p-2}$ on a

$$K^{n-p+2}(\sigma_k^{p-2}, \mathfrak{U}) \rightarrow \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{jk}^{p-2} K^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}) \quad \mathrm{mod}\ \overline{R-R_0}$$

et par suite

$$\sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{jk}^{p-2} F K^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}) = 0 \quad \mathrm{mod}\ \overline{R-R_0}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{jk}^{p-2} H_j^{n-p}(\mathfrak{U}) + \sum_{i=1}^{\alpha_p} \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{ij}^{p-1} \eta_{jk}^{p-2} H_{ij}^{n-p}(\mathfrak{U}) = 0$$

d'où

$$H_j^{n-p}(\mathfrak{U}) = 0 \qquad (1 \leqq j \leqq \alpha_{p-1})$$

et

$$(\dagger) \qquad \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{ij}^{p-1} \eta_{jk}^{p-2} H_{ij}^{n-p}(\mathfrak{U}) = 0 \qquad (1 \leqq j \leqq \alpha_{p-1},\ 1 \leqq i \leqq \alpha_p).$$

L'indice i ($1 \leqq i \leqq \alpha_p$) étant donné, et j_1, j_2 ($1 \leqq j_1, j_2 \leqq \alpha_{p-1}$) étant tels que $\eta_{ij_1}^{p-1} \neq 0 \neq \eta_{ij_2}^{p-1}$, on doit démontrer que $H_{ij_1}^{n-p}(\mathfrak{U}) = H_{ij_2}^{n-p}(\mathfrak{U})$. On voit sans peine qu'il suffit de déduire ceci sous la supposition qu'il existe un indice k ($1 \leqq k \leqq \alpha_{p-2}$) tel que $\eta_{j_1k}^{p-2} \neq 0 \neq \eta_{j_2k}^{p-2}$. Or sous cette supposition, pour $j \neq j_1$ ou j_2, on a $\eta_{ij}^{p-1} \eta_{jk}^{p-2} = 0$ et en outre, comme on le voit sans peine, $\eta_{ij_1}^{p-1} \eta_{j_1k}^{p-2} + \eta_{ij_2}^{p-1} \eta_{j_2k}^{p-2} = 0$, de manière que l'égalité à démontrer s'obtient immédiatement de ($\dagger$). On définit donc sans aucune ambiguité

$$K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) = H_{ij}^{n-p}(\mathfrak{U})$$

l'indice j n'étant assujetti qu'à la condition $\eta_{ij}^{p-1} \neq 0$. La relation (*) prend alors la forme 3° ($h = p$) qui était à démontrer.

19.2. *Soient* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_1$ *deux réseaux commodes*, $\mathfrak{U}_1$ *étant un affinement de* $\mathfrak{U}$*; soit* $\pi = Pr.(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U})$. *Alors*

$$(*) \qquad \pi K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}_1) = K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \quad \mathrm{mod}\ \overline{R-R_0} \qquad (1 \leqq i \leqq \alpha_p).$$

Démonstration. Soit d'abord $p = 0$. D'après 17.3 et 18.1 on a $\pi G^n(\mathfrak{U}_1) = G^n(\mathfrak{U}) \bmod S \subset \overline{R-R_0}$. D'autre part, d'après 19.1, 4° $G^n(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) \bmod \overline{R-R_0}$ et pareillement pour $\mathfrak{U}_1$. Donc

$$\sum_{i=1}^{\alpha_0} [\pi K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_1) - K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U})] = 0 \quad \mathrm{mod}\ \overline{R-R_0}.$$

Or d'après 19.1, 2° et 8.35 chaque simplexe de la chaîne

$$(**) \qquad \pi K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) - K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) \qquad (1 \leqq i \leqq \alpha_0)$$

est d'espèce σ_i^0. Donc les chaînes $(**)$ sont $= 0 \bmod \overline{R - R_0}$.

En second lieu, supposons que pour une certaine valeur de p $(1 \leqq p \leqq n)$ on ait déjà démontré que

$$\pi K^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}_1) = K^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}) \mod \overline{R - R_0} \qquad (1 \leqq j \leqq \alpha_{p-1}).$$

Cette relation reste vraie si l'on forme les frontières des deux termes. Cela donne d'après 19.1, 3°

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} \eta_{ij}^{p-1} [\pi K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}_1) - K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})] = 0 \mod \overline{R - R_0}.$$

D'après 19.1, 2° et 8.35 chaque simplexe de l'$i^{\text{ème}}$ terme de cette somme est d'espèce σ_i^p; d'autre part, l'indice i étant donné, on peut choisir j de manière que $\eta_{ij}^{p-1} \neq 0$. Il en résulte $(*)$.

19.3. *Soit $\mathfrak{U}$ un réseau commode. Pour $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$ la chaîne $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ est située dans $T(\sigma_i^h)$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement de $\mathfrak{U}$ régulier par rapport à $T(\sigma_i^h)$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau commode qui soit un affinement de $\mathfrak{V}$. Soit $\pi = Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, $\pi_1 = Pr.(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{V})$. D'après 19.2 on a $\pi\pi_1 K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1) = K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) \bmod \overline{R - R_0}$. Soit τ^{n-h} un simplexe de la chaîne $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1)$. D'après 19.1, 2° le simplexe τ^{n-h} est d'espèce σ_i^h. Chaque sommet de τ^{n-h} rencontre donc (v. 8.3) $T(\sigma_i^h)$. Donc chaque sommet de $\pi_1\tau^{n-h}$ rencontre $T(\sigma_i^h)$. Le réseau $\mathfrak{V}$ étant régulier par rapport à $T(\sigma_i^h)$, il en résulte que $\pi_1\tau^{n-h} = 0$ ou bien le noyau de $\pi_1\tau^{n-h}$ rencontre $T(\sigma_i^h)$. Donc si $\pi\pi_1\tau^{n-h} \neq 0$, le noyau de ce simplexe rencontre $T(\sigma_i^h)$. Par suite la chaîne $\pi\pi_1 K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1)$ est située dans $T(\sigma_i^h)$. Or $\pi\pi_1 K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1)$ est mod $\overline{R - R_0}$ égale à la chaîne $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ dont tous les simplexes sont (v. 19.1, 1°) $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$. Par suite $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) \subset T(\sigma_i^h)$.

20.1. En partant du réseau gén. ne contenant que le seul sommet $R - S$, on construit d'après 14.2 un réseau gén. $\mathfrak{P}$ jouissant de la propriété suivante: Si $P \in \mathfrak{P}$ à chaque couple C_1^n, C_2^n de (n, R)-cycles mod S on peut attacher un couple de nombres $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$ dont un au moins $\neq 0$, de manière que $r_1 C_1^n + r_2 C_2^n \sim 0 \bmod (R - P)$. On peut supposer que pour chaque $P \in \mathfrak{P}$ on ait $P \neq R - S$, $P \Subset R - S$.

20.2. Supposons que chaque sommet intérieur σ_i^0 $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ du réseau $\mathfrak{Z}$ du n° 8 fasse partie d'un sommet P_i du réseau gén. $\mathfrak{P}$ du n° 20.1. Désignons par Ψ_1 la famille de tous les réseaux commodes $\mathfrak{U}$ jouissant des deux propriétés suivantes: 1° Pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$, $G^n(\mathfrak{U}) \not\sim 0 \bmod (R - P_i)$;

2° si un sommet U de $\mathfrak{U}$ rencontre T_i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$, on a $U \subset P_i$; 3° $U\overline{P_i} \neq 0$ pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$ et pour chaque sommet extérieur $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{U}$. Puisque $G^n \not\sim 0$ mod $(R - P_i)$ (v. 17.5, *remarque*) et $T_i \subset \sigma_i^0 \subset P_i$, la famille Ψ_1 est évidemment parfaitement complète.

20.3. Ceci étant, on a pour chaque $\mathfrak{U} \in \Psi_1$ le théorème suivant: *Soit $C^n(\mathfrak{U})$ un $(n, \mathfrak{U})$-cycle essentiel mod S. Il existe une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne élémentaire $D^n(\mathfrak{U})$ telle que $C^n(\mathfrak{U}) = D^n(\mathfrak{U})$ mod $\overline{R - R_0}$.*

Démonstration. G^n étant le cycle principal, d'après 20.1 il existe pour chaque i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ deux nombres $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$, dont un au moins $\neq 0$, tels que $r_1 C^n(\mathfrak{U}) + r_2 G^n(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod $(R - P)$. Or $G^n(\mathfrak{U}) \not\sim 0$ mod $(R - P_i)$ d'après la propriété 1° de la famille Ψ_1. Donc $r_1 \neq 0$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $s_i \in \mathfrak{R}$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ tel que $C^n(\mathfrak{U}) \sim s_i G^n(\mathfrak{U})$ mod $(R - P_i)$. Donc il existe une $(n+1, \mathfrak{U})$-chaîne $E^{n+1}(\mathfrak{U})$ telle que

$$FE^{n+1}(\mathfrak{U}) = C^n(\mathfrak{U}) - s_i G^n(\mathfrak{U}) \text{ mod } (R - P_i).$$

Le réseau $\mathfrak{U}$ étant (v. 8.1, 3°) d'ordre $\leqq n$ mod S, chaque simplexe de la chaîne $E^{n+1}(\mathfrak{U})$ possède un sommet extérieur, de manière que (v. la propriété 3° de la famille Ψ_1) $E^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R - P_i$, d'où $FE^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R - P_i$ et par suite $C^n(\mathfrak{U}) = s_i G^n(\mathfrak{U})$ mod $(R - P_i)$. Or si un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe $\imath^n$ est d'espece σ_i^0, chacun des ses sommets rencontre P_i d'où $\imath^n \neq 0$ mod $(R - P_i)$ en vertu de la propriété 2° de la famille Ψ_1. Donc la partie de la chaîne $C^n(\mathfrak{U})$ formée des $(n, \mathfrak{U})$-simplexes d'espèce σ_i^0 est égale à celle de la chaîne $s_i G^n(\mathfrak{U})$, c'est-à-dire à $s_i K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U})$ mod $\overline{R - R_0}$. Or nous avons remarqué, en définissant les chaînes $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U})$ (v. 19.1), qu'un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe qui n'est pas d'espèce σ_i^0 pour aucun i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$, est $= 0$ mod $\overline{R - R_0}$. Donc $C^n(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} s_i K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U})$ mod $\overline{R - R_0}$.

III.

21. Axiome G^k $(0 \leqq k \leqq n-1)$: *Pour chaque entourage Q d'un point $a \in R - S$ il existe un entourage $P \subset Q$ de a jouissant de la propriété suivante: Si Γ^k est un (k, R)-cycle (absolu) dans $\overline{P}$*[38], *on a $\Gamma^k \sim 0$ dans $\overline{Q}$.*

21.1. D'après 4.2 on déduit de l'axiome G^k: *Pour chaque réseau gén. $\mathfrak{Q}$ il existe un affinement $\mathfrak{P}$ et une projection $\pi = Pr.(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ de manière que: Si Γ^k est un (k, R)-cycle dans $\overline{P}$, $P \in \mathfrak{P}$, on a $\Gamma^k \sim 0$ dans $\overline{\pi P}$.*

22. Dans tout ce Chapitre, on se donnera une valeur fixe de p $(0 \leqq p \leqq n)$. On suppose la validité de tous les axiomes des Chap. I et II, ainsi que celle des axiomes G^k (v. 21) pour $n - p \leqq k \leqq n - 1$.

[38] Pour $k = 0$ il faut supposer encore que $I(\Gamma^k) = 0$, $I(\Gamma^k)$ étant la somme des coefficients de $\Gamma^k(\mathfrak{U})$ (somme indépendante du choix du réseau $\mathfrak{U}$).

23. *Soit Ξ la famille de tous les réseaux $\mathfrak{Z}$ de la famille Φ_1 du n° 7.4 possédant des sommets intérieurs et tels que 1° $\mathfrak{Z}$ est un affinement mod S du réseau gén. $\mathfrak{P}$ du n° 20.1, 2° le noyau de chaque $\mathfrak{Z}$-simplexe intérieur σ contient un point n'appartenant à la fermeture d'aucun sommet de $\mathfrak{Z}$ qui ne soit pas un sommet de σ. La famille Ξ est parfaitement complète.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau donné; soit $\mathfrak{Q}$ un réseau gén. donné. Il existe évidemment un réseau $\mathfrak{Z}_{-1}$ tel que 1° $\mathfrak{Z}_{-1} \in \Phi_1$; 2° $\mathfrak{Z}_{-1}$ possède des sommets intérieurs; 3° $\mathfrak{Z}_{-1}$ est un affinement de $\mathfrak{U}$; 4° $\mathfrak{Z}_{-1}$ est un affinement mod S de $\mathfrak{P}$ et de $\mathfrak{Q}$. Soit m l'ordre (v. 7.2) de $\mathfrak{Z}_{-1}$. Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq m)$, on ait déjà défini le réseau $\mathfrak{Z}_{h-1}$. Dans le noyau de chaque $\mathfrak{Z}_{h-1}$-simplexe intérieur τ^h_ν choisissons un point $a_{h\nu}$ de manière que $a_{h\nu} \neq a_{g\mu}$ si $0 \leqq g < h$ ou bien $g = h$, $\mu \neq \nu$[39]. Modifions chaque sommet Z_{h-1} de $\mathfrak{Z}_{h-1}$ en le remplaçant par $Z_h = Z_{h-1} - \Sigma(a_{h\nu})$, où ν parcourt toutes les valeurs telles que Z_h ne soit pas un sommet de τ^h_ν. Soit $\mathfrak{Z}_h$ le réseau dont les sommets sont les ensembles Z_h ainsi associés aux sommets Z_{h-1} de $\mathfrak{Z}_{h-1}$. En procédant de cette manière on finit par construire un réseau $\mathfrak{Z}_m$. Soit $\mathfrak{Z}$ un rapetissement fort[30] de $\mathfrak{Z}_m$. On voit sans peine qu'on peut choisir $\mathfrak{Z}$ de manière que ce soit un affinement de $\mathfrak{U}$ et un affinement mod S de $\mathfrak{Q}$ possédant les propriétés voulues.

24. Soit $\mathfrak{z}$ un affinement de $\mathfrak{Z}$, les deux réseaux $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{Z}$ appartenant à la famille Ξ du n° 23. Pour le réseau $\mathfrak{Z}$ gardons la notation

$$\alpha_h,\ \sigma^h_i,\ T_i,\ T(\sigma^h_i),\ \mathfrak{T},\ K^{n-h}(\sigma^h_i, \mathfrak{U})$$

(où $\mathfrak{U}$ parcourt les réseaux commodes par rapport à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$). Pour le réseau $\mathfrak{z}$ on prendra la notation analogue

$$\beta_h,\ \tau^h_\nu,\ t_\nu,\ t(\tau^h_\nu),\ \mathfrak{t},\ k^{n-h}(\tau^h_\nu, \mathfrak{U}),$$

$\mathfrak{U}$ parcourant cette fois les réseaux commodes par rapport à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$. Supposons le réseau fermé $\mathfrak{t}$ attaché à $\mathfrak{z}$ choisi selon 8 d'une manière quelconque; quant à $\mathfrak{T}$, nous le choisirons bientôt d'une manière convenable.

Choisissons une projection $\pi = Pr.(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$. Un sommet intérieur τ^0_ν de $\mathfrak{z}$ sera appelé *complètement intérieur,* si sa projection $\pi\tau^0_\nu$ est un sommet intérieur de $\mathfrak{Z}$. Un $(h, \mathfrak{z})$-simplexe intérieur τ^h_ν $(0 \leqq h \leqq n)$ sera appelé *complètement intérieur,* si chacun de ses sommets est complètement intérieur. On peut numéroter les τ^h_ν de manière que, pour chaque h $(0 \leqq h \leqq n)$, les simplexes complètement intérieurs précèdent les autres; soient τ^h_ν $(1 \leqq \nu \leqq \gamma_h)$ tous les $(h, \mathfrak{z})$-simplexes $(0 \leqq h \leqq n)$ complètement intérieurs (donc $0 \leqq \gamma_h \leqq \beta_h$ pour chaque h).

[39] D'après 12.2, ceci est évidemment possible.

Pour $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq \nu \leqq \gamma_h$ on a $\pi \tau_\nu^h = 0$ (seulement pour $h \geqq 1$) ou bien il existe un indice $i = \varphi_h(\nu)$ bien déterminé ($1 \leqq i \leqq \alpha_h$) tel que $\pi \tau_\nu^h = \pm \sigma_i^h$. Pour $h = 0$ on a toujours le signe plus; et la même chose vaut aussi pour $1 \leqq h \leqq n$ en orientant convenablement les τ_ν^h ce que nous voulons supposer.

Ceci étant, définissons le réseau fermé $\mathfrak{T}$ attaché à $\mathfrak{Z}$ en posant, pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$,

$$T_i = \sum_\nu t_\nu, \tag{1}$$

où ν parcourt toutes les valeurs ($1 \leqq \nu \leqq \gamma_0$) telles que $\varphi_0(\nu) = i$. On voit sans peine que le réseau fermé $\mathfrak{T}$ possède bien par rapport à $\mathfrak{Z}$ les propriétés du n° 8.

R_k ($0 \leqq k \leqq n$) ayant la signification usuelle (v. 8) relativement à $\mathfrak{T}$, soient R'_k ($0 \leqq k \leqq n$) les ensembles analogues relatives à $\mathfrak{t}$. Évidemment $R'_k \supset R_k$ pour $0 \leqq k \leqq n$.

On vérifie sans peine que pour $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$ on a

$$T(\sigma_i^h) = \sum_\nu t(\tau_\nu^h), \tag{2}$$

où ν parcourt toutes les valeurs ($1 \leqq \nu \leqq \gamma_h$) telles que $\varphi_h(\nu) = i$.

On voit aussi sans peine qu'un réseau $\mathfrak{U}$ commode par rapport à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ (dans le sens de la définition du n° 8.1) est aussi commode par rapport à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$.

$K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ étant toujours les chaînes fondamentales (v. 19.1) relatives à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$, soient $k^{n-h}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U})$ celles relatives à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$. On vérifie sans peine que pour $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$ on a dans chaque réseau $\mathfrak{U}$ commode par rapport à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$

$$K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) = \sum_\nu k^{n-h}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}) \mod \overline{R - R_0}, \tag{3}$$

ν parcourant toutes les valeurs ($1 \leqq \nu \leqq \gamma_h$) telles que $\varphi_h(\nu) = i$.

Ψ_0 et Ψ_1 étant les deux familles de réseaux définies resp. dans 18.1 et 20.2 relativement à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$, soient ψ_0 et ψ_1 les familles correspondantes relatives à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$. On voit sans peine que $\psi_0 \subset \Psi_0$, $\psi_1 \subset \Psi_1$. Ψ_0 (ψ_0) est d'ailleurs la famille de tous les réseaux commodes (v. 18.1) relativement à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$ ($\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$). Les familles ψ_0 et ψ_1 sont, comme nous savons, complètes.

25. *Supposons que le réseau $\mathfrak{Z}$ appartienne à la famille Ξ du n° 23. On peut déterminer le réseau fermé $\mathfrak{T}$ correspondant à $\mathfrak{Z}$ (v. 8) de manière que, si le réseau commode $\mathfrak{U}$ est suffisamment fin, on ait $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) \neq 0$ pour $0 \leqq h \leqq min(n, p+1)$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$.*

La démonstration fera l'objet des n^{os} 25.1—25.2.

25.1. Lemme. Soit $W \neq 0$ un ensemble ouvert $\subset R - S$. Soit $0 \leqq q \leqq p+1$. Il existe un réseau $\mathfrak{V}_q$ et un réseau gén. $\mathfrak{M}_q$ jouissant de la propriété suivante: Supposons que le réseau $\mathfrak{Z}$ du nº 8 soit un affinement de $\mathfrak{V}_q$ et un affinement mod S de $\mathfrak{M}_q$. Choisissons arbitrairement le réseau fermé $\mathfrak{T}$ (nº 8) correspondant à $\mathfrak{Z}$. Alors il existe une valeur de $i\,(1 \leqq i \leqq \alpha_q)$ telle que 1° chaque sommet de σ_i^q est un sous-ensemble de W; 2° dans chaque réseau commode $\mathfrak{U}$ suffisamment fin on a $K^{n-q}(\sigma_i^q, \mathfrak{U}) \neq 0$[40].

Démonstration. Soit d'abord $q \geqq 1$. Choisissons un point $a \in W$. Soit W_1 un entourage de a si petit que $\overline{W}_1 \Subset W$. Soit $\mathfrak{P}^0$ un réseau gén. tel que: 1° si $a \in \overline{P}^0$, $P^0 \in \mathfrak{P}^0$, on a $P^0 \subset W_1$; 2° $\mathfrak{P}^0$ jouit de la propriété du nº 4.3; 3° si $P^0 \in \mathfrak{P}^0$, on a $\Gamma^n \sim 0$ dans $\overline{P}^0$ pour chaque (n, R)-cycle Γ^n dans $\overline{P}^0$. $\mathfrak{P}^0$ existe d'après 4.2 et 9.1. Soit $\mathfrak{Q}^1$ un affinement de $\mathfrak{P}^0$ jouissant des propriétés des nºs 4.3 et 4.4. Déterminons un affinement $\mathfrak{P}^1$ de $\mathfrak{Q}^1$ ainsi qu'une projection $\pi_1 = Pr.(\mathfrak{P}^1, \mathfrak{Q}^1)$ d'après 21.1, en y posant $k = n-1$. Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(1 \leqq h \leqq q-2)$, on ait déjà déterminé les réseaux gén. $\mathfrak{P}^h$ et $\mathfrak{Q}^h$. Soit $\mathfrak{Q}^{h+1}$ un affinement de $\mathfrak{P}^h$ jouissant de la propriété du nº 4.4. Déterminons un affinement $\mathfrak{P}^{h+1}$ de $\mathfrak{Q}^{h+1}$ ainsi qu'une projection $\pi_{h+1} = Pr.(\mathfrak{P}^{h+1}, \mathfrak{Q}^{h+1})$ d'après 21.1, en y posant $k = n-h-1$. En procédant de cette manière, on construit de proche en proche les réseaux gén. $\mathfrak{P}^h$ $(0 \leqq h \leqq q-1)$ et $\mathfrak{Q}^h$ $(1 \leqq h \leqq q-1)$. Soit encore $\mathfrak{Q}^q$ un affinement de $\mathfrak{P}^{q-1}$ jouissant de la propriété du nº 4.4. Posons $\mathfrak{M}_q = \mathfrak{Q}^q$.

Soit $\mathfrak{V}_q$ un réseau tel que: 1° si $V \in \mathfrak{V}_q$ et que $\overline{V}\overline{W}_1 \neq 0$, on a $V \subset W$; 2° si $a \in \overline{V}$, $V \in \mathfrak{V}_q$, on a $V \subset W_1$.

Supposons que le réseau $\mathfrak{Z}$ soit un affinement de $\mathfrak{V}_q$ et un affinement mod S de $\mathfrak{M}_q = \mathfrak{Q}^q$. Puisque l'affinement $\mathfrak{Q}^q$ de $\mathfrak{P}^{q-1}$ jouit de la propriété du nº 4.4, on peut attacher à chaque $(q-1, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur σ_i^{q-1} $(1 \leqq i \leqq \alpha_{q-1})$ un sommet $P^{q-1}(\sigma_i^{q-1})$ de $\mathfrak{P}^{q-1}$ tel que chaque sommet de σ_i^{q-1} en soit un sous-ensemble. Posons $Q^{q-1}(\sigma_i^{q-1}) = \pi_{q-1} P^{q-1}(\sigma_i^{q-1})$. Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq q-2)$, on ait déjà attaché à chaque σ_i^{h+1} $(1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1})$ des sommets $P^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$, $Q^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$ resp. de $\mathfrak{P}^{h+1}$ et de $\mathfrak{Q}^{h+1}$ de manière que chaque sommet de σ_i^{h+1} soit un sous-ensemble de $P^{h+1}(\sigma_i^{h+1}) \subset Q^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$. Supposons donnée une valeur de j $(1 \leqq j \leqq \alpha_h)$. Deux cas sont à distinguer. *En premier lieu,* supposons que σ_j^h ne soit une h-face d'aucun $(h+1, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur; dans ce cas, choisissons un sommet $P^h(\sigma_j^h)$ de $\mathfrak{P}^h$ de manière que chaque sommet de σ_j^h en soit un sous-ensemble; ce qui est possible, puisque le réseau gén. $\mathfrak{P}^{q-1}$ est un affinement de $\mathfrak{P}^h$. *En second lieu,* supposons qu'il

---

[40] Pour $q = n+1$, la thèse du lemme s'énonce comme il suit: Il existe une valeur de $i\,(1 \leqq i \leqq \alpha_n)$ telle que 1° chaque sommet de σ_i^n est un sous-ensemble de W; 2° dans chaque réseau commode $\mathfrak{U}$ suffisamment fin, on a $I\,[K^0(\sigma_i^0, \mathfrak{U})] \neq 0$, $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$. (V.[38] pour la signification de I.) Du reste, nous n'aurons dans cet Ouvrage aucune occasion d'appliquer le cas $q = n+1$ du lemme.

existe des valeurs de i telles que $\eta_{ij}^h \neq 0$; dans ce cas, choisissons un sommet $P^h(\sigma_j^h)$ de $\mathfrak{P}^h$ de manière que l'on ait $P^h(\sigma_j^h) \supset Q^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$ pour chaque valeur de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1})$ telle que $\eta_{ij}^h \neq 0$; ce qui est possible, car $\mathfrak{Q}^{h+1}$ est un affinement de $\mathfrak{P}^h$ jouissant de la propriété du n° 4.4; on voit que, ici encore, chaque sommet de σ_j^h est un sous-ensemble de $P^h(\sigma_j^h)$. Si $h \geqq 1$, posons $Q^h(\sigma_j^h) = \pi_h P^h(\sigma_j^h)$. En procédant de cette manière, on construit de proche en proche les ensembles $P^h(\sigma_i^h)$ $(0 \leqq h \leqq q-1,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ et $Q^h(\sigma_i^h)$ $(1 \leqq h \leqq q-1,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$.

Soit W_2 un entourage de a si petit que 1° pour chaque sommet Q^1 de $\mathfrak{Q}^1$ la relation $W_2 \overline{Q}^1 \neq 0$ entraîne $a \in \overline{Q}^1$; 2° $\overline{W}_2 \sigma_i^0 = 0$ pour chaque valeur de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ telle que $\overline{\sigma}_i^0 - W_1 \neq 0$; 3° $\overline{W}_2 \overline{R - R_0} = 0$. W existe, car: 1° en vertu de la définition même d'un réseau gén., on a $\overline{W}_1 Q^1 = 0$ pour tous les sommets Q^1 de $\mathfrak{Q}^1$ à un nombre fini d'exceptions près; 2° si l'ensemble σ_i^0 n'est pas contenu dans $\overline{W}_1$, on déduit, $\mathfrak{Z}$ étant un affinement de $\mathfrak{V}_q$, que le point a n'est pas situé dans $\overline{\sigma}_i^0$; 3° $a \in R - \overline{R - R_0}$, comme nous allons voir.

On a $\overline{W}_1 \overline{R - R_0} = 0$ (et donc $a \in R - \overline{R - R_0}$). Dans le cas contraire, il existerait un point $b \in \overline{W}_1 \overline{R - R_0}$. Or, d'après 8, on a $R - R_0 = R - \sum_{i=1}^{\alpha_0} T_i \subset \sum Z$ où Z parcourt tous les sommets extérieurs de $\mathfrak{Z}$. Il existerait donc un sommet Z de $\mathfrak{Z}$ tel que $b \in \overline{Z}$, $ZS \neq 0$. Le réseau $\mathfrak{Z}$ étant un affinement de $\mathfrak{V}_q$, il existerait un sommet V de $\mathfrak{V}_q$ tel que $Z \subset V$, d'où $b \in \overline{V}$, donc $\overline{V}\,\overline{W}_1 \neq 0$ et par suite $V \subset W$, ce qui est impossible, car $Z \subset V$, $ZS \neq 0$, $W \subset R - S$.

On peut donc déterminer un réseau commode $\mathfrak{U}_0$ tel qu'aucun sommet de $\mathfrak{U}_0$ ne rencontre simultanément $\overline{W}_1$ et $\overline{R - R_0}$. $\mathfrak{U}_0$ soit en outre tel que la chaîne $G^n(\mathfrak{U})$ ne soit pas située dans $R - W_2$; c'est réalisable, car (v. 17.5) le cycle principal G^n n'est pas situé dans $R - W_2$. Enfin, $\mathfrak{U}_0$ soit si fin qu'aucun sommet de $\mathfrak{U}_0$ ne rencontre simultanément S et un des ensembles $\overline{P^0(\sigma_i^0)}$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$; c'est possible, car $\mathfrak{P}^0$ jouit de la propriété du n° 4.3. Supposons généralement que pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq q-1)$, on ait déjà construit le réseau $\mathfrak{U}_h$. Soit alors $\mathfrak{U}_{h+1}$ un réseau commode tel que $\mathfrak{U}_{h+1}$ soit un affinement de $\mathfrak{U}_h$ normal par rapport aux cycles dans $\overline{P^h(\sigma_i^h)}$ pour chaque valeur de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$. On définit de cette manière de proche en proche les réseaux commodes $\mathfrak{U}_h$ $(0 \leqq h \leqq q)$. Soit encore $\mathfrak{U}_{q+1}$ un réseau commode qui soit un affinement de $\mathfrak{U}_q$. Pour $0 \leqq h \leqq q$, choisissons une projection $\pi'_h = Pr.(\mathfrak{U}_{h+1}, \mathfrak{U}_h)$.

Pour $0 \leqq h \leqq n$, soit N_h l'ensemble de tous les indices i $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ tels que le simplexe σ_i^h possède un sommet qui soit un sous-ensemble de $\overline{W}_1$. Evidemment $j \in N_h$, $\eta_{ij}^h \neq 0$ $(0 \leqq h \leqq n-1)$ entraîne $i \in N_{h+1}$.

Pour $0 \leqq k \leqq q$, $0 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$ on a d'après 19.2

$$\pi'_k K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_{k+1}) = K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_k) \bmod \overline{R - R_0}.$$

Or je dis que, si $i \in N_h$, on a plus précisément

$$(*) \qquad \pi'_k K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_{k+1}) = K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_k).$$

D'après 19.1, 1° il suffit de prouver que la chaîne $\pi'_k K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_{k+1})$ ne contient aucun simplexe situé dans $\overline{R - R_0}$. Supposons au contraire que τ soit un tel $\mathfrak{U}_k$-simplexe. Alors chaque sommet de τ rencontrera $\overline{R - R_0}$. D'autre part, d'après 19.3, chaque sommet de τ rencontre $T(\sigma_i^h)$ et par suite chaque sommet Z de σ_i^h. Or, puisque $i \in N_h$, on peut choisir Z de manière que $Z \subset \overline{W}_1$. Donc chaque sommet de τ rencontrera simultanément $\overline{W}_1$ et $\overline{R - R_0}$, ce qui est impossible, car $\mathfrak{U}_k$ est un affinement de $\mathfrak{U}_0$.

Par le même raisonnement on déduit de 19.1, 3° que pour $0 \leqq k \leqq q+1$, $1 \leqq h \leqq n$, $j \in N_{h-1}$ on a

$$(**) \qquad K^{n-h+1}(\sigma_j^{h-1}, \mathfrak{U}_k) \rightarrow \sum_{i=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^{h-1} K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_k).$$

Ceci étant, supposons que notre lemme ne soit pas vrai. Si $i \in N_h$ $(0 \leqq h \leqq n)$, le simplexe σ_i^h possède un sommet Z_0 tel que $Z_0 \subset \overline{W}_1$. Z étant un sommet arbitraire de σ_i^h, on a $Z Z_0 \neq 0$ et par suite $Z \overline{W}_1 \neq 0$, d'où $Z \subset W$, car le réseau $\mathfrak{Z}$ est un affinement de $\mathfrak{V}_q$. Donc l'hypothèse que le lemme ne soit pas vrai entraîne, en excluant d'abord le cas $q = n+1$, que $K^{n-q}(\sigma_i^q, \mathfrak{U}_{q+1}) = 0$ pour un choix convenable de $\mathfrak{U}_{q+1}$, si $i \in N_q$. Donc, d'après $(*)$, on a $K^{n-q}(\sigma_i^q, \mathfrak{U}_q) = 0$ pour chaque $i \in N_q$. Donc on déduit de $(**)$ que $K^{n-q+1}(\sigma_i^{q-1}, \mathfrak{U}_q)$ est, pour chaque $i \in N_{q-1}$, un $(n-q+1, \mathfrak{U}_q)$-cycle, situé dans $\overline{P^{q-1}(\sigma_i^{q-1})}$ d'après 19.3. Donc $K^{n-q+1}(\sigma_i^{q-1}, \mathfrak{U}_{q-1})$ est, pour chaque $i \in N_{q-1}$, un $(n-q+1, \mathfrak{U}_q)$-cycle essentiel dans $\overline{P^{q-1}(\sigma_i^{q-1})}$ de manière qu'il existe pour $i \in N_{q-1}$ une $(n-q+2, \mathfrak{U}_{q-1})$-chaîne $H^{n-q+2}(\sigma_i^{q-1}, \mathfrak{U}_{q-1})$ dans $Q^{q-1}(\sigma_i^{q-1})$ telle que

$$H^{n-q+2}(\sigma_i^{q-1}, \mathfrak{U}_{q-1}) \rightarrow K^{n-q+1}(\sigma_i^{q-1}, \mathfrak{U}_{q-1}).$$

On arrive au même résultat si $q = n+1$. En effet, de l'hypothèse que le lemme ne soit pas vrai il résulte dans ce cas que $I[K^0(\sigma_i^n, \mathfrak{U}_{n+1})] = 0$ pour chaque $i \in N_n$. Puisque $K^0(\sigma_i^n, \mathfrak{U}_{n+1}) \subset \overline{P^n(\sigma_i^n)}$, il existe donc une $(1, \mathfrak{U}_n)$-chaîne $H^1(\sigma_i^n, \mathfrak{U}_{n-1})$ dans $Q^n(\sigma_i^n)$ telle que

$$H^1(\sigma_i^n, \mathfrak{U}_n) \rightarrow K^0(\sigma_i^n, \mathfrak{U}_n).$$

Quelleque soit la valeur de q, il résulte de ce que nous venons de prouver, en tenant compte de $(**)$, que pour chaque $j \in N_{q-2}$

$$\Gamma^{n-q+2}(\sigma_j^{q-2}, \mathfrak{U}_{q-1}) = K^{n-q+2}(\sigma_j^{q-2}, \mathfrak{U}_{q-1}) - \sum_{i \in N_{q-1}} \eta_{ij}^{q-2} H^{n-q+2}(\sigma_i^{q-1}, \mathfrak{U}_{q-1})$$

est un $(n-q+2, \mathfrak{U}_{q-1})$-cycle dans

$$T(\sigma_j^{q-2}) + \sum_{\eta_{ij}^{q-2} \neq 0} \overline{Q^{q-1}(\sigma_i^{q-1})} \subset \overline{P^{q-2}(\sigma_j^{q-2})}.$$

Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(1 \leqq h \leqq q-2)$, on ait déjà attaché à chaque $i \in N_{h+1}$ une $(n-h, \mathfrak{U}_{h+1})$-chaîne $H^{n-h}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{h+1})$ dans $\overline{Q^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$ de manière que pour chaque $j \in N_h$

$$\Gamma^{n-h}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_{h+1}) = K^{n-h}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_{h+1}) - \sum_{i \in N_{h+1}} \eta_{ij}^h H^{n-h}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{h+1})$$

soit un $(n-h, \mathfrak{U}_{h+1})$-cycle dans $\overline{P^h(\sigma_j^h)}$. Posons

$$H^{n-h}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_h) = \pi_h H^{n-h}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{h+1})$$

etc., ce qui est d'accord avec (*). Alors $\Gamma^{n-h}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_h)$ est un $(n-h, \mathfrak{U}_h)$-cycle essentiel dans $\overline{P^h(\sigma_j^h)}$. Il en résulte qu'il existe pour $j \in N_h$ une $(n-h+1, \mathfrak{U}_h)$-chaîne $H^{n-h+1}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_h)$ dans $\overline{Q^h(\sigma_j^h)}$ telle que

$$H^{n-h+1}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_h) \rightarrow \Gamma^{n-h}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_h)$$

d'où pour $j \in N_{h-1}$

$$\begin{aligned}\Gamma^{n-h+1}(\sigma_j^{h-1}, \mathfrak{U}_h) &= K^{n-h+1}(\sigma_j^{h-1}, \mathfrak{U}_h) - \sum_{i \in N_h} \eta_{ij}^{h-1} H^{n-h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_h) \\ &\rightarrow \sum_{i \in N_h} \eta_{ij}^{h-1} [K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_h) - \Gamma^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_h)] \\ &= \sum_{\substack{i \in N_h \\ k \in N_{h+1}}} \eta_{ki}^h \eta_{ij}^{h-1} H^{n-h}(\sigma_k^{h+1}, \mathfrak{U}_h) = 0\end{aligned}$$

de manière que $\Gamma^{n-h+1}(\sigma_j^{h-1}, \mathfrak{U}_h)$ est, pour $j \in N_{h-1}$, un $(n-h+1, \mathfrak{U}_h)$-cycle dans

$$T(\sigma_j^{h-1}) + \sum_{i \in N_h} \overline{Q^h(\sigma_i^h)} \subset P^{h-1}(\sigma_j^{h-1}).$$

En procédant de cette manière on arrive finalement à attacher à chaque $i \in N_1$ une $(n, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $H^n(\sigma_i^1, \mathfrak{U}_1)$ dans $\overline{Q^1(\sigma_i^1)}$ de manière que pour chaque $j \in N_0$

$$\Gamma^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}_1) = K^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}_1) - \sum_{i \in N_1} \eta_{ij}^0 H^n(\sigma_i^1, \mathfrak{U}_1)$$

soit un $(n, \mathfrak{U}_1)$-cycle dans $\overline{P^0(\sigma_i^0)}$ de manière que $\Gamma^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}_0)$ est un $(n, \mathfrak{U}_0)$-cycle essentiel dans $\overline{P^0(\sigma_i^0)} \in \mathfrak{P}^0$. D'après la définition du réseau gén. $\mathfrak{P}^0$, il en résulte que $\Gamma^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}_0) \sim 0$ dans $\overline{P^0(\sigma_j^0)}$ pour chaque $j \in N_0$. Or le réseau $\mathfrak{U}_0$ est d'ordre $\leqq n \bmod S$ et aucun sommet de $\mathfrak{U}_0$ ne peut rencontrer simultanément S et $\overline{P^0(\sigma_j^0)}$. Donc

$$K^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}_0) = \sum_{i \in N_1} \eta_{ij}^0 H^n(\sigma_i^1, \mathfrak{U}_0)$$

pour chaque $i \in N_0$. Donc

$$\sum_{j \in N_0} K^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}_0) = \sum_{i \in N_1} \varepsilon_i H^n(\sigma_i^1, \mathfrak{U}_0)$$

pour $j \in N_0$, où

$$\varepsilon_i = \sum_{j \in N_0} \eta_{ij}^0 \quad \text{pour} \quad i \in N_1.$$

Or pour $i \in N_1$ on a $\sigma_i^1 \to \pm(\sigma_s^0 - \sigma_t^0)$, où un au moins des deux ensembles σ_s^0 et σ_t^0 est contenu dans $\overline{W}_1$. Si $\sigma_s^0 + \sigma_t^0 \subset \overline{W}_1$, on a $s, t \in N_0$, d'où $\varepsilon_i = 0$. Donc si l'indice $i \in N_1$ est tel que $\varepsilon_i \neq 0$, on peut supposer que $\sigma_s^0 - \overline{W}_1 \neq 0$. Or $\sigma_s^0 \subset Q^1(\sigma_i^1)$, donc $Q^1(\sigma_i^1) - \overline{W}_1 \neq 0$. Il en résulte que le point a n'est pas situé dans $\overline{Q^1(\sigma_i^1)}$; en effet, dans le cas contraire on aurait $a \in \overline{Q^1(\sigma_i^1)} \subset \overline{P^0(\sigma_s^0)}$, d'où la contradiction $Q^1(\sigma_i^1) \subset P^0(\sigma_s^0) \subset W_1$ d'après la définition de $\mathfrak{P}^0$. Puisque le point a n'est pas situé dans $\overline{Q^1(\sigma_i^1)}$, on a $\overline{Q^1(\sigma_i^1)}\, W_2 = 0$ d'après la définition de W_2. Donc $i \in N_1$, $\varepsilon_i \neq 0$ entraîne que $\overline{Q^1(\sigma_i^1)} \subset R - W_2$ et par suite que la chaîne $H^n(\sigma_i^1, \mathfrak{U}_0)$ est située dans $R - W_2$. Donc pour chaque $i \in N_0$ la chaîne $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_0)$ est $\subset R - W_2$. Or ce fait subsiste pour toutes les autres valeurs de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$; en effet, si l'on n'a pas $i \in N_0$, on a $\overline{\sigma_i^0}\, W_2 = 0$ d'après la définition de W_2 et, d'autre part, la chaîne $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_0)$ est (v. 19.3) située dans $T_i \subset \overline{\sigma_i^0}$. Donc la chaîne

$$\sum_{i=1}^{\alpha_0} K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_0)$$

est située dans $R - W_2$. En outre on a $\overline{R - R_0} \subset R - W_2$ d'après la définition de W_2. Donc (v. 19.1, 4°) la chaîne $G^n(\mathfrak{U}_0)$ est située dans $R - W_2$, ce qui est une contradiction.

Le cas $q = 0$, qui était exclu jusqu'à présent, se traite bien facilement. On peut choisir arbitrairement le réseau gén. $\mathfrak{M}_0$. Choisissons de nouveau le point $a \in W$ et son entourage $W_1 \Subset W$. Supposons le réseau $\mathfrak{V}_0$ choisi de telle manière que 1° $V \in \mathfrak{V}_0$, $\overline{V}\, \overline{W}_1 \neq 0$ entraîne $V \subset W$; 2° $a \in \overline{V}$, $V \in \mathfrak{V}_0$ entraîne $V \subset W_1$. Soit W_2 un entourage de a si petit que 1° $\sigma_i^0 - \overline{W}_1 \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ entraîne $\overline{W}_2\, \overline{\sigma_i^0} = 0$; 2° $\overline{W}_2\, \overline{R - R_0} = 0$. Comme plus haut on voit que ces conditions sont réalisables. Choisissons le réseau commode $\mathfrak{U}_0$ de manière que la chaîne $G^n(\mathfrak{U}_0)$ ne soit pas située dans $R - W_2$. Si le cas $q = 0$ du lemme n'était pas vrai, on aurait [v. (*)] $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_0) = 0$ pour chaque i tel que $\sigma_i^0 \subset \overline{W}_1$. Comme plus haut, on voit que pour les autres valeurs de i $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_0)$ est située dans $R - W_2$. Puisque $\overline{R - R_0} \subset R - W_2$, on aurait de nouveau la contradiction $G^n(\mathfrak{U}_0) \subset R - W_2$.

25.2. Passons à la démonstration du théorème du n° 25. D'après la définition de la famille Ξ on peut déterminer des points $a_{hi} \in \mathfrak{J}(\sigma_i^h)$

($0 \leqq h \leqq p+1$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$; $\mathfrak{J}$ signifie le noyau) de manière que l'inclusion $a_{hi} \in Z$, $Z \in \mathfrak{Z}$ entraîne que Z soit un sommet de σ_i^h. Désignons par G la somme de tous les sommets extérieurs de $\mathfrak{Z}$. On a alors $a_{hi} \in R - \overline{G}$. Les points a_{hi} étant manifestement distincts les uns des autres, on peut déterminer des ensembles ouverts W_{hi} tels que 1° $W_{hi} \subset \mathfrak{J}(\sigma_i^h)$; 2° $W_{hi} W_{kj} \neq 0$ entraîne $h = k$, $i = j$; 3° $W_{hi} \subset R - \overline{G}$. Pour $0 \leqq h \leqq p+1$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$ attachons à l'ensemble ouvert W_{hi} le réseau $\mathfrak{V}_{hi}$ et le réseau gén. $\mathfrak{M}_{hi}$ d'après 25.1 en y posant $q = h$. Choisissons le réseau $\mathfrak{z}$ de manière qu'il soit un affinement de $\mathfrak{Z}$, ainsi que de chaque $\mathfrak{V}_{hi}$ et que chaque sommet intérieur de $\mathfrak{z}$ fasse partie d'un sommet de chaque $\mathfrak{M}_{hi}$. Associons à $\mathfrak{z}$ un réseau fermé $\mathfrak{t}$ selon 8. D'après 25.2 il existe des $(h, \mathfrak{z})$-simplexes intérieurs $\varrho_i^h = (z_{hi0}, z_{hi1}, \cdots, z_{hih})$ ($0 \leqq h \leqq p+1$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$) tels que 1° $z_{hi\lambda} \subset W_{hi}$ ($0 \leqq \lambda \leqq h$); 2° il existe une famille parfaitement complète χ de réseaux commodes par rapport à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ et tels que $k^{n-h}(\varrho_i^h, \mathfrak{U}) \neq 0$ pour $0 \leqq h \leqq p+1$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$, $\mathfrak{U} \in \chi$. Posons $\sigma_i^h = (Z_{hi0}, Z_{hi1}, \cdots, Z_{hih})$. Les ensembles $z_{hi\lambda}$ sont évidemment distincts les uns des autres et on a $z_{hi\lambda} \subset W_{hi} \subset \mathfrak{J}(\sigma_i^h) \subset Z_{hi\lambda}$. On peut donc choisir $\pi = Pr.\,(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$ de manière que

$$\pi z_{hi\lambda} = Z_{hi\lambda} \quad \text{pour} \quad 0 \leqq h \leqq p+1, \quad 1 \leqq i \leqq \alpha_h, \quad 0 \leqq \lambda \leqq h.$$

Déterminons le réseau fermé $\mathfrak{T}$ attaché à $\mathfrak{Z}$ d'après 24. D'après 24, (3) on a pour chaque $\mathfrak{U} \in \chi$ et pour $0 \leqq h \leqq p+1$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$

$$(*) \qquad K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) = \sum_{\nu} k^{n-h}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}) \mod \overline{R - R_0},$$

ν parcourant tous les indices ($1 \leqq \nu \leqq \gamma_h$) tels que $\pi \tau_\nu^h = \sigma_i^h$. En particulier la somme à droite dans (*) contient le terme $k^{n-h}(\varrho_i^h, \mathfrak{U})$, puisque évidemment $\pi \varrho_i^h = \sigma_i^h$. La somme à droite dans (*) ne peut être égale à zéro mod $\overline{R - R_0}$ que si chaque terme est $= 0$ mod $\overline{R - R_0}$, car chaque simplexe de la chaîne $k^{n-h}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U})$ est d'espèce τ_ν^h relativement à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ de manière que deux termes différents de notre somme n'ont aucun simplexe en commun. Donc l'égalité $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) = 0$ entraînerait en particulier que $k^{n-h}(\varrho_i^h, \mathfrak{U}) = 0$ mod $\overline{R - R_0}$. Or nous savons que $k^{n-h}(\varrho_\nu^h, \mathfrak{U}) \neq 0$. Il suffit donc de montrer que, si le réseau $\mathfrak{U} \in \chi$ est suffisamment fin, un simplexe de la chaîne $k^{n-h}(\varrho_i^h, \mathfrak{U})$ ne peut pas être situé dans $\overline{R - R_0}$. Or on a, d'après 8, $R_0 \supset R - G$, d'où $\overline{R - R_0} \subset \overline{G}$. D'autre part, on a $t(\varrho_i^h) \subset z_{hi0} \subset W_{hi} \subset R - \overline{G}$. Donc $t(\varrho_i^h)$ et $\overline{R - R_0}$ sont deux ensembles fermés disjoints, de manière que, si le réseau $\mathfrak{U}$ est suffisamment fin, un $\mathfrak{U}$-simplexe ne peut être situé simultanément dans $t(\varrho_i^h)$ et dans $\overline{R - R_0}$. Or chaque simplexe de la chaîne $k^{n-h}(\varrho_i^h, \mathfrak{U})$ est situé dans $t(\varrho_i^h)$ d'après 19.3.

26. *Soit* $0 \leqq p \leqq n$. *Soit* $\mathfrak{Z} \in \Xi$ (v. 23). *Déterminons le réseau fermé* $\mathfrak{T}$ *d'après 25. Soit A un sous-ensemble bicompact de R. Il existe un réseau commode* $\mathfrak{U}_0$ *jouissant de la propriété suivante: Si les nombres* $r_i \in \mathfrak{R}$ *sont tels que* $\sum_{i=1}^{\alpha_p} r_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}_0)$ *est un* $(n-p, \mathfrak{U}_0)$*-cycle mod* $A\,\overline{R-R_0}$ *homologue à zéro dans A, alors* $\sum_{i=1}^{\alpha_p} r_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ *est un* $(n-p, \mathfrak{U})$*-cycle mod* $A\,\overline{R-R_0}$ *homologue à zéro dans A pour chaque réseau commode* $\mathfrak{U}$ *qui est un affinement de* $\mathfrak{U}_0$.

Démonstration. Soient $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ deux réseaux commodes dont le second un affinement du premier. D'après 19.2 et 19.1, 1° la relation $K^{n-p}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}') \subset A$ entraîne $K^{n-p}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) \subset A$. On en déduit sans peine qu'il existe un réseau commode $\mathfrak{U}_1$ tel que $K^{n-p}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1) \subset A$ entraîne $K^{n-p}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) \subset A$ pour chaque réseau commode $\mathfrak{U}$. Si l'on numérote convenablement les σ_i^p, on a un nombre $\alpha_h' \,(0 \leqq \alpha_h' \leqq \alpha_h)$ tel que $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1) \subset A$ si et seulement si $1 \leqq i \leqq \alpha_h'$. D'après 25 on peut supposer que $K^{n-h}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) \nsim 0 \mod A\,\overline{R-R_0}$ pour $0 \leqq h \leqq \min(n, p+1)$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h'$ dans chaque affinement commode $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{U}_1$. Il en résulte (v. 19.1, 3°) que si

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{\alpha_p'} r_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \to 0 \quad \mod A\,\overline{R-R_0}$$

pour $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1$, la même relation a lieu pour chaque affinement commode $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{U}_1$. Les chaînes $(*)$ forment un module de rang fini $(\leqq \alpha_p')$. Désignons par $M_p(\mathfrak{U})$ le sous-module du module défini par la condition

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p'} r_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \sim 0 \quad \mod A\,\overline{R-R_0} \text{ dans } A$$

et soit $\varrho_p(\mathfrak{U})$ le rang de $M_p(\mathfrak{U})$. Il existe un affinement commode $\mathfrak{U}_0$ de $\mathfrak{U}_1$ tel que la valeur de $\varrho_p(\mathfrak{U})$ pour $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0$ soit un minimum. On voit sans peine que le réseau commode $\mathfrak{U}_0$ jouit de la propriété voulue.

IV.

27. Axiome H^k $(0 \leqq k \leqq n-2)$: *Pour chaque entourage P d'un point $a \in R-S$ il existe un entourage $P_1 \subset P$ de a jouissant de la propriété suivante: A chaque entourage $P_2 \subset P_1$ de a on peut attacher un entourage $P_3 \subset P_2$ de a de manière que: Si Γ^k est un (k, R)-cycle dans $\overline{P_1} - P_2$ et que l'on ait $\Gamma^k \sim 0$ dans $\overline{P_1}$, on a aussi $\Gamma^k \sim 0$ dans $\overline{P} - P_3$.*

27.1. D'après 4.2 on déduit de l'axiome H^k: *Pour chaque réseau gén. $\mathfrak{P}$ il existe un affinement $\mathfrak{P}_1$ et une projection $\pi' = Pr.(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P})$ jouissant de la propriété suivante: A chaque affinement $\mathfrak{P}_2$ de $\mathfrak{P}_1$ on peut attacher un affinement $\mathfrak{P}_3$ de $\mathfrak{P}_2$ ainsi qu'une projection $\pi'' = Pr.(\mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_2)$ de manière* *que: Si* $P_3 \in \mathfrak{P}_3$, $\pi'' P_3 \subset P_1 \in \mathfrak{P}_1$, *si* Γ^k *est un* (k, R)*-cycle dans* $\overline{P}_1 - \pi'' P_3$, *si* $\Gamma^k \sim 0$ *dans* $\overline{P}_1$, *alors* $\Gamma^k \sim 0$ *dans* $\pi' P_1 - P_3$.

28. Dans tout ce Chapitre, supposons donnée une valeur fixe de p $(1 \leqq p \leqq n)$. Outre les axiomes des Chap. I et II, on suppose la validité des axiomes G^k pour $n-p \leqq k \leqq n-1$ (v. 21) et celle des axiomes H^k pour max. $(0, n-p-1) \leqq k \leqq n-2$.

29. Soit $\mathfrak{P}_1^p$ un réseau gén. donné.

Déterminons un affinement $\mathfrak{Q}^{p-1}$ de $\mathfrak{P}_1^p$ jouissant de la propriété du n° 4.4. Ensuite déterminons un affinement $\mathfrak{P}^{p-1}$ de $\mathfrak{Q}^{p-1}$ ainsi qu'une projection $\pi_{p-1} = Pr.(\mathfrak{P}^{p-1}, \mathfrak{Q}^{p-1})$ d'après 21.1, en y posant $k = n-1$. Enfin déterminons un affinement $\mathfrak{P}_1^{p-1}$ de $\mathfrak{P}^{p-1}$ ainsi qu'une projection $\pi'_{p-1} = Pr.(\mathfrak{P}_1^{p-1}, \mathfrak{P}^{p-1})$ d'après 27.1, en y posant $k = n-2$[41]. Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq p-2)$, on ait déjà défini les réseaux gén. $\mathfrak{Q}^{h+1}$, $\mathfrak{P}^{h+1}$, $\mathfrak{P}_1^{h+1}$. Déterminons un affinement $\mathfrak{Q}^h$ de $\mathfrak{P}_1^{h+1}$ jouissant de la propriété du n° 4.4. Ensuite déterminons un affinement $\mathfrak{P}^h$ de $\mathfrak{Q}^h$ ainsi qu'une projection $\pi_h = Pr.(\mathfrak{P}^h, \mathfrak{Q}^h)$ d'après 21.1 en y posant $k = n-p+h$. Enfin déterminons un affinement $\mathfrak{P}_1^{h+1}$ de $\mathfrak{P}^{h+1}$ ainsi qu'une projection $\pi'_h = Pr.(\mathfrak{P}_1^h, \mathfrak{P}^h)$ d'après 27.1, en y posant $k = n-p+h-1$[42]. En procédant de cette manière, on construit de proche en proche les réseaux gén. $\mathfrak{Q}^h$, $\mathfrak{P}^h$, $\mathfrak{P}_1^h$ pour $0 \leqq h \leqq p-1$.

Déterminons un affinement $\mathfrak{P}_2^0$ de $\mathfrak{P}_1^0$ jouissant de la propriété du n° 4.3. Ensuite d'après 27.1, où l'on remplace $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, π', k resp. par $\mathfrak{P}^0$, $\mathfrak{P}_1^0$, $\mathfrak{P}_2^0$, π'_0, $n-p-1$ déterminons un affinement $\mathfrak{P}_3^0$ de $\mathfrak{P}_2^0$ ainsi qu'une projection $\pi''_0 = Pr.(\mathfrak{P}_3^0, \mathfrak{P}_2^0)$[43]. Enfin déterminons un affinement $\mathfrak{P}_4^0$ de $\mathfrak{P}_3^0$ jouissant de la propriété du n° 4.3. Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq p-2)$ on ait déjà défini les réseaux gén. $\mathfrak{P}_2^h$, $\mathfrak{P}_3^h$, $\mathfrak{P}_4^h$. Déterminons un affinement $\mathfrak{P}_2^{h+1}$ de $\mathfrak{P}_4^h$ jouissant de la propriété du n° 4.4. Ensuite d'après 27.1, où l'on remplace $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, π', k resp. par $\mathfrak{P}^{h+1}$, $\mathfrak{P}_1^{h+1}$, $\mathfrak{P}_2^{h+1}$, π'_{h+1}, $n-p+h$, déterminons un affinement $\mathfrak{P}_3^{h+1}$ de $\mathfrak{P}_2^{h+1}$ ainsi qu'une projection $\pi''_{h+1} = Pr.(\mathfrak{P}_3^{h+1}, \mathfrak{P}_2^{h+1})$. Enfin déterminons un affinement $\mathfrak{P}_4^{h+1}$ de $\mathfrak{P}_3^{h+1}$ jouissant de la propriété du n° 4.3. En procédant de cette manière, on construit de proche en proche les réseaux gén. $\mathfrak{P}_2^h$, $\mathfrak{P}_3^h$, $\mathfrak{P}_4^h$ $(0 \leqq h \leqq p-1)$.

Déterminons encore un affinement $\mathfrak{P}_2^p$ de $\mathfrak{P}_4^{p-1}$ jouissant de la propriété du n° 4.4. Ensuite déterminons un affinement $\mathfrak{P}_3^p$ de $\mathfrak{P}_2^p$ ainsi qu'une projection $\pi''_p = Pr.(\mathfrak{P}_3^p, \mathfrak{P}_2^p)$ jouissant de la propriété du n° 14.2; on peut

---

[41] Si $n = 1$ et par suite $p = 1$, on détermine l'affinement $\mathfrak{P}_1^0$ de $\mathfrak{P}^0$ et la projection π'_0 de manière que $\pi'_0 P_1^0 \neq P_1^0$ pour chaque $P_1^0 \in \mathfrak{P}_1^0$.

[42] Si $p = n$ et $h = 0$, on détermine l'affinement $\mathfrak{P}_1^0$ de $\mathfrak{P}^0$ et la projection π'_0 de manière que $\pi'_0 P_1^0 \neq P_1^0$ pour chaque $P_1^0 \in \mathfrak{P}_1^0$.

[43] Si $p = n$, on pose $\mathfrak{P}_3^0 = \mathfrak{P}_2^0$ et π''_0 est l'identité.

supposer que l'affinement $\mathfrak{P}_3^p$ de $\mathfrak{P}_2^p$ jouisse de la propriété du n° 4.3. Enfin déterminons un affinement $\mathfrak{P}_4^p$ de $\mathfrak{P}_3^p$ jouissant de la propriété du n° 4.4 ainsi qu'un affinement $\mathfrak{P}_5^p$ de $\mathfrak{P}_4^p$ jouissant de la même propriété.

30. Reprenons les notations du n° 8 en supposant que chaque sommet intérieur du réseau $\mathfrak{Z}$ fasse partie d'un sommet du réseau gén. $\mathfrak{P}_5^p$ (et donc aussi d'un sommet du réseau gén. $\mathfrak{P}_1^p$ donné a priori).

Pour abréger, disons que σ_j^0 $(1 \leqq j \leqq \alpha_0)$ est *contigu* à σ_i^h $(0 \leqq h \leqq p,$ $1 \leqq i \leqq \alpha_h)$, si σ_j^0 rencontre un sommet de σ_i^h (en particulier si σ_j^0 est lui-même un sommet de σ_i^h).

Comme le réseau gén. $\mathfrak{P}_4^p$ ($\mathfrak{P}_5^p$) jouit par rapport à $\mathfrak{P}_3^p$ ($\mathfrak{P}_4^p$) de la propriété du n° 4.4, on peut attacher à chaque σ_i^p $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$ un sommet $P_3^p(\sigma_i^p)$ de $\mathfrak{P}_3^p$ de manière que chaque sommet intérieur de $\mathfrak{Z}$ contigu à σ_i^p fasse partie de $P_3^p(\sigma_i^p)$. Posons $P_2^p(\sigma_i^p) = \pi'' P_3^p(\sigma_i^p)$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$. Supposons généralement que pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq p-1)$, on ait déjà attaché à chaque σ_i^{h+1} $(1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1})$ un sommet $P_2^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$ du réseau gén. $\mathfrak{P}_2^{h+1}$ tel que chaque sommet intérieur de $\mathfrak{Z}$ contigu à σ_i^{h+1} en soit un sous-ensemble. Soit donnée une valeur de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$. Distinguons deux cas. Premièrement, si le $\mathfrak{Z}$-simplexe σ_i^h n'est pas une face d'aucun $(h+1, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur, choisissons un sommet $P_4^h(\sigma_i^h)$ de $\mathfrak{P}_4^h$ de manière que chaque sommet intérieur de $\mathfrak{Z}$ contigu à σ_i^h en soit un sous-ensemble; ceci est possible, car le réseau gén. $\mathfrak{P}_3^{p+1}$ est un affinement de $\mathfrak{P}_4^h$. En second lieu supposons qu'il existe des valeurs de j $(1 \leqq j \leqq \alpha_{h+1})$ telles que $\eta_{ji}^h \neq 0$. Dans ce cas choisissons le sommet $P_4^h(\sigma_i^h)$ de $\mathfrak{P}_4^h$ de manière qu'on ait $P_4^h(\sigma_i^h) \supset P_2^{h+1}(\sigma_j^{h+1})$ pour toutes les valeurs de j telles que $\eta_{ji}^h \neq 0$; ceci est possible, car le réseau gén. $\mathfrak{P}_2^{h+1}$ jouit par rapport à $\mathfrak{P}_4^h$ de la propriété du n° 4.4. Dans les deux cas le sommet $P_4^h(\sigma_i^h)$ est donc construit de manière que chaque sommet intérieur de $\mathfrak{Z}$ contigu à σ_i^h en soit un sous-ensemble. Comme le réseau gén. $\mathfrak{P}_4^h$ jouit par rapport à $\mathfrak{P}_3^h$ de la propriété du n° 4.3, il existe un sommet $P_3^h(\sigma_i^h)$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ tel que $P_3^h(\sigma_i^h) \supseteqq P_4^h(\sigma_i^h)$. Posons encore $P_2^h(\sigma_i^h) = \pi_h'' P_3^h(\sigma_i^h)$. En procédant de cette manière, on attache de proche en proche à chaque $(h, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur σ_i^h $(0 \leqq h \leqq p-1,$ $1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ des sommets $P_4^h(\sigma_i^h)$, $P_3^h(\sigma_i^h)$, $P_2^h(\sigma_i^h)$ resp. de $\mathfrak{P}_4^h$, $\mathfrak{P}_3^h$, $\mathfrak{P}_2^h$.

Le réseau gén. $\mathfrak{P}_2^0$ jouissant par rapport à $\mathfrak{P}_1^0$ de la propriété du n° 4.3, il existe (pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$) un sommet $P_1^0(\sigma_i^0)$ de $\mathfrak{P}_1^0$ tel que $P_1^0(\sigma_i^0) \supseteqq P_2^0(\sigma_i^0)$. Posons $P^0(\sigma_i^0) = \pi_0' P_1^0(\sigma_i^0)$, $Q^0(\sigma_i^0) = \pi_0 P^0(\sigma_i^0)$. Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq p-2)$, on ait déjà attaché à chaque σ_i^h $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ un sommet $Q^h(\sigma_i^h)$ de $\mathfrak{Q}^h$ tel que chaque sommet intérieur de $\mathfrak{Z}$ contigu à σ_i^h en soit un sous-ensemble. Soit donnée une valeur de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1})$. Comme le réseau gén. $\mathfrak{Q}^h$ jouit par rapport à $\mathfrak{P}_1^{h+1}$ de la propriété du n° 4.4, il existe un sommet $P_1^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$ du réseau gén. $\mathfrak{P}_1^{h+1}$ tel que $P_1^{h+1}(\sigma_i^{h+1}) \supset Q_j^h(\sigma_j^h)$ pour chaque valeur de j $(1 \leqq j \leqq \alpha_h)$ telle que $\eta_{ij}^h \neq 0$. Posons encore

$$P^{h+1}(\sigma_i^{h+1}) = \pi'_{h+1} P_1^{h+1}(\sigma_i^{h+1}), \qquad Q^{h+1}(\sigma_i^{h+1}) = \pi_{h+1} P^{h+1}(\sigma_i^{h+1}) \quad (1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1}).$$

En procédant de cette manière, on attache de proche en proche à chaque $(h, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur σ_i^h $(0 \leqq h \leqq p-1,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ des sommets $P_1^h(\sigma_i^h)$, $P^h(\sigma_i^h)$, $Q^h(\sigma_i^h)$ resp. de $\mathfrak{P}_1^h$, $\mathfrak{P}^h$, $\mathfrak{Q}^h$.

Comme le réseau gén. $\mathfrak{Q}^{p-1}$ jouit par rapport à $\mathfrak{P}_1^p$ de la propriété du n° 4.4, on peut enfin attacher à chaque σ_i^p $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$ un sommet $P_1^p(\sigma_i^p)$ de $\mathfrak{P}_1^p$ de manière que $P_1^p(\sigma_i^p) \supset Q^{p-1}(\sigma_j^{p-1})$ pour chaque valeur de j $(1 \leqq j \leqq \alpha_{p-1})$ telle que $\eta_{ij}^{p-1} \neq 0$.

31. Gardons les conventions des n$^{\text{os}}$ 8, 29 et 30. *Soit A un sous-ensemble bicompact de R; soit B un entourage de A. On peut choisir le réseau gén. $\mathfrak{P}_1^p$ (n° 29) de manière que ($\mathfrak{Z}$ satisfaisant à la condition énoncée au commencement du n° 30) on ait la propriété suivante: Soit $\mathfrak{U}$ un réseau commode (v. 18.1). Soit $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ un $(n-p, \mathfrak{U})$-cycle mod SA dans A essentiel. Il existe une $(n-p, \mathfrak{U})$-chaîne élémentaire $D^{n-p}(\mathfrak{U})$ dans $\bar{B}$ telle que $C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim D^{n-p}(\mathfrak{U})$ mod $\bar{B}\ \overline{R-R_0}$ dans $\bar{B}$.*

En fait il suffit de choisir $\mathfrak{P}_1^p$ de manière que chacun de ses sommets P' qui rencontre un sommet P'' de $\mathfrak{P}_1^p$ tel que $\bar{P}'' A \neq 0$, fasse partie de B. Un tel choix de $\mathfrak{P}_1^p$ est évidemment possible (v. 4.3 et 4.4). Tous les réseaux introduits dans 29 étant des affinements de $\mathfrak{P}_1^p$, ils possèdent aussi la même propriété.

La démonstration fera l'objet des n$^{\text{os}}$ 32—42.5.

32. En tenant compte de 19.2, on voit sans peine qu'il suffit de donner la démonstration en supposant que le réseau commode $\mathfrak{U}$ soit suffisamment fin. Or (v. 29) l'affinement $\mathfrak{P}_4^h$ du réseau gén. $\mathfrak{P}_3^h$ $(0 \leqq h \leqq p-1)$ ainsi que l'affinement $\mathfrak{P}_2^0\,(\mathfrak{P}_3^p)$ de $\mathfrak{P}_1^0\,(\mathfrak{P}_2^p)$ jouit de la propriété du n° 4.3. On peut donc supposer que le réseau $\mathfrak{U}$ soit tel que: 1° pour $0 \leqq h \leqq p-1$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$ chaque sommet de $\mathfrak{U}$ qui rencontre $\overline{P_4^h(\sigma_i^h)}$ fasse partie de $P_3^h(\sigma_i^h)$; 2° pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0\,(\alpha_p)$ chaque sommet de $\mathfrak{U}$ qui rencontre $\overline{P_2^0(\sigma_i^0)}\,[\overline{P_3^p(\sigma_i^p)}]$ fasse partie de $P_1^0(\sigma_i^0)\,[P_2^p(\sigma_i^p)]$. De plus on peut supposer qu'aucun sommet de $\mathfrak{U}$ ne rencontre simultanément S et un des ensembles $\overline{P_1^0(\sigma_i^0)}$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$. Ensuite on peut supposer que, si U', U'' sont deux sommets de $\mathfrak{U}$ tels que $U' R_0 \neq 0$, $U'' S \neq 0$, on ait $U' U'' = 0$. Puis, on peut supposer que si un sommet de $\mathfrak{U}$ rencontre simultanément A et un des ensembles $\overline{P_1^0(\sigma_i^0)}$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$, on ait $A\ \overline{P_1^0(\sigma_i^0)} \neq 0$. En outre on peut (v. 17.5) supposer que $G^n(\mathfrak{U}) \not\sim 0$ mod $R - P_3^p(\sigma_i^p)$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$. Encore,

comme (v. 30) chaque sommet intérieur de $\mathfrak{Z}$ contigu (v. 30) de σ_i^h $(0 \leqq h \leqq p-1,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ est un sous-ensemble de l'ensemble ouvert $P_4^h(\sigma_i^h)$, on peut supposer que, pour $0 \leqq h \leqq p-1$, $0 \leqq k \leqq p-1$, $1 \leqq j \leqq \alpha_k$, les indices i, j étant tels que les $\mathfrak{Z}$-simplexes σ_i^h et σ_j^k soient des faces d'un certain $(l, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur $(l \geqq h,\ l \geqq k)$, chaque sommet de $\mathfrak{U}$ qui rencontre $T(\sigma_j^k)$ fasse partie de $P_4^h(\sigma_i^h)$. En effet $T(\sigma_j^k)$ est un sous-ensemble bicompact de chaque sommet de σ_j^k; or chaque sommet de σ_j^k étant contigu à σ_i^h, il en résulte que $T(\sigma_j^k) \subset P_4^h(\sigma_i^h)$. Pareillement on voit qu'on peut supposer que, si σ_r^0 est un sommet de σ_i^p, chaque sommet de $\mathfrak{U}$ qui rencontre T_r est un sous-ensemble de $P_3^p(\sigma_i^p)$.

Il est évident que ces propriétés de $\mathfrak{U}$ appartiennent aussi à chaque affinement de $\mathfrak{U}$.

33. Posons $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}$. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement de $\mathfrak{U}$ régulier par rapport à $B\ \overline{R-R_0}$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau commode tel que 1° $\mathfrak{U}_1$ soit un affinement de $\mathfrak{V}$; 2° $\mathfrak{U}_1$ est un affinement de $\mathfrak{U}$ normal par rapport aux cycles mod $R-P_2^p(\sigma_i^p)$, pour $1 \leqq i \leqq \alpha_p$. Soit $\pi_{10} = Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, $\pi_{20} = Pr.(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{V})$, $\pi_0^* = \pi_{10}\,\pi_{20} = Pr.(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U})$. Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq p-1)$, on ait déjà défini le réseau $\mathfrak{U}_{2p-2h-1}$. Alors, soit $\mathfrak{U}_{2p-2h}$ un réseau commode qui soit un affinement de $\mathfrak{U}_{2p-2h-1}$ normal par rapport aux cycles dans $\overline{P^h(\sigma_i^h)}$ pour chaque i $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ et soit $\pi_{2p-2h-1}^* = Pr.(\mathfrak{U}_{2p-2h}, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})$; ensuite, soit $\mathfrak{U}_{2p-2h+1}$ un réseau commode qui soit un affinement de $\mathfrak{U}_{2p-2h}$ normal par rapport aux cycles dans $\overline{P_1^h(\sigma_i^h)}-P_2^h(\sigma_i^h)$ pour chaque $i\,(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ et soit $\pi_{2p-2h}^* = Pr.(\mathfrak{U}_{2p-2h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h})$. En procédant de cette manière on construit de proche en proche les réseaux commodes $\mathfrak{U}_h$ pour $1 \leqq h \leqq 2p+1$.

33.1. Le cycle $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ (v. 31) étant essentiel, il existe un $(n-p, \mathfrak{U}_{2p+1})$-cycle $C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p+1})$ mod S dans A tel que $C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \pi^*\,\pi_1^*\,\pi_2^* \cdots \pi_{2p}^*\,C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p+1})$ mod S dans A. Il est évident qu'il suffit de démontrer le théorème du n° 31 en supposant que $C^{n-p}(\mathfrak{U}) = \pi^*\,\pi_1^*\,\pi_2^* \cdots \pi_{2p}^*\,C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p+1})$. Définissons de proche en proche les chaînes $C^{n-p}(\mathfrak{U}_h)$ $(1 \leqq h \leqq 2p)$ en posant $\pi_h^*\,C^{n-p}(\mathfrak{U}_{h+1}) = C^{n-p}(\mathfrak{U}_h)$ $(1 \leqq h \leqq 2p)$; on a alors $\pi^*\,C^{n-p}(\mathfrak{U}_1) = C^{n-p}(\mathfrak{U})$. Généralement, introduisons (pour le n° 34) la convention suivante : Si l'on a défini une certaine $\mathfrak{U}_{h+1}$-chaîne $(0 \leqq h \leqq 2p)$ $E^k(\mathfrak{U}_{h+1})$, on pose $E^k(\mathfrak{U}_h) = \pi_h^*\,E^k(\mathfrak{U}_{h+1})$.

34. Lemme. On peut attacher à chaque $(h, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur σ_i^h $(0 \leqq h \leqq p-1)$ une $(n-p+h+1, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1)$ dans B de manière que : 1° pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$, la chaîne

$$FL^{n-p+1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_1) - C^{n-p}(\mathfrak{U}_1)$$

ne contienne pas des simplexes situés dans $\overline{P_4^0(\sigma_i^0)}$; 2° pour $0 \leqq h \leqq p-2$, $1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1}$, la chaîne

$$FL^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_1) - \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_1)$$

ne contienne pas des simplexes situés dans $\overline{P_4^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$; 3° pour $1 \leqq i \leqq \alpha_p$, la chaîne

$$\sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{ij}^{p-1} L^n(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}_1)$$

soit un (n, R)-cycle mod $R - P_2^p(\sigma_i^p)$.

La démonstration fait l'objet des nos 34.1—34.3.

Remarque. Si on change l'orientation d'un simplexe σ_i^h, on doit évidemment changer le signe de $L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1)$.

34.1. Pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$, soit $C^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p+1})$ la partie de la chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p+1})$ dont les simplexes sont situés dans $\overline{P_1^0(\sigma_i^0)}$. Excluons pour le moment le cas où $p = n$. Soit

$$\Gamma^{n-p-1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p+1}) = FC^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p+1}).$$

Or $C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p+1})$ est un cycle mod S; puisque (v. 32) aucun sommet de $\mathfrak{U}$ ne rencontre simultanément S et $\overline{P_1^0(\sigma_i^0)}$, on voit qu'aucun simplexe de $FC^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p+1})$ n'est situé dans $\overline{P_1^0(\sigma_i^0)}$. Donc $\Gamma^{n-p-1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p+1})$ est la partie de la chaîne

$$(*) \qquad FC^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p+1}) - FC^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p+1})$$

dont les simplexes sont situés dans $\overline{P_1^0(\sigma_i^0)}$. Or le noyau de chaque simplexe de la chaîne $(*)$ rencontre $R - P_1^0(\sigma_i^0)$ et par suite (v. 32) ce noyau ne peut rencontrer $\overline{P_2^0(\sigma_i^0)}$; donc[44]

$$\Gamma^{n-p-1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_k) \subset \overline{P_1^0(\sigma_i^0)} - P_2^0(\sigma_i^0) \qquad (0 \leqq k \leqq 2p+1).$$

Or l'affinement $\mathfrak{U}_{2p+1}$ de $\mathfrak{U}_{2p}$ était (v. 33) normal par rapport aux cycles dans $\overline{P_1^0(\sigma_i^0)} - P_2^0(\sigma_i^0)$; donc $\Gamma^{n-p-1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p})$ est un $(n-p-1, \mathfrak{U}_{2p})$-cycle *essentiel* dans $\overline{P_1^0(\sigma_i^0)} - P_2^0(\sigma_i^0)$. D'après la définition du réseau gén. $\mathfrak{P}_3^0$ (n° 29) et celle de son sommet $P_3^0(\sigma_i^0)$ (n° 30) il en résulte l'existence d'une $(n-p, \mathfrak{U}_{2p})$-chaîne $D_i^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p})$ dans $\overline{P^0(\sigma_i^0)} - P_3^0(\sigma_i^0)$ telle que $C^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p}) - D_i^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p})$ est un $(n-p, \mathfrak{U}_{2p})$-cycle, situé naturellement dans $\overline{P^0(\sigma_i^0)}$. L'affinement $\mathfrak{U}_{2p}$ de $\mathfrak{U}_{2p-1}$ étant (n° 33) normal par rapport aux cycles dans $\overline{P^0(\sigma_i^0)}$, on voit que $C^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p-1}) - D^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p-1})$ est un $(n-p, \mathfrak{U}_{2p-1})$-cycle essentiel dans $\overline{P^0(\sigma_i^0)}$. D'après la définition du réseau

[44] Il faut tenir compte de ce que $\Gamma^{n-p-1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_k) = \pi_k^* \Gamma^{n-p-1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{k+1})$ et pareillement dans ce qui suit.

gén. $\mathfrak{P}^0$ (n° 29) et celle de son sommet $P^0(\sigma_i^0)$ (n° 30) il en résulte l'existence d'une $(n-p+1, \mathfrak{U}_{2p-1})$-chaîne $L^{n-p+1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p-1})$ dans $\overline{Q^0(\sigma_i^0)}$ telle que

$$(*) \qquad L^{n-p+1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p-1}) \to C^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p-1}) - D_i^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1}).$$

On peut arriver au même résultat dans le cas où $p = n$: D'après la définition du réseau gén. $\mathfrak{P}_1^0$, on a $P^0(\sigma_i^0) - P_1^0(\sigma_i^0) \neq 0$ et par suite $\overline{P^0(\sigma_i^0)} - P_3^0(\sigma_i^0) \neq 0$. Soit donc a_i un point de $\overline{P^0(\sigma_i^0)} - P_3^0(\sigma_i^0)$ et soit U_i un sommet de $\mathfrak{U}_{2p}$ tel que $a_i \in U_i$. Déterminons $r_i \in \mathfrak{R}$ de manière que $I[C^0(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p}) - D_i^0(\mathfrak{U}_{2p})] = 0$ (v. [38]), où $D_i^0(\mathfrak{U}_{2p}) = r_i U_i$ est une $(0, \mathfrak{U}_{2p})$-chaîne dans $\overline{P^0(\sigma_i^0)} - P_3^0(\sigma_i^0)$. D'après la définition de $\mathfrak{P}^0$ et de son sommet $P^0(\sigma_i^0)$ il existe une $(1, \mathfrak{U}_{2p-1})$-chaîne $L^1(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p-1})$ dans $\overline{Q^0(\sigma_i^0)}$ telle qu'on ait la relation $(*)$ avec $p = n$. Dorénavant, nous pouvons traiter simultanément toutes les valeurs de $p\,(1 \leqq p \leqq n)$.

Chaque sommet de $\mathfrak{U}$ qui rencontre $\overline{P_4^0(\sigma_i^0)}$ étant (v. 32) contenu dans $P_3^0(\sigma_i^0)$, il résulte de l'inclusion $D_i^{n-p}(\mathfrak{U}) \subset \overline{P^0(\sigma_i^0)} - P_3^0(\sigma_i^0)$ qu'aucun simplexe de $D_i^{n-p}(\mathfrak{U})$ n'est situé dans $\overline{P_4^0(\sigma_i^0)}$; pareillement on voit qu'aucun simplexe de $C^{n-p}(\mathfrak{U}) - C^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U})$ n'est situé dans $\overline{P_4^0(\sigma_i^0)}$. Par suite aucun simplexe de la chaîne

$$(*) \qquad F L^{n-p+1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_k) - C^{n-p}(\mathfrak{U}_k) \qquad (0 \leqq k \leqq 2p-1)$$

n'est situé dans $\overline{P_4^0(\sigma_i^0)}$.

34.2. Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq p-2)$, on ait déjà attaché à chaque σ_i^h $(1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ une $(n-p+h+1, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})$-chaîne dans $\overline{Q^h(\sigma_i^h)}$, soit $L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})$, de manière que, pour $1 \leqq i \leqq \alpha_h$, aucun simplexe de la chaîne[45]

$$(**) \quad F L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_k) - \sum_{j=1}^{\alpha_{h-1}} \eta_{ij}^{h-1} L^{n-p+h}(\sigma_j^{h-1}, \mathfrak{U}_k) \quad (0 \leqq k \leqq 2p-2h-1)$$

ne soit situé dans $\overline{P_4^h(\sigma_i^h)}$. Il s'agit d'attacher à chaque σ_i^{h+1} $(1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1})$ une $(n-p+h+2, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$-chaîne $L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$ dans $\overline{Q^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$ de manière qu'aucun simplexe de la chaîne

$$F L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_k) - \sum_{j=1}^{\alpha_{h-1}} \eta_{ij}^{h} L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_k) \quad (0 \leqq k \leqq 2p-2h-3)$$

ne soit situé dans $\overline{P_4^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$. Or la chaîne

$$M^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-1}) = \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})$$

[45] Pour $h = 0$ on doit remplacer la chaîne $(**)$ par $(*)$.

se trouve située (v. 30) dans

$$\sum_{\substack{\eta^h_{ij} \neq 0 \\ 1 \leq j \leq \alpha_h}} \overline{Q^h(\sigma^h_j)} \subset \overline{P^{h+1}_1(\sigma^{h+1}_i)}.$$

En outre, comme $F\sigma^{h+1}_i \to 0$, d'où $\sum\limits_{j=1}^{\alpha_h} \sum\limits_{k=1}^{\alpha_{h-1}} \eta^h_{ij}\,\eta^{h-1}_{jk} = 0$, aucun simplexe de la chaîne

$$F M^{n-p+h+1}(\sigma^{h+1}_i, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})$$
$$= \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta^h_{ij} \Big[F L^{n-p+h+1}(\sigma^h_j, \mathfrak{U}_{2p-2h-1}) - \sum_{k=1}^{\alpha_{h-1}} \eta^{h-1}_{jk}\, L^{n-p+h}(\sigma^{h-1}_k, \mathfrak{U}_{2p-2h-1}) \Big]$$

n'est situé (v. 30) dans

$$\prod_{\substack{\eta^h_{ij} \neq 0 \\ 1 \leq j \leq \alpha_h}} \overline{P^h_4(\sigma^h_j)} \supset P^{h+1}_2(\sigma^{h+1}_i)\,^{46}$$

Donc le cycle $FM^{n-p+h+1}(\sigma^{h+1}_i, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})$ est situé dans $\overline{P^{h+1}_1(\sigma^{h+1}_i)} - P^{h+1}_2(\sigma^{h+1}_i)$. Par suite (v. 33) $FM^{n-p+h+1}(\sigma^{h+1}_i, \mathfrak{U}_{2p-2h-2})$ est un $(n-p+h, \mathfrak{U}_{2p-2h-2})$-cycle *essentiel* dans $\overline{P^{h+1}_1(\sigma^{h+1}_i)} - P_{h+2}(\sigma^{h+1}_i)$; d'après la définition du réseau gén. $\mathfrak{P}^{h+1}_3$ (nº 29) et celle de son sommet P^{h+1}_3 (nº 30) il existe donc une $(n-p+h+1, \mathfrak{U}_{2p-2h-2})$-chaîne dans $\overline{P^{h+1}(\sigma^{h+1}_i)} - P^{h+1}_3(\sigma^{h+1}_i)$, soit $N^{n-p+h+1}_i(\mathfrak{U}_{2p-2h-2})$, telle que

$$M^{n-p+h+1}(\sigma^{h+1}_i, \mathfrak{U}_{2p-2h-2}) - N^{n-p+h+1}_i(\mathfrak{U}_{2p-2h-2})$$

soit un $(n-p+h+1, \mathfrak{U}_{2p-2h-2})$-cycle, situé naturellement dans $\overline{P^{h+1}(\sigma^{h+1}_i)}$. Par suite (v. 33)

$$(*) \qquad M^{n-p+h+1}(\sigma^{h+1}_i, \mathfrak{U}_{2p-2h-3}) - N^{n-p+h+1}_i(\mathfrak{U}_{2p-2h-3})$$

est un $(n-p+h+1, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$-cycle essentiel dans $\overline{P^{h+1}(\sigma^{h+1}_i)}$. Il existe donc une $(n-p+h+2, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$-chaîne dans $\overline{Q^{h+1}(\sigma^{h+1}_i)}$, soit $L^{n-p+h+2}(\sigma^{h+1}_i, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$, dont (*) est la frontière. Comme le noyau de

---

[46] Pour $h = 0$ on a $\sum\limits_{j=1}^{\alpha_0} \eta^0_{ij} = 0$, d'où

$$FM^{n-p+1}(\sigma^1_i, \mathfrak{U}_{2p-1}) = \sum_{j=1}^{\alpha_0} \eta^0_{ij}\,[FL^{n-p+1}(\sigma^0_j, \mathfrak{U}_{2p-1}) - C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1})],$$

de manière que, ici encore, aucun simplexe de $FM^{n-p+1}(\sigma^1_i, \mathfrak{U}_{2p-1})$ n'est situé dans

$$\prod_{\substack{\eta^0_{ij} \neq 0 \\ 1 \leq j \leq \alpha_0}} \overline{P^0_4(\sigma^0_j)} \supset P^1_2(\sigma^1_i).$$

chaque simplexe de la chaîne $N^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$ rencontre $P^{h+1}(\sigma_i^{h+1}) - P_3^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$ et comme (v. 32) chaque sommet de $\mathfrak{U}$ rencontrant $\overline{P_4^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$ fait partie de $P_3^{h+1}(\sigma_i^{h+1})$, on voit qu'aucun simplexe de la chaîne $N^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_k)$ $(0 \leqq k \leqq 2p-2h-3)$ n'est situé dans $\overline{P_4^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$. Or

$$-N^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_k) = FL^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_k) - \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h, \mathfrak{U}_k)$$
$$(0 \leqq k \leqq 2p-2h-3).$$

34.3. En procédant de cette manière, on finit par attacher à chaque σ_i^{p-1} $(1 \leqq i \leqq \alpha_{p-1})$ une $(n, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $L^n(\sigma_i^{p-1}, \mathfrak{U}_1)$ dans $\overline{Q^{p-1}(\sigma_i^{p-1})}$ de manière qu'aucun simplexe de la chaîne[47]

$$FL^n(\sigma_i^{p-1}, \mathfrak{U}_k) - \sum_{j=1}^{\alpha_{p-2}} \eta_{ij}^{p-2} L^{n-1}(\sigma_j^{p-2}, \mathfrak{U}_k) \qquad (k = 0 \text{ ou } 1)$$

ne soit situé dans $\overline{P_4^{p-1}(\sigma_i^{p-1})}$. Alors la chaîne

$$M^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U}_1) = \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{ij}^{p-1} L^n(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}_1)$$

est située (v. 30) dans

$$\sum_{\substack{\eta_{ij}^{p-1} \neq 0 \\ 1 \leqq j \leqq \alpha_{p-1}}} \overline{Q^{p-1}(\sigma_j^{p-1})} \subset \overline{P_1^p(\sigma_i^p)}.$$

En outre aucun simplexe de la chaîne

$$FM^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U}_1) = \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{ij}^{p-1} \left[FL^n(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}_1) - \sum_{k=1}^{\alpha_{p-2}} \eta_{jk}^{p-2} L^{n-p}(\sigma_k^{p-1}, \mathfrak{U}_1) \right]$$

n'est situé (v. 30) dans

$$\prod_{\substack{\eta_{ij}^{p-1} \neq 0 \\ 1 \leqq j \leqq \alpha_{p-1}}} \overline{P_4^{p-1}(\sigma_j^{p-1})} \supset \overline{P_2^p(\sigma_i^p)}.$$

Donc $M^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U}_1)$ est un $(n, \mathfrak{U}_1)$-cycle mod $\overline{P_1^p(\sigma_i^p)} - P_2^p(\sigma_i^p)$ dans $\overline{P_1^p(\sigma_i^p)}$.

34.4. Si l'indice i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ est tel que $A\overline{P_1^0(\sigma_i^0)} = 0$, on voit sans peine (v. 32) que $C^{n-p}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p-1}) = 0$; on peut dans ce cas supposer que $L^{n-p+1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}_{2p-1}) = 0$. Plus généralement, si l'indice i $(1 \leqq i \leqq \alpha_h$, $0 \leqq h \leqq p-1)$ est tel que $A\overline{P_1^0(\sigma_j^0)} = 0$ pour chaque sommet σ_j^0 de σ_i^h, on peut supposer que $L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-1}) = 0$. On n'a donc

[47] Dans le cas $p = 1$ on doit remplacer $\sum_{j=1}^{\alpha_{p-2}} \eta_{ij}^{p-2} L^{n-1}(\sigma_j^{p-2}, \mathfrak{U}_k)$ par $C^{n-p}(\mathfrak{U}_k)$.

$L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-1}) \neq 0$ que dans le cas où $A\overline{P_1^0(\sigma_j^0)} \neq 0$ pour un sommet σ_j^0 de σ_i^h. Or la chaîne $L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})$ est située dans $\overline{Q^h(\sigma_i^h)}$. Les réseaux gén. $\mathfrak{P}_1^0$ et $\mathfrak{Q}^h$ étant (v. 29) des affinements de $\mathfrak{P}_1^p$, il existe deux sommets P', P'' de $\mathfrak{P}_1^p$ tels que $P_1^0(\sigma_j^0) \subset P'$, $Q^h(\sigma_i^h) \subset P''$. Or (v. 29) $P_1^0(\sigma_j^0)\, Q^h(\sigma_i^h) \supset \sigma_j^0 \neq 0$, d'où $P'P'' \neq 0$. Comme $A\overline{P_1^0(\sigma_j^0)} \neq 0$, $\overline{P_1^0(\sigma_j^0)} \subset \overline{P'}$, on a $A\overline{P'} \neq 0$, $P'P'' \neq 0$ et par suite $\overline{Q^h(\sigma_i^h)} \subset \overline{P''} \subset \overline{B}$ d'après la définition de B. Or ceci signifie que toutes les chaînes $L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})$ $(0 \leqq h \leqq p-1,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ sont situées dans $\overline{B}$.

35. Nous allons modifier un nombre fini de fois le cycle $C^{n-p}(\mathfrak{U}_1)$ ainsi que les chaînes $L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1)$ de manière que, $^*C$ et $^*L$ étant les éléments modifiés, on ait les propriétés suivantes: 1° chaque simplexe de chaque différence $^*C^{n-p}(\mathfrak{U}_1) - C^{n-p}(\mathfrak{U}_1)$ ou $^*L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1) - L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}_1)$ est une face d'un simplexe de $C^{n-p}(\mathfrak{U}_1)$ ou de $^*L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \mathfrak{U}_1)$ de manière que les chaînes modifiées restent situées dans $\overline{B}$; 2° les relations 1°, 2°, 3° du n° 34 restent vraies pour les chaînes modifiées $^*C$, $^*L$; 3° $^*C^{n-p}(\mathfrak{U}_1) \sim C^{n-p}(\mathfrak{U}_1)$ dans $\overline{B}$.

Toutes ces modifications ayant lieu dans le réseau commode fixe $\mathfrak{U}_1$, nous omettrons $\mathfrak{U}_1$ dans l'écriture.

Pour $0 \leqq q \leqq p-1$, $1 \leqq r \leqq \alpha_q$ nous dirons *qu'une $\mathfrak{U}_1$-chaîne ne contient presque aucun simplexe d'espèce σ_r^q si chaque simplexe $\mathfrak{r}$ d'espèce σ_r^q de cette chaîne est une face d'un $\mathfrak{U}_1$-simplexe d'espèce σ^{-1}*.

Ceci posé, le résultat de toutes ces modifications sera que pour $0 \leqq h \leqq p-1$, $0 \leqq k \leqq h$, $0 \leqq q \leqq h$ les chaînes *modifiées* possèderons la propriété $\Theta(k, q, h)$ suivante: Si les simplexes σ_j^k, σ_r^q $(1 \leqq j \leqq \alpha_k,\ 1 \leqq r \leqq \alpha_q)$ sont des faces du simplexe σ_i^h, alors la chaîne $L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k)$ (modifiée) ne contiendra presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^q.

Dans le n° 36, nous donnerons un lemme. Dans le n° 37, nous réaliserons la propriété $\Theta(0, 0, 0)$. Dans le n° 38, nous supposerons que, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq p-2)$, on ait déjà réalisé les propriétés $\Theta(k, q, g)$ pour $0 \leqq g \leqq h$ et nous en déduirons qu'on peut réaliser aussi la propriété $\Theta(k, 0, h+1)$. Dans le n° 39, nous supposerons que pour $0 \leqq h \leqq p-2$, $0 \leqq Q \leqq h$, on ait déjà réalisé les propriétés $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$ ainsi que $\Theta(k, q, h+1)$ $(0 \leqq q \leqq Q)$ et nous en déduirons qu'on peut réaliser aussi la propriété $\Theta(h+1, Q+1, h+1)$. Dans le n° 40, nous supposerons que, pour $0 \leqq h \leqq p-2$, $0 \leqq Q \leqq h$, $h-Q \leqq K \leqq h$, on ait déjà réalisé les propriétés $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$, $\Theta(k, q, h+1)$ $(0 \leqq q \leqq Q)$, $\Theta(k, Q+1, h+1)$ $(K+1 \leqq k \leqq h+1)$ et nous en déduirons qu'on peut réaliser aussi la propriété $\Theta(K, Q+1, h+1)$. Dans le n° 41, nous supposerons que, pour $0 \leqq h \leqq p-2$, $0 \leqq Q \leqq h$, on ait déjà réalisé les propriétés $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$, $\Theta(k, q, h+1)$ $(0 \leqq q \leqq Q)$, $\Theta(k, Q+1, h+1)$

$(h - Q \leqq k \leqq h+1)$ et nous y démontrerons que les propriétés $\Theta(k, Q+1, h+1)$ $(0 \leqq k \leqq h - Q - 1)$ se trouvent alors aussi réalisées.

Le résultat de toutes ces modifications sera évidemment qu'on peut réaliser la propriété $\Theta(k, q, h)$ pour $0 \leqq h \leqq p-1$ ce qui était notre but.

36. LEMME. Soit $0 \leqq h \leqq p-1$, $0 \leqq k \leqq h$, $0 \leqq q \leqq h$, $1 \leqq i \leqq \alpha_h$, $1 \leqq j \leqq \alpha_k$, $1 \leqq r \leqq \alpha_q$. Supposons que σ_j^k et σ_r^q soient des faces de σ_i^h. Soit τ un $\mathfrak{U}_1$-simplexe d'espèce σ_r^q. Alors chaque sommet de τ est un sous-ensemble de $P_4^k(\sigma_j^k)$.

Démonstration. Soit τ^0 un sommet de τ. D'après 8.3 il en résulte que $\tau^0\, T(\sigma_r^q) \neq 0$. Le réseau $\mathfrak{U}_1$ étant un affinement de $\mathfrak{U}$, il en résulte (v. 32) que $\tau^0 \subset P_4^k(\sigma_j^k)$.

37. Pour $1 \leqq \nu \leqq \alpha_0$, soit $E^{n-p+1}(\sigma_\nu^0)$ la partie de la chaîne $L^{n-p+1}(\sigma_\nu^0)$ dont les simplexes sont d'espèce σ_ν^0 (v. 8.3). Posons

$$*C^{n-p} = C^{n-p} - \sum_{\nu=1}^{\alpha_0} FE^{n-p+1}(\sigma_\nu^0),$$

$$*L^{n-p+1}(\sigma_i^0) = L^{n-p+1}(\sigma_i^0) - \sum_{\nu=1}^{\alpha_0} E^{n-p+1}(\sigma_\nu^0),$$

$$*L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h) = L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h) \text{ pour } 1 \leqq h \leqq p-1.$$

Les propriétés 1°, 2°, 3° du n° 35 sont évidentes. On voit immédiatement que la chaîne $*L^{n-p+1}(\sigma_i^0)$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ ne contient aucun simplexe d'espèce σ_i^0, donc qu'après notre modification on a la propriété $\Theta(0, 0, 0)$.

38. Soit $0 \leqq h \leqq p-2$ et supposons réalisée la propriété $\Theta(k, q, g)$ pour $0 \leqq g \leqq h$. Soit $1 \leqq \mu \leqq \alpha_0$, $1 \leqq \nu \leqq \alpha_{h+1}$. Lorsque σ_μ^0 n'est pas un sommet de σ_ν^{h+1}, posons $E^{n-p+h+2}(\sigma_\mu^0, \sigma_\nu^{h+1}) = 0$; dans le cas contraire soit $E^{n-p+h+2}(\sigma_\mu^0, \sigma_\nu^{h+1})$ la partie de $L^{n-p+h+2}(\sigma_\nu^{h+1})$ dont les simplexes sont d'espèce σ_μ^0[48]. Pour $1 \leqq j \leqq \alpha_h$, soit

$$D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h) = \sum_\mu E^{n-p+h+2}(\sigma_\mu^0, \sigma_\mu^0\, \sigma_j^h),$$

μ parcourant toutes les valeurs $(1 \leqq \mu \leqq \alpha_0)$ telles que $\sigma_\mu^0\, \sigma_j^h$[49] soit un $(h+1, \mathfrak{Z})$-simplexe. Posons

$$*C^{n-p} = C^{n-p}, \quad *L^{n-p+k+1}(\sigma_i^k) = L^{n-p+k+1}(\sigma_i^k) \text{ pour } k \neq h, h+1;$$

$$*L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h) = L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h) - FD^{n-p+h+2}(\sigma_j^h),$$

$$*L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}) = L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}) - \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h\, D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h).$$

On voit sans peine que les propriétés 1°, 2°, 3° du n° 35 sont vérifiées.

---

[48] Si on change l'orientation de σ_ν^{h+1}, la chaîne $E^{n-p+h+2}(\sigma_\mu^0, \sigma_\nu^{h+1})$ se multiplie par -1 (v. la remarque à la fin du n° 34).

[49] Si l'on a (orientation comprise) $\sigma_j^h = (\sigma_{t_0}^0, \sigma_{t_1}^0, \cdots, \sigma_{t_j}^0)$, on a par définition (orientation comprise) $\sigma_\mu^0\, \sigma_j^h = (\sigma_\mu^0, \sigma_{t_0}^0, \sigma_{t_1}^0, \cdots, \sigma_{t_j}^0)$. La notation analogue sera employée maintes fois dans ce qui suit.

Il s'agit de voir que la propriété supposée $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$ reste vérifiée après la modification. L'unique cas où ceci n'est pas immédiatement évident est le cas $k = g = h$. Ici il suffit de montrer que si σ_r^q est une face de σ_i^h, la chaîne

$$*L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h) - L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h) = FD^{n-p+h+2}(\sigma_i^h)$$

ne contient aucun simplexe d'espèce σ_r^q. Or chaque simplexe de la chaîne $D^{n-p+h+2}(\sigma_i^h)$ est d'espèce σ_μ^0, l'indice μ étant tel que $\sigma_\mu^0 \sigma_i^h$ soit un $(h+1, \mathfrak{Z})$-simplexe, de manière que σ_μ^0 n'est pas un sommet de σ_i^h. Donc d'après 8.34, aucun simplexe de $FD^{n-p+h+2}(\sigma_i^h)$ ne peut être d'espèce σ_i^h.

On doit enfin démontrer (v. 35) que la propriété $\Theta(k, 0, h+1)$ se trouve réalisée après la modification. Supposons donc que les indices k, j, r, i soient tels que σ_j^k soit une face et que σ_r^0 soit un sommet de σ_i^{h+1}. On doit prouver que presqu'aucun simplexe de la chaîne $*L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k)$ n'est d'espèce σ_r^0. Il n'y a que deux cas où ceci n'est pas simplement une conséquence de la propriété $\Theta(k, 0, h)$ qui est, comme nous le savons déjà, conservée après la modification; ce sont: 1° $k = h+1, j = i$; 2° $k = h$, $\sigma_i^{h+1} = \pm \sigma_r^0 \sigma_j^h$.

Premier cas. Soit j un indice tel que $\eta_{ij}^h \neq 0$, c'est-à-dire soit σ_j^h une h-face de σ_i^{h+1}. Les simplexes d'espèce σ_r^0 dans la chaîne $D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h)$ ne peuvent exister, comme nous avons vu plus haut, que dans le cas où σ_r^0 n'est pas un sommet de σ_j^h; ceci n'a lieu que pour *une* valeur de j, à savoir pour la valeur $\nu = j$ telle que $\sigma_i^{h+1} = \eta_{i\nu}^h \sigma_r^0 \sigma_\nu^h$. Les simplexes d'espèce σ_r^0 dans $D^{n-p+h+2}(\sigma_\nu^h)$ sont alors évidemment les mêmes que dans la chaîne $E^{n-p+h+2}(\sigma_r^0, \sigma_r^0 \sigma_\nu^h)$. Donc les simplexes d'espèce σ_r^0 dans la chaîne

$$L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}) - *L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}) = \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h)$$

sont les mêmes que dans $\eta_{i\nu}^h E^{n-p+h+2}(\sigma_r^0, \sigma_i^{h+1})$, et par suite que dans la chaîne $L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1})$, de manière que presqu'aucun simplexe de $*L^{n-p+h+2}$ n'est d'espèce σ_r^0.

Second cas. Soit $k = h$, $\sigma_i^{h+1} = \pm \sigma_r^0 \sigma_\nu^h$, et par suite $\sigma_i^{h+1} = \eta_{ij}^h \sigma_r^0 \sigma_\nu^h$. Il s'agit de voir que presqu'aucun simplexe de la chaîne $*L^{n-p+h+1}(\sigma_\nu^h)$ n'est d'espèce σ_r^0. Supposons que l'indice j parcoure toutes les valeurs $(1 \leqq j \leqq \alpha_h)$ telles que σ_j^h soit une h-face de σ_i^{h+1}. La propriété $\Theta(h, 0, h)$ étant conservée après la modification, pour $j \neq \nu$ la chaîne $*L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h)$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^0. Donc les simplexes d'espèce σ_r^0 sont dans la chaîne $\eta_{i\nu}^h *L^{n-p+h+1}(\sigma_\nu^h)$ presque les mêmes que dans la chaîne $\sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h *L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h)$. Or nous savons déjà que presqu'aucun simplexe de la chaîne $^*L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1})$ n'est d'espèce $\sigma_{r_i}^0$. Il en résulte sans peine (v. 8.34) que la chaîne $F\,^*L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1})$ ne possède non plus presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^0. Il s'agit donc de montrer que la chaîne

$$(*)\qquad F\,^*L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1})-\sum_{j=1}^{\alpha_h}\eta_{ij}^h\,^*L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h)$$

ne contient aucun simplexe d'espèce σ_r^0. Or, d'après 36, chaque $\mathfrak{U}_1$-simplexe d'espèce σ_r^0 est situé dans $\overline{P_4^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$, tandis que la chaîne $(*)$ ne contient aucun simplexe dans $\overline{P_4^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$, parce que la propriété 2° du n° 34 reste conservée après la modification.

39. Soit $0\leqq h\leqq p-2$, $0\leqq Q\leqq h$. Supposons réalisées les propriétés $\Theta(k,q,g)$ $(0\leqq g\leqq h)$ ainsi que $\Theta(k,q,h+1)$ $(0\leqq q\leqq Q)$.

Soit $1\leqq\mu\leqq\alpha_{Q+1}$, $1\leqq\nu\leqq\alpha_{h+1}$. Si le simplexe σ_μ^{Q+1} n'est pas une $(Q+1)$-face de σ_ν^{h+1}, posons $E^{n-p+h+2}(\sigma_\mu^{Q+1},\sigma_\nu^{h+1})=0$; dans le cas contraire, soit $E^{n-p+h+2}(\sigma_\mu^{Q+1},\sigma_\nu^{h+1})$ la partie de la chaîne $L^{n-p+h+2}(\sigma_\nu^{h+1})$ dont les simplexes sont d'espèce σ_μ^{Q+1} [50].

On peut évidemment attacher à chaque indice μ $(1\leqq\mu\leqq\alpha_{Q+1})$ un indice $\varphi(\mu)$ $[1\leqq\varphi(\mu)\leqq\alpha_0]$ bien déterminé de manière que $\sigma_{\varphi(\mu)}^0$ soit pour chaque μ $(1\leqq\mu\leqq\alpha_{Q+1})$ un sommet du simplexe σ_μ^{Q+1}.

Si les indices μ,ν,λ $(1\leqq\mu\leqq\alpha_{Q+1},\ 1\leqq\nu\leqq\alpha_{h+1},\ 1\leqq\lambda\leqq\alpha_h)$ sont tels que 1° σ_μ^{Q+1} soit une $(Q+1)$-face de σ_ν^{h+1}; 2° $\sigma_\nu^{h+1}=\pm\sigma_{\varphi(\mu)}^0\sigma_\lambda^h$, posons

$$\varepsilon(\sigma_\mu^{Q+1},\sigma_\lambda^h,\sigma_\nu^{h+1})=\eta_{\nu\lambda}^h;$$

dans tous les autres cas, posons

$$\varepsilon(\sigma_\mu^{Q+1},\sigma_\lambda^h,\sigma_\nu^{h+1})=0.$$

Pour $1\leqq\lambda\leqq\alpha_h$, posons

$$D^{n-p+h+2}(\sigma_\lambda^h)=\sum_{\mu=1}^{\alpha_{Q+1}}\sum_{\nu=1}^{\alpha_{h+1}}\varepsilon(\sigma_\mu^{Q+1},\sigma_\lambda^h,\sigma_\nu^{h+1})\,E^{n-p+h+2}(\sigma_\mu^{Q+1},\sigma_\nu^{h+1}).$$

Ceci étant, soit

$$^*C^{n-p}=C^{n-p},\qquad ^*L^{n-p+k+1}(\sigma_i^k)=L^{n-p+k+1}(\sigma_i^k)\quad\text{pour } k\neq h,\ k\neq h+1;$$

$$^*L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h)=L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h)-FD^{n-p+h+2}(\sigma_j^h),$$

$$^*L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1})=L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1})-\sum_{j=1}^{\alpha_h}\eta_{ij}^h\,D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h).$$

On voit sans peine que les propriétés 1°, 2°, 3°, du n° 35 sont vérifiées.

---

[50] Si l'on change l'orientation de σ_ν^{h+1}, la chaîne $E^{n-p+h+2}(\sigma_\mu^{Q+1},\sigma_\nu^{h+1})$ se multiplie par -1 (v. la remarque à la fin du n° 34).

Démontrons que les propriétés $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$ restent conservées après la modification. L'unique cas à considérer est évidemment le cas $k = g = h$. Soit donc σ_r^q une q-face $(0 \leqq q \leqq h)$ du simplexe σ_j^h. Il s'agit de montrer que presqu'aucun simplexe de la chaîne

$$-{}^*L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h) + L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h) = FD^{n-p+h+2}(\sigma_j^h)$$

n'est d'espèce σ_r^q. On voit sans peine (v. 8.34) qu'il suffit de prouver que, si σ_r^q est une face de σ_j^h, presqu'aucun simplexe de la chaîne $D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h)$ n'est d'espèce σ_r^q. Or chaque simplexe de $D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h)$ est d'espèce σ_u^{Q+1}, où la valeur de μ est telle que, pour une valeur convenable de ν, on ait $\varepsilon(\sigma_\mu^{Q+1}, \sigma_j^h, \sigma_\nu^{h+1}) \neq 0$. Or cette inégalité donne $\sigma_\nu^{h+1} = \pm \sigma_{\varphi(\mu)}^0 \sigma_j^h$ de manière que $\sigma_{\varphi(\mu)}^0$ n'est pas un sommet de σ_j^h, tandis que c'est un sommet de σ_μ^{Q+1}; σ_μ^{Q+1} n'est donc pas une face de σ_j^h.

Il est évident que la propriété $\Theta(k, q, h+1)$ $(0 \leqq q \leqq Q)$ reste conservée après la modification, car (v. 34) presque chaque simplexe de chaque ${}^*L - L$ est d'espèce σ_μ^l, où $l \geqq q + 1$.

On doit enfin démontrer (v. 35) que la propriété $\Theta(h+1, Q+1, h+1)$ se trouve réalisée après la modification. Supposons donc que les indices i, r soient tels que σ_r^{Q+1} soit une face de σ_i^{h+1}. On doit prouver que presqu'aucun simplexe de la chaîne ${}^*L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1})$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}. Supposons que l'indice j parcoure toutes les valeurs $(1 \leqq j \leqq \alpha_h)$ telles que $\eta_{ij}^h \neq 0$. Il existe une seule valeur de j, soit $j = \lambda$, telle que $\sigma_i^{h+1} = \pm \sigma_{\varphi(r)}^0 \sigma_\lambda^h$. Pour $j \neq \lambda$, $\sigma_{\varphi(r)}^0$ est un sommet de σ_j^h, d'où il résulte que $\varepsilon(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_j^h, \sigma_\nu^{h+1}) = 0$. On en déduit sans peine que la partie de $D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h)$ dont les simplexes sont d'espèce σ_r^{Q+1}, est égale à 0 pour $j \neq \lambda$ et égale à $\eta_{i\lambda}^h E^{n-p+h+2}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_i^{h+1})$ pour $j = \lambda$. Donc les simplexes d'espèce σ_r^{Q+1} dans la chaîne

$$\sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h D^{n-p+h+2}(\sigma_j^h) = L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1}) - {}^*L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1})$$

constituent la chaîne $E^{n-p+h+2}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_i^{h+1})$, qui était égale à la partie de $L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1})$ dont les simplexes sont d'espèce σ_r^{Q+1}. Par suite presqu'aucun simplexe de ${}^*L^{n-p+h+2}(\sigma_i^{h+1})$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}.

40. Soit $0 \leqq h \leqq p-2$, $0 \leqq Q \leqq h$, $h - Q \leqq K \leqq h$. Supposons réalisées les propriétés $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$, $\Theta(k, q, h+1)$ $(0 \leqq q \leqq Q)$ et $\Theta(k, Q+1, h+1)$ $(K+1 \leqq k \leqq h+1)$. Il s'agit de réaliser encore la propriété $\Theta(K, Q+1, h+1)$. Ceci sera effectué dans les nos 40.1—40.5.

40.1. Choisissons les indices i et r de manière que le simplexe σ_r^{Q+1} soit une face du simplexe σ_i^{h+1}; ensuite, déterminons l'indice s de manière que l'on ait

$$\sigma_i^{h+1} = \pm \sigma_r^{Q+1} \sigma_s^{h-Q-1}. \tag{1}$$

Pour chaque $(K-h+Q)$-face σ_λ^{K-h+Q} du simplexe σ_r^{Q+1} soit : 1° $E_1^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q})$ la partie de la chaîne $L^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q}\,\sigma_s^{h-Q-1})$ [51] dont les simplexes sont d'espèce σ_r^{Q+1}; 2° $E_2^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q})$ la partie de $E_1^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q})$ dont chaque simplexe est une face d'un $\mathfrak{U}_1$-simplexe d'espèce σ^{-1}; 3° $E^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q}) = E_1^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q}) - E_2^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q})$.

Soit $\sigma_\mu^{K-h+Q+1}$ une $(K-h+Q+1)$-face de σ_r^{Q+1} de manière que

$$\sigma_\nu^{K+1} = \varepsilon\,\sigma_\mu^{K-h+Q+1}\,\sigma_s^{h-Q-1} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

est une $(K+1)$-face de σ_i^{h+1}. Nous allons démontrer que

$$(2) \qquad \sum_\lambda \eta_{\mu\lambda}^{K-h+Q}\,E^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q}) = 0.$$

La relation (2) dit que presqu'aucun simplexe de la chaîne

$$(3) \qquad \sum_\lambda \eta_{\mu\lambda}^{K-h+Q}\,L^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q}\,\sigma_s^{h-Q-1})$$

n'est d'espèce σ_r^{Q+1}.

Lorsque σ_λ^{K-h+Q} parcourt toutes les $(K-h+Q)$-faces de $\sigma_\mu^{K-h+Q+1}$, on peut attacher à chaque λ une valeur de j de manière que

$$\sigma_j^K = \pm\,\sigma_\lambda^{K-h+Q}\,\sigma_s^{h-Q-1}$$

soit une K-face de σ_ν^{K+1} telle que σ_s^{h-Q-1} en soit une face ; et on voit sans peine que le terme correspondant de la somme (3) est égal à $\varepsilon\,\eta_{\nu j}^K\,L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$. Lorsque $s > 1$, il y a encore d'autres K-faces σ_j^K de σ_ν^{K+1} qui ne correspondent à aucune valeur de λ ; ce sont les faces σ_j^K de σ_ν^{K+1} telles que σ_s^{h-Q-1} n'est pas une face de σ_j^K ; à chaque telle valeur de j correspond, comme on le voit sans peine, une valeur de v telle que σ_j^K et σ_r^{Q+1} soient des faces de σ_v^h (tandis que σ_v^h est une face de σ_i^{h+1}) ; la propriété $\Theta(K, Q+1, h)$ étant supposée vérifiée, il en résulte que, dans le cas actuel, la chaîne $L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^{Q+1}.

Donc, les simplexes d'espèce σ_r^{Q+1} dans la chaîne (3) sont presque les mêmes que dans la chaîne

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{\alpha_K} \eta_{\nu j}^K\,L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K);$$

on doit donc prouver que presqu'aucun simplexe de (4) n'est d'espèce σ_r^{Q+1}. Or σ_r^{Q+1} et σ_ν^{K+1} étant des faces de σ_i^{h+1}, il résulte de 36 que chaque

[51] Puisque σ_λ^{K-h+Q} est une $(K-h+Q)$-face de σ_r^{Q+1}, $\sigma_\lambda^{K-h+Q}\,\sigma_s^{h-Q-1}$ est, en vertu de (1), une K-face de σ_i^{h+1}.

simplexe d'espèce σ_r^{Q+1} est situé dans $\overline{P_4^{K+1}(\sigma_\nu^{K+1})}$. La propriété 2° du n° 34 étant vraie (v. n° 35, 2°), il en résulte qu'aucun simplexe de la chaîne

$$F L^{n-p+K+2}(\sigma_\nu^{K+1}) - \sum_{j=1}^{\alpha_K} \eta_{\nu j}^K L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$$

n'est d'espèce σ_r^{Q+1}. Donc il suffit de montrer que presqu'aucun simplexe de la chaîne

$$F L^{n-p+K+2}(\sigma_\nu^{K+1})$$

n'est d'espèce σ_r^{Q+1}. A cet effet, d'après 8.34, il suffit de prouver que, σ_u^q étant une face de σ_r^{Q+1}, la chaîne $L^{n-p+K+2}(\sigma_\nu^{K+1})$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_u^q. Or ceci est une conséquence de la propriété $\Theta(K+1, q, h+1)$ $(0 \leq q \leq Q+1)$, réalisée par hypothèse.

40.2. Considérons le cas $K > h - Q$, d'où $K \geqq 1$. Continuons à supposer qu'on ait choisi les indices r et i de manière que σ_r^{Q+1} soit une face de σ_i^{h+1}. Si l'on attache à chaque $(K-h+Q)$-face σ_λ^{K-h+Q} du simplexe σ_r^{Q+1} un entier a_λ, on obtient une $(K-h+Q)$-sous-chaîne de σ_r^{Q+1}:

$$\tau^{K-h+Q} = \sum_\lambda a_\lambda \sigma_\lambda^{K-h+Q}.$$

Posons

(5) $$E^{n-p+K+1}(\tau^{K-h+Q}) = \sum a_\lambda E^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q}),$$

les chaînes à droite ayant été définies dans 40.1; (5) est une $(n-p+K+1, \mathfrak{U}_1)$-chaîne dont tous les simplexes sont d'espèce σ_r^{Q+1}.

En particulier, si τ^{K-h+Q} est la frontière d'une $(K-h+Q+1)$-face $\sigma_\mu^{K-h+Q+1}$ de σ_r^{Q+1}, la relation (1) du n° 40.1 dit que

(6) $$E^{n-p+K+1}(\tau^{K-h+Q}) = 0.$$

Or on sait que, si $\tau^{K-h+Q} \to 0$, il existe des entiers b_μ tels que $\tau^{K-h+Q} = F \sum b_\mu \sigma_\mu^{K-h+Q+1}$; donc $\tau^{K-h+Q} \to 0$ entraîne (6). On en déduit sans peine que la chaîne (5) dépend seulement de la frontière $F\tau^{K-h+Q}$ de la chaîne τ^{K-h+Q}. On peut donc poser

(7) $$E^{n-p+K+1}(\tau^{K-h+Q}) = \Phi^{n-p+K+1}(F\tau^{K-h+Q}).$$

Si $\tau^{K-h+Q-1}$ est un $(K-h+Q-1)$-sous-cycle[52] arbitraire de σ_r^{Q+1}, il existe, comme on sait, une $(K-h+Q)$-sous-chaîne de σ_r^{Q+1} τ^{K-h+Q} dont la frontière est égale à $\tau^{K-h+Q-1}$. La relation (7) définit donc (comme on voit sans peine, sans ambiguité) la $(n-p+K+1, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $\Phi^{n-p+K+1}(\tau^{K-h+Q-1})$ pour chaque $(K-h+Q-1)$-sous-cycle de σ_r^{Q+1}.

---

[52] Lorsque $K-h+Q-1=0$, on doit convenir d'entendre par un 0-sous-cycle de σ_r^{Q+1} seulement une 0-sous-chaîne de σ_r^{Q+1} dont la somme des coefficients égale à zéro.

Or soit $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_a$ une base (lin. indépendante) de toutes les $(K-h+Q-1)$-sous-chaînes de σ_r^{Q+1} sousmise à la seule condition que les premiers b élements de cette base constituent une base de toutes les $(K-h+Q-1)$-sous-cycles de σ_r^{Q+1}. A chaque $(K-h+Q-1)$-sous-chaîne $\tau^{K-h+Q-1}$ de σ_r^{Q+1} on peut attacher, et d'une seule manière, des entiers $c_1, c_2, \cdots, c_a$ tels que

$$\tau^{K-h+Q-1} = \sum_{t=1}^{a} c_t \tau_t.$$

On définit alors

$$\Phi^{n-p+K+1}(\tau^{K-h+Q-1}) = \sum_{t=1}^{b} c_t \Phi^{n-p+K+1}(\tau_t), \tag{8}$$

les valeurs de Φ à droite étant déterminées par (7). Dans le cas particulier où $\tau^{K-h+Q-1}$ est un cycle, le premier membre de (8) était déjà défini; or on voit sans peine que l'ancienne définition est dans le cas actuel d'accord avec (8).

40.3. Nous sommes en état d'atteindre, dans le cas où $K > h-Q$, le but proposé dans 40. Si les indices i, r, u sont tels que 1° σ_r^{Q+1} est une face de σ_i^{h+1} de manière qu'il existe une valeur de s telle que $\sigma_i^{h+1} = \pm\sigma_r^{Q+1}\sigma_s^{h-Q-1}$; 2° σ_μ^{K-1} est une face de σ_i^{h+1}; 3° chaque sommet de σ_i^{h+1} est un sommet de σ_r^{Q+1} ou de σ_u^{K-1}, posons

$$H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_i^{h+1}) = \varepsilon\, \Phi^{n-p+K+1}(\sigma_t^{K-h+Q-1}) \tag{9}$$

l'indice t et le signe $\varepsilon = \pm 1$ étant tels que

$$\sigma_u^{K-1} = \varepsilon\, \sigma_t^{K-h+Q-1}\, \sigma_s^{h-Q-1};$$

quant à la valeur de la chaîne Φ, elle est déterminée par l'équation (8) du n° 40.2. Si les conditions 1°, 2°, 3° ne sont pas toutes vérifiées, posons

$$H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_i^{h+1}) = 0.$$

Posons encore

$$D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1}) = \sum_{r=1}^{\alpha_{Q+1}} \sum_{i=1}^{\alpha_{h+1}} H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_i^{h+1}).$$

Ceci posé, soit

$$*C^{n-p} = C^{n-p}, \qquad *L^{n-p+k+1}(\sigma_v^k) = L^{n-p+k+1}(\sigma_v^k) \quad \text{pour } k \neq K-1,\ k \neq K,$$

$$*L^{n-p+K}(\sigma_u^{K-1}) = L^{n-p+K}(\sigma_u^{K-1}) - F D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1}),$$

$$*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) = L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) - \sum_{u=1}^{\alpha_{K-1}} \eta_{ju}^{K-1} D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1}).$$

On voit sans peine que les propriétés 1°, 2°, 3° du no° 35 sont vérifiées.

Démontrons que les propriétés $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$ restent conservées après la modification. Deux cas seulement exigent une considération: 1° $k = K$, $q = Q+1$; 2° $k = K-1$, $q \geqq Q+1$ (v. 8.34).

Supposons donc *en premier lieu* que les indices g, j, r, t soient tels que σ_j^K et σ_r^{Q+1} soient des faces de σ_g^t $(0 \leqq g \leqq h)$. On doit prouver que la chaîne

$$L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) - {}^*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) = \sum_{u=1}^{\alpha_{K-1}} \eta_{ju}^{K-1} D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1})$$

ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^{Q+1}. Dans le cas contraire il existerait des valeurs des indices u et i telles que 1° σ_u^{K-1} est une face de σ_j^K; 2° $H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_i^{h+1}) \neq 0$. Or ceci entraînerait que chaque sommet de σ_i^{h+1} serait un sommet de σ_r^{Q+1} ou de σ_u^{K-1}, donc de σ_r^{Q+1} ou de σ_j^K, donc de σ_g^t, ce qui est impossible, car $g < h+1$.

En second lieu, supposons que les indices q, g, u, v, t soient tels que σ_u^{K-1} et σ_v^q $(q \geqq Q+1)$ soient des faces de σ_g^t $(0 \leqq g \leqq h)$. On doit prouver que la chaîne

$$L^{n-p+K}(\sigma_u^{K-1}) - {}^*L^{n-p+K}(\sigma_u^{K-1}) = FD^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1})$$

ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_v^q. Dans le cas contraire, il existerait une valeur de r telle que la chaîne $D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1})$ contiendrait un simplexe d'espèce σ_r^{Q+1}, où σ_r^{Q+1} est une face de σ_v^q. Comme plus haut, on en déduirait l'existence d'un indice i tel que chaque sommet σ_i^{h+1} serait un sommet de σ_r^{Q+1} ou de σ_u^{K-1}, donc de σ_g^t, ce qui est impossible, car $g < h+1$.

Il est évident (v. 8.34) que les propriétés $\Theta(k, q, h+1)$ $(0 \leqq q \leqq Q)$ restent conservées après la modification. De même il est évident que les propriétés $\Theta(k, Q+1, h+1)$ $(K+1 \leqq k \leqq h+1)$ restent aussi conservées.

Il ne s'agit donc que de prouver que la propriété $\Theta(K, Q+1, h+1)$ se trouve réalisée après la modification. Supposons donc que les indices j, r, i soient tels que σ_j^K et σ_r^{Q+1} soient des faces de σ_i^{h+1}. On doit démontrer que presqu'aucun simplexe de la chaîne ${}^*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}. Ceci est évident dans le cas où σ_j^K et σ_r^{Q+1} sont des faces d'une h-face de σ_i^{h+1}, car nous savons que la propriété $\Theta(K, Q+1, h)$ reste conservée après la modification. Supposons donc que chaque sommet de σ_i^{h+1} soit un sommet de σ_j^K ou de σ_r^{Q+1}.

Supposons que l'indice u parcoure toutes les valeurs telles que σ_u^{K-1} soit une $(K-1)$-face de σ_j^K. Les simplexes d'espèce σ_r^{Q+1} dans la chaîne $D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1})$ constituent la chaîne

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha_{h+1}} H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_\nu^{h+1}).$$

Or pour $\nu \neq i$ on a

$$H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_\nu^{h+1}) = 0,$$

car: ou bien les simplexes σ_r^{Q+1} et σ_u^{K-1} ne sont pas tous les deux des faces de σ_ν^{h+1}, ou bien ces deux simplexes sont tous les deux des faces communes de σ_ν^{h+1} et de σ_i^{h+1} de manière qu'il existe un sommet de σ_ν^{h+1} qui n'est sommet ni pour σ_r^{Q+1} ni pour σ_u^{K-1}. Donc les simplexes d'espèce σ_r^{Q+1} dans la chaîne $D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1})$ constituent la chaîne

$$(*) \qquad H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_i^{h+1}).$$

Si l'indice u est tel qu'il existe un sommet de σ_s^{h-Q-1} [v. 40.1 (1)] qui ne soit pas un sommet de σ_u^{K-1}, on a de nouveau le résultat que la chaîne (*) est égale à zéro. Il ne reste donc que des valeurs de u telles qu'il existe une $(K-h+Q-1)$-face $\sigma_t^{K-h+Q-1}$ de σ_u^{K-1} telle que

$$(**) \qquad \sigma_u^{K-1} = \varepsilon_t \sigma_t^{K-h+Q-1} \sigma_s^{h-Q-1} \qquad (\varepsilon_t = \pm 1)$$

et on voit que les simplexes d'espèce σ_r^{Q+1} de la chaîne

$$L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) - {}^*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) = \sum_{u=1}^{\alpha_{K-1}} \eta_{ju}^{K-1} D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1})$$

constituent la chaîne

$$(\dagger) \qquad \sum_u \eta_{ju}^{K-1} H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_i^{h+1}),$$

où l'indice u parcourt toutes les valeurs déterminées par (**), l'indice t parcourant toutes les valeurs telles que $\eta_{\lambda t}^{K-h+Q-1} \neq 1$, où λ est déterminé par la condition

$$\sigma_j^K = \delta \sigma_\lambda^{K-h+Q} \sigma_s^{h-Q-1} \qquad (\delta = \pm 1).$$

Or pour chacune de ces valeurs de u on a [v. 40.3 (9)]

$$H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_i^{h+1}) = \varepsilon_t \Phi^{n-p+K+1}(\sigma_t^{K-h+Q-1})$$

ainsi que

$$\eta_{ju}^{K-1} = \delta \varepsilon_t \eta_{\lambda t}^{K-h+Q-1},$$

de manière que la chaîne (†) est égale [v. 40.1 et 40.2] à

$$\delta \sum_t \eta_{\lambda t}^{K-h+Q-1} \Phi(\sigma_t^{K-h+Q-1}) = \delta \Phi\left(\sum_t \eta_{\lambda t}^{K-h+Q-1} \sigma_t^{K-h+Q-1}\right)$$
$$= \delta \Phi(F\sigma_\lambda^{K-h+Q}) = \delta E^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q}).$$

Or $E^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q})$ est, abstraction faite des simplexes qui sont des faces d'un $\mathfrak{U}_1$-simplexe d'espèce σ^{-1}, cette partie de la chaîne

$$L^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^{K-h+Q}\,\sigma_s^{h-Q-1}) = \delta\, L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$$

dont les simplexes sont d'espèce σ_r^{Q+1}. Il en résulte que les simplexes d'espèce σ_r^{Q+1} sont dans la chaîne

$$L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) - {}^*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$$

presque les mêmes comme dans $L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$. Donc presqu'aucun simplexe de la chaîne ${}^*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}.

40.4. Il reste à considérer le cas $K = h - Q$. Soit d'abord $K > 0$ ou $h > Q$. La relation (2) du n° 40.1 dit que, si σ_λ^0, σ_μ^0 sont les deux sommets d'une 1-face de σ_r^{Q+1}, on a

$$E^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^0) = E^{n-p+K+1}(\sigma_\mu^0).$$

Il en résulte que la chaîne $E^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^0)$ reste la même, si on y remplace σ_λ^0 successivement par tous les sommets de σ_r^{Q+1}.

Donc, si les indices i, r, s sont tels que

$$\sigma_i^{h+1} = \pm\,\sigma_r^{Q+1}\,\sigma_s^{K-1}, \tag{1}$$

on peut définir sans ambiguité la chaîne

$$H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_s^{K-1}, \sigma_s^{h+1})$$

égale, abstraction faite des simplexes qui sont des faces d'un $\mathfrak{U}_1$-simplexe d'espèce σ^{-1}, à la partie de la chaîne $L^{n-p+K+1}(\sigma_\lambda^0\,\sigma_s^{K-1})$ (où σ_λ^0 est un sommet quelconque de σ_r^{Q+1}) dont tous les simplexes sont d'espèce σ_r^{Q+1}. Si les indices i, r, s sont tels que la relation (1) n'est pas vraie, on pose

$$H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_s^{K-1}, \sigma_i^{h+1}) = 0.$$

Posons encore

$$D^{n-p+K+1}(\sigma_s^{K-1}) = \sum_{r=1}^{\alpha_{Q+1}} \sum_{i=1}^{\alpha_{h+1}} H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_s^{K-1}, \sigma_i^{h+1}).$$

Ceci étant, soit

$${}^*C^{n-p} = C^{n-p}, \quad {}^*L^{n-p+k+1}(\sigma_i^k) = L^{n-p+k+1}(\sigma_i^k) \text{ pour } k \neq K-1,\ k \neq K;$$

$${}^*L^{n-p+K}(\sigma_s^{K-1}) = L^{n-p+K}(\sigma_s^{K-1}) - F D^{n-p+K+1}(\sigma_s^{K-1}),$$

$${}^*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) = L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) - \sum_{s=1}^{\alpha_{K-1}} \eta_{js}^{K-1}\, D^{n-p+K+1}(\sigma_s^{K-1}).$$

On voit sans peine que les propriétés 1°, 2°, 3° du n° 35 sont vérifiées.

On vérifie de la même façon comme dans le n° 40.3 que les propriétés $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$ sont conservées après la modification. Comme au n° cité, il est évident que les propriétés $\Theta(k, q, h+1)$ $(0 \leqq q \leqq Q)$ et $\Theta(k, Q+1, h+1)$ $(K+1 \leqq k \leqq h+1)$ restent aussi conservées.

On doit encore vérifier que la propriété $\Theta(K, Q+1, h+1)$ se trouve réalisée après la modification. Supposons donc que les indices j, r, i soient tels que σ_j^K et σ_r^{Q+1} soient des faces de σ_i^{h+1}. On doit démontrer que presqu'aucun simplexe de la chaîne ${}^*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}. Comme au n° cité, l'unique cas à considérer est celui où chaque sommet de σ_i^{h+1} est un sommet de σ_j^K ou de σ_r^{Q+1}. Or cette hypothèse entraîne, dans le cas actuel où $K = h - Q > 0$, que le simplexe σ_j^K possède une $(K-1)$-face σ_s^{K-1} telle qu'on ait la relation (1).

σ_u^{K-1} parcourant toutes les $(K-1)$-faces de σ_j^K, on voit comme au n° cité que

$$H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_u^{K-1}, \sigma_\nu^{h+1}) = 0$$

si $\nu \neq i$ ou bien $\nu = i$ et $u \neq s$. Donc la partie de la chaîne

$$L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) - {}^*L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K) = \sum_{u=1}^{\alpha_{K-1}} \eta_{ju}^{K-1} D^{n-p+K+1}(\sigma_u^{K-1})$$

dont les simplexes sont d'espèce σ_r^{Q+1}, est presque égale à

$$(*) \qquad \eta_{js}^{K-1} H^{n-p+K+1}(\sigma_r^{Q+1}, \sigma_s^{K-1}, \sigma_i^{h+1}).$$

Or si l'on détermine le signe $\varepsilon = \pm 1$ et la valeur de l'indice λ de manière que $\sigma_j^K = \varepsilon \sigma_\lambda^0 \sigma_s^{K-1}$, on a $\varepsilon = \eta_{js}^{K-1}$ et on voit que $(*)$ est presque égale à la partie de la chaîne $L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$ dont les simplexes sont d'espèce σ_r^{Q+1}. Par suite presqu'aucun simplexe de la chaîne $L^{n-p+K+1}(\sigma_j^K)$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}.

40.5. On doit enfin considérer le cas où $K = 0$, $Q = h$. La relation (1) du n° 40.1 dit que la partie de la chaîne $L^{n-p+1}(\sigma_\lambda^0)$ dont les simplexes sont d'espèce σ_i^{h+1} est la même pour tous les sommets de σ_i^{h+1} ; désignons la par $E^{n-p+1}(\sigma_i^{h+1})$. Posons

$${}^*C^{n-p} = C^{n-p} - \sum_{i=1}^{\alpha_{h+1}} F E^{n-p+1}(\sigma_i^{h+1}),$$

$${}^*L^{n-p+1}(\sigma_j^0) = L^{n-p+1}(\sigma_j^0) - \sum_{i=1}^{\alpha_{h+1}} E^{n-p+1}(\sigma_i^{h+1}),$$

$${}^*L^{n-p+k+1}(\sigma_\mu^k) = L^{n-p+k+1}(\sigma_\mu^k) \text{ pour } 1 \leqq k \leqq p-1.$$

On voit sans peine que les propriétés 1°, 2°, 3° du n° 35 sont vérifiées.

Il est évident que les propriétés $\Theta(k, q, g)$ $(0 \leqq g \leqq h)$, $\Theta(k, q, h+1)$ $(0 \leqq q \leqq h)$ et $\Theta(k, h+1, h+1)$ restent conservées après la modification et que la propriété $\Theta(0, h+1, h+1)$ se trouve réalisée après la modification.

41. Soit $0 \leqq h \leqq p-2$, $0 \leqq Q \leqq h$. Supposons qu'on ait déjà réalisé les propriétés suivantes: $\Theta(k, q, g)$ pour $0 \leqq g \leqq h$, $\Theta(k, q, h+1)$ pour $0 \leqq q \leqq Q$, $\Theta(k, Q+1, h+1)$ $(h-Q \leqq k \leqq h+1)$. On doit démontrer que les propriétés $\Theta(k, Q+1, h+1)$ $(0 \leqq k \leqq h-Q-1)$ sont aussi réalisées. Supposons donc que les indices k, j, r, i soient tels que $0 \leqq k \leqq h-Q-1$ (d'où $Q < h$) et que les deux simplexes σ_j^k et σ_r^{Q+1} soient des faces de σ_i^{h+1}; on doit prouver que presqu'aucun simplexe de la chaîne $L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k)$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}. Ceci est évident si σ_j^k et σ_r^{Q+1} sont des faces d'une h-face de σ_i^{h+1}, car la propriété $\Theta(k, Q+1, h)$ est vérifiée. Supposons donc que chaque sommet de σ_i^{h+1} soit un sommet de σ_j^k ou de σ_r^{Q+1}. On a alors $k+Q+1 \geqq h$; d'autre part on avait $k \leqq h-Q-1$, de manière que $k = h-Q-1$ et on a évidemment

$$\sigma_i^{h+1} = \pm \sigma_r^{Q+1} \sigma_j^{h-Q-1}.$$

Puisque $Q < h$, on peut distinguer deux cas: 1° $Q \leqq h-2$; 2° $Q = h-1$.

Premier cas: $Q \leqq h-2$. Choisissons un sommet σ_λ^0 du simplexe σ_r^{Q+1}. D'après 34.2, 2° la chaîne

$$(*) \qquad FL^{n-p+h-Q+1}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^{h-Q-1}) - L^{n-p+h-Q}(\sigma_j^{h-Q-1}) + \sum_{\nu=1}^{\alpha_{h-Q-2}} \eta_{jk}^{h-Q-2} L^{n-p+h-Q}(\sigma_\lambda^0 \sigma_\nu^{h-Q-2})$$

ne contient aucun simplexe situé dans $\overline{P_4^{h-Q}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^{h-Q-1})}$. D'après 36, il en résulte qu'aucun simplexe de la chaîne $(*)$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}. Puisque notre but était de montrer que la chaîne $L^{n-p+h-Q}(\sigma_j^{h-Q-1})$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^{Q+1}, il suffit donc de prouver que ceci est vrai pour la chaîne $FL^{n-p+h-Q+1}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^{h-Q-1})$ ainsi que pour chaque chaîne $L^{n-p+h-Q}(\sigma_\lambda^0 \sigma_\nu^{h-Q-2})$, où σ_ν^{h-Q-2} parcourt toutes les $(h-Q-2)$-faces de σ_j^{h-Q-1}.

Or des propriétés $\Theta(k, q, h+1)$ $(0 \leqq q \leqq Q)$ et $\Theta(k, Q+1, h+1)$ $(h-Q \leqq k \leqq h+1)$ il résulte que, si σ_ι^g est une face de σ_r^{Q+1} $(0 \leqq g \leqq Q+1)$, la chaîne $L^{n-p+h-Q+1}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^{h-Q-1})$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_μ^g. D'après 8.34, il en résulte que la chaîne $FL^{n-p+h-Q+1}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^{h-Q-1})$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^{Q+1}. D'autre part, σ_ν^{h-Q-2} étant une $(h-Q-2)$-face de σ_j^{h-Q-1}, les deux simplexes $\sigma_\lambda^0 \sigma_\nu^{h-Q-2}$ et σ_r^{Q+1} étant des faces de la h-face $\sigma_r^{Q+1} \sigma_\nu^{h-Q-2}$ de σ_i^{h+1} il résulte de $\Theta(k, q, h)$ que presqu'aucun simplexe de la chaîne $L^{n-p+h-Q}(\sigma_\lambda^0 \sigma_\nu^{h-Q-2})$ n'est d'espèce σ_r^{Q+1}.

Second cas: $Q = h-1$, d'où $k = 0$. Les indices j, r, i étant tels que $\sigma_i^{h+1} = \pm \sigma_r^h \sigma_j^0$, on doit démontrer que la chaîne $L^{n-p+1}(\sigma_j^0)$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^h. Choisissons un sommet σ_λ^0 du simplexe σ_r^h. D'après 34.2, 2° la chaîne

$$(*) \qquad FL^{n-p+2}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^0) - L^{n-p+1}(\sigma_j^0) + L^{n-p+1}(\sigma_\lambda^0)$$

ne contient aucun simplexe situé dans $\overline{P_4^1(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^0)}$ et par suite (v. 36) aucun simplexe d'espèce σ_r^h. On ne doit donc montrer que ni $FL^{n-p+2}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^0)$ ni $L^{n-p+1}(\sigma_\lambda^0)$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^h. Si σ_s^g $(0 \leqq g \leqq h)$ est une face de σ_r^h, les deux simplexes $\sigma_\lambda^0 \sigma_j^0$ et σ_s^g sont des faces de σ_r^{h+1}, de manière qu'il résulte de $\Theta(k, q, h+1)$ $(0 \leqq q \leqq Q = h-1)$ et de $\Theta(k, h, h+1) = \Theta(k, Q+1, h+1)$ $(1 = h - Q \leqq k \leqq h+1)$ que la chaîne $L^{n-p+2}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^0)$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_s^g. D'après 8.34 il en résulte que la chaîne $FL^{n-p+2}(\sigma_\lambda^0 \sigma_j^0)$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^h. D'autre part, il résulte de $\Theta(k, h, h)$ que la chaîne $L^{n-p+1}(\sigma_\lambda^0)$ ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce σ_r^h.

42. Le but proposé au n° 35 est atteint. Projetons toutes les $\mathfrak{U}_1$-chaînes obtenues dans le réseau $\mathfrak{U}$. En tenant compte du fait que (v. 33) $\mathfrak{U}_1$ est un affinement de $\mathfrak{U}$ normal par rapport aux cycles mod $\overline{P_1^p(\sigma_i^p) - P_2^p(\sigma_i^p)}$ dans $\overline{P_1^p(\sigma_i^p)}$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$, nous avons donc le résultat suivant: 1° La chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ primitive a été remplacée par une nouvelle $(n-p, \mathfrak{U})$-chaîne, que nous continuons d'appeler $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ et qui est homologue à l'ancienne dans $\overline{B}$. 2° A chaque $(h, \mathfrak{Z})$-simplexe intérieur σ_i^h $(0 \leqq h \leqq p-1,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_h)$ on a attaché une $(n-p+h+1, \mathfrak{U})$-chaîne $L^{n-p+h+1}(\sigma_i^h, \mathfrak{U})$ dans $\overline{B}$. 3° Pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$ la chaîne

$$FL^{n-p+1}(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) - C^{n-p}(\mathfrak{U})$$

ne contient aucun simplexe situé dans $\overline{P_4^0(\sigma_i^0)}$. 4° Pour $0 \leqq h \leqq p-2$, $1 \leqq i \leqq \alpha_{h+1}$, la chaîne

$$FL^{n-p+h+2}(\sigma_i^h, \mathfrak{U}) - \sum_{j=1}^{\alpha_h} \eta_{ij}^h L^{n-p+h+1}(\sigma_j^h, \mathfrak{U})$$

ne contient aucun simplexe situé dans $\overline{P_4^{h+1}(\sigma_i^{h+1})}$. 5° Pour $1 \leqq i \leqq \alpha_p$,

$$\sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{ij}^{p-1} L^n(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U})$$

est un (n, R)-cycle essentiel mod $R - P_2^p(\sigma_i^p)$. 6° Pour $0 \leqq h \leqq p-1$, $0 \leqq k \leqq h$, $0 \leqq q \leqq h$, si les simplexes σ_j^k, σ_r^q $(1 \leqq j \leqq \alpha_k,\ 1 \leqq r \leqq \alpha_q)$ sont des faces du simplexe σ_i^h, la chaîne $L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \mathfrak{U})$ ne contient essentiellement aucun simplexe d'espèce σ_r^q, ce qui veut dire que chaque simplexe d'espèce σ_r^q de la chaîne $L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \mathfrak{U})$ est égal à zéro mod $\overline{R - R_0}$[53].

---

[53] En effet, soit τ un simplexe de la chaîne $L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \mathfrak{U})$ tel que $\tau \neq 0$ mod $\overline{R - R_0}$. Il existe alors un simplexe τ_1 de $L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \mathfrak{U}_1)$ tel que (v. 33) $\tau = \pi_0^* \tau_1$. Evidemment $\tau_1 \neq 0$ mod $\overline{R - R_0}$. Par suite, comme on le voit sans peine, τ_1 n'est pas une face d'un

Or nous en déduirons (dans les nos 42.1–42.5) que la chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ est égale mod $\overline{B}\,\overline{R-R_0}$ à une $(n-p, \mathfrak{U}_1)$-chaîne élémentaire. Avec cela le théorème du no 31 sera évidemment prouvé.

42.1. Soit τ un $\mathfrak{U}_1$-simplexe dont le noyau rencontre et $\overline{B}$ et $\overline{R-R_0}$. Alors le noyau de $\pi_{20}\tau$ (v. 33) et donc aussi celui de $\pi_0^*\tau$ rencontre $\overline{B}\,\overline{R-R_0}$. Or toutes les $\mathfrak{U}$-chaînes que nous considérons ici sont des projections de $\mathfrak{U}_1$-chaînes situées dans $\overline{B}$; donc si un simplexe d'une de nos $\mathfrak{U}$-chaînes est $=0 \bmod \overline{R-R_0}$, il est aussi $=0 \bmod \overline{B}\,\overline{R-R_0}$. Les chaînes élémentaires ne contenant que des simplexes $\neq 0 \bmod \overline{R-R_0}$ (v. 19.1, 1°), on voit sans peine qu'il suffit de démontrer que $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ est égale mod $\overline{R-R_0}$ à une chaîne élémentaire.

42.2. Lemme $\mathcal{A}_k$ $(0 \leqq k \leqq p-1)$: Supposons que les simplexes σ_j^k, σ_r^q soient des faces de σ_i^p $(1 \leqq j \leqq \alpha_k,\ 1 \leqq r \leqq \alpha_q,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_p)$. Soit $E^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \sigma_r^q, \mathfrak{U})$ la partie de la chaîne $L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \mathfrak{U})$ dont les simplexes sont 1° d'espèce σ_r^q, 2° $\neq 0 \bmod \overline{R-R_0}$. Alors: 1° si $q \neq p-k-1$, on a $E^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \sigma_r^q, \mathfrak{U}) = 0$; 2° si $q = p-k-1$ il existe un nombre $a_{jr} \in \mathfrak{R}$ tel que $E^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \sigma_r^q, \mathfrak{U}) = a_{jr} K^{n-q}(\sigma_r^q)$.

Dans le no 42.3, nous démontrerons $\mathcal{A}_{p-1}$. Dans le no 42.4, nous déduirons $\mathcal{A}_k$ $(0 \leqq k \leqq p-2)$ de $\mathcal{A}_{k+1}$. Par conséquent, le lemme $\mathcal{A}_0$ sera vrai.

42.3. Soient σ_j^{p-1}, σ_r^q des faces de σ_i^p. Pour $q \geqq 1$, on a $E^n(\sigma_j^{p-1}, \sigma_r^q, \mathfrak{U}) = 0$ d'après 8.33. Soit donc $q = 0$. Dans le cas où σ_r^0 est un sommet de σ_j^{p-1}, on a $E^n(\sigma_j^{p-1}, \sigma_r^0, \mathfrak{U}) = 0$ d'après 42, 6°. Il ne reste que le cas où $\sigma_i^p = \pm \sigma_r^0 \sigma_j^{p-1}$. Si σ_ν^{p-2} est une $(p-2)$-face quelconque de σ_j^{p-1}, nous savons déjà que $E^n(\sigma_r^0 \sigma_\nu^{p-2}, \sigma_r^0, \mathfrak{U}) = 0$. Il en résulte que $E^n(\sigma_j^{p-1}, \sigma_r^0, \mathfrak{U})$ est la partie de la chaîne[54]

$$M^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) = L^n(\sigma_j^{p-1}, \mathfrak{U}) - \sum_{\nu=1}^{\alpha_{p-2}} \eta_{j\nu}^{p-2} L^n(\sigma_r^0 \sigma_\nu^{p-2}, \mathfrak{U})$$

dont les simplexes sont 1° d'espèce σ_r^0, 2° $\neq 0 \bmod \overline{R-R_0}$. D'après 42, 5° $M^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ est un (n, R)-cycle essentiel mod $R - P_2^p(\sigma_i^p)$; puisque $S \subset R - P_2^p(\sigma_i^p)$, $G(\mathfrak{U})$ est aussi (v. 17) un tel (n, R)-cycle. D'après la définition du réseau gén. $\mathfrak{P}_3^p$ (no 29) et celle de $P_2^p(\sigma_i^p)$ (no 30), il en résulte l'existence de deux nombres $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$, dont un au moins $\neq 0$, tels que $r_1 M^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) + r_2 G^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod R - P_3^p(\sigma_i^p)$. Or (v. 32) $G^n(\mathfrak{U}) \not\sim 0 \bmod R - P_3^p(\sigma_i^p)$ de manière qu'il existe un nombre $a \in \mathfrak{R}$ $(a = -r_2 : r_1)$ tel

---

$\mathfrak{U}_1$-simplexe d'espèce σ^{-1}. Soit σ_ν^l l'espèce du simplexe τ_1. On a $l \geqq 0$ et, en vertu de la propriété $\Theta(k, q, h)$, σ_ν^l n'est pas une face de σ_i^h. Or si le simplexe τ était d'espèce σ_r^q, on voit tout de suite que σ_ν^l serait une face de σ_r^q, donc de σ_i^h.

[54] Dans le cas $p = 1$, il existe un indice ν tel que $\pm\sigma_i^1 \rightarrow \sigma_j^0 - \sigma_\nu^0$ et on doit poser

$$M^n(\sigma_i^1, \mathfrak{U}) = L^n(\sigma_j^0, \mathfrak{U}) - L^n(\sigma_\nu^0, \mathfrak{U}).$$

que $M^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \sim a\,G^n(\mathfrak{U}) \bmod R - P_3^p(\sigma_i^p)$. Il existe donc une $(n+1, \mathfrak{U})$-chaîne $H^{n+1}(\mathfrak{U})$ et une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $N^n(\mathfrak{U}) \subset R - P_3^p(\sigma_i^p)$ telles que

$$M^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) = a\,G^n(\mathfrak{U}) + FH^{n+1}(\mathfrak{U}) + N^n(\mathfrak{U}).$$

Le réseau $\mathfrak{U}$ étant commode, il est d'ordre $\leqq n \bmod S$; par suite chaque $(n+1, \mathfrak{U})$-simplexe possède un sommet U tel que $US \neq 0$. Or si U', U'' sont deux sommets de $\mathfrak{U}$ tels que $U'R_0 \neq 0$, $\overline{U''S} \neq 0$, on a (n° 32) $U'U'' = 0$. Il en résulte que $FH^{n+1}(\mathfrak{U}) = 0 \bmod R - R_0$. Lorsque τ est un sommet de $\mathfrak{U}$ d'espèce σ_r^0, chacun de ses sommets U rencontre T_r et par suite (v. 32) $U \subset P_3^p(\sigma_i^p)$. Il en résulte que la chaîne $N^n(\mathfrak{U})$ ne contient aucun simplexe d'espèce σ_r^0. Donc $E^n(\sigma_j^{p-1}, \sigma_r^0)$, c'est-à-dire la partie de la chaîne $M^n(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ dont les simplexes sont 1° d'espèce σ_r^0, 2° $\neq 0 \bmod R - \overline{R_0}$, coïncide avec la partie pareille de la chaîne $a\,G^n(\mathfrak{U})$, c'est-à-dire (v. 19.1) avec $a\,K^n(\sigma_r^0, \mathfrak{U})$.

42.4. Soit $0 \leqq k \leqq p-2$ et supposons la validité du lemme $\mathcal{A}_{k+1}$. Il s'agit d'en déduire la validité du lemme $\mathcal{A}_k$. Supposons donc que les simplexes σ_j^k, σ_r^q soient des faces de σ_i^p. S'il existe un sommet de σ_i^p qui n'est sommet ni pour σ_j^k, ni pour σ_r^q, il existe une $(p-1)$-face σ_ν^{p-1} de σ_i^p telle que σ_j^k et σ_r^q sont des faces de σ_ν^{p-1}; par suite $E^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \sigma_r^q) = 0$, d'après 42, 6°. Supposons donc que chaque sommet de σ_i^p soit un sommet de σ_j^k ou de σ_r^q. Il en résulte que $k+q \geqq p-1$. Lorsque $q \geqq p-k$, on a $E^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \sigma_r^q) = 0$ d'après 8.33. Il ne reste donc que le cas où $q = p-k-1$, les indices j, r, i étant tels que $\sigma_i^p = \pm \sigma_j^k\,\sigma_r^{p-k-1}$. Choisissons un sommet σ_t^0 de σ_r^{p-k-1} et supposons que σ_s^{k-1} parcoure toutes les $(k-1)$-faces de σ_j^k. Alors $\sigma_s^{k-1}\,\sigma_t^0$ [55] et σ_r^{p-k-1} sont des faces d'une $(p-1)$-face de σ_i^p, de manière que $E^{n-p+k+1}(\sigma_s^{k-1}\,\sigma_t^0, \sigma_r^{p-k-1}) = 0$ d'après 42.6. En outre, d'après 42, 4° et 36 la chaîne [56]

$$FL^{n-p+k+2}(\sigma_t^0\,\sigma_j^k, \mathfrak{U}) - L^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \mathfrak{U}) + \sum_{s=1}^{\alpha_{k-2}} \eta_{js}^{k-2}\,L^{n-p+k+1}(\sigma_t^0\,\sigma_s^{k-1}, \mathfrak{U})$$

ne contient aucun simplexe d'espèce σ_r^{p-k-1}. Il en résulte que $E^{n-p+k+1}(\sigma_j^k, \sigma_r^{p-k-1}, \mathfrak{U})$ est la partie de la chaîne

$$(*) \qquad FL^{n-p+k+2}(\sigma_t^0\,\sigma_j^k, \mathfrak{U})$$

dont les simplexes sont 1° d'espèce σ_r^{p-k-1}, 2° $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$. Soit τ un tel simplexe de la chaîne $(*)$. Il existe alors un simplexe τ_1 de la chaîne

$$L^{n-p+k+2}(\sigma_t^0\,\sigma_j^k, \mathfrak{U})$$

[55] Pour $k = 0$ ce symbole signifie σ_t^0.

[56] Pour $k = 0$:

$$FL^{n-p+2}(\sigma_t^0\,\sigma_j^0, \mathfrak{U}) - L^{n-p+1}(\sigma_j^0, \mathfrak{U}) + L^{n-p+1}(\sigma_t^0, \mathfrak{U}).$$

tel que τ appartienne à la chaîne $F\tau_1$. Puisque $\tau \neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$, évidemment $\tau_1 \neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$ de manière que (v. 8.32) τ_1 n'est pas d'espèce σ^{-1}. Donc (v. 8.34) le simplexe τ_1 est d'espèce σ_ν^h, où σ_ν^h est une face de σ_r^{p-k-1}. Donc τ_1 est un simplexe de la chaîne $E^{n-p+k+2}(\sigma_t^0\, \sigma_j^k,\, \sigma_\nu^h,\, \mathfrak{U})$. Or en vertu du lemme $\mathcal{A}_{k+1}$, on a

$$1^\circ \quad E^{n-p+k+2}(\sigma_t^0\, \sigma_j^k,\, \sigma_\nu^h,\, \mathfrak{U}) \neq 0 \quad \text{pour } h \neq p-k-2,$$

$$2^\circ \quad E^{n-p+k+2}(\sigma_t^0\, \sigma_j^k,\, \sigma_\nu^{p-k-2},\, \mathfrak{U}) = \eta_{r\nu}^{p-k-2}\, a_\nu\, K^{n-p+k+2}(\sigma_\nu^{p-k-2},\, \mathfrak{U}) \quad (a_\nu \in \mathfrak{R}),$$

où σ_ν^{p-k-2} parcourt toutes les $(p-k-2)$-faces de σ_r^{p-k-1}. Il en résulte que $E^{n-p+k+1}(\sigma_j^k,\, \sigma_r^{p-k-1},\, \mathfrak{U})$ est égale à la partie de la chaîne

$$(**) \qquad F \sum_{\nu=1}^{\alpha_{p-k-2}} \eta_{r\nu}^{p-k-2}\, a_\nu\, K^{n-p+k+2}(\sigma_\nu^{p-k-2},\, \mathfrak{U})$$

dont les simplexes sont 1° d'espèce σ_r^{p-k-1}, 2° $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$. Or la chaîne $(**)$ est égale, en vertu de 19.1, 3°, à la chaîne

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha_{p-k-2}} \sum_{\mu=1}^{\alpha_{p-k-1}} \eta_{r\nu}^{p-k-2}\, \eta_{\mu\nu}^{p-k-1}\, a_\nu\, K^{n-p+k+1}(\sigma_\mu^{p-k-1},\, \mathfrak{U}),$$

de manière que, d'après 19.1, 1° et 2°,

$$E^{n-p+k+1}(\sigma_j^k,\, \sigma_r^{p-k-1},\, \mathfrak{U}) = a\, K^{n-p+k+1}(\sigma_r^{p-k-1},\, \mathfrak{U}).$$

42.5. Le lemme $\mathcal{A}_0$ étant démontré, passons à la démonstration du fait que (v. 42.1) la chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ est égale $\bmod \overline{R - R_0}$ à une chaîne élémentaire.

Soit τ^{n-p} un simplexe $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$. D'après 8.32 et 8.33, τ est d'espèce σ_i^k, où $0 \leq k \leq p$. Choisissons un sommet σ_t^0 de σ_i^k. D'après 42, 3° et 36, la partie dont les simplexes sont d'espèce σ_i^k est dans $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ la même que dans $FL^{n-p+1}(\sigma_t^0,\, \mathfrak{U})$ et par suite, comme on voit par le raisonnement employé dans le n° 42.4, la même que dans

$$(*) \qquad F \sum_{h,j} E^{n-p+1}(\sigma_t^0,\, \sigma_j^h,\, \mathfrak{U}),$$

où σ_j^h parcourt toutes les faces de σ_i^k. Or d'après 42, 6° et d'après le lemme $\mathcal{A}_0$, on a

$$1^\circ \quad E^{n-p+1}(\sigma_t^0,\, \sigma_j^h) = 0 \quad \text{pour} \quad h \neq p-1$$

ainsi que pour $h = p-1$, si σ_t^0 est un sommet de σ_j^{p-1};

$$2^\circ \quad E^{n-p+1}(\sigma_t^0,\, \sigma_j^{p-1},\, \mathfrak{U}) = a_{ij}\, K^{n-p+1}(\sigma_j^{p-1},\, \mathfrak{U}),$$

si $k = p$ et si l'indice j est tel que $\sigma_i^p = \pm \sigma_t^0 \sigma_j^{p-1}$. Donc, si $k \leqq p-1$, la chaîne (*) est égale à zéro ; si $k = p$, la chaîne (*) est, d'après 19.1, 3°, égale à $\eta_{ij}^{p-1} a_{ij} K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$. Par suite

$$C^{n-p}(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \quad \mathrm{mod}\, \overline{R - R_0}.$$

V.

43. Dans tout ce Chapitre, supposons donnée une valeur fixe de $p\,(1 \leqq p \leqq n)$. On suppose la validité de tous les axiomes des Chap. I et II ainsi que celle des axiomes G^k (v. 21) pour $n-p \leqq k \leqq n-1$ et des axiomes H^k (v. 27) pour $n-p \leqq k \leqq n-2$.

44. *Soit $\mathfrak{Z} \in \Xi$ (v. 23). Soit S_1 la somme de tous les sommets extérieurs de $\mathfrak{Z}$; soit Ω un entourage donné de $\overline{S}_1$. Soit A un sous-ensemble bicompact de R; soit B un entourage donné de A. Il existe un affinement $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{Z}$ et un réseau gén. $\mathfrak{M}$ tels que l'énoncé suivant soit vrai: Soit $\mathfrak{z} \in \Xi$ un affinement de $\mathfrak{B}$ et un affinement mod S de $\mathfrak{M}$. Soit $\mathfrak{t}$ un réseau fermé correspondant à $\mathfrak{z}$ (n° 8) et possédant par rapport à $\mathfrak{z}$ la propriété du n° 25. On peut choisir la projection $\pi = Pr.\,(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$ de manière que, le réseau fermé $\mathfrak{T}$ correspondant à $\mathfrak{Z}$ étant construit selon le n° 24 en y faisant usage de $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ et π, on ait la propriété du n° 25 ainsi que la propriété suivante, valable pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ suffisamment fin et commode relativement à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ (et par suite aussi par rapport à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$ (v. 24)): $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ étant un $(n-p, \mathfrak{U})$-cycle mod $A\,\overline{R - R_0}$ élémentaire (v. 19.1) par rapport à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$ et tel que $C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod $A\,\overline{R - R_0}$ dans A, il existe une $(n-p+1, \mathfrak{U})$-chaîne $E^{n-p+1}(\mathfrak{U})$ dans $\overline{B}$ élémentaire par rapport à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ et telle que $E^{n-p+1}(\mathfrak{U}) \to C^{n-p}(\mathfrak{U})$ mod $\overline{\Omega}$.*

La démonstration fera l'objet des n^{os} 45.1—54.3.

45.1. Soit $\mathfrak{T}^*$ un réseau fermé correspondant à $\mathfrak{Z}$ (v. 8) et choisi arbitrairement; soient T_i^* $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ les sommets de $\mathfrak{T}^*$ (v. 8) de manière que $T_i^* \subset \sigma_i^0$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$; posons $R_0^* = \sum_{i=1}^{\alpha_0} T_i^* \subset R - S$ (v. 8).

A chaque point $a \in R$ attachons un voisinage $W(a)$ tel que pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$: 1° $a \in T_i^*$ entraîne $W(a) \subset \sigma_i^0$; 2° $a \in R - T_i^*$ entraîne $W(a)\, T_i^* = 0$. Soit $W'(a)$ un entourage de a si petit que $W'(a) \Subset W(a)$. L'espace R étant bicompact, il existe un nombre fini de points $a = a_1, a_2, \cdots, a_m$ tels que les entourages correspondants $W'_r = W'(a_r)$ constituent un réseau $\mathfrak{W}'$[57]; soit encore $W_r = W(a_r)$ $(1 \leqq r \leqq m)$. On peut supposer qu'il existe un entier m'

[57] On voit sans peine qu'on peut s'arranger de façon que le réseau $\mathfrak{W}'$ soit arbitrairement fin.

$(0 \leqq m' < m)$ tel que $a_r \in R_0^*$ pour $1 \leqq r \leqq m'$, $a_r \in R - R_0^*$ pour $m'+1 \leqq r \leqq m$. Pour $1 \leqq r \leqq m'$ il existe un indice i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ tel que $a_r \in T_i^*$, d'où $W_r' \subset W_r \subset \sigma_i^0 \subset R - S$. Pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$, il existe évidemment un entourage H_i de T_i^* si petit que: 1° $T_i^* \subset H_i \subset \sigma_i^0$; 2° $\overline{W}_r' T_i^* = 0$ entraîne $\overline{W}_r' H_i = 0$. Pour $1 \leqq r \leqq m$, soit W_r'' un entourage de a_r si petit que: 1° $W_r'' \Subset W_r'$; 2° $a_r \in T_i^*$ entraîne $W_r'' \Subset H_i$ pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$; 3° $\overline{W}_r'' \overline{W}_s'' = 0$ pour $1 \leqq r < s \leqq m$. Pour $1 \leqq r \leqq m$, soit W_r''' un entourage de a_r si petit que $W_r''' \Subset W_r''$.

Il existe évidemment un affinement $\mathfrak{V}_1$ de $\mathfrak{Z}$ jouissant des propriétés suivantes: 1° Pour $V \in \mathfrak{V}_1$, $1 \leqq r < s \leqq m$, on ne peut avoir simultanément $\overline{V} \overline{W}_r'' \neq 0$, $\overline{V} \overline{W}_s'' \neq 0$. 2° Pour $V \in \mathfrak{V}_1$, $1 \leqq r \leqq m$, la relation $\overline{V} \overline{W}_r' \neq 0$ entraîne $V \subset W_r$. 3° Pour $V \in \mathfrak{V}_1$, $1 \leqq r \leqq m$, la relation $\overline{V} \overline{W}_r''' \neq 0$ entraîne $V \subset W_r''$. 4° $\mathfrak{V}_1$ est un affinement du réseau $\mathfrak{W}'$. 5° $\mathfrak{V}_1$ est un affinement du réseau $\mathfrak{H}$ dont les sommets sont les ensembles H_i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ et l'ensemble $R - R_0^*$. 6° Pour $1 \leqq r \leqq m'$ soit $\mathfrak{M}_r$ un réseau fermé dans l'espace $\overline{W}_r'''$ tel que chaque sommet de $\mathfrak{M}_r$ soit un sous-ensemble d'un sommet de $\mathfrak{V}_1$; alors l'ordre (v. 7.2) du réseau $\mathfrak{M}_r$ est $\geqq n$. Il résulte de 2.24 que la condition 6° est réalisable, car $\dim \overline{W}_r''' = n$, d'après 12.2[58].

45.2 Dorénavant, supposons que le réseau $\mathfrak{z} \in \Xi$ soit un affinement de $\mathfrak{V}_1$ et par suite de $\mathfrak{Z}$. Nous allons choisir une projection $\pi = Pr. (\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$. Soit z un sommet de $\mathfrak{z}$. Deux cas sont à distinguer. *En premier lieu*, soit $z \subset R - R_0^*$. Dans ce cas on choisira le sommet $\pi z = Z$ de $\mathfrak{Z}$ de manière que $ZS \neq 0$; nous savons (v. 8) que c'est possible. *En second lieu*, soit $z R_0^* \neq 0$. En vertu de la propriété 5° du réseau $\mathfrak{V}_1$, on peut choisir l'indice i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ de telle façon que $z \subset H_i$; on peut donc poser $\pi z = \sigma_i^0$, car $H_i \subset \sigma_i^0$. La projection π n'est pas encore complètement determinée et nous poserons tout de suite des conditions ultérieures.

Choisissons un réseau fermé $\mathfrak{t}$ correspondant à $\mathfrak{z}$ (v. 8). Comme dans le n° 24, désignons par τ_ν^0 $(1 \leqq \nu \leqq \beta_0)$ les sommets intérieurs de $\mathfrak{z}$ et par t_ν les sommets correspondants de $\mathfrak{t}$ et posons $R_0' = \sum_{\nu=1}^{\beta_0} t_\nu$. D'après 8, on a $R_0' + g = R$, où g désigne la somme de tous les sommets extérieurs de $\mathfrak{z}$. Soit $b \in \overline{W}_r'''$ $(1 \leqq r \leqq m')$ et soit z un sommet de $\mathfrak{z}$ contenant b. On a $z \overline{W}_r''' \neq 0$, d'où $z \subset W_r''$ d'après la propriété 3° du réseau $\mathfrak{V}_1$. Or $W_r'' \subset R - S$, car $1 \leqq r \leqq m'$; donc $z \subset R - S$ est un sommet intérieur de $\mathfrak{z}$. Donc $b \in R - g \subset R_0'$, c'est-à-dire $\overline{W}_r''' \subset R_0'$ pour $1 \leqq r \leqq m'$. Il en résulte que les ensembles $\overline{W}_r''' t_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq \beta_0)$ constituent (si $1 \leqq r \leqq m'$) un réseau fermé dans $\overline{W}_r'''$. D'après la propriété 6° du réseau $\mathfrak{V}_1$, on en déduit la validité de la remarque suivante: Si $1 \leqq r \leqq m'$, on peut indiquer un

[58] En effet, puisque $1 \leqq r \leqq m'$, on a $\overline{W}_r''' \subset \overline{W}_r' \subset R - S$.

point $b_r \in \overline{W}_r'''$ tel que $b_r \in t_\nu$ pour au moins $n+1$ valeurs différentes de l'indice $\nu\,(1 \leqq \nu \leqq \beta_0)$. Pour $m'+1 \leqq r \leqq m$, choisissons arbitrairement un point $b_r \in \overline{W}_r'''$.

Pour $1 \leqq r \leqq m'$, il existe des indices $i\,(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ tels que $a_r \in T_i$; soient $i_0, i_1, \cdots, i_q$ tous ces indices. D'après 8, on a $0 \leqq q \leqq n$. D'après la remarque que nous venons de faire, on peut donc indiquer $q+1$ valeurs différentes de $\nu\,(1 \leqq \nu \leqq \beta_0)$ telles que $b_r \in t_\nu$; soient $\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q$ ces valeurs. Posons pour $0 \leqq h \leqq q$: $\pi\tau^0_{\nu_h} = \sigma^0_{i_h}$. C'est possible et c'est aussi d'accord avec les conditions déjà posées pour π. En effet: 1° Une valeur donnée de $\nu\,(1 \leqq \nu \leqq \beta_0)$ ne peut appartenir à la suite $\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_q$ que pour *une* valeur de $r\,(1 \leqq r \leqq m')$ au plus; ceci résulte de la propriété 1° du réseau $\mathfrak{B}_1$, car l'inclusion $b_r \in t_\nu$ entraîne que $\tau^0_\nu \overline{W}_r''' \neq 0$, d'où $\tau^0_\nu \subset W_r''$ d'après la propriété 3° de $\mathfrak{B}_1$. 2° Pour $1 \leqq r \leqq m'$, $0 \leqq h \leqq q$, on a $\tau^0_{\nu_h} \subset W_r''$, comme nous venons de voir; d'autre part on a $a_r \in T^*_{i_h}$, d'où $W_r'' \subset H_{i_h}$ d'après la propriété 2° des ensembles W_r''; donc $\tau^0_{\nu_h} \subset H_{i_h}$ de manière qu'il est permis de poser $\pi\tau^0_{\nu_h} = \sigma^0_{i_h}$.

45.3. A l'aide de $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ et π, construisons le réseau fermé $\mathfrak{T}$ correspondant à $\mathfrak{z}$ suivant la manière expliquée au nº 24 et faisons usage des notations de ce nº. En particulier, on a pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$: $T_i = \sum t_\nu$, où ν parcourt toutes les valeurs $(1 \leqq \nu \leqq \gamma_0)$ telles que $\pi\tau^0_\nu = \sigma^0_i$. Il en résulte que pour $1 \leqq r \leqq m'$, $0 \leqq h \leqq q$, on a (dans les notations du nº 45.2) $t_{\nu_h} \subset T_{i_h}$, d'où $b_r \in T_{i_h}$ pour $0 \leqq h \leqq q$. Inversement, supposons que, pour de certaines valeurs de i et de $r\,(1 \leqq i \leqq \alpha_0,\ 1 \leqq r \leqq m)$ on ait l'inclusion $b_r \in T_i$. Il existe alors une valeur de $\nu\,(1 \leqq \nu \leqq \gamma_0)$ telle que $b_r \in t_\nu$, $\pi\tau^0_\nu = \sigma^0_i$. D'après nos conventions relatives à la projection π, on a donc l'inclusion $\tau^0_\nu \subset H_i$. Or $b_r \in t_\nu \subset \tau^0_\nu$, $b_r \in \overline{W}_r''' \subset \overline{W}_r'$; donc $H_i \overline{W}_r' \neq 0$ et par suite $T_i^* W_r' \neq 0$ d'après la propriété 2° de H_i. Or $\overline{W}_r' \subset W_r$, d'où $T_i^* W_r \neq 0$ ce qui entraîne $a_r \in T_i^* \subset R_0^*$. Donc $1 \leqq r \leqq m'$ et $i = i_h$ pour une certaine valeur de $h\,(0 \leqq h \leqq q)$.

Nous avons donc prouvé que pour $1 \leqq r \leqq m$, $1 \leqq i \leqq \alpha_0$ les deux inclusions $a_r \in T_i^*$ et $b_r \in T_i$ sont équivalentes. On en déduit le Lemme: Le réseau $\mathfrak{W}'$ (aux sommets $W_1', \cdots, W_m'$) possède la propriété suivante: pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$, $1 \leqq r \leqq m$: 1° $b_r \in T_i$ entraîne $W_r' \subset \sigma^0_i$; 2° $b_r \in R - T_i$ entraîne $W_r'\,T_i = 0$.

Démonstration. 1° Soit $b_r \in T_i$; alors $a_r \in T_i^*$, donc $W_r' \subset W_r \subset \sigma_i^0$. 2° Soit $b_r \in R - T_i$; alors $a_r \in R - T_i^*$, donc $W_r\,T_i^* = 0$. Supposons, par impossible, qu'il existe un point $c \in W_r'\,T_i$. D'après la définition de $\mathfrak{T}$, il existe une valeur de ν $(1 \leqq \nu \leqq \alpha_0)$ telle que $c \in t_\nu \subset \tau^0_\nu \subset H_i$. On a donc $W_r' H_i \neq 0$, d'où $\overline{W}_r'\,T_i^* \neq 0$, ce qui donne la contradiction $W_r\,T_i^* \neq 0$.

45.31. Nous avons remarqué (v. [57]) que le réseau $\mathfrak{W}'$ peut être supposé arbitrairement fin. Nous voulons profiter de cette remarque. Soit B_1 un ensemble ouvert tel que

(1) $$A \subset B_1 \Subset B.$$

Nous supposerons que le réseau $\mathfrak{W}'$ soit choisi de manière qu'il jouisse de la propriété suivante (v. 1.2): Si $W_r' A \neq 0$, $W_r' W_s' \neq 0$, on a $W_s' \subset B_1$.

45.4. De la démonstration faite au n° 25.2 du théorème du n° 25 on déduit sans peine qu'il existe un affinement $\mathfrak{V}_2$ de $\mathfrak{V}_1$ jouissant de la propriété suivante: Supposons que le réseau $\mathfrak{z} \in \Xi$ soit un affinement de $\mathfrak{V}_2$. On peut choisir la projection $\pi = Pr.(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$ (satisfaisant aux conditions du n° 45.2) de manière que $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \neq 0$ pour $1 \leqq i \leqq \alpha_p$ dans chaque réseau commode suffisamment fin.

Dorénavant on suppose $\mathfrak{z}$ et π choisis de manière que cette propriété soit vérifiée, ainsi que le lemme du n° 45.3.

46. Lemme. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau commode (relativement à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$). Soit $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ une $(n-p, \mathfrak{U})$-chaîne élémentaire (v. 19.1) telle que $C^{n-p}(\mathfrak{U}) \to 0 \bmod \overline{R - R_0}$. On peut attacher à chaque combinaison $r_0, r_1, \cdots, r_h$ $(1 \leqq h \leqq p-1)$, d'indices $1, 2, \cdots, m$ une $(n-p+1, \mathfrak{U})$-chaîne élémentaire $D^{n-p+h+1}_{r_0 r_1 \cdots r_h}(\mathfrak{U})$ de manière que: 1° chaque simplexe $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$ de la chaîne $FD_r^{n-p+1}(\mathfrak{U}) - C^{n-p}(\mathfrak{U})$ $(1 \leqq r \leqq m)$ est situé dans $R - W_r'$; 2° pour $1 \leqq h \leqq p-1$, $D^{n-p+h+1}_{r_0 r_1 \cdots r_h}(\mathfrak{U})$ est une fonction alternée des indices $r_0, r_1, \cdots, r_h$; 3° pour chaque combinaison $r_0, r_1, \cdots, r_h$ $(1 \leqq h \leqq p-1)$, chaque simplexe $\neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$ de la chaîne

$$FD^{n-p+h+1}_{r_0 r_1 \cdots r_h}(\mathfrak{U}) - \sum_{u=0}^{h} (-1)^u D^{n-p+h}_{r_0 \cdots r_{u-1} r_{u+1} \cdots r_h}(\mathfrak{U})$$

est situé dans $R - \prod_{u=0}^{h} W'_{r_u}$.

Démonstration. Soit $C^{n-p}(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} c_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$. D'après 19.1, 1° et 3°

(1) $$\sum_{i=1}^{\alpha_p} \eta_{ji}^p c_i = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq j \leqq \alpha_{p+1}\,[59].$$

Pour $1 \leqq r \leqq m$, soit N_r l'ensemble de toutes les valeurs de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ telles que $b_r \in T_i$ (b_r étant les points du lemme du n° 45.3); les σ_i^0, $i \in N(r)$ sont les sommets d'un $\mathfrak{Z}$-simplexe intérieur que nous désignerons par $\sigma(r)$. Plus généralement, pour chaque combinaison $r_0, r_1, \cdots, r_h$ $(0 \leqq h \leqq p-1)$ soit $\sigma(r_0, r_1, \cdots, r_h)$ la face commune de dimension maxima des $h+1$ $\mathfrak{Z}$-simplexes $\sigma(r_0)$, $\sigma(r_1)$, $\cdots$, $\sigma(r_h)$.

[59] Ces équations ne disent *rien* dans le cas $p = n$.

Ceci étant, posons pour chaque combinaison $r_0, r_1, \cdots, r_h$ $(0 \leqq h \leqq p-1)$

$$D^{n-p+h+1}_{r_0 r_1 \cdots r_h}(\mathfrak{U}) = \sum_i x_i^{r_0 r_1 \cdots r_h} K^{n-p+h+1}(\sigma_i^{p-h-1}, \mathfrak{U}),$$

où la sommation se rapporte à toutes les valeurs de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_{p-h-1})$ telles que σ_i^{p-h-1} soit une face du simplexe $\sigma(r_0, r_1, \cdots, r_h)$ et où les nombres $x_i^{r_0 r_1 \cdots r_h} \in \mathfrak{R}$ sont des fonctions alternées des indices supérieurs.

Or on déduit sans peine du lemme du n° 45.3 que, si le simplexe σ_i^k $(0 \leqq k \leqq n,\ 1 \leqq i \leqq \alpha_k)$ n'est pas une face de $\sigma(r_0, r_1, \cdots, r_h)$, la chaîne $K^{n-k}(\sigma_i^k, \mathfrak{U})$ est située dans $R - \prod_{u=0}^{h} W'_{r_u}$. Il en résulte aisément (v. 19.1, 1° et 3°) qu'il suffit de déterminer les nombres $x_i^{r_0 r_1 \cdots r_h}$ de manière que l'on ait

$$1° \qquad \sum_{i=1}^{\alpha_{p-1}} \eta_{ji}^{p-1} x_i^r = c_j$$

pour $1 \leqq r \leqq m$ et pour toutes les valeurs de j $(1 \leqq j \leqq \alpha_p)$ telles que σ_j^p soit une face de $\sigma(r)$;

$$2° \qquad \sum_{i=1}^{\alpha_{p-h-1}} \eta_{ji}^{p-h-1} x_i^{r_0 r_1 \cdots r_h} = \sum_{u=0}^{h} (-1)^u x_j^{r_0 \cdots r_{u-1} r_{u+1} \cdots r_h}$$

pour chaque combinaison $r_0, r_1, \cdots, r_h$ $(1 \leqq h \leqq p-1)$ d'indices $1, 2, \cdots, m$ et pour toutes les valeurs de j $(1 \leqq j \leqq \alpha_{p-h})$ telles que σ_j^{p-h} soit une face de $\sigma(r_0, r_1, \cdots, r_h)$.

Pour voir que ces conditions sont réalisables, choisissons une combinaison $r_0, r_1, \cdots, r_h$ $(0 \leqq h \leqq p-1)$ et supposons que les indices i, j, k parcourent resp. toutes les valeurs $(1 \leqq i \leqq \alpha_{p-h-1},\ 1 \leqq j \leqq \alpha_{p-h},\ 1 \leqq k \leqq \alpha_{p-h+1})$ telles que $\sigma_i^{p-h-1}, \sigma_j^{p-h}, \sigma_k^{p-h+1}$ soient des faces de $\sigma(r_0, r_1, \cdots, r_h)$. Considérons le système d'équations linéaires pour les inconnues $z_i \in \mathfrak{R}$

$$(*) \qquad \sum_i \eta_{ji}^{p-h-1} z_i = u_j.$$

Pour que ce système possède une solution, il faut et il suffit que les nombres $u_j \in \mathfrak{R}$ satisfassent à $\delta_{p-h} - \varrho_{p-h-1}$ conditions lin. indépendantes, où δ_{p-h} désigne le nombre des $(p-h)$-faces du simplexe $\sigma(r_0, r_1, \cdots, r_h)$ et ϱ_{p-h-1} est le rang de la matrice (η_{ji}^{p-h-1}). Or le $(p-h)^{\text{ème}}$ nombre de Betti du simplexe $\sigma(r_0, r_1, \cdots, r_h)$ étant égal à zéro, on a $\delta_{p-h} - \varrho_{p-h-1} = \varrho_{p-h}$ = rang de la matrice (η_{kj}^{p-h}). D'autre part, on voit sans peine que $(*)$ entraîne $\sum_j \eta_{kj}^p u_j = 0$, car $\sum_j \eta_{kj}^p \eta_{ji}^{p-1} = 0$. Le rang de la matrice (η_{k-j}^{p-h}) étant égal à $\delta_{p-h} - \varrho_{p-h-1}$, on voit que le système

$$(**) \qquad \sum_j \eta_{kj}^p u_j = 0$$

donne la condition nécéssaire et suffisante pour la résolubilité du système (*). En faisant usage de ce critère et en s'appuyant sur les équations (1) on voit sans peine qu'il est possible de construire successivement les nombres $x_i^{r_0 r_1 \cdots r_h}$ [60].

46.1. *Remarque.* On voit sans peine que l'on peut s'arranger de façon qu'on ait $D^{n-p+h+1}_{r_0 r_1 \cdots r_h}(\mathfrak{U}) \neq 0$ seulement si un des indices $r_0, r_1, \cdots, r_h$, soit r, jouit de la propriété que $b_r \in T(\sigma_i^p)$ pour une valeur de i $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ telle que le coefficient c_i de $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ dans la chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ soit $\neq 0$.

47.1. Nous allons démontrer le théorème du n° 44 dans le cas $p = 1$. L'espace R étant normal, il existe deux ensembles ouverts Ω_1 et Ω_2 tels que

$$S_1 \Subset \Omega_2 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega.$$

Soit $\mathfrak{P}$ un réseau gén. tel que 1° chaque sommet de $\mathfrak{P}$ est un sous-ensemble d'un sommet W'_r du réseau $\mathfrak{W}'$ (v. 45.1); 2° pour chaque sommet P de $\mathfrak{P}$ on a $P\Omega_2 = 0$ ou bien $P \subset \Omega_1$. On voit sans peine que $\mathfrak{P}$ existe. Déterminons un affinement $\mathfrak{Q}$ de $\mathfrak{P}$ ainsi qu'une projection $\pi' = Pr.(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P})$ jouissant de la propriété du n° 14.2. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement du réseau $\mathfrak{V}_2$ (v. 45.4) et donc aussi de $\mathfrak{V}_1$ (v. 45.1) tel que 1° $V \in \mathfrak{V}$, $V\overline{S_1} \neq 0$ entraîne $V \subset \Omega_1$; 2° chaque sommet V de $\mathfrak{V}$ tel que $V\overline{S_1} = 0$ est un sous-ensemble d'un sommet de $\mathfrak{Q}$.

Supposons que $\mathfrak{z}$ soit un affinement de $\mathfrak{V}$. La suite $1, 2, \cdots, \beta_0$ des indices ν se divise en deux classes N', N'' d'après la convention suivante: $\nu \in N'$ $(\nu \in N'')$ signifie que $\mathfrak{r}_\nu^0 \subset \Omega_1$ $(\mathfrak{r}_\nu^0 - \Omega_1 \neq 0)$. Soit $\nu \in N''$. Alors il existe un sommet $Q(\mathfrak{r}_\nu^0)$ de $\mathfrak{Q}$ tel que $\mathfrak{r}_\nu^0 \subset Q(\mathfrak{r}_\nu^0)$. Posons $P(\mathfrak{r}_\nu^0) = \pi' Q(\mathfrak{r}_\nu^0)$. Il existe un indice $r(\nu)$ $(1 \leqq r(\nu) \leqq m)$ tel que $P(\mathfrak{r}_\nu^0) \subset W'_{r(\nu)}$. On a $P(\mathfrak{r}_\nu^0) \subset \Omega_1$ ou bien $P(\mathfrak{r}_\nu^0)\,\Omega_2 = 0$.

Pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ commode relativement à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ considérons l'ensemble $M(\mathfrak{U})$ de toutes les $(n-1, \mathfrak{U})$-chaînes $C^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans $\underline{A}$ élémentaires par rapport à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$ et telles que $H^n(\mathfrak{U}) \to C^{n-1}(\mathfrak{U}) \bmod \overline{R - R_0}$ pour une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $H^n(\mathfrak{U}) \subset A$. L'ensemble $M(\mathfrak{U})$ est un module fini; désignons par $s(\mathfrak{U})$ son rang. On a $0 \leqq s(\mathfrak{U}) \leqq n$. Par suite l'ensemble de toutes les valeurs de $s(\mathfrak{U})$ admet un minimum s_0. Lorsque $\mathfrak{U}_1$ est un affinement de $\mathfrak{U}$, on voit sans peine (v. 19.1, 3° et 19.2) que $s(\mathfrak{U}_1) \leqq s(\mathfrak{U})$; par suite l'égalité $s(\mathfrak{U}) = s_0$ entraîne $s(\mathfrak{U}_1) = s_0$.

Désignons par Φ la famille de tous les réseaux commodes (relativement à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$) $\mathfrak{U}$ jouissant des propriétés suivantes: 1° $U \in \mathfrak{U}$, $U\Omega_1 \neq 0$ entraîne $U \subset \Omega$; 2° $U \in \mathfrak{U}$, $U - \Omega_2 \neq 0$ entraîne $U\overline{R - R_0} = 0$ [61]; 3° $U \in \mathfrak{U}$, $U\mathfrak{t}_\nu^0 \neq 0$ $(1 \leqq \nu \leqq \beta_0)$ entraîne $U \subset \mathfrak{r}_\nu^0$; 4° $G^n(\mathfrak{U}) \nrightarrow 0 \bmod [R - Q(\mathfrak{r}_\nu^0)]$ pour $\nu \in N''$

[60] Il faut tenir compte de ce que $\sigma(r_0, r_1, \cdots, r_h)$ est une face de $\sigma(r_1, \cdots, r_h)$.

[61] D'après 8, on a $\overline{R - R_0} \subset \overline{S_1}$, de sorte que Ω_2 est un entourage de $\overline{R - R_0}$.

(v. 17.5); 5° $s(\mathfrak{U}) = s_0$. On voit sans peine que $\mathfrak{U} \in \Phi$ entraîne que $\mathfrak{U}_1 \in \Phi$ pour chaque affinement commode $\mathfrak{U}_1$ de $\mathfrak{U}$.

47.2. Pour démontrer le théorème du n° 44 dans le cas actuel $p = 1$, supposons que $C^{n-1}(\mathfrak{U}) \in M(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{U}$ étant un réseau de la famille Φ. Soit $H^n(\mathfrak{U})$ une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne dans A telle que $H^n(\mathfrak{U}) \rightarrow C^{n-1}(\mathfrak{U}) \bmod \overline{R - R_0}$. On doit démontrer qu'il existe une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $E^n(\mathfrak{U})$ dans B élémentaire relativement à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ et telle que $E^n(\mathfrak{U}) \rightarrow C^{n-1}(\mathfrak{U}) \bmod \bar{\Omega}$. Il suffit donc de prouver qu'il existe une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $E^n(\mathfrak{U})$ élémentaire relativement à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ et telle que $H^n(\mathfrak{U}) = E^n(\mathfrak{U}) \bmod \bar{\Omega}$.

D'après 8.33, chaque simplexe φ^n de $H^n(\mathfrak{U})$ est (relativement à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$) d'espèce τ^{-1} ou d'espèce τ^0_ν, où $1 \leq \nu \leq \beta_0$. Si φ^n est d'espèce τ^{-1}, on a (v. 8.32) $\varphi^n = 0 \bmod \overline{R - R'_0} \subset \overline{R - R_0} \subset \bar{\Omega}$. Si φ^n est d'espèce τ^0_ν, où $\nu \in N'$, on a $\tau^0_\nu \subset \Omega_1$; or chaque sommet U de φ^n rencontre τ^0_ν, de manière que $U \subset \Omega$ d'après la propriété 1° de la famille Φ; donc, ici encore, on a $\varphi^n = 0 \bmod \bar{\Omega}$.

Considérons le cas où le simplexe φ^n de $H^n(\mathfrak{U})$ est d'espèce τ^0_ν, où $\nu \in N''$. On a $\tau^0_\nu \subset Q(\tau^0_\nu) \subset P(\tau^0_\nu) \subset W'_{r(\nu)}$. Lorsque $P(\tau^0_\nu) \subset \Omega$, on a de nouveau $\varphi^n = 0 \bmod \bar{\Omega}$; supposons donc que $P(\tau^0_\nu) - \Omega_1 \neq 0$ ce qui entraîne que $P(\tau^0_\nu)\, \Omega_2 = 0$.

Il suffit donc de démontrer l'énoncé suivant: Soit $\nu \in N''$, $P(\tau^0_\nu)\, \Omega_2 = 0$. Soit $E^n_\nu(\mathfrak{U})$ cette partie de la chaîne $H^n(\mathfrak{U})$ dont les simplexes sont d'espèce τ^0_ν. Il existe un nombre $c \in \mathfrak{R}$ tel que $E^n_\nu(\mathfrak{U}) = c k^n(\tau^0_\nu, \mathfrak{U})$.

Soit $\mathfrak{U}_1 \in \Phi$ un affinement de $\mathfrak{U}$ normal par rapport aux cycles mod $R - P(\tau^0_\nu)$, pour chaque $\nu \in N''$. Comme $s(\mathfrak{U}) = s_0$, on voit sans peine qu'il existe une $(n-1, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $C^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \in M(\mathfrak{U}_1)$ telle que $C^{n-1}(\mathfrak{U}) = \pi C^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \bmod \overline{R - R_0}$, $\pi = Pr.\ (\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U})$. Il existe une $(n, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $H^n(\mathfrak{U}_1)$ dans A telle que $H^n(\mathfrak{U}_1) \rightarrow C^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \bmod \overline{R - R_0}$. On peut donc supposer que $H^n(\mathfrak{U}) = \pi H^n(\mathfrak{U}_1)$.

Ceci étant, d'après le lemme du n° 46, il existe une $(n, \mathfrak{U}_1)$-chaîne $D^n(\mathfrak{U}_1)$ élémentaire [relativement à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$ et par suite aussi relativement à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$, v. 24 (3)] telle que $C^{n-1}(\mathfrak{U}_1) - FD^n(\mathfrak{U}_1) \subset \overline{R - R_0} + [R - W'_{r(\nu)}]$. Comme $P(\tau^0_\nu) \subset W'_{r(\nu)}$, on a $P(\tau^0_\nu)[R - W'_{r(\nu)}] = 0$. Comme $P(\tau^0_\nu)\, \Omega_2 = 0$, $\Omega_2 \supset S_1 \supset \overline{R - R_0}$, on a $\overline{R - R_0} \subset R - P(\tau^0_\nu)$. Par suite $C^{n-1}(\mathfrak{U}_1) - FD^n(\mathfrak{U}_1) \subset R - P(\tau^0_\nu)$. D'autre part $H^n(\mathfrak{U}_1) \rightarrow C^{n-1}(\mathfrak{U}) \bmod \overline{R - R_0} \subset R - P(\tau^0_\nu)$. Par suite $H^n(\mathfrak{U}_1) - D^n(\mathfrak{U}_1)$ est un $(n, \mathfrak{U}_1)$-cycle mod $R - P(\tau^0_\nu)$. Or soit (v. 19.2) $D^n(\mathfrak{U})$ une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne élémentaire telle que $D^n(\mathfrak{U}) = \pi D^n(\mathfrak{U}_1) \bmod \overline{R - R_0}$. Evidemment $H^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U})$ est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle essentiel mod $[R - P(\tau^0_\nu)]$. D'après 14.2, il existe deux nombres c_1, $c_2 \in \mathfrak{R}$ dont un au moins $\neq 0$, tels que $c_1 [H^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U})] + c_2 G^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod [R - Q(\tau^0_\nu)]$. On a $c_1 \neq 0$ d'après la propriété 4° de la famille Φ. Donc il existe un nombre $c_0 \in \mathfrak{R}$ tel que

$H^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U}) - c_0 G^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod [R - Q(\tau_\nu^0)]$. Il existe donc une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $X^n(\mathfrak{U}) \subset R - Q(\tau_\nu^0)$ et une $(n+1, \mathfrak{U})$-chaîne $Y^{n+1}(\mathfrak{U})$ telles que

$$(*) \qquad H^n(\mathfrak{U}) = D^n(\mathfrak{U}) + c_0 G^n(\mathfrak{U}) + X^n(\mathfrak{U}) + F Y^{n+1}(\mathfrak{U}).$$

Or soit φ^n un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe d'espèce τ_ν^0 et soit U un sommet de φ^n. On a $Ut_\nu \neq 0$, d'où $U \subset \tau_\nu^0$ d'après la propriété 3° de la famille Φ. Puisque $\tau_\nu^0 \subset Q(\tau_\nu^0)$, la chaîne $X^n(\mathfrak{U})$ ne contient aucun simplexe d'espèce τ_ν^0. Puisque $U \subset \tau_\nu^0 \subset Q(\tau_\nu^0) \subset P(\tau_\nu^0) \subset R - \Omega_2$, U ne peut rencontrer aucun sommet U' de $\mathfrak{U}$ tel que $U'S \neq 0$ (v. 8.1, 2°). D'après 8.1, 3° il en résulte qu'aucun simplexe de la chaîne $FY^{n+1}(\mathfrak{U})$ n'est d'espèce τ_ν^0. L'inclusion $U \subset R - \Omega_2$ montre encore que $\varphi^n \neq 0 \bmod \overline{R - R_0}$. De $(*)$ il résulte maintenant que $E_\nu^n(\mathfrak{U})$ est cette partie de la chaîne $D^n(\mathfrak{U}) + c_0 G^n(\mathfrak{U})$ dont les simplexes sont d'espèce ν. Donc [v. 19.1, 2°, 3° et 4° ainsi que 24, (3)] il existe un nombre $c \in \mathfrak{R}$ tel que $E_\nu^n(\mathfrak{U}) = ck^n(\tau_\nu^0, \mathfrak{U})$.

48. Le théorème du n° 44 étant démontré pour $p = 1$, supposons dorénavant que $2 \leqq p \leqq n$.

49.1. L'espace R étant normal, il existe un ensemble ouvert Ω_1 tel que $S_1 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$. Soit $\mathfrak{P}_1^{p-1}$ un réseau gén. jouissant des propriétés suivantes: 1° $P \in \mathfrak{P}_1^{p-1}$, $P\overline{B}_1 \neq 0$ entraîne $P \subset B$ [v. 45.31 (1)]; 2° a étant un point quelconque de $R - S$, il existe un sommet du réseau $\mathfrak{W}'$ du n° 45.1 contenant la fermeture de tous les sommets de $\mathfrak{P}_1^{p-1}$ qui passent par a (v. 4.3 et 4.4); 3° la fermeture d'aucun sommet de $\mathfrak{P}_1^{p-1}$ ne rencontre simultanément $\overline{S_1}$ et $R - \Omega_1$.

49.2. En partant du réseau gén. $\mathfrak{P}_1^{p-1}$, construisons les réseaux gén. $\mathfrak{Q}^h$, $\mathfrak{P}^h$, $\mathfrak{P}_1^h$, $\mathfrak{P}_2^h$, $\mathfrak{P}_3^h$, $\mathfrak{P}_4^h$ $(0 \leqq h \leqq p-2)$ ainsi que $\mathfrak{P}_2^{p-1}$, $\mathfrak{P}_3^{p-1}$, $\mathfrak{P}_4^{p-1}$, $\mathfrak{P}_5^{p-1}$ selon la manière expliquée dans le n° 29, en y remplaçant p par $p-1$.

50.1. Supposons que $\mathfrak{z}$ soit un affinement du réseau $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_2$ du n° 45.4 (et donc aussi du réseau $\mathfrak{B}_1$ du n° 45.1) et que $\mathfrak{z}$ soit un affinement mod S de $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_5^{p-1}$.

Pour $0 \leqq h \leqq p-2$, $1 \leqq \nu \leqq \beta_h$ attachons à τ_ν^h des sommets $P_4^h(\tau_\nu^h)$, $P_3^h(\tau_\nu^h)$, $P_2^h(\tau_\nu^h)$, $P_1^h(\tau_\nu^h)$, $P^h(\tau_\nu^h)$, $Q^h(\tau_\nu^h)$ resp. de $\mathfrak{P}_4^h$, $\mathfrak{P}_3^h$, $\mathfrak{P}_2^h$, $\mathfrak{P}_1^h$, $\mathfrak{P}^h$, $\mathfrak{Q}^h$; pour $1 \leqq \nu \leqq \beta_{p-1}$ attachons à τ_ν^{p-1} des sommets $P_3^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})$, $P_2^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})$, $P_1^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})$ resp. de $\mathfrak{P}_3^{p-1}$, $\mathfrak{P}_2^{p-1}$, $\mathfrak{P}_1^{p-1}$. Ceci soit fait selon la manière expliquée au n° 30, en y remplaçant p, $\mathfrak{Z}$, σ_i^h resp. par $p-1$, $\mathfrak{z}$, τ_ν^h.

50.2. Les réseaux gén. $\mathfrak{P}_1^h$ $(0 \leqq h \leqq p-1)$ étant des affinements de $\mathfrak{P}_1^{p-1}$, il résulte de 49.1, 2° qu'on peut attacher à chaque ν $(1 \leqq \nu \leqq \beta_0)$ un sommet $W'_{r(\nu)}$ du réseau $\mathfrak{W}'$ de manière que $\overline{P_1^h(\tau_\lambda^h)} \subset W'_{r(\nu)}$ pour $0 \leqq h \leqq p-1$ et pour chaque valeur de λ $(1 \leqq \lambda \leqq \beta_h)$ telle que τ_ν^0 soit un sommet de τ_λ^h.

50.3. Les réseaux gén. $\mathfrak{P}_1^h$ $(0 \leq h \leq p-1)$ étant des affinements de $\mathfrak{P}_1^{p-1}$, on ne peut pas (v. 49, 3°) avoir simultanément $\overline{P_1^h(\tau_\nu^h)} - \Omega_1 \neq 0$, $\overline{P_1^h(\tau_\nu^h)} \cdot \overline{R - R_0} \neq 0$ $(0 \leq h \leq p-1,\ 1 \leq \nu \leq \beta_h)$.

51. Désignons par Φ la famille de tous les réseaux $\mathfrak{U}$ commodes (relativement à $\mathfrak{z}+\mathfrak{t}$) tels que : 1° pour $0 \leq h \leq p-2$, $1 \leq \nu \leq \beta_h$, $U \in \mathfrak{U}$, la relation $U\overline{P_4^h(\tau_\nu^h)} \neq 0$ entraîne $U \subset P_3^h(\tau_\nu^h)$; 2° pour $0 \leq h \leq p-2$, $1 \leq \nu \leq \beta_h$, $U \in \mathfrak{U}$, la relation $U\overline{P_2^h(\tau_\nu^0)} \neq 0$ entraîne $U \subset P_1^h(\tau_\nu^0)$; 3° pour $1 \leq \nu \leq \beta_{p-1}$, $U \in \mathfrak{U}$, la relation $U\overline{P_3^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})} \neq 0$ entraîne $U \subset P_2^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})$; 4° pour $1 \leq \nu \leq \beta_0$, $U \in \mathfrak{U}$, les relations $UA \neq 0$, $U\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} \neq 0$ entraînent $A\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} \neq 0$; 5° pour $1 \leq \nu \leq \beta_{p-1}$, on a $G^n(\mathfrak{U}) \nsim 0 \mod [R - P_3^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})]$; 6° pour $0 \leq h \leq p-2$, $0 \leq k \leq p-2$, $1 \leq \nu \leq \beta_h$, $1 \leq \mu \leq \beta_k$, les indices ν et μ étant tels que les noyaux de τ_ν^h et de τ_μ^h aient un point commun, la relation $Ut(\tau_\mu^k) \neq 0$ (où $U \in \mathfrak{U}$) entraîne $U \subset P_4^h(\tau_\nu^h)$; 7° pour $1 \leq \lambda \leq \beta_0$, $1 \leq \nu \leq \beta_{p-1}$, les indices λ et ν étant tels que τ_λ^0 est un sommet de τ_ν^{p-1}, la relation $Ut_\lambda \neq 0$ (où $U \in \mathfrak{U}$) entraîne $U \in P_3^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})$; 8° pour $U \in \mathfrak{U}$, la relation $US \neq 0$ entraîne $U\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} = 0$ pour $1 \leq \nu \leq \beta_0$; 9° pour U', $U'' \in \mathfrak{U}$, les relations $U'S \neq 0$, $U''R_0' \neq 0$ entraînent $U'U'' = 0$; 10° on a $s(\mathfrak{U}) =$ minimum, $s(\mathfrak{U})$ désignant le rang du module $M(\mathfrak{U})$ de toutes les $(n-p, \mathfrak{U})$-chaînes $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ dans A élémentaires (v. 19.1) par rapport à $\mathfrak{Z}+\mathfrak{T}$ et telles qu'il existe une $(n-p+1, \mathfrak{U})$-chaîne $H^{n-p+1}(\mathfrak{U})$ dans A telle que $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}) \to C^{n-p}(\mathfrak{U}) \mod \overline{R - R_0}$; 11° pour $0 \leq h \leq p-1$, $1 \leq \nu \leq \beta_h'$, $U \in \mathfrak{U}$ la relation $U\overline{P_1^h(\tau_\nu^h)} \neq 0$ entraîne $U \subset W'_{r(\lambda)}$ pour chaque sommet τ_λ^0 de τ_ν^h ; 12° $U \in \mathfrak{U}$, $U\Omega_1 \neq 0$ entraîne $U \subset \Omega$.

On voit sans peine (v. 32 et 47.1) que la famille Φ est parfaitement complète.

Nous démontrerons que l'énoncé du n° 44 est vrai pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$.

52.1. Choisissons un réseau $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0 \in \Phi$ et déterminons les affinements successifs $\mathfrak{U}_h \in \Phi$ $(1 \leq h \leq 2p-1)$ selon la manière expliquée au n° 33, en y remplaçant p, $\mathfrak{Z}$, σ_i^h resp. par $p-1$, $\mathfrak{z}$, τ_ν^h. Soit $\pi_h = Pr.\,(\mathfrak{U}_{h+1}, \mathfrak{U}_h)$ $(0 \leq h \leq 2p-2)$.

52.2. Supposons donnée une chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U}_0) \in M(\mathfrak{U}_0)$ (v. 51, 10°). On doit démontrer (v. 44) qu'il existe une $(n-p+1)$-chaîne $E^{n-p+1}(\mathfrak{U}_0)$ dans $\overline{B}$ élémentaire par rapport à $\mathfrak{z}+\mathfrak{t}$ et telle que $E^{n-p+1}(\mathfrak{U}_0) \to C^{n-p}(\mathfrak{U}_0) \mod \overline{\Omega}$. Comme $s(\mathfrak{U}_0) =$ minimum, il existe pour $1 \leq h \leq 2p-1$ une chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U}_h) \in M(\mathfrak{U}_h)$ telle que $\pi_h C^{n-p}(\mathfrak{U}_{h+1}) = C^{n-p}(\mathfrak{U}_h) \mod \overline{R - R_0}$ pour $0 \leq h \leq 2p-2$. Puisque $C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1}) \in M(\mathfrak{U}_{2p-1})$, il existe une $(n-p+1, \mathfrak{U}_{2p-1})$-chaîne $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1})$ dans A telle que $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) \to C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1}) \mod \overline{R - R_0}$. Convenons généralement, si on a déterminé (pour $0 \leq h \leq 2p-2$) une certaine $\mathfrak{U}_{h+1}$-chaîne $D(\mathfrak{U}_{h+1})$, de désigner par $D(\mathfrak{U}_h)$ la chaîne $\pi_h D(\mathfrak{U}_{h+1})$. Alors, pour $0 \leq h \leq 2p-1$, $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_h)$ est une $(n-p+1, \mathfrak{U}_h)$-chaîne dans A telle que $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_h) \to C^{n-p}(\mathfrak{U}_h) \mod \overline{R - R_0}$.

53.1. Rangeons les sommets intérieurs de $\mathfrak{z}$ dans la suite $\tau_1^0, \tau_2^0, \cdots, \tau_{\beta_0}^0$ de telle façon qu'il existe un entier β_0' $(0 \leqq \beta_0' \leqq \beta_0)$ tel que
$\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} - \Omega_1 \neq 0$ pour $1 \leqq \nu \leqq \beta_0'$; $\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} \subset \Omega_1$ pour $\beta_0'+1 \leqq \nu \leqq \beta_0$. Pour $1 \leqq h \leqq n$, rangeons les h-simplexes intérieurs de $\mathfrak{z}$ dans la suite $\tau_1^h, \tau_2^h, \cdots, \tau_{\beta_h}^h$ de telle façon qu'il existe un entier β_h' $(0 \leqq \beta_h' \leqq \beta_h)$ tel que 1° pour $1 \leqq \nu \leqq \beta_h'$, on a $\lambda \leqq \beta_0'$ pour chaque sommet τ_λ^0 de τ_ν^h; 2° pour $\beta_h'+1 \leqq \nu \leqq \beta_h$, le simplexe τ_ν^h possède un sommet τ_λ^0 tel que $\beta_0' < \lambda$. Si $0 \leqq h \leqq p-1$, $1 \leqq \nu \leqq \beta_h'$, on a $\overline{P_1^h(\tau_\nu^h)} - \Omega_1 \neq 0$; en effet, d'après 51 (v. 30) on a $P_1^0(\tau_\lambda^0) \subset P_1^h(\tau_\nu^h)$ pour chaque sommet τ_λ^0 de τ_ν^h.

53.2. Lemme. On peut attacher à chaque couple d'indices h, ν, où $0 \leqq h \leqq p-2$, $1 \leqq \nu \leqq \beta_h'$, une $(n-p+h+2)$-chaîne $L^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_1)$ dans $\overline{B}$ de manière que: 1° pour $1 \leqq \nu \leqq \beta_0'$ il existe une $(n-p+1, \mathfrak{U}_1)$-chaîne élémentaire (rel. à $\mathfrak{z}+\mathfrak{t}$) $E_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1)$ telle que la chaîne

$$FL^{n-p+2}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_1) - H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1) + E_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1)$$

ne contient pas des simplexes situés dans $\overline{P_4^0(\tau_\nu^0)}$; 2° pour $0 \leqq h \leqq p-3$, $1 \leqq \nu \leqq \beta_{h+1}'$, il existe une $(n-p+h+2, \mathfrak{U}_1)$-chaîne élémentaire (rel. à $\mathfrak{z}+\mathfrak{t}$) $E_\nu^{n-p+h+2}(\mathfrak{U}_1)$ telle que la chaîne

$$FL^{n-p+h+3}(\tau_\nu^{h+1}, \mathfrak{U}_1) - \sum_{\mu=1}^{\beta_h} \zeta_{\nu\mu}^h L^{n-p+h+2}(\tau_\mu^h, \mathfrak{U}_1) + E_\nu^{n-p+h+2}(\mathfrak{U}_1)$$

ne contient pas des simplexes situés dans $\overline{P_4^{h+1}(\tau_\nu^{h+1})}$; 3° pour $1 \leqq \nu \leqq \beta_{p-1}'$ il existe une $(n, \mathfrak{U}_1)$-chaîne élémentaire (rel. à $\mathfrak{z}+\mathfrak{t}$) $E_\nu^n(\mathfrak{U}_1)$ telle que la chaîne

$$\sum_{\mu=1}^{\beta_{p-2}} \zeta_{\nu\mu}^{p-2} L^n(\tau_\mu^{p-2}, \mathfrak{U}_1) + E_\nu^n(\mathfrak{U}_1)$$

soit un (n, R)-cycle mod $R - P_2^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})$.

La démonstration sera donnée dans les nos 53.21—53.25.

53.21. D'après le lemme du n° 46 [v. aussi 24(3)], on peut attacher à chaque combinaison $r_0, r_1, \cdots, r_h$ $(0 \leqq h \leqq p-1)$ d'indices $1, 2, \cdots, m$ une chaîne $\Delta_{r_0 r_1 \cdots r_h}^{n-p+h+1}(\mathfrak{U}_{2p-1})$, fonction alternée de $r_0, r_1, \cdots, r_h$, de manière que: 1°

$$FA_r^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) - C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1}) \subset \overline{R - R_0} + R - W_r' \tag{1}$$

pour $1 \leqq r \leqq m$; 2°

$$F\Delta_{r_0 r_1 \cdots r_h}^{n-p+h+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) - \sum_{u=0}^{h} (-1)^u \Delta_{r_0 \cdots r_{u-1} r_{u+1} \cdots r_h}^{n-p+h}(\mathfrak{U}_{2p-1}) \subset \overline{R - R_0} + R - \prod_{u=0}^{h} W_{r_u}' \tag{2}$$

pour chaque combinaison $r_0, r_1, \cdots, r_h$ $(1 \leqq h \leqq p-1)$ de $1, 2, \cdots, m$.

Ceci étant, soit $0 \leq h \leq p-1$, $1 \leq \nu \leq \beta'_h$ et soient $\imath^0_{\lambda_0}, \imath^0_{\lambda_1}, \cdots, \imath^0_{\lambda_h}$ tous les sommets de $\imath^h_\nu$ écrits dans un tel ordre que

$$\imath^h_\nu = + (\imath^0_{\lambda_0}, \imath^0_{\lambda_1}, \cdots, \imath^0_{\lambda_h}).$$

Distinguons deux cas. En premier lieu, supposons que les indices $r(\lambda_0)$, $r(\lambda_1), \cdots, r(\lambda_h)$ ne soient pas tous distincts; on pose dans ce cas $E^{n-p+h+1}_\nu (\mathfrak{U}_{2p-1}) = 0$. En second lieu, les indices $r(\lambda_0), r(\lambda_1), \cdots, r(\lambda_h)$ soient distincts l'un de l'autre; on pose dans ce cas $E^{n-p+h+1}_\nu(\mathfrak{U}_{2p-1}) = \Delta^{n-p+h+1}_{r(\nu_0), r(\nu_1), \cdots, r(\nu_h)}(\mathfrak{U}_{2p-1})$.

Or je dis que: 1° pour $1 \leq \nu \leq \beta'_0$

$$FE^{n-p+1}_\nu(\mathfrak{U}_{2p-1}) - C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1}) \subset R - P^0_1(\imath^0_\nu); \tag{3}$$

2° pour $1 \leq h \leq p-1$, $1 \leq \nu \leq \beta'_h$

$$FE^{n-p+h+1}_\nu(\mathfrak{U}_{2p-1}) - \sum_{\mu=1}^{\beta'_{h-1}} \zeta^{h-1}_{\nu\mu} E^{n-p+h}_\mu(\mathfrak{U}_{2p-1}) \subset R - P^h_1(\imath^h_\nu). \tag{4}$$

Supposons, par impossible, qu'il existe un couple h, ν $(0 \leq h \leq p-1$, $1 \leq \nu \leq \beta'_h)$ tel que la relation (3) ou (4) correspondante ne soit pas vraie. La chaîne considérée contient alors un simplexe $\varphi^{n-p+h+1}$ qui n'est pas contenu dans $R - P^h_1(\imath^h_\nu)$, de manière que $\mathfrak{J} \subset P^h_1(\imath^h_\nu)$, $\mathfrak{J}$ étant le noyau de $\varphi^{n-p+h+1}$. Le simplexe $\imath^h_\nu$ tombe nécessairement sous le second des deux cas distingués plus haut, car on voit sans peine qu'autrement la chaîne considérée serait égale à zéro. D'après (1) et (2), on a donc

$$\mathfrak{J}\,\overline{R - R_0} + \left[\mathfrak{J} - \prod_{u=0}^{h} W'_{r(\lambda_u)}\right] \neq 0.$$

Mais la supposition $1 \leq \nu \leq \beta'_h$ donne (v. 53.1) $\overline{P^h_1(\imath^h_\nu)} - \Omega_1 \neq 0$, d'où (v. 50.3) $\overline{P^h_1(\imath^h_\nu)} \cdot \overline{R - R_0} = 0$ et donc $\mathfrak{J}\,\overline{R - R_0} = 0$; d'autre part, puisque $\mathfrak{J} \subset \overline{P^h_1(\imath^h_\nu)}$, on a $\mathfrak{J} \subset \prod_{u=0}^{h} W'_{r(\lambda_u)}$ d'après 51, 11°. Incidemment, nous avons remarqué que

$$\overline{P^h_1(\imath^h_\nu)} \cdot \overline{R - R_0} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq h \leq p-1,\ 1 \leq \nu \leq \beta'_h. \tag{5}$$

D'après 19.1, 3° il existe des chaînes élémentaires rel. à $\mathfrak{z}+\mathfrak{t}$: $E^{n-p+h+1}_\nu(\mathfrak{U}_k)$ $(0 \leq h \leq p-1$, $0 \leq k \leq 2p-2$, $1 \leq \nu \leq \beta'_h)$ telles que $\pi_h E^{n-p+h+1}_\nu(\mathfrak{U}_{k+1}) = E^{n-p+h+1}_\nu(\mathfrak{U}_k)$ pour $0 \leq k \leq 2p-2$. Les relations (3) et (4) restent naturellement vraies si on y remplace $\mathfrak{U}_{2p-1}$ par $\mathfrak{U}_k$ $(0 \leq k \leq 2p-2)$.

53.211. Il résulte de la remarque du n° 46.1 qu'on peut s'arranger de façon qu'on ait $E^{n-p+h+1}_\nu(\mathfrak{U}_{2p-1}) \neq 0$ seulement s'il existe un sommet $\imath^0_\lambda$ de $\imath^h_\nu$ tel que $b_{r(\lambda)} \in t(\imath^p_\mu)$, l'indice μ $(1 \leq \mu \leq \beta_p)$ étant tel que le coefficient de

$k^{n-p}(\tau^p_\mu, \mathfrak{U}_{2p-1})$ dans la chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1})$ soit $\neq 0$ [v. 40 (3)]. On a alors la propriété suivante: $E^{n-p+h+1}_\nu(\mathfrak{U}_{2p-1}) \neq 0$ $(0 \leqq h \leqq p-1,\ 1 \leqq \nu \leqq \beta'_h)$ entraîne que $\overline{P^h_1(\tau^h_\nu)} \subset B_1$.

Démonstration. Soit τ^0_λ le sommet de τ^h_ν tel que $b_{r(\lambda)} \in t(\tau^p_\mu)$ et soit τ^0_ϱ un sommet arbitraire de τ^p_μ de manière que $b_{r(\lambda)} \in P^0_1(\tau^0_\varrho)$. Soit U un sommet d'un simplexe de la chaîne $k^{n-p}(\tau^p_\mu, \mathfrak{U}_{2p-1})$. La chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ étant située dans A, on a $UA \neq 0$; d'autre part $UP^0_1(\tau^0_\varrho) \neq 0$ d'après 19.3. Comme $\mathfrak{U}_{2p-1} \in \Phi$, il en résulte (v. 51, 4°) que $A\overline{P^0_1(\tau^0_\varrho)} \neq 0$. Le réseau gén. $\mathfrak{P}^0_1$ étant un affinement de $\mathfrak{P}^{p-1}_1$, on déduit de 49.1, 2° qu'il existe un indice s tel que $\overline{P^0_1(\tau^0_\varrho)} \subset W'_s$. Comme $b_{r(\lambda)} \in P^0_1(\tau^0_\varrho)$, $A\overline{P^0_1(\tau^0_\varrho)} \neq 0$, on a $W'_{r(\lambda)} \cdot W'_s \neq 0$, $AW'_s \neq 0$, d'où $W'_{r(\lambda)} \subset B_1$ d'après 45.31. Or on a $\overline{P^h_1(\tau^h_\nu)} \subset W'_{r(\lambda)}$ d'après 50.2.

53.22. (Cf. 34.1). Soit $1 \leqq \nu \leqq \beta'_0$. Comme

$$H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) \to C^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1}) \mod \overline{R - R_0},$$

on déduit de (3) et (5) que

$$F[H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) - E^{n-p+1}_\nu(\mathfrak{U}_{2p-1})] \subset R - P^0_1(\tau^0_\nu). \tag{6}$$

Désignons par $H^{n-p+1}(\tau^0_\nu, \mathfrak{U}_{2p-1})$ cette partie de la chaîne $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) - E^{n-p+1}_\nu(\mathfrak{U}_{2p-1})$ dont les simplexes sont situés dans $\overline{P^0_1(\tau^0_\nu)}$ et soit

$$\Gamma^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1}) = FH^{n-p+1}(\tau^0_\nu, \mathfrak{U}_{2p-1}). \tag{7}$$

Soit φ^{n-p} un simplexe de la chaîne $\Gamma^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1})$. Evidemment φ^{n-p} est situé dans $\overline{P^0_1(\tau^0_\nu)}$. Plus précisément on peut prouver que φ^{n-p} est situé dans $\overline{P^0_1(\tau^0_\nu)} - P^0_2(\tau^0_\nu)$. A cet effet, il suffit de démontrer qu'aucun sommet U de φ^{n-p} ne peut rencontrer $P^0_2(\tau^0_\nu)$. Supposons le contraire. D'après 51, 2° on a alors $U \subset P^0_1(\tau^0_\nu)$. Il résulte donc de (6) que U est un sommet de

$$H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) - E^{n-p+1}_\nu(\mathfrak{U}_{2p-1}) - H^{n-p+1}(\tau^0_\nu, U_{2p-1}), \tag{*}$$

ce qui est une contradiction, car $U \subset \overline{P^0_1(\tau^0_\nu)}$, tandis qu'aucun simplexe de la chaîne (*) n'est situé dans $\overline{P^0_1(\tau^0_\nu)}$. Il est ainsi démontré que $\Gamma^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-1})$ est un $(n-p, \mathfrak{U}_{2p-1})$-cycle dans $\overline{P^0_1(\tau^0_\nu)} - P^0_2(\tau^0_\nu)$. Donc $\Gamma^{n-p}(\mathfrak{U}_{2p-2})$ est un $(n-p, \mathfrak{U}_{2p-2})$-cycle essentiel dans $\overline{P^0_1(\tau^0_\nu)} - P^0_2(\tau^0_\nu)$. Par suite, il existe une $(n-p+1, \mathfrak{U}_{2p-2})$-chaîne

$$D^{n-p+1}_\nu(\mathfrak{U}_{2p-2}) \subset \overline{P^0(\tau^0_\nu)} - P^0_3(\tau^0_\nu) \tag{8}$$

telle que

$$H^{n-p+1}(\tau^0_\nu, \mathfrak{U}_{2p-2}) - D^{n-p+1}_\nu(\mathfrak{U}_{2p-2}) \tag{9}$$

est un $(n-p+1, \mathfrak{U}_{2p-2})$-cycle, situé nécessairement dans $\overline{P^0(\tau^0_\nu)}$. Donc

$$H^{n-p+1}(\tau^0_\nu, \mathfrak{U}_{2p-3}) - D^{n-p+1}_\nu(\mathfrak{U}_{2p-3})$$

est un $(n-p+1, \mathfrak{U}_{2p-3})$-cycle essentiel dans $\overline{P^0(\tau_\nu^0)}$, de manière qu'il existe une $(n-p+2, \mathfrak{U}_{2p-3})$-chaîne $L^{n-p+2}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-3})$ dans $\overline{Q^0(\tau_\nu^0)}$ telle que

$$L^{n-p+2}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-3}) \to H^{n-p+1}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-3}) - D_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-3}).$$

D'après (9) on a pour $0 \leqq k \leqq 2p-3$ (v. la fin du n° 53.21)

$$\begin{aligned} FL^{n-p+2}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_k) - H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_k) + E_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_k) \\ = [H^{n-p+1}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_k) + E_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_k) - H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_k)] - D_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_k). \end{aligned} \tag{10}$$

Chaque simplexe φ^{n-p+1} de la chaîne $[\cdots]$ à droite de (10) est (v. 19.1, 1°) la projection d'un $\mathfrak{U}_{2p-1}$-simplexe ψ^{n-p+1} et, en vertu de la définition de la chaîne $H^{n-p+1}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-1})$, le simplexe ψ^{n-p+1} n'est pas situé dans $\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)}$. Par suite le noyau de ψ^{n-p+1} est un sous-ensemble de $R-P_1^0(\tau_\nu^0)$; donc le noyau de φ^{n-p+1} rencontre $R-P_1^0(\tau_\nu^0)$; il en résulte qu'aucun sommet U de φ^{n-p+1} n'est un sous-ensemble de $P_1^0(\tau_\nu^0)$, d'où (v. 51, 2°) $U\overline{P_2^0(\tau_\nu^0)} = 0$ pour chaque sommet U de φ^{n-p+1}. Donc φ^{n-p+1} n'est pas situé dans $\overline{P_2^0(\tau_\nu^0)} \supset \overline{P_4^0(\tau_\nu^0)}$. D'après (8), chaque sommet U de $D_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_k)$ rencontre $R-P_3^0(\tau_\nu^0)$, d'où $U\overline{P_4^0(\tau_\nu^0)} = 0$ d'après 51, 1°. Il est ainsi démontré qu'aucun simplexe de la chaîne (10) n'est situé dans $\overline{P_4^0(\tau_\nu^0)}$, ce qui est d'accord avec 53.2, 1°.

53.23. (Cf. 34.2.) Supposons généralement que, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq p-3)$ on ait déjà attaché à chaque τ_ν^h $(1 \leqq \nu \leqq \beta_h')$ une $(n-p+h+2, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$-chaîne $L^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$ dans $\overline{Q^h(\tau_\nu^h)}$ de manière que pour $1 \leqq \nu \leqq \beta_h'$ aucun simplexe de la chaîne[62]

$$FL^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_k) - \sum_{\mu=1}^{\beta_{h-1}'} \zeta_{\nu\mu}^{h-1} L^{n-p+h+1}(\tau_\mu^{h-1}, \mathfrak{U}_k) + E_\nu^{n-p+h+1}(\mathfrak{U}_k) \tag{11}$$
$$(0 \leqq k \leqq 2p-2h-3)$$

ne soit situé dans $\overline{P_4^h(\tau_\nu^h)}$. Il s'agit d'attacher à chaque τ_ν^{h+1} $(1 \leqq \nu \leqq \beta_{h+1}')$ une $(n-p+h+3, \mathfrak{U}_{2p-2h-5})$-chaîne $L^{n-p+h+3}(\tau_\nu^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-5})$ dans $\overline{Q^{h+1}(\tau_\nu^{h+1})}$ de manière qu'aucun simplexe de la chaîne

$$FL^{n-p+h+3}(\tau_\nu^{h+1}, \mathfrak{U}_k) - \sum_{\mu=1}^{\beta_h'} \zeta_{\nu\mu}^h L^{n-p+h+2}(\tau_\mu^h, \mathfrak{U}_k) + E_\nu^{n-p+h+2}(\mathfrak{U}_k)$$
$$(0 \leqq k \leqq 2p-2h-5)$$

ne soit situé dans $\overline{P_4^{h+1}(\tau_\nu^{h+1})}$. On arrive à ce but par un procédé presque identique à celui du n° 34.2 de manière qu'il ne semble pas nécessaire de répéter ici cette construction. Au lieu de $M^{n-p+h+1}(\sigma_i^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-1})$, p. ex., on doit maintenant poser

[62] Pour $h=0$ on doit remplacer (11) par le premier membre de (10).

$$M^{n-p+h+2}(\tau_\nu^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$$
$$= \sum_{\mu=1}^{\beta'_h} \zeta_{\nu\mu}^h L^{n-p+h+2}(\tau_\mu^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-3}) + E_\nu^{n-p+h+2}(\mathfrak{U}_{2p-2h-3}).$$

Pour démontrer qu'aucun simplexe de la chaîne $FM^{n-p+h+2}(\tau_\nu^{h+1}, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$ n'est situé dans $\overline{P_2^{h+1}(\tau_\nu^{h+1})}$, on doit s'appuyer sur le fait que la chaîne

$$(12) \qquad FE_\nu^{n-p+h+2}(\mathfrak{U}_{2p-2h-3}) - \sum_{\mu=1}^{\beta'_h} \zeta_{\nu\mu}^h E_\mu^{n-p+h+1}(\mathfrak{U}_{2p-2h-3})$$

possède la même propriété; la validité de ce fait résulte de (4) en vertu de 51, 2°.

53.24. (Cf. 34.3.) En procédant de la manière indiquée on finit par construire les chaînes $L^n(\tau_\nu^{p-2}, \mathfrak{U}_1)$ $(1 \leqq \nu \leqq \beta'_{p-2})$ et on démontre comme dans 34.3, en s'appuyant de nouveau sur (4), que la chaîne

$$M^n(\tau_\nu^{p-1}, \mathfrak{U}_1) = \sum_{\mu=1}^{\beta'_{p-2}} \zeta_{\nu\mu}^{p-2} L^n(\tau_\mu^{p-2}, \mathfrak{U}_1) + E^n(\tau_\nu^{p-1}, \mathfrak{U}_1) \quad (1 \leqq \nu \leqq \beta'_{p-1})$$

est un $(n, \mathfrak{U}_1)$-cycle mod $\overline{P_1^{p-1}(\tau_\nu^{p-1}) - P_2^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})}$ dans $\overline{P_1^{p-1}(\tau_\nu^{p-1})}$.

53.25. (Cf. 34.4.) Si l'indice ν $(1 \leqq \nu \leqq \beta'_0)$ est tel que $\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)}$ n'est pas un sous-ensemble de B_1, on a $E_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) = 0$ d'après 53.211. En outre on a $A\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} = 0$; en effet, puisque (v. 50.2) $\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} \subset W_{r(\lambda)}$, dans le cas contraire on aurait $AW_{r(\lambda)} \neq 0$, d'où (v. 45.31) $W_{r(\lambda)} \subset B_1$, ce qui donnerait la contradiction $\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} \subset B_1$. Il en résulte que (v. 53.22) $H^{n-p+1}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-1}) = 0$; en effet, U étant un sommet d'un simplexe φ de cette chaîne supposée non vide, φ est (puisque $E_\nu^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1}) = 0$) un simplexe de la chaîne $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_{2p-1})$ située dans A, d'où $UA \neq 0$; d'autre part, $U\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} \neq 0$ d'après la définition même de $H^{n-p+1}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-1})$; comme $\mathfrak{U}_{2p-1} \in \varphi$, on arrive (v. 51.4) à la contradiction $A\overline{P_1^0(\tau_\nu^0)} \neq 0$. Puisque $H^{n-p+1}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-1}) = 0$, on voit sans peine qu'il est permis de poser $L^{n-p+2}(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}_{2p-3}) = 0$.

On démontre de la même manière qu'on peut supposer que $L^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-3}) \neq 0$ seulement dans le cas où le simplexe τ_ν^h possède un sommet τ_λ^0 tel que $\overline{P_1^0(\tau_\lambda^0)} \subset B_1$. Or la chaîne $L^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$ est située dans $\overline{Q^h(\tau_\nu^h)}$; comme $\overline{P_1^0(\tau_\lambda^0)} \cdot \overline{Q^h(\tau_\nu^h)} \supset \tau_\lambda^0 \neq 0$, l'inclusion $\overline{P_1^0(\tau_\lambda^0)} \subset B_1$ entraîne $B_1 \overline{Q^h(\tau_\nu^h)} \neq 0$, ce qui donne $\overline{Q^h(\tau_\nu^h)} \subset B$ (v. 49.1, 1°), car $\mathfrak{Q}^h$ est un affinement de $\mathfrak{P}_1^{h-1}$. Donc les chaînes $L^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_{2p-2h-3})$ et par suite aussi les chaînes $L^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_1)$ sont situées dans B.

54.1. On peut (cf. 35) modifier un nombre fini de fois la chaîne $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1)$ ainsi que les chaînes $L^{n-p+h+2}(\tau_\nu^h, \mathfrak{U}_1)$ $(0 \leqq h \leqq p-2,\ 1 \leqq \nu \leqq \beta'_h)$ de manière que $^*H$ et $^*L$ étant les éléments modifiés, on ait les propriétés suivantes: 1° chaque simplexe de chaque différence $*H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1)-H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1)$ ou $*L^{n-p+h+2}(\tau^h_\nu, \mathfrak{U}_1)-L^{n-p+h+2}(\tau^h_\nu, \mathfrak{U}_1)$ est une face d'un simplexe de $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1)$ ou de $*L^{n-p+k+2}(\tau^k_\mu, \mathfrak{U}_1)$ de manière que les chaînes modifiées restent situées dans $\overline{B}$; 2° les relations 1°, 2°, 3° du n° 53.2 restent vraies [sans qu'on y change les chaînes élémentaires $E^{n-p+h+1}_\nu(\mathfrak{U}_1)$] pour les chaînes modifiées $*H$, $*L$; 3° $*H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1)-H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_1)$ est un $(n-p+1, \mathfrak{U}_1)$-cycle homologue à zéro dans $\overline{B}$.

Le résultat de toutes ces modifications est que pour $0 \leq h \leq p-2$, $0 \leq u \leq h$, $0 \leq q \leq h$ les chaînes modifiées possèdent la propriété suivante: Si les simplexes τ^u_μ, τ^q_ϱ $(1 \leq \mu \leq \beta'_u$, $1 \leq \varrho \leq \beta'_q)$ sont des faces du simplexe τ^h_ν, alors les simplexes d'espèce τ^q_ϱ (rel. à $\mathfrak{z}+\mathfrak{t}$) de la chaîne $L^{n-p+u+2}(\tau^k_\mu)$ (modifiée) constituent une chaîne qui est 1° $=0$ pour $q \neq p-u-2$, 2° $= a k^{n-q}(\tau^q_\varrho)$ pour $q=p-u-2$ $(a \in \mathfrak{R})$.

Pour voir que ces modifications sont réalisables on procède exactement comme dans les n^os 36–41[63]. Il faut seulement remplacer p, C, $\mathfrak{Z}$, σ, α_i resp. par $p-1$, H, $\mathfrak{z}$, τ, β'_i et dire qu'une $\mathfrak{U}_1$-chaîne ne contient presqu'aucun simplexe d'espèce τ^q_ϱ $(1 \leq \varrho \leq \beta'_q)$ si elle a la forme $ak^{n-q}(\tau^q_\varrho, \mathfrak{U}_1)$ $(a \in \mathfrak{R})$.

54.2. Ces modifications étant effectuées, pour la démonstration du théorème du n° 44 il suffit évidemment de démontrer que la chaîne $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_0)$ modifiée est égale mod $\overline{\Omega}$ à une chaîne élémentaire (rel. à $\mathfrak{z}+\mathfrak{t}$).

On commence par le lemme $\varDelta_k$ $(0 \leq k \leq p-2)$: Supposons que τ^u_μ, τ^q_ϱ soient des faces du τ^p_ν $(1 \leq \mu \leq \beta'_u$, $1 \leq \varrho \leq \beta'_q$, $1 \leq i \leq \beta'_p)$. Soit $e^{n-p+u+2}(\tau^u_\mu, \tau^q_\varrho, \mathfrak{U}_0)$ cette partie de la chaîne $L^{n-p+u+2}(\tau^u_\mu, \mathfrak{U}_0)$ (modifiée) dont les simplexes sont d'espèce τ^q_ϱ. Alors la chaîne $e^{n-p+u+2}(\tau^u_\mu, \tau^q_\varrho, \mathfrak{U}_0)$ est 1° $=0$ pour $q \neq p-u-2$; 2° $= a k^{n-q}(\tau^q_\varrho, \mathfrak{U}_0)$ $(a \in \mathfrak{R})$ pour $q=p-u-2$.

La démonstration par récurrence du lemme $\varDelta_k$ étant parfaitement analogue à celle du lemme du n° 42.2, nous pouvons la laisser au soin du lecteur.

54.3. Le lemme $\varDelta_0$ étant vrai, il est facile de compléter la démonstration du théorème du n° 44 en démontrant que la chaîne $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_0)$ est égale à une chaîne élémentaire:

Soit φ^{n-p+1} un simplexe $\neq 0$ mod $\overline{\Omega}$ de la chaîne $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_0)$. D'après 8.32 et 8.33, φ^{n-p+1} est d'espèce τ^q_ϱ, où $0 \leq q \leq p-1$. D'après 51, 6° on a $U \subset P^0_4(\tau^0_\lambda) \subset P^0_1(\tau^0_\lambda)$ pour chaque sommet τ^0_λ de τ^q_ϱ; or $\varphi^{n-p+1} \neq 0$

[63] Si $\mathfrak{U} \in \Phi$, si le $\mathfrak{U}$-simplexe φ d'espèce τ^q_ϱ $(1 \leq \varrho \leq \beta'_q)$ est une face du $\mathfrak{U}$-simplexe ψ, ψ ne peut pas être d'espèce τ^{-1}. Il suffit (v. 8.32) de démontrer que le noyau $\mathfrak{J}$ de ψ rencontre $R_0 \subset R'_0$. Dans le cas contraire, chaque sommet U de φ rencontrerait $\overline{R-R_0} \subset S_1$ (v. 8 et 44). Or, puisque $\varrho \leq \beta'_q$, on a (v. 53.1) $P^0_1(\tau^0_\lambda)-\Omega_1 \neq 0$ et par suite (v. 49.1, 3°) $\overline{P^0_1(\tau^0_\lambda)}\ \overline{S_1}=0$ pour chaque sommet τ^0_λ de τ^q_ϱ; d'autre part, $U \subset P^0_4(\tau^0_\lambda) \subset \overline{P^0_1(\tau^0_\lambda)}$ d'après 51, 6°.

mod $\overline{\Omega}$, de manière que $U - \overline{\Omega} \neq 0$, d'où $\overline{P_1^0(\tau_\lambda^0)} - \Omega_1 \neq 0$. On a donc (v. 53.1) $1 \leqq \varrho \leqq \beta'_q$.

Il suffit donc de démontrer que, $e^{n-p+1}(\tau_\varrho^q, \mathfrak{U}_0)$ $(0 \leqq q \leqq p-1,\ 0 \leqq \varrho \leqq \beta'_q)$ étant cette partie de $H^{n-p+1}(\mathfrak{U}_0)$ dont les simplexes sont d'espèce τ_ϱ^q, la chaîne $e^{n-p+1}(\tau_\varrho^q, \mathfrak{U}_0)$ est: 1° $= 0$ pour $q \neq p-1$; 2° $= a_\varrho k^{n-q}(\tau_\varrho^q, \mathfrak{U}_0)$ $(a_\varrho \in \mathfrak{R})$ pour $q = p-1$. Cette démonstration, analogue à celle du n° 42.5, sera aussi laissée au soin du lecteur.

VI.

55. Dans tout ce Chapitre, supposons donnée une valeur fixe de p $(0 \leqq p \leqq n)$. On suppose la validité de tous les axiomes des Chap. I et II ainsi que celle des axiomes G^k (v. 21) pour $n-p \leqq k \leqq n-1$ et des axiomes H^k (v. 27) pour max $(0, n-p-1) \leqq k \leqq n-2$.

56. Soient A_1 et A_2 deux sous-ensembles bicompacts donnés de R, assujettis à la condition $A_1 A_2 S = 0$. Soit $\Gamma_1(\Gamma_2)$ la famille de tous les p-cycles [$(n-p)$-cycles] mod $A_1 S$ dans A_1 (mod $A_2 S$ dans A_2). Le but de ce Chapitre est d'attacher à chaque couple $C^p \in \Gamma_1$, $C^{n-p} \in \Gamma_2$ un nombre $C^p C^{n-p} \in \mathfrak{R}$ jouissant des propriétés suivantes: 1° $(rC^p)\,C^{n-p} = C^p(rC^{n-p}) = r(C^p\, C^{n-p})$ pour $r \in \mathfrak{R}$, $C^p \in \Gamma_1$, $C^{n-p} \in \Gamma_2$; 2° $(C_1^p + C_2^p)\,C^{n-p} = C_1^p\, C^{n-p} + C_2^p\, C^{n-p}$ pour $C_1^p \in \Gamma_1$, $C_2^p \in \Gamma_1$, $C^{n-p} \in \Gamma_2$; 3° $C^p(C_1^{n-p} + C_2^{n-p}) = C^p\, C_1^{n-p} + C^p\, C_2^{n-p}$ pour $C^p \in \Gamma_1$, $C_1^{n-p} \in \Gamma_2$, $C_2^{n-p} \in \Gamma_2$; 4° $C^p\, C^{n-p} = 0$ pour $C^p \in \Gamma_1$, $C^{n-p} \in \Gamma_2$ si l'on a soit $C^p \sim 0$ mod $A_1 S$ dans A_1, soit $C^{n-p} \sim 0$ mod $A_2 S$ dans A_2. Remarquons qu'il résulte de 1°, 2°, 3° et 4° que $C_1^p\, C_1^{n-p} = C_2^p\, C_2^{n-p}$ pour C_1^p, $C_2^p \in \Gamma_1$, C_1^{n-p}, $C_2^{n-p} \in \Gamma_2$, si l'on a $C_1^p \sim C_2^p$ mod $A_1 S$ dans A_1 et $C_1^{n-p} \sim C_2^{n-p}$ mod $A_2 S$ dans A_2.

57. Commençons par le cas $p = 0$. Soit Ξ_2 la famille de tous les réseaux $\mathfrak{Z} \in \Xi$ (v. 23) jouissant de la propriété suivante: Z_1, Z_2, Z_3 étant trois sommets de $\mathfrak{Z}$ tels que $Z_1 Z_2 \neq 0$, $Z_1 Z_3 \neq 0$, $Z_1 A_2 \neq 0$, $Z_3 A_1 \neq 0$ on a $Z_2 S = 0$. Puisque $A_1 A_2 S = 0$, on voit sans peine (v. 1.3) que la famille Ξ_1 est parfaitement complète. Pour $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$ désignons par $\Delta(\mathfrak{Z})$ la famille de tous les réseaux fermés $\mathfrak{T}$ correspondant (v. 8) à $\mathfrak{Z}$ et vérifiant la condition du n° 25, c'est-à-dire tels que (dans les notations habituelles) $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ et $K^{n-1}(\sigma_i^1, \mathfrak{U}) \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq \alpha_1)$ pour chaque réseau commode $\mathfrak{U}$ suffisamment fin. $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$ et $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$ étant choisi, désignons par $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$ la famille de tous les réseaux commodes $\mathfrak{U}$ tels que, outre les conditions $K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) \neq 0$, $K^{n-1}(\sigma_i^1, \mathfrak{U}) \neq 0$ on ait encore $\mathfrak{U} \in \Psi_1$ (v. 20.2) et que $\mathfrak{U}$ soit un affinement de $\mathfrak{Z}$; la famille $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$ est évidemment parfaitement complète.

Ceci étant, soient donnés les cycles $C^0 \in \Gamma_1$ et $C^n \in \Gamma_2$. Choisissons $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$, $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$, $\mathfrak{U} \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$. Il existe des nombres $a_i \in \mathfrak{R}$ tels que

$$C^0(\mathfrak{Z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i \sigma_i^0 \quad \mathrm{mod}\, S;$$

d'après 20.3, il existe des nombres $b_i \in \mathfrak{R}$ tels que

$$C^n(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} b_i K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) \quad \mathrm{mod}\, \overline{R - R_0}.$$

Posons $C^0 C^n = \sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i b_i$. Il s'agit de prouver que ce nombre est déterminé sans ambiguité par les deux cycles C^0 et C^n et que les propriétés $1^\circ - 4^\circ$ du nº 56 sont vérifiées.

L'égalité $\sum_{i=1}^{\alpha_0} b_i K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) = 0 \,\mathrm{mod}\, \overline{R-R_0}$ est évidemment (v. 19.1, 1°, 2°) possible seulement si $b_i = 0$ pour chaque $i\,(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$. L'égalité $\sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i \sigma_i^0 = 0 \,\mathrm{mod}\, S$ est évidemment possible seulement si $a_i = 0$ pour chaque $i\,(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$. Donc le nombre $\sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i b_i$ est bien déterminé, si on a choisi les réseaux $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$, $\mathfrak{T} \in \varDelta(\mathfrak{Z})$, $\mathfrak{U} \in \varPhi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$.

Nous venons de remarquer que les nombres $b_i\,(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ sont bien déterminés ($\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{U}$ étant choisis). Or il résulte de la démonstration du nº 20.3 que $C^n - b_i G^n \sim 0 \,\mathrm{mod}(R - P_i)$ pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$ et cette condition détermine les nombres b_i sans ambiguité, en vertu de 20.2, 1°. Il en résulte que, $\mathfrak{Z}$ étant donné, le nombre $\sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i b_i$ est indépendant du choix de $\mathfrak{T}$ et de $\mathfrak{U}$. De plus on voit que ce nombre reste inaltéré, si on remplace C^n par un cycle $C_1^n \sim C^n \,\mathrm{mod}\, A_2 S$ dans A_2.

Remarque. Pour $1 \leqq j \leqq \alpha_1$, on a $\sum_{i=1}^{\alpha_0} \eta_{ji}^0 b_i = 0$.

Démonstration. Puisque $C^n \to 0 \,\mathrm{mod}\, S$, on a

$$\sum_{i=1}^{\alpha_0} b_i K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) \to 0 \,\mathrm{mod}\, \overline{R - R_0},$$

d'où (v. 19.1, 3°)

$$\sum_{j=1}^{\alpha_1} \sum_{i=1}^{\alpha_0} \eta_{ji}^0 b_i K^{n-1}(\sigma_j^1, \mathfrak{U}) = 0 \,\mathrm{mod}\, \overline{R - R_0}$$

et par suite (v. 19.1, 1° et 2°)

$$\sum_{i=1}^{\alpha_0} \eta_{ji}^0 b_i = 0.$$

Remplaçons $C^0(\mathfrak{Z})$ par $C_1^0(\mathfrak{Z}) \sim C^0(\mathfrak{Z}) \,\mathrm{mod}\, A_1 S$ dans A_1. On a

$$C_1^0(\mathfrak{Z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} a_0' \sigma_i^0 \,\mathrm{mod}\, S.$$

De plus, il existe des nombres $c_j \in \mathfrak{R}$ tels que

$$\sum_{j=1}^{\alpha_1} c_j\, \sigma_j^1 \to \sum_{i=1}^{\alpha_0} (a_i' - a_i)\, \sigma_i^0 \mod S,$$

d'où

$$a_i' - a_i = \sum_{j=1}^{\alpha_1} \eta_{ji}^0\, c_j.$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i' b_i - \sum_{i=1}^{\alpha_0} a_i b_i = \sum_{j=1}^{\alpha_1} c_j \sum_{i=1}^{\alpha_0} \eta_{ji}^0 b_i = 0$$

d'après la *remarque*. Donc le nombre $\sum\limits_{i=1}^{\alpha_0} a_i b_i$ reste inaltéré en remplaçant $C^0(\mathfrak{Z})$ par $C_1^0(\mathfrak{Z})$. La propriété 4° du n° 57 est donc vraie; les propriétés 1°, 2°, 3° du n° 57 sont banales.

On doit encore prouver que le nombre $\sum\limits_{i=1}^{\alpha_0} a_i b_i$ reste inaltéré en remplaçant $\mathfrak{Z}$ par un autre réseau $\mathfrak{z} \in \Xi_2$. La famille Ξ_2 étant complète, il suffit de faire cette démonstration en supposant que $\mathfrak{z}$ soit un affinement de $\mathfrak{Z}$. Choisissons un réseau fermé $\mathfrak{t}$ correspondant à $\mathfrak{z}$ (et satisfaisant rel. à $\mathfrak{z}$ à la condition du n° 25). Choisissons une projection $\pi = Pr.\,(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$ et déterminons le réseau fermé $\mathfrak{T}$ correspondant à $\mathfrak{Z}$ selon le n° 24; c'est permis, car $\mathfrak{T}$ vérifie évidemment la condition du n° 25 [v. 24, (3)]. Faisons usage des notations du n° 24. Posons

$$C^0(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu=1}^{\beta_0} a_\nu'\, \tau_\nu^0 \mod S,$$

$$C^n(\mathfrak{U}) = \sum_{\nu=1}^{\beta_0} b_\nu'\, k^n(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}) \mod \overline{R - R_0},$$

$\mathfrak{U}$ étant un réseau commode (rel. à $\mathfrak{z} + \mathfrak{t}$ et par suite aussi rel. à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$) suffisamment fin. Il s'agit de prouver que $\sum\limits_{i=1}^{\alpha_0} a_i b_i = \sum\limits_{\nu=1}^{\beta_0} a_\nu' b_\nu'$. Pour $1 \leqq i \leqq \alpha_0$ posons $a_i'' = \sum\limits_{\nu} a_\nu'$, la sommation étant étendue à toutes les valeurs de ν $(1 \leqq \nu \leqq \beta_0')$ telles que $\pi \tau_\nu^0 = \sigma_i^0$. On a alors $\pi C^0(\mathfrak{z}) = \sum\limits_{i=1}^{\alpha_0} a_i''\, \sigma_i^0 \sim C^0(\mathfrak{Z})$ mod $A_1 S$ dans A_1 de manière que, comme nous avons vu plus haut, $\sum\limits_{i=1}^{\alpha_0} a_i b_i = \sum\limits_{i=1}^{\alpha_0} a_i'' b_i$. Pour $1 \leqq \nu \leqq \beta_0'$, $\pi \tau_\nu^0 = \sigma_i^0$, posons $b_\nu'' = b_i$ de manière que $\sum\limits_{i=1}^{\alpha_0} a_i'' b_i = \sum\limits_{\nu=1}^{\beta_0} a_\nu' b_\nu''$, où $b_\nu'' = 0$ pour $\beta_0' + 1 \leqq \nu \leqq \beta_0$. Il suffit donc de montrer que l'on a $a_\nu'(b_\nu' - b_\nu'') = 0$ pour $1 \leqq \nu \leqq \beta_0$. D'après 24 (3)

$$C^n(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} b_i K^n(\sigma_i^0, \mathfrak{U}) = \sum_{\nu=1}^{\beta_0} b_\nu'' k^n(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}) \mod \overline{R - R_0},$$

de sorte que

$$(*) \qquad \sum_{\nu=1}^{\beta_0} (b_\nu' - b_\nu'') k^n(\tau_\nu^0, \mathfrak{U}) = 0 \mod \overline{R - R_0}.$$

Supposons, par impossible, que $a_\nu'(b_\nu' - b_\nu'') \neq 0$ pour une valeur donnée de ν. Soit U un sommet d'un simplexe de la chaîne $k^n(\tau_\nu^0, \mathfrak{U})$; on a $U\tau_\nu^0 \neq 0$ d'après 19.3; d'autre part, $UA_2 \neq 0$, car $b_\nu' - b_\nu'' \neq 0$ et la chaîne $(*)$ est évidemment située dans A_2; enfin, $U\overline{R - R_0} \neq 0$ d'après $(*)$. $\mathfrak{U}$ étant un affinement de $\mathfrak{Z}$, il existe un sommet Z_1 de $\mathfrak{Z}$ tel que $Z_1 \subset U$ et donc $Z_1 A_2 \neq 0$, $Z_1 \tau_\nu^0 \neq 0$, $Z_1 \overline{R - R_0} \neq 0$. De la dernière de ces relations on déduit sans peine (v. 8) qu'il existe un sommet Z_2 de $\mathfrak{Z}$ tel que $Z_1 Z_2 \neq 0$, $Z_2 S \neq 0$. La chaîne $C^0(\mathfrak{z})$ étant située dans A_1, l'inégalité $a_\nu' \neq 0$ entraîne $\tau_\nu^0 A_1 \neq 0$. Le réseau $\mathfrak{z}$ étant un affinement de $\mathfrak{Z}$, il existe un sommet Z_3 de $\mathfrak{Z}$ tel que $\tau_\nu^0 \subset Z_3$. On a donc $Z_1 Z_2 \neq 0$, $Z_1 Z_3 \neq 0$, $Z_1 A_2 \neq 0$, $Z_2 S \neq 0$, $Z_3 A_1 \neq 0$, ce qui est une contradiction, car $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$.

58. Reste à considérer le cas $1 \leqq p \leqq n$. Puisque $A_1 S A_2 = 0$, il existe un entourage B de A_2 tel que $A_1 \overline{B} S = 0$. Ensuite, il existe un entourage Ω de S tel que $A_1 \overline{B}\,\overline{\Omega} = 0$. Soit encore B' un entourage de A_2 tel que $A \subset B' \Subset B$.

Soit Ξ_1 la famille de tous les réseaux $\mathfrak{Z} \in \Xi$ (v. 23) pour lesquels vaut l'énoncé du n° 31 en y remplaçant A, B resp. par A_2, B'. La famille Ξ_1 est évidemment parfaitement complète. Soit Ξ_2 la famille de tous les réseaux $\mathfrak{Z} \in \Xi_1$ jouissant de la propriété suivante: 1° Si $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$, $Z_1 A_1 \neq 0$, $Z_2 \overline{B} \neq 0$, $Z_1 Z_2 \neq 0$, on a $(Z_1 + Z_2)\overline{\Omega} = 0$; 2° pour chaque sommet extérieur de $\mathfrak{Z}$ on a $Z \Subset \Omega$. On déduit sans peine de 1.3 et de 5.4 que la famille Ξ_2 est parfaitement complète, car $A_1 \overline{B}\,\overline{\Omega} = 0$.

Pour chaque $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$, soit $\Delta(\mathfrak{Z})$ la famille de tous les réseaux fermés correspondant à $\mathfrak{Z}$ (v. 8) et choisis selon l'énoncé du n° 44 où on choisit $\mathfrak{z} \in \Xi_2$ et où on remplace A par $\overline{B'}$, tandis que Ω a la valeur que nous venons de déterminer.

Pour $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$, $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$ soit $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$ la famille de tous les réseaux commodes $\mathfrak{U}$ si fins que: 1° on puisse appliquer le théorème du n° 44 avec $\overline{B'}$ au lieu de A; 2° l'énoncé du n° 26 soit vrai pour chaque $\mathfrak{U}_0 \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$; 3° $\mathfrak{U}$ soit un affinement de $\mathfrak{Z}$; 4° on puisse appliquer l'énoncé du n° 25 non seulement rel. à $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{T}$, mais aussi rel. à $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{t}$ dont on construit (cf. 44) le réseau fermé $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$ correspondant à $\mathfrak{Z}$.

Ceci étant, supposons qu'on ait des cycles $C^p \in \Gamma_1$ et $C^{n-p} \in \Gamma_2$ (v. 56). Choisissons $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$, $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$, $\mathfrak{U} \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$. D'après la propriété 2° de la famille Ξ_2, il existe des nombres $a_i \in \mathfrak{R}$ tels que

$$(1) \qquad C^p(\mathfrak{Z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i \sigma_i^p \mod \overline{\Omega}.$$

D'après 31, il existe des nombres $b_i \in \mathfrak{R}$ tels que

$$(2) \qquad C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \mod \overline{B'}\ \overline{R-R_0} \text{ dans } \overline{B'}.$$

Posons

$$(3) \qquad C^p C^{n-p} = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i b_i.$$

Pour justifier cette définition, nous procéderons comme il suit: 1° dans 58.1 nous démontrerons que le nombre (3) reste inaltéré en remplaçant $C^p(\mathfrak{Z})$ par $C_1^p(\mathfrak{Z}) \sim C^p(\mathfrak{Z})$ mod $A_1 S$ dans A_1; 2° dans 58.2 nous démontrerons que le nombre (3) reste inaltéré en remplaçant $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ par $C_1^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim C^{n-p}(\mathfrak{U})$ mod $A_2 S$ dans A_2; 3° dans 58.3 nous démontrerons que, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{U}$ étant choisis, le nombre (3) est bien déterminé; 4° dans 58.4 nous démontrerons que, $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{T}$ étant choisis, le nombre (3) ne dépend pas du choix de $\mathfrak{U} \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$; 5° dans 58.5 nous donnons un lemme; 6° dans 58.6 nous démontrerons que, $\mathfrak{Z}$ étant choisi, le nombre (3) ne dépend pas du choix de $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$; 7° dans 58.7 nous démontrerons que le nombre (3) ne dépend non plus du choix $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$. Il en résulte que le nombre (3) est déterminé sans ambiguité par les deux cycles $C^p \in \Gamma_1$, $C^{n-p} \in \Gamma_2$ et qu'il jouit de la propriété 4° du n° 56; les propriétés 1°, 2°, 3°, du n° 56 sont banales.

58.1. Puisque $C^{n-p}(\mathfrak{U}) \to 0$ mod S, il résulte de (2) que $\sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \to 0$ mod $\overline{R-R_0}$. Or pour $p<n$ on a (v. 19.1, 3°)

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \to \sum_{i=1}^{\alpha_p} \sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} \eta_{ji}^p b_i K^{n-p-1}(\sigma_j^{p+1}, \mathfrak{U}) \mod \overline{R-R_0},$$

de sorte que dans le cas $p<n$ on a [v. 19.1, 1°, 2°, et la propriété 4° de la famille $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$]

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{\alpha_p} \eta_{ji}^p b_i = 0 \quad \text{pour } 1 \leqq j \leqq \alpha_{p+1}.$$

Ceci étant, soit $C_1^p(\mathfrak{Z}) \sim C^p(\mathfrak{Z})$ mod $A_1 S$ dans A_1. Puisque $\mathfrak{Z} \in \Xi_1$, il existe des nombres $a_i' \in \mathfrak{R}$ tels que

$$C_1^p(\mathfrak{Z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i' \sigma_i^p \mod \overline{\Omega}$$

et pour $p<n$ il existe des nombres $c_j \in \mathfrak{R}$ tels que

$$\sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} c_j \sigma_j^{p+1} \to \sum_{i=1}^{\alpha_p} (a_i' - a_i) \sigma_i^p \mod \overline{\Omega} \text{ dans } A_1,$$

tandis que pour $p = n$ on a $\sum_{i=1}^{\alpha_n} (a_i' - a_i)\sigma_i^n = 0 \bmod \overline{\Omega}$. On a donc dans les deux cas

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} \left(a_i' - a_i - \sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} \eta_{ji}^p c_j\right) \sigma_i^p = 0 \mod \overline{\Omega},$$

en convenant que $\sum_1^{\alpha_{p+1}} = 0$ pour $p = n$. Il en résulte que

$$a_i' - a_i = \sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} \eta_{ji}^p c_j \qquad (= 0 \text{ pour } p = n)$$

pour chaque valeur de i telle que $\sigma_i^p \neq 0 \bmod \overline{\Omega}$. Or on a, en vertu de (*),

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i \sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} \eta_{ji}^p c_j = 0$$

de sorte que, pour arriver au but $\sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i b_i = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i' b_i$ il suffit de montrer que pour $\sigma_i^p = 0 \bmod \overline{\Omega}$ on a soit $a_i' = a_i = \sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} \eta_{ji}^p c_j = 0$, soit $b_i = 0$. Supposons que ceci ne soit pas vrai pour une certaine valeur de i telle que $\sigma_i^p = 0 \bmod \overline{\Omega}$. Les chaînes $\sum a_i \sigma_i^p$, $\sum a_i' \sigma_i^p$, $\sum c_j \sigma_j^{p+1}$ étant situées dans A_1, on aurait $\sigma_i^p = 0 \bmod A_1$; la chaîne $\sum b_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ étant située dans $\overline{B}' \subset \overline{B}$, on aurait $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) = 0 \bmod \overline{B}$. Soit Z_1 un sommet de σ_i^p et soit U un sommet d'un simplexe de $K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$ [v. la propriété 4° de la famille $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$]; on aurait $Z_1\overline{\Omega} \neq 0$, $Z_1 A_1 \neq 0$, $U\overline{B} \neq 0$ et aussi $UZ_1 \neq 0$ en vertu de 19.3. Or d'après la propriété 3° de la famille $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$, il existe un sommet Z_2 de $\mathfrak{Z}$ tel que $U \subset Z_2$. On aurait donc $Z_1 Z_2 \neq 0$, $Z_1 A_1 \neq 0$, $Z_2 \overline{B} \neq 0$, $Z_1 \overline{\Omega} \neq 0$, ce qui est une contradiction, car $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$.

58.2. D'après la définition de la famille $\mathfrak{Z}$, il existe un affinement $\mathfrak{z} \in \Xi_2$ de $\mathfrak{Z}$ et une projection $\pi = Pr.(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$ dont on obtient $\mathfrak{T}$ moyennant la construction du n° 24 (après avoir choisi le réseau fermé $\mathfrak{t}$ correspondant à $\mathfrak{z}$). Faisons usage des notations du n° 24. On peut poser [v. 58 (1)]

$$C^p(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu=1}^{\beta_p} a_\nu' \tau_\nu^p \mod \overline{\Omega}.$$

Or on a $C^p(\mathfrak{z}) \to 0 \bmod S$, d'où $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} a_\nu' \tau_\nu^p \to 0 \mod \overline{\Omega}$, donc

$$\sum_{\nu=1}^{\beta_p} \sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} \zeta_{\nu\mu}^{p-1} a_\nu' \tau_\mu^{p-1} = 0 \mod \overline{\Omega}.$$

Il en résulte que

$$(*) \qquad \sum_{\nu=1}^{\beta_p} \zeta_{\nu\mu}^{p-1} a_\nu' = 0$$

pour chaque valeur de μ telle que $\tau_\mu^{p-1} \neq 0 \bmod \bar{\Omega}$. Pour $1 \leqq i \leqq \alpha_p$ posons $a_i'' = \sum_\nu a_\nu'$, la sommation étant étendue à toutes les valeurs de ν telles que $\pi \tau_\nu^p = \sigma_i^p$. On a

$$\pi C^p(\mathfrak{z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i'' \sigma_i^p \quad \bmod \bar{\Omega}.$$

Ceci étant, remplaçons $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ par $C_1^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim C^{n-p}(\mathfrak{U}) \bmod A_2 S$ dans A_2. Il existe [v. 58 (2)] des nombres $b_i' \in \mathfrak{R}$ tels que

$$(3') \qquad C_1^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i' \, K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \quad \bmod \bar{B}' \overline{R - R_0} \text{ dans } \bar{B}'.$$

Il s'agit de montrer que $\sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i b_i = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i b_i'$. Or d'après 58.1 on a $\sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i b_i = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i'' b_i$, $\sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i b_i' = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i'' b_i'$, car $\pi C^p(\mathfrak{z}) \sim C^p(\mathfrak{Z}) \bmod A_1 S$ dans A_1. Il suffit donc de prouver que $\sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i'' (b_i' - b_i) = 0$. Posons $b_\nu'' = 0$ pour $\gamma_p + 1 \leqq \nu \leqq \beta_p$ ainsi que pour toutes les valeurs de ν telles que $1 \leqq \nu \leqq \gamma_p$, $\pi \tau_\nu^p = 0$; pour $1 \leqq \nu \leqq \gamma_p$, $\pi \tau_\nu^p = \sigma_i^p$ posons $b_\nu'' = b_i' - b_i$. D'après la définition de a_i'' on a alors

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i'' (b_i' - b_i) = \sum_{\nu=1}^{\beta_p} a_\nu' b_\nu'';$$

on doit donc démontrer que $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} a_\nu' b_\nu'' = 0$. On a [v. (3), (3') ainsi que 40, (3)]

$$\sum_{\nu=1}^{\beta_p} b_\nu'' k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} (b_i' - b_i) K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \bmod \bar{B}' \overline{R - R_0} \text{ dans } \bar{B}',$$

et les deux membres de cette égalité sont $\sim 0 \bmod \bar{B}' \overline{R - R_0}$ dans $\bar{B}'$. D'après 44, il existe donc des nombres $d_\mu \in \mathfrak{R}$ tels que

$$\sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} d_\mu k^{n-p+1}(\tau_\mu^{p-1}, \mathfrak{U}) \to \sum_{\nu=1}^{\beta_p} b_\nu'' k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U}) \bmod \bar{\Omega} \text{ dans } \bar{B},$$

de manière que (v. 19.1, 3°)

$$\sum_{\nu=1}^{\beta_p} \left(b_\nu'' - \sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} \zeta_{\mu\nu}^{p-1} d_\mu \right) k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U}) = 0 \bmod \bar{\Omega} \text{ dans } \bar{B},$$

d'où il résulte (v. 19.1, 2° et la propriété 4° de la famille Φ) que

$$(**) \qquad b_\nu'' = \sum_{\mu=1}^{\beta_p} \zeta_{\mu\nu}^{p-1} d_\mu$$

pour chaque valeur de ν telle que $k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U}) \neq 0 \bmod \bar{\Omega}$.

Remarque 1. Si $\tau_{\mu}^{p-1} = 0 \bmod \overline{\Omega}$ on a soit $d_{\mu} = 0$ soit $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} \zeta_{\nu\mu}^{p-1} a'_{\nu} = 0$.

Remarque 2. Si $k^{n-p}(\tau_{\nu}^{p}, \mathfrak{U}) = 0 \bmod \overline{\Omega}$ on a soit $a'_{\nu} = 0$ soit $\sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} \zeta_{\mu\nu}^{p-1} d_{\mu} = 0$.

En supposant la validité de ces dex remarques, on obtient de (*) et de (**) que

$$\sum_{\nu=1}^{\beta_p} a'_{\nu} b''_{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\beta_p} \sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} \zeta_{\nu\mu}^{p-1} a'_{\nu} d_{\mu} = 0, \quad \text{q. f. d.}$$

Il ne reste donc qu'à démontrer les deux remarques. Supposons donc que les indices ν et μ soient tels que $\zeta_{\nu\mu}^{p-1} \neq 0$ et que soit $\tau_{\mu}^{p-1} = 0 \bmod \overline{\Omega}$ soit $k^{n-p}(\tau_{\nu}^{p}, \mathfrak{U}) = 0 \bmod \overline{\Omega}$. Puisque la chaîne $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} a'_{\nu} \tau_{\nu}^{p}$ est située dans A_1 et puisque les chaînes $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} b''_{\nu} k^{n-p}(\tau_{\nu}^{p}, \mathfrak{U})$ et $\sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} d_{\mu} k^{n-p-1}(\tau_{\mu}^{p-1}, \mathfrak{U})$ sont situées dans $\overline{B}$, dans le cas $a'_{\nu} \neq 0$ ou $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} \zeta_{\nu\mu}^{p-1} a'_{\nu} \neq 0$ on a $Z_1 A_1 \neq 0$ pour chaque sommet Z_1 de τ_{μ}^{p-1} et dans le cas $d_{\mu} \neq 0$ ou $\sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} \zeta_{\nu\mu}^{p-1} d_{\mu} \neq 0$ on a $U\overline{B} \neq 0$ pour chaque sommet U de chaque simplexe de $k^{n-p}(\tau_{\nu}^{p}, \mathfrak{U})$[64]. Puisque soit $\tau_{\mu}^{p-1} = 0 \bmod \overline{\Omega}$, soit $k^{n-p}(\tau_{\nu}^{p}, \mathfrak{U}) = 0 \bmod \overline{\Omega}$, on a $(Z_1 + U)\overline{\Omega} \neq 0$. D'autre part on a $UZ_1 \neq 0$ d'après 19.3. D'après la propriété 3° de la famille $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$ il existe un sommet Z_2 de $\mathfrak{Z}$ tel que $U \subset Z_2$. Donc $Z_1 Z_2 \neq 0$, $(Z_1 + Z_2)\overline{\Omega} \neq 0$ et, si une de nos deux remarques n'était pas vraie, on aurait encore $Z_1 A_1 \neq 0$, $Z_2 \overline{B} \neq 0$ ce qui donnerait une contradiction, car $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$.

58.3. Il résulte de 58.1 que le nombre (3) est indépendant du choix des nombres a_i pourvu que ces nombres satisfassent à (1). Il résulte de 58.2 que le nombre (3) est indépendant du choix des nombres b_i pourvu que ces nombres satisfassent à (2). Donc, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{U}$ étant choisis, le nombre (3) est bien déterminé.

58.4. Il est presque évident que $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{T}$ étant choisis, le nombre (3) ne dépend pas du choix de $\mathfrak{U} \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$. La famille $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$ étant complète, il suffit de prouver que le nombre (3) est le même pour $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1$ et pour $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_2 \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$ étant un affinement de $\mathfrak{U}_1 \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$. A cet effet il suffit de remarquer que, si les nombres $b_i \in \mathfrak{R}$ sont telles qu'on ait (2) pour $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_2$, on a aussi (2) pour $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1$; et cette remarque est évidente en vertu de 19.2 (v. aussi 19.1, 1°).

---

[64] Il faut tenir compte de ce que chaque simplexe de $k^{n-p-1}(\tau_{\mu}^{p-1}, \mathfrak{U})$ est (v. la démonstration de 19.1) une face d'un simplexe de $k^{n-p}(\tau_{\nu}^{p}, \mathfrak{U})$.

58.5. Lemme. Soit $\mathfrak{z} \in \Xi_2$ un affinement de $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$; soit $\pi = Pr.(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$. Soit $\mathfrak{t} \in \Delta(\mathfrak{z})$; construisons le réseau fermé $\mathfrak{T}$ correspondant à $\mathfrak{Z}$ selon la manière du nº 24, en faisant usage de $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ et π. On a $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$ et on obtient la même valeur pour $C^p C^{n-p}$, en le calculant soit relativement à $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{T}$, soit relativement à $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{t}$.

Démonstration. On voit sans aucune difficulté que $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Z} \in \Delta(\mathfrak{Z})$. Faisons usage des notations du nº 24. Déterminons les nombres a_ν, $b_i \in \mathfrak{R}$ de manière que

$$C^p(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu=1}^{\beta_p} a_\nu \tau_\nu^p \mod \bar{\Omega},$$

$$C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \mod \bar{B}' \overline{R-R_0} \text{ dans } \bar{B}',$$

où le réseau $\mathfrak{U}$ commode rel. à $\mathfrak{z}+\mathfrak{t}$ (et donc aussi rel. à $\mathfrak{Z}+\mathfrak{T}$, v. 24) est choisi (v. 58.4) si fin qu'il appartienne à $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$ et à $\Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{t})$. Pour $1 \leqq i \leqq \alpha_p$, soit $a_i' = \sum a_\nu$, la sommation se rapportant à toutes les valeurs de ν telles que $\pi\tau_\nu^p = \sigma_i^p$. On a alors

$$\pi C^p(\mathfrak{z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i' \sigma_i^p \mod \bar{\Omega},$$

de sorte que $C^p C^{n-p}$, calculé rel. à $\mathfrak{Z}+\mathfrak{T}$ a la valeur $\sum\limits_{i=1}^{\alpha_p} a_i' b_i$. D'autre part on a, d'après 24 (3)

$$C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \sum_{\nu=1}^{\beta_p} b_\nu' k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U}) \mod \bar{B}' \overline{R-R_0} \text{ dans } \bar{B}',$$

où l'on a posé: 1° $b_\nu' = 0$ pour $\gamma_p + 1 \leqq \nu \leqq \beta_p$ ainsi que pour toutes les valeurs de ν telles que $1 \leqq \nu \leqq \gamma_p$, $\pi\tau_\nu^p = 0$; 2° $b_\nu' = b_i$ pour $1 \leqq \nu \leqq \gamma_p$, $\pi\tau_\nu^p = \sigma_i^p$. Donc le nombre $C^p C^{n-p}$, calculé rel. à $\mathfrak{z}+\mathfrak{t}$, a la valeur $\sum\limits_{\nu=1}^{\beta_p} a_\nu b_\nu'$. On doit donc seulement démontrer que $\sum\limits_{i=1}^{\alpha_p} a_i' b_i = \sum\limits_{\nu=1}^{\beta_p} a_\nu b_\nu'$ ce qui est évident d'après la définition même des nombres a_i' et b_ν'.

58.6. Supposons donné $\mathfrak{Z} \in \Xi_2$, $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$, $\mathfrak{U} \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$. Soient U_ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ tous les sommets de $\mathfrak{U}$ tels que $UR_0 \neq 0$ (v. 8). Pour chaque ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ on peut (v. 8.1, 6°) indiquer un $\mathfrak{Z}$-simplexe intérieur $\sigma(\nu) = \sigma_i^h$ tel que 1° $U_\nu T(\sigma_i^h) \neq 0$; 2° $U_\nu T_j = 0$ pour chaque valeur de j $(1 \leqq j \leqq \alpha_0)$ telle que σ_j^0 n'est pas un sommet de $\sigma(\nu)$. Choisissons un point $a_\nu \in UT(\sigma_i^h)$ $(1 \leqq \nu \leqq m)$. On ne peut avoir $a_\nu = a_\mu$ que si $\sigma(\nu) = \sigma(\mu)$. Soit V_ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ un entourage de a_ν si petit que 1° $V_\nu \subset U_\nu$; 2° $V_\nu V_\mu = 0$ pour $a_\nu \neq a_\mu$; soit V_ν' un entourage de a_ν si petit que $V_\nu' \Subset V_\nu$. Soit N l'ensemble de tous les couples (i, U) $(1 \leqq i \leqq \alpha_0,\ U \in \mathfrak{U})$ tels que $UT_i = 0$

et par suite aussi (v. 8.1, 5°) $\bar{U}T_i = 0$. Soit $\mathfrak{V}$ un réseau si fin que pour $(i, U) \in N$ aucun sommet de $\mathfrak{V}$ ne rencontre simultanément $\bar{U}$ et $\bar{T_i}$. Soit $\mathfrak{z} \in \Xi_2$ un affinement de $\mathfrak{Z}$ si petit que 1° $z_1, z_2 \in \mathfrak{z}$, $z_1 z_2 \neq 0$, $z_1 V'_\nu \neq 0$ $(1 \leq \nu \leq m)$ entraîne $z_2 \subset V_\nu$ (v. 1.2); 2° $\mathfrak{z}$ est un affinement de $\mathfrak{V}$; 3° la chaîne $G^n(\mathfrak{z})$ n'est située dans $R - V'_\nu$ pour aucune valeur de ν $(1 \leq \nu \leq m$; v. 17.5). En vertu de la propriété 3° de $\mathfrak{z}$, il existe pour chaque ν $(1 \leq \nu \leq m)$ un $(n, \mathfrak{z})$-simplexe intérieur ϱ^n_ν dont le noyau rencontre V'_ν; en vertu de la propriété 1° de $\mathfrak{z}$, chaque sommet de ϱ^n_ν fait partie de V_ν; il existe donc une h-face [h étant déterminé par l'égalité $\sigma^h_i = \sigma(\nu)$] ϱ^h_ν de ϱ^n_ν. On peut supposer que $\varrho^h_\nu = \varrho^h_\mu$ pour $a_\nu = a_\mu$. Puisque $V_\mu V_\nu = 0$ pour $a_\mu \neq a_\nu$, on peut évidemment choisir la projection $\pi = Pr.(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$ de manière que 1° $\pi \varrho^h_\nu = \sigma(\nu)$ pour $1 \leq \nu \leq m$; 2° $\tau^0 \in \mathfrak{z}$, $\pi \tau^0 = \sigma^0_i$ $(1 \leq i \leq \alpha_0)$ entraîne que $\tau^0 \bar{T_i} \neq 0$. Choisissons $\mathfrak{t} \in \Delta(\mathfrak{z})$. Puisque chaque sommet de ϱ^h_ν est un sous-ensemble de U_ν, on a $t(\varrho^h_\nu) \subset U_\nu$ pour $1 \leq \nu \leq m$. A l'aide de $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ et π, construisons le réseau fermé $\mathfrak{T}^*$ correspondant à $\mathfrak{Z}$ (v. 8) suivant la manière expliquée au n° 24. Supposons que $T^*(\sigma^h_i)$ ait la même signification rel. à $\mathfrak{T}^*$ que $T(\sigma^h_i)$ rel. à $\mathfrak{T}$. Puisque $t(\varrho^h_\nu) \subset T^*(\sigma^h_i)$ $[\sigma^h_i = \sigma(\nu)]$ [v. 24 (2)] et puisque $t(\varrho^h_\nu) \subset U_\nu$, on a $U_\nu T^*(\sigma^h_i) \neq 0$[65]. Autrement dit: $0 \leq h \leq n$, $1 \leq i \leq \alpha_h$, $U \in \mathfrak{U}$, $UT(\sigma^h_i) \neq 0$ entraîne $UT^*(\sigma^h_i) \neq 0$. Réciproquement supposons que, pour de certaines valeurs de i, h, $U (0 \leq h \leq n$, $1 \leq i \leq \alpha_h$, $U \in \mathfrak{U})$ on ait $UT(\sigma^h_i) = 0$ et par suite $\bar{U}\bar{T}(\sigma^h_i) = 0$. Nous prouverons que $\bar{U}\bar{T}^*(\sigma^h_i) = 0$. D'après 8.1, 5° et 6°, il existe un sommet σ^0_j de σ^h_i tel que $\bar{U}\bar{T_j} = 0$. Il suffit de prouver que $\bar{U}\bar{T}^*_j = 0$. Dans le cas contraire, il existerait un sommet τ^0 de $\mathfrak{z}$ tel que $\bar{U}\tau^0 \neq 0$, $\pi\tau^0 = \sigma^0_j$. D'après la propriété 2° de la projection π, on aurait $\tau^0 \bar{T_j} \neq 0$ d'où la contradiction $\bar{U}\tau^0 = 0$ d'après la propriété 2° du réseau $\mathfrak{z}$. Maintenant on voit sans peine que le réseau $\mathfrak{U}$ est commode non seulement rel. à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$, mais aussi rel. à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}^*$. Puisque $\mathfrak{t} \in \Delta(\mathfrak{z})$, on a $\mathfrak{T}^* \in \Delta(\mathfrak{Z})$ (v. 58.5). Choisissons un affinement $\mathfrak{U}_1$ de $\mathfrak{U}$ de manière que $\mathfrak{U}_1 \in \Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T}^*)$. Déterminons les nombres $a_i \in \mathfrak{R}$ d'après 58 (1). Déterminons les nombres $b_i \in \mathfrak{R}$ de manière que

$$C^{n-p}(\mathfrak{U}_1) \sim \sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i \, {}^*K^{n-p}(\sigma^p_i, \mathfrak{U}_1) \text{ mod } \bar{B'}\,\overline{R - R_0} \text{ dans } \bar{B'},$$

$^*K$ désignant les chaînes fondamentales (v. 19.1) relatives à $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}^*$. On voit sans peine (v. 58.4) que la relation (*) reste vraie en y remplaçant $\mathfrak{U}_1$ par $\mathfrak{U}$. Or on déduit facilement de 19.1 que ${}^*K^{n-h}(\sigma^h_i, \mathfrak{U}) = K^{n-h}(\sigma^h_i, \mathfrak{U})$. Par suite, la relation 58 (2) est vraie. Donc on obtient la même valeur

[65] $t(\varrho^h_\nu) \neq 0$ car $\mathfrak{z} \in \Xi$ et par suite (v. 23) le noyau de ϱ^h_ν contient un point b n'appartenant à la fermeture d'aucun sommet de $\mathfrak{z}$ qui ne soit pas un sommet de ϱ^h_ν, d'où il résulte sans peine que $b \in t(\varrho^h_\nu)$.

pour le nombre $C^p C^{n-p}$ en le calculant soit rel. à $\mathfrak{Z}+\mathfrak{T}$, soit rel. à $\mathfrak{Z}+\mathfrak{T}^*$ et par suite, d'après le lemme du n° 58.5, aussi en le calculant rel. à $\mathfrak{z}+\mathfrak{t}$.

Ceci étant, supposons qu'on ait donné $\mathfrak{Z}\in\Xi_2$ et $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2\in\Delta(\mathfrak{Z})$. On voit sans peine que l'on peut déterminer $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{t}$ de manière que les conditions qui ont été énoncées plus haut soient vérifiées simultanément pour $\mathfrak{T}=\mathfrak{T}_1$ et pour $\mathfrak{T}=\mathfrak{T}_2$. Il en résulte que le nombre $C^p C^{n-p}$ reste le même en le calculant soit rel. à $\mathfrak{Z}+\mathfrak{T}_1$, soit rel. à $\mathfrak{Z}+\mathfrak{T}_2$.

58.7. Le nombre $C^p C^{n-p}$ dépend donc tout au plus du choix de $\mathfrak{Z}\in\Xi$, le choix de $\mathfrak{T}\in\Delta(\mathfrak{Z})$ et celui de $\mathfrak{U}\in\Phi(\mathfrak{Z},\mathfrak{T})$ étant sans influence sur lui. Or supposons donné $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2\in\Xi_2$. La famille Ξ_2 étant complète, il existe un affinement simultané $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{Z}_1$ et de $\mathfrak{Z}_2$. D'après 58.5 le nombre $C^p C^{n-p}$, calculé rel. à $\mathfrak{z}$ est le même que si on le calcule rel. à $\mathfrak{Z}_1$ ou rel. à $\mathfrak{Z}_2$. Donc $C^p C^{n-p}$ peut être calculé indifféremment soit rel. à $\mathfrak{Z}_1$ soit rel. à $\mathfrak{Z}_2$.

59.1. Si les deux ensembles A_1, A_2 du n° 56 sont sans point commun, on a $C^p C^{n-p}=0$ pour chaque $C^p\in\Gamma_1$, $C^{n-p}\in\Gamma_2$. La facile démonstration sera laissée au soin du lecteur.

59.2. Soient A_1 et A_2 deux sous-ensembles bicompacts donnés de R, assujettis à la condition $A_1 A_2 S=0$. Définissons Γ_1 et Γ_2 comme dans 56. Soit F un sous-ensemble bicompact de R tel que $F\supset S$, $A_1 A_2 F=0$. Tous les axiomes supposés au n° 55 restent évidemment vérifiés en remplaçant S par F. Désignons par Γ_1' et Γ_2' ce que deviennent les familles Γ_1 et Γ_2 si on remplace S par F. Soit $C^p\in\Gamma_1$, $C^{n-p}\in\Gamma_2$. Il existe évidemment des cycles $C_1^p\in\Gamma_1'$, $C_1^{n-p}\in\Gamma_2'$ tels que $C^p(\mathfrak{Z})=C_1^p(\mathfrak{Z}) \bmod F$, $C^{n-p}(\mathfrak{Z})=C_1^{n-p}(\mathfrak{Z}) \bmod F$ dans chaque réseau $\mathfrak{Z}$. On voit sans peine que $C^p C^{n-p}=C_1^p C_1^{n-p}$.

VII.

60. Dans ce Chapitre, nous ferons de nouveau les hypothèses énoncées au n° 55.

61. Supposons donné un sous-ensemble bicompact S_2 de S. Posons $S_1=S-S_2$. Soit Γ_1 l'ensemble de tous les (p, R)-cycles $\bmod SA_1$ dans A_1, où A_1 parcourt tous les sous-ensembles bicompacts de R tels que $SA_1\subset S_1$; deux éléments C_1^p, C_2^p de Γ_1 seront considérés comme égaux si l'on peut attacher à chaque entourage Ω_1 de S_1[66] un sous-ensemble bicompact A_1 de R tel que 1° $SA_1\subset\Omega_1$, 2° $C_1^p\sim C_2^p \bmod \overline{\Omega}_1 A_1$ dans A_1. L'ensemble Γ_1 est évidemment un module. Soit Γ_2 l'ensemble de tous les $(n-p, R)$-cycles $\bmod SA_2$ dans A_2 où A_2 parcourt tous les sous-ensembles bicompacts de R tels que $SA_2\subset S_2$; deux éléments C_1^{n-p}, C_2^{n-p} de Γ_2 seront considérés comme égaux si l'on peut attacher à chaque entourage Ω_2 de S_2 un sous-ensemble

[66] On voit sans peine qu'on peut supposer que $\Omega_1 S_2=0$.

bicompact A_2 de R tel que 1° $SA_2 \subset \Omega_2$; 2° $C_1^{n-p} \sim C_2^{n-p} \bmod \bar{\Omega}_2 A_2$ dans A_2. L'ensemble Γ_2 est aussi un module.

D'après le nº 56, on peut attacher à chaque couple $C^p \in \Gamma_1$, $C^{n-p} \in \Gamma_2$ un nombre $C^p C^{n-p} \in \mathfrak{R}$ de manière que :

$$1^\circ \quad (rC^p)C^{n-p} = C^p(rC^{n-p}) = r(C^p C^{n-p}) \quad \text{pour } r \in \mathfrak{R};$$

$$2^\circ \quad (C_1^p + C_2^p)C^{n-p} = C_1^p C^{n-p} + C_2^p C^{n-p};$$

$$3^\circ \quad C^p(C_1^{n-p} + C_2^{n-p}) = C^p C_1^{n-p} + C^p C_2^{n-p}.$$

En vertu de 56, 4° (v. aussi 59) on voit sans peine que le nombre $C^p C^{n-p}$ est toujours bien déterminé, malgré les conventions que nous venons de faire sur l'égalité de deux éléments de Γ_1 et de Γ_2.

Le but de ce Chapitre est de montrer[67] que, relativement à la multiplication $C^p C^{n-p}$ considérée, *les deux modules Γ_1 et Γ_2 sont duels* (primitifs)[68], c'est-à-dire, outre les propriétés 1°, 2°, 3° déjà énoncées, on a encore les deux suivantes (les égalités $C^p = 0$, $C^{n-p} = 0$ y ont le sens conventionnel adopté) : 4° lorsque le cycle $C^p \in \Gamma_1$ est tel que $C^p C^{n-p} = 0$ pour chaque choix de $C^{n-p} \in \Gamma_2$, on a $C^p = 0$; 5° lorsque le cycle $C^{n-p} \in \Gamma_2$ est tel que $C^p C^{n-p} = 0$ pour chaque choix de $C^p \in \Gamma_1$, on a $C^{n-p} = 0$. La propriété 4° sera démontrée dans le nº 62, la propriété 5° dans le nº 63.

62. Soit A_1 un sous-ensemble bicompact de R tel que $A_1 S \subset S_1$. Soit C^p un (p, R)-cycle $\bmod A_1 S$ dans A_1. Supposons que C^p, considéré comme élément du module Γ_1, soit $\neq 0$. Il existe alors un entourage $\Omega_1 \subset R - S_2$ de S_1 tel que, A_1' étant un sous-ensemble bicompact de R assujetti à la condition $A_1' S \subset S_1$, on n'ait jamais $C^p \sim 0 \bmod A_1' \bar{\Omega}_1$ dans A_1'. On doit prouver qu'il existe un élément C^{n-p} de Γ_2 tel que $C^p C^{n-p} = 1$.

Soit Ω_1' un entourage de S_1 si petit que $\Omega_1' \subset \Omega_1$, $\bar{\Omega}_1' - S \subset \Omega_1$[69]. Posons $A_2 = R - \Omega_1'$ de sorte que A_2 est un sous-ensemble bicompact de R tel que $A_2 S = S_2$. Soit Θ la famille de tous les entourages Ω_2 de S_2 si petits que $A_1 \bar{\Omega}_2 = 0$. Pour chaque $\Omega_2 \in \Theta$, désignons par $\Pi(\Omega_2)$ la famille de tous les $(n-p, R)$-cycles $C^{n-p} \bmod A_2 \bar{\Omega}_2$ dans A_2 et tels que $C^p C^{n-p} = 1$ (v. 59.2 où on remplace F par $A_2 \bar{\Omega}_2$). Lorsque Ω_2, $\Omega_2^* \in \Theta$; $\Omega_2^* \subset \Omega_2$, on voit sans peine (v. 59.2) qu'avec chaque $C^{n-p} \in \Pi(\Omega_2^*)$ il existe un ${}^*C^{n-p} \in \Pi(\Omega_2)$ tel que $C^{n-p} = {}^*C^{n-p} \bmod A_2 \bar{\Omega}_2$. Si $\Pi(\Omega_2) \neq 0$, c'est évidemment un système linéaire (v. *Homologie*, I, 14). D'après le théorème du nº 6.1 (v. aussi 59.2), où on remplace R par A_2 et S par S_2 (ce qui est évidemment permis) il suffit donc de montrer que $\Pi(\Omega_2) \neq 0$ pour chaque $\Omega_2 \in \Theta$.

---

[67] C'est essentiellement le premier théorème de dualité de M. Lefschetz [v. S. Lefschetz, Topology, p. 142, formule (7)].

[68] V. Pontrjagin, Math. Ann., t. 105, 1931, pp. 165–205.

[69] Ω_1' existe, car $R - S_2$ est un espace normal.

Soit donc $\Omega_2 \in \Theta$ et choisissons un entourage Ω'_2 de S_2 si petit que $\Omega'_2 \Subset \Omega_2$. Choisissons un réseau $\mathfrak{Z}$ de la famille Ξ_2 (v. 57 pour $p = 0$ et 58 pour $p \geqq 1$) suffisamment fin pour que les conditions suivantes aient lieu: 1° pour chaque sommet Z de $\mathfrak{Z}$ l'inégalité $Z\Omega'_1 \neq 0$ entraîne que $Z \subset \Omega_1$ ou bien $Z \subset \Omega_2$; 2° chaque sommet extérieur de $\mathfrak{Z}$ est un sous-ensemble de $\Omega'_1 + \Omega'_2$; 3° pour chaque sommet Z de $\mathfrak{Z}$ l'inégalité $Z\Omega'_2 \neq 0$ entraîne que $Z \subset \Omega_2$; 4° il n'existe aucune chaîne $D^{p+1}(\mathfrak{Z})$ dans $R - \overline{\Omega}_2$ telle que $FD^{p+1}(\mathfrak{Z}) = C^p(\mathfrak{Z}) \bmod \overline{\Omega}_1$ (c'est possible, car $C^p \not\sim 0 \bmod A'_1 \overline{\Omega}_1$ dans A_1 pour $A'_1 = R - \Omega_2$); 5° aucun sommet de $\mathfrak{Z}$ ne rencontre simultanément A_1 et $\overline{\Omega}_2$; 6° si l'on a $ZA_2 \neq 0$ et $Z\Omega'_1 \neq 0$ pour un sommet Z de $\mathfrak{Z}_1$ alors $Z \subset \Omega_2$. Choisissons $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$ et supposons que $\mathfrak{U}$ parcoure la famille $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$ (v. 57 pour $p = 0$ et 58 pour $p \geqq 1$).

D'après la propriété 2° du réseau $\mathfrak{Z}$, on a (v. 8) $\overline{R - R_0} \subset \Omega_1 + \Omega_2$. Il existe donc (v. la propriété 5° de $\mathfrak{Z}$) des nombres a_i tels que

$$C^p(\mathfrak{Z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i \sigma_i^p \bmod A_1 \overline{\Omega}_1 \text{ dans } A_1.$$

Posons

$$C^{n-p}(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U})$$

les nombres $b_i \in \mathfrak{R}$ étant assujettis aux conditions suivantes: 1° $b_i = 0$ si σ_i^p possède un sommet σ_j^0 tel que $\sigma_j^0 \Omega'_1 \neq 0$; 2° $\sum_{i=1}^{\alpha_p} \eta_{ji}^p b_i = 0$ pour chaque valeur de j $(1 \leqq j \leqq \alpha_{p+1})$ telle qu'aucun sommet de σ_j^{p+1} ne rencontre Ω'_2; 3° $\sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i b_i = 1$. Supposons pour un moment qu'on puisse vérifier ces conditions. D'après 1°, la chaîne $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ est située dans $R - \Omega'_1 = A_2$. D'après 2°, 19.1, 3° et 19.3 la chaîne $FC^{n-p}(\mathfrak{U})$ est située dans $A_2 \overline{R - R_0} + \sum_j T(\sigma_j^{p+1})$, j parcourant seulement de telles valeurs que σ_j^{p+1} possède un sommet rencontrant Ω'_2 et par suite (v. la propriété 3° de $\mathfrak{Z}$) contenu dans Ω_2; donc $FC^{n-p}(\mathfrak{U}) \subset \Omega_2$ (v. la propriété 6° de $\mathfrak{Z}$). Donc $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ est un $(n-p, \mathfrak{U})$-cycle $\bmod A_2 \overline{\Omega}_2$ dans Ω_2. En faisant varier les $\mathfrak{U}$, on voit (v. 19.2) que les chaînes $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ définissent un $(n-p, R)$-cycle $\bmod A_2 \overline{\Omega}_2$ dans A_2. D'après la propriété 3° des nombres b_i, on a $C^p C^{n-p} = 1$.

Reste à prouver que les conditions posées pour les nombres $b_i \in \mathfrak{R}$ sont réalisables. Il résulte de la théorie élémentaire des équations linéaires que, dans le cas contraire, il existerait des nombres $c_j \in \mathfrak{R}$ $(1 \leqq j \leqq \alpha_{p+1})$ tels que 1° $c_j = 0$ pour chaque valeur de j telle que σ_j^{p+1} possède un sommet rencontrant Ω_2'; 2° pour chaque valeur de i telle qu'aucun sommet de σ_i^p ne rencontre Ω_1' on a

$$a_i = \sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} \eta_{ji}^p c_j.$$

Or des conditions imposées pour $\mathfrak{Z}$ on déduit sans peine que l'on aurait dans ce cas $C^p(\mathfrak{Z}) \sim 0 \mod \overline{\Omega}_1$ dans $R - \Omega_2$ ce qui est une contradiction.

63. Soit A_2 un sous-ensemble bicompact de R tel que $A_2 S \subset S_2$. Soit C^{n-p} un $(n-p, R)$-cycle $\mod A_2 S$ dans A_2. Supposons que C^{n-p}, considéré comme élément du module Γ_2, soit $\neq 0$. Il existe donc un entourage Ω_2 de S_2 tel que, A_2' étant un sous-ensemble bicompact de R assujetti à la condition $A_2' S \subset \Omega_2$, on n'ait jamais $C^{n-p} \sim 0 \mod A_2' \overline{\Omega}_2$ dans A_2'. On doit prouver qu'il existe un élément C^p de Γ_1 tel que $C^p C^{n-p} = 1$.

Soit Ω_2' un entourage de S_2 tel que $\Omega_2' \Subset \Omega_2$. Posons $A_1 = R - \Omega_2'$ de sorte que A_1 est un sous-ensemble bicompact de R tel que $A_1 S \subset S_1$. Il suffit donc de prouver qu'il existe un (p, R)-cycle $C^p \mod A_1 S$ dans A_1 tel que $C^p C^{n-p} = 1$. Or soit Θ la famille de tous les entourages Ω de S si petits que $A_2 \overline{\Omega} \subset \Omega_2'$. Pour chaque $\Omega \in \Theta$, désignons par $\Pi(\Omega)$ la famille de tous les (p, R)-cycles $C^p \mod A_1 \overline{\Omega}$ dans A_1 et tels que $C^p C^{n-p} = 1$ (v. 59.2, où l'on remplace F par $A_1 \overline{\Omega}$). Lorsque $\Omega, \Omega^* \in \Theta$; $\Omega^* \subset \Omega$, on voit sans peine (v. 59.2) qu'à chaque $C^p \in \Pi(\Omega^*)$ il existe un ${}^*C^p \in \Pi(\Omega)$ tel que $C^p = {}^*C^p \mod A_1 \overline{\Omega}$. Si $\Pi(\Omega) \neq 0$, c'est évidemment un système linéaire. D'après le théorème du n° 6.1 (v. aussi 59.2), où l'on remplace R par A_1 et S par $A_1 S$ (ce qui est permis), il suffit donc de montrer que $\Pi(\Omega) \neq 0$ pour chaque $\Omega \in \Theta$.

Soit donc $\Omega \in \Theta$ et choisissons un entourage Ω' de S si petit que $\Omega' \Subset \Omega$. Soit B un entourage de A_2 si petit que $BS \subset \Omega_2'$. Choisissons un réseau $\mathfrak{Z}$ de la famille Ξ_2 (v. 57 pour $p = 0$ et 58 pour $p \geqq 1$). Soit $\mathfrak{z} \in \Xi_2$ un affinement de $\mathfrak{Z}$ si fin que les conditions suivantes aient lieu: 1° pour chaque sommet extérieur z de $\mathfrak{z}$ on a $Bz \subset \Omega_2$; 2° $z \in \mathfrak{z}$, $z\Omega' \neq 0$ entraîne que $z \subset \Omega$; 3° $z \in \mathfrak{z}$, $z \Omega_2' \neq 0$ entraîne que $z \subset \Omega_2$; 4° $\mathfrak{z}$ est un affinement de $\mathfrak{Z}$ normal rel. aux cycles $\mod A_1 \overline{\Omega}$ dans A_1.

Choisissons $\mathfrak{t} \in \Delta(\mathfrak{z})$ et supposons que $\mathfrak{U}$ parcoure la famille $\Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{t})$ (v. 57 pour $p = 0$ et 58 pour $p \geqq 1$). Choisissons une projection $\pi = Pr.(\mathfrak{z}, \mathfrak{Z})$. Construisons le réseau fermé $\mathfrak{T}$ correspondant à $\mathfrak{Z}$ d'après n° 24, en y faisant usage de $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ et π. Employons les notations du n° 24. Evidemment (v. 58.5) on a $\mathfrak{T} \in \Delta(\mathfrak{Z})$, $\Phi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T}) \supset \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{t})$.

D'après 31 et 24 (3), il existe des nombres $b_i \in \mathfrak{R}$[70] tels que

$$C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \sum_{i=1}^{\alpha_p} b_i K^{n-p}(\sigma_i^p, \mathfrak{U}) \sim \sum_{\nu=1}^{\beta_p} b_\nu' k^{n-p}(\tau_\nu^p, \mathfrak{U}) \mod \overline{\Omega}_2 \text{ dans } \overline{B}.$$

[70] On voit sans peine (v. 26) qu'on peut supposer que les nombres b_i soient indépendants du choix de $\mathfrak{U} \in \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{t})$.

nous y avons posé: 1° $b'_\nu = 0$ pour $\gamma_p + 1 \leqq \nu \leqq \beta_p$ ainsi que pour $1 \leqq \nu \leqq \gamma_p$, $\pi\tau^p_\nu = 0$; 2° $b'_\nu = b_i$ pour $1 \leqq \nu \leqq \gamma_p$, $\pi\tau^p_\nu = \sigma^p_i$. Posons

$$C^p(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu=1}^{\beta_p} a'_\nu \tau^p_\nu,$$

les nombres $a'_\nu \in \mathfrak{R}$ étant assujettis aux conditions suivantes: 1° $a'_\nu = 0$ si un sommet de τ^p_ν rencontre Ω'_2; 2° $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} \zeta^{p-1}_{\nu\mu} a'_\nu = 0$ pour chaque valeur de μ $(1 \leqq \mu \leqq \beta_{p-1})$ telle qu'aucun sommet de τ^{p-1}_μ ne rencontre Ω'[71]; 3° $\sum_{\nu=1}^{\beta_p} a'_\nu b'_\nu = 1$. Supposons pour un moment qu'on puisse vérifier ces conditions. D'après 1°, la chaîne $C^p(\mathfrak{z})$ est située dans $R - \Omega'_2 = A_1$; d'après 2°, chaque simplexe de la chaîne $FC^p(\mathfrak{z})$ possède un sommet rencontrant Ω' de sorte que la chaîne $FC^p(\mathfrak{z})$ est située dans Ω en vertu de la propriété 2° du réseau $\mathfrak{z}$. Donc $C^p(\mathfrak{Z}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i \sigma^p_i$ est un $(p, \mathfrak{Z})$-cycle essentiel (v. la propriété 4° de $\mathfrak{z}$) mod $A_1 \overline{\Omega}$ dans A_1. On voit sans peine que $\sum_{i=1}^{\alpha_p} a_i b_i = 1$. Il existe donc un (p, R)-cycle C^p mod $A_1 \overline{\Omega}$ dans A_1 et tel que $C^p C^{n-p} = 1$, c. q. f. d.

Reste à prouver que les conditions posées pour les nombres a'_ν sont réalisables. On voit sans peine que, dans le cas contraire, on pourrait déterminer des nombres $c_\mu \in \mathfrak{R}$ $(1 \leqq \mu \leqq \beta_{p-1})$ tels que: 1° $c_\mu = 0$ si le simplexe τ^{p-1}_μ possède un sommet rencontrant Ω'; 2° $b'_\nu = \sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} \zeta^{p-1}_{\nu\mu} c_\mu$ pour chaque valeur de ν $(1 \leqq \nu \leqq \beta_p)$ telle qu'aucun sommet de τ^p_ν ne rencontre Ω'_2[72]. Or d'après 1°, la chaîne

$$D^{n-p+1}(\mathfrak{U}) = \sum_{\mu=1}^{\beta_{p-1}} c_\mu k^{n-p+1}(\tau^{p-1}_\mu, \mathfrak{U})$$

serait située dans $R - \Omega'$ et d'après 2° on aurait, en tenant compte de la propriété 3° du réseau $\mathfrak{z}$,

$$FD^{n-p+1}(\mathfrak{U}) = \sum_{\nu=1}^{\beta_p} b'_\nu k^{n-p}(\tau^p_\nu, \mathfrak{U}) \quad \text{mod } \overline{\Omega}_2\,^{73}.$$

---

[71] Cette condition n'exige rien si $p = 0$.

[72] Pour $p = 0$: On aurait $b'_\nu = 0$ pour chaque valeur de ν $(1 \leqq \nu \leqq \beta_0)$ telle que $\tau^0_\nu \Omega'_2 = 0$.

[73] Pour $p = 0$: On aurait $\sum_{\nu=1}^{\beta_0} b'_\nu k^n(\tau^0_\nu, \mathfrak{U}) = 0$ mod $\overline{\Omega}_2$.

Donc on aurait $C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod \overline{\Omega}_2$ dans $R - \Omega'$ et par suite, la famille $\Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{t})$ étant complète, $C^{n-p} \sim 0 \bmod A'_2\, \Omega_2$ dans A'_2 pour $A'_2 = R - \Omega'$, ce qui est une contradiction.

64. Pour $S = S_2$, Γ_2 est (v. 6.2) le $(n-p)^{\text{ème}}$ groupe de Betti de l'espace R mod S. En désignant par $\varkappa$ la famille de tous les sous-ensembles bicompacts de $R - S$, on voit sans peine que, dans le cas actuel $S = S_2$, Γ_1 est le $p^{\text{ème}}$ groupe de Betti *bicompact* (= d'espèce $\varkappa$ au sens de l'*Homologie*, V, 9) de l'espace $R - S$. Pareillement, pour $S_2 = 0$, Γ_2 est le $(n-p)^{\text{ème}}$ groupe de Betti bicompact de $R - S$ et Γ_1 est le $p^{\text{ème}}$ groupe de Betti de R mod S.

Donc, *pour $q = p$ ou $q = n - p$, le $q^{\text{ème}}$ groupe de Betti de l'espace R mod S est duel au $(n-q)^{\text{ème}}$ groupe de Betti bicompact de l'espace $R - S$.*

VIII.

65. *Soit $0 \leqq p \leqq \frac{n-1}{2}$. Supposons la validité de tous les axiomes du Chap. I et II ainsi que celle des axiomes G^k (v. 21) pour $n - p \leqq k \leqq n - 1$ et des axiomes H^k (v. 27) pour $n - p - 1 \leqq k \leqq n - 2$. Alors les axiomes G^k $(0 \leqq k \leqq p)$ sont aussi vérifiés.*

Démonstration. Il suffit de montrer la validité de G^p (pour G^k on remplace p par k). Soit donc $a \in R - S$. On doit prouver qu'à chaque entourage $U \subset R - S$ de A on peut attacher un entourage V tel que chaque (p, R)-cycle dans $\overline{V}$ est ~ 0 dans $\overline{U}$. Or il suffit de prouver que l'entourage V de a peut être choisi de telle sorte que chaque (p, R)-cycle dans $\overline{V}$ soit ~ 0 dans un sous-ensemble bicompact de $R - S$. En effet, le cas général s'en déduit en remplaçant S par $R - U$, ce qui est sans influence sur la validité de nos axiomes.

Soit donc $a \in R - S$; soit $U \Subset R - S$ un entourage de a; soit Ω un entourage de S si petit que $\overline{U}\,\overline{\Omega} = 0$. C^p étant un (p, R)-cycle dans $\overline{U}$ et C^{n-p} étant un $(n-p, R)$-cycle mod S, pour calculer le nombre $C^p\, C^{n-p}$ on peut (v. 59.2) remplacer C^{n-p} par un $(n-p, R)$-cycle C_1^{n-p} mod $\overline{\Omega}$ homologue à C^{n-p} mod $\overline{\Omega}$. Il existe évidemment un réseau $\mathfrak{Z}$ et un réseau fermé $\mathfrak{T}$ correspondant qui soient tels que: 1° l'énoncé du n° 31 est vrai pour $A = B = R$; 2° $R - R_0 \subset \Omega$; 3° le point a appartient à un sommet unique (nécessairement intérieur) de $\mathfrak{Z}$ de manière que $a \in R_0 - R_1$ (dans les notations de 8). Ceci étant, on peut (d'après 31) attacher à chaque C^{n-p} un $C_1^{n-p} \sim C^{n-p}$ mod $\overline{\Omega}$ de manière que (v. 19.3) C_1^{n-p} soit un $(n-p, R)$-cycle mod $\overline{\Omega}$ dans R_p. Or soit V un entourage de a si petit que $\overline{V} \subset R - \overline{\Omega} - R_1$; si C^p est un (p, R)-cycle dans $\overline{V}$, on a, en excluant d'abord le cas $p = 0$, $C^p\, C^{n-p} = 0$ d'après 59.1 et par suite aussi $C^p\, C^{n-p} = 0$ pour chaque choix du $(n-p, R)$-cycle C^{n-p} mod S. D'après 62 (où on pose $S_2 = S$;

v. 64) il en résulte que $C^p \sim 0$ dans un sous-ensemble bicompact de $R-S$, pour chaque choix du (p, R)-cycle C^p dans $\overline{V}$, c. q. f. d.

Dans le cas $p=0$ le raisonnement précédant ne s'applique plus. Or on peut alors (v. 14.1 et 17.5) déterminer un entourage $U \Subset R-S$ de a de manière qu'on puisse attacher à chaque (n, R)-cycle C^n mod S un nombre $r \in \mathfrak{R}$ de manière que $C^n - rG^n \sim 0$ mod $R-\overline{U}$. Soit V un entourage de a tel que $V \Subset U$. Pour chaque 0-cycle C^0 dans $\overline{V}$ on a alors $C^0(C^n - rG^n) = 0$ d'après 59.1 (v. aussi 59.2). Il en résulte que si C^0 est tel que $C^0 G^n = 0$ on a $C^0 C^n = 0$ pour chaque (n, R)-cycle C^n mod S. Il suffit donc de montrer que $I(C^0) = 0$ (v. [38]) entraîne que $C^0 G^n = 0$. Or soit C^0_a le $(0, R)$-cycle (dans $\overline{V}$) correspondant (v. *Homologie*, III, 17) au point a. Posons $C^0_a G^n = s$. On a $s \neq 0$; en effet, dans le cas contraire, on aurait $C^0_a C^n = 0$ pour chaque C^n et par suite, d'après 62 avec $S_2 = S$ (v. aussi 64) $C^0_a \sim 0$ dans un sous-ensemble bicompact de R, ce qui entraînerait, comme on sait, que $I(C^0_a) = 0$, tandis que, évidemment, $I(C^0_a) = 1$. Puisque $s \neq 0$, on peut attacher à chaque 0-cycle C^0 dans $\overline{V}$ un nombre $t \in \mathfrak{R}$ tel que $(C^0 - tC^0_a)G^n = 0$, ce qui entraîne que $C^0 - tC^0_a \sim 0$ dans un sous-ensemble bicompact de R, d'où $I(C^0 - tC^0_a) = 0$. Or $I(C^0 - tC^0_a) = I(C^0) - tI(C^0_a) = I(C^0) - t$, donc $t = I(C^0)$. Par suite $I(C^0) = 0$ entraîne que $t = 0$, d'où $C^0 G^n = 0$, c.q.f.d.

65.1 *Les axiomes des Chap. I et II entraînent que l'espace $R-S$ est localement connexe.*

Cela résulte de 65 (avec $p=0$), car l'axiome G^0 équivaut évidemment (v. *Homologie*, III, 14—18) à la connexité locale de $R-S$.

66. *Soit $0 \leqq p \leqq \frac{n}{2} - 1$. Supposons la validité de tous les axiomes des Chap. I et II ainsi que celle des axiomes G^k (v. 21) pour $n-p \leqq k \leqq n-1$ et des axiomes H^k (v. 27) pour $n-p-1 \leqq k \leqq n-2$. Alors les axiomes H^k $(0 \leqq k \leqq p)$ sont aussi vérifiés.*

La démonstration sera donnée au n° 66.2.

66.1. Lemme. Soit $0 \leqq p \leqq n-2$. Supposons que R soit un espace normal et que $S = \overline{S} \subset R$. Supposons la validité de l'axiome G^{n-p-1} (v. 21). Soit $a \in R-S$. Soit $U \Subset R-S$ un entourage de a. Il existe un entourage $V \Subset U$ de a jouissant de la propriété suivante: Soit C^{n-p} un $(n-p, R)$-cycle mod $(S+\overline{V})$; il existe un $(n-p, R)$-cycle C_1^{n-p} mod S et un $(n-p, R)$-cycle C_2^{n-p} mod $\overline{V}$ dans $\overline{U}$ tels que $C^{n-p} \sim C_1^{n-p} + C_2^{n-p}$ mod $S + \overline{V}$.

Démonstration. D'après l'axiome G^{n-p-1}, déterminons l'entourage $V \Subset U$ de manière que l'on ait $\Gamma^{n-p-1} \sim 0$ dans $\overline{U}$ pour chaque $(n-p-1, R)$-cycle Γ^{n-p-1} dans $\overline{V}$. Soit Φ la famille (complète) de tous les réseaux dont aucun sommet ne rencontre simultanément $\overline{V}$ et S. Pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$, on a

$$FC^{n-p}(\mathfrak{U}) = \Gamma_1^{n-p-1}(\mathfrak{U}) + \Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U}),$$

où $\Gamma_1^{n-p-1}(\mathfrak{U})$ $[\Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U})]$ est un $(n-p-1, \mathfrak{U})$-cycle dans S [dans $\overline{V}$]. Lorsque $\mathfrak{V} \in \Phi$ est un affinement de $\mathfrak{U} \in \Phi$, on a, en posant $\pi = Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, $\pi\, C^{n-p}(\mathfrak{V}) \sim C^{n-p}(\mathfrak{U}) \bmod (S + \overline{V})$. Il existe donc une $(n-p+1, \mathfrak{U})$-chaîne $E^{n-p+1}(\mathfrak{U})$ et deux $(n-p, \mathfrak{U})$-chaînes $E_1^{n-p}(\mathfrak{U})$, $E_2^{n-p}(\mathfrak{U})$ telles que $E_1^{n-p}(\mathfrak{U}) \subset S$, $E_2^{n-p}(\mathfrak{U}) \subset \overline{V}$ et

$$\pi\, C^{n-p}(\mathfrak{V}) - C^{n-p}(\mathfrak{U}) = FE^{n-p+1}(\mathfrak{U}) + E_1^{n-p}(\mathfrak{U}) + E_2^{n-p}(\mathfrak{U}),$$

d'où

$$\begin{aligned} &\pi\, \Gamma_1^{n-p-1}(\mathfrak{V}) - \Gamma_1^{n-p-1}(\mathfrak{U}) - FE_1^{n-p}(\mathfrak{U}) \\ &= \pi\, \Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{V}) - \Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U}) - FE_2^{n-p}(\mathfrak{U}). \end{aligned}$$

Or la chaîne à gauche (à droite) est située dans S (dans $\overline{V}$); d'après la définition de la famille Φ, on en déduit que chacune de ces deux chaînes est égale à zéro, d'où $\pi\, \Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{V}) \sim \Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U})$ dans $\overline{V}$. Il en résulte que $\Gamma_2^{n-p-1} = \{\Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U})\}$ est un $(n-p-1, R)$-cycle dans $\overline{V}$. D'après la définition de V, il existe donc pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$ une $(n-p, \mathfrak{U})$-chaîne dans $\overline{U}$ dont la frontière est égale à $\Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U})$. Pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$, soit $L_2^{n-p}(\mathfrak{U})$ la famille de tous les $(n-p, \mathfrak{U})$-cycles $C_2^{n-p}(\mathfrak{U}) \bmod \overline{V}$ dans $\overline{U}$ tels que $FC_2^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U})$ dans $\overline{V}$. Nous venons de voir que $L_2^{n-p}(\mathfrak{U}) \neq 0$ pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$. On voit sans peine que $L_2^{n-p}(\mathfrak{U})$ est un système linéaire et que $\pi\, L_2^{n-p}(\mathfrak{V}) \subset L_2^{n-p}(\mathfrak{U})$. D'après *Homologie*, II, 21, on peut donc choisir $C_2^{n-p}(\mathfrak{U}) \in L_2^{n-p}(\mathfrak{U})$ pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$ de manière que $C_2^{n-p} = \{C_2^{n-p}(\mathfrak{U})\}$ soit un $(n-p, R)$-cycle mod $\overline{V}$ dans $\overline{U}$. Puisque $C_2^{n-p}(\mathfrak{U}) \in L_2^{n-p}(\mathfrak{U})$, il existe pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$ une $(n-p, \mathfrak{U})$-chaîne $D_2^{n-p}(\mathfrak{U})$ dans $\overline{V}$ telle que

$$FC_2^{n-p}(\mathfrak{U}) = \Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U}) + FD_2^{n-p}(\mathfrak{U}).$$

Le cycle C_2^{n-p} étant déterminé, il s'agit encore de démontrer l'existence de C_1^{n-p}. Or désignons pour $\mathfrak{U} \in \Phi$ par $L_1^{n-p}(\mathfrak{U})$ la famille de tous les $(n-p, \mathfrak{U})$-cycles $C_1^{n-p}(\mathfrak{U}) \bmod S$ tels que :

$$C^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim C_1^{n-p}(\mathfrak{U}) + C_2^{n-p}(\mathfrak{U}) \quad \bmod (S + \overline{V}).$$

En supposant pour un moment que $L_1^{n-p}(\mathfrak{U}) \neq 0$, on voit sans peine que c'est un système linéaire. Or on a évidemment $\pi\, L_1^{n-p}(\mathfrak{V}) \subset L_1^{n-p}(\mathfrak{U})$. Il résulte donc de l'*Homologie*, II, 21 que le cycle C_1^{n-p} existe. On doit encore démontrer que $L_1^{n-p}(\mathfrak{U}) \neq 0$; c'est évident, car on voit sans peine que

$$C^{n-p}(\mathfrak{U}) - C_2^{n-p}(\mathfrak{U}) + D_2^{n-p}(\mathfrak{U}) \in L_1^{n-p}(\mathfrak{U}).$$

66.2. Passons à la démonstration du théorème du n° 66. Il suffit de démontrer la validité de l'axiome H^p. Il suffit même de prouver l'énoncé E suivant : Soit $a \in R - S$; soit $P_1 \Subset R - S$ un entourage donné de a. A chaque entourage $P_2 \subset P_1$ de a on peut attacher un entourage $P_3 \subset P_2$ de a de manière que : Si C^p est un (p, R)-cycle dans $\overline{P}_1 - P_2$ tel que $C^p \sim 0$ dans un sous-ensemble bicompact de $R - S$, on ait aussi $C^p \sim 0$ dans un sous-ensemble bicompact de $R - (S + \overline{P}_3)$. En effet, d'une part, l'axiome H^p, sous la forme énoncée au n° 27, est une conséquence de E si $P = R - S$; d'autre part, en remplaçant S par $R - P$ (et donc $R - S$ par P) on ne détruit pas la validité des axiomes supposés vrais au n° 66.

Soit donc $a \in R - S$ et soient P_1, P_2 deux entourages de a tels que $P_2 \subset P_1 \Subset R - S$. Choisissons un entourage $U \Subset P_2$ de a et déterminons l'entourage $V = P_3$ de a d'après 66.1. Soit C^p un (p, R)-cycle dans $\overline{P}_1 - P_2$ tel que $C^p \sim 0$ dans un sous-ensemble bicompact de $R - S$. D'après 64, on a $C^p C^{n-p} = 0$ pour chaque $(n-p, R)$-cycle C^{n-p} mod S. On doit prouver que $C^p \sim 0$ dans un sous-ensemble bicompact de $R - (S + \overline{P}_3)$. Or le théorème du n° 64 reste évidemment vrai en y remplaçant S par $S + \overline{P}_3$ (car les axiomes dont on a déduit ce théorème restent vrais). Or on a évidemment $\overline{P}_1 - P_2 \subset R - (S + \overline{P}_3)$ de sorte qu'il suffit de prouver que $C^p C^{n-p} = 0$ pour chaque $(n-p, R)$-cycle C^{n-p} mod $(S + \overline{P}_3)$. D'après 66.1 il existe un $(n-p, R)$-cycle C_1^{n-p} et un $(n-p, R)$-cycle C_2^{n-p} mod $\overline{P}_3$ dans $\overline{U}$ tel que

$$C^{n-p} \sim C_1^{n-p} + C_2^{n-p} \quad \mathrm{mod}\,(S + \overline{P}_3).$$

On a donc (v. 56, 3° et 4°)

$$C^p C^{n-p} = C^p C_1^{n-p} + C^p C_2^{n-p}.$$

Or nous savons que $C^p C_1^{n-p} = 0$; d'autre part, $C^p C_2^{n-p} = 0$ d'après 59.1, car $C^p \subset \overline{P}_1 - P_2$, $C_2^{n-p} \subset \overline{U}$, $\overline{U}(\overline{P}_1 - P_2) = 0$.

67. Faisons les hypothèses du n° 55. Il se peut qu'il existe un nombre infini de $(n-p, R)$-cycles mod S lin. indépendants mod S (c'est-à-dire tels qu'aucune combinaison linéaire de ces cycles ne soit ~ 0 mod S); or il résulte du théorème du n° 31 que, Ω étant un entourage donné de S, il n'existe qu'un nombre fini de $(n-p, R)$-cycles mod S lin. indépendants mod $\overline{\Omega}$; autrement dit, Ω étant donné, on peut indiquer un nombre fini de $(n-p, R)$-cycles mod S tels que chaque $(n-p, R)$-cycle mod S soit homologue mod S à une combinaison linéaire de ces cycles donnés, augmentée d'un $(n-p, R)$-cycle mod S dans $\overline{\Omega}$.

Pareillement il peut exister un nombre infini de $(n-p, R)$-cycles absolus, dont chacun est situé dans un sous-ensemble bicompact de $R - S$, et tels qu'aucune combinaison linéaire de ces cycles ne soit homologue à zéro dans un sous-ensemble bicompact de $R - S$. Mais, A étant un sous-ensemble bicompact de $R - S$ donné, il existe un nombre fini de $(n-p, R)$-cycles dans A tels que chaque $(n-p, R)$-cycle situé dans A soit homologue à une combinaison linéaire de ces cycles dans un sous-ensemble bicompact de $R-S$.

Du théorème du n° 64 on déduit (v. 59.1) que ces remarques restent vraies en remplaçant p par $n-p$.

Supposons en particulier que $S=0$. Alors l'ensemble $R-S=R$ lui même est bicompact, et par suite le $p^{\text{ème}}$, ainsi que le $(n-p)^{\text{ème}}$ nombre de Betti de R est fini. Ces deux nombres sont égaux l'un à l'autre d'après 64 *(théorème de dualité de Poincaré).*

68. Soit $0 \leqq p \leqq n-1$. Supposons la validité des axiomes énumérés au n° 55, en y remplaçant S par 0.

Soit S un sous-ensemble bicompact de R. Soit Δ_1 l'ensemble de tous les (p, R)-cycles C^p dans A homologues à zéro dans R, où A parcourt la classe K de tous les sous-ensembles bicompacts de $R-S$; considérons deux éléments C_1^p, C_2^p de Δ_1 comme égaux si l'on peut déterminer $A \in K$ de manière que $C_1^p \sim C_2^p$ dans A. Soit Δ_2 l'ensemble de tous les $(n-p-1, R)$-cycles Γ^{n-p-1} dans S homologues à zéro dans R; deux éléments Γ_1^{n-p-1}, Γ_2^{n-p-1} de Δ_2 seront considérés comme égaux si $\Gamma_1^{n-p-1} \sim \Gamma_2^{n-p-1}$ dans S.

Nous allons définir une multiplication $C^p \times \Gamma^{n-p-1}$ rel. à laquelle les deux modules Γ_1 et Γ_2 sont duels (*théorème de dualité de M. Pontrjagin*[74]).

Soit $\Gamma^{n-p-1} \in \Delta_2$. Pour chaque réseau $\mathfrak{U}$, il existe un système linéaire $L^{n-p}(\mathfrak{U})$ de $(n-p, \mathfrak{U})$-cycles $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ dans R tels que $FC^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-p-1}(\mathfrak{U})$ dans S. De l'*Homologie* II, 21 on déduit sans peine qu'on peut choisir $C^{n-p}(\mathfrak{U}) \in L^{n-p}(\mathfrak{U})$ de manière que $C^{n-p} = \{C^{n-p}(\mathfrak{U})\}$ soit un $(n-p, R)$-cycle dans S. Posons $C^{n-p} = \varphi(\Gamma^{n-p-1})$; la fonction φ n'est pas du reste univoque. Ceci étant, posons

$$C^p \times \Gamma^{n-p-1} = C^p\, \varphi(\Gamma^{n-p-1}).$$

Les propriétés 1°, 2°, 3° dans la définition de dualité de deux modules (n° 61) sons évidentes. Reste à montrer: A_1: le produit $C^p \times \Gamma^{n-p-1}$ est univoquement déterminé; A_2: si $C^p \in \Delta_1$ jouit de la propriété que $C^p \times \Gamma^{n-p-1} = 0$ pour chaque $\Gamma^{n-p-1} \in \Delta_2$, on a $C^p = 0$; A_3: si $\Gamma^{n-p-1} \in \Delta_2$ jouit de la propriété que $C^p \times \Gamma^{n-p-1} = 0$ pour chaque $C^p \in \Delta_1$, on a $\Gamma^{n-p-1} = 0$.

Démonstration de A_1. Soit

$$C_1^p = C_2^p, \quad \Gamma_1^{n-p-1} = \Gamma_2^{n-p-1},$$

$$C_1^{n-p} = \varphi(\Gamma_1^{n-p-1}), \quad C_2^{n-p} = \varphi(\Gamma_2^{n-p-1}).$$

On doit prouver que

$$C_1^p\, C_1^{n-p} = C_2^p\, C_2^{n-p}.$$

[74] Göttinger Nachrichten, 1928, p. 448 (Satz I).

L'égalité $C_1^p = C_2^p$ signifie qu'il existe un sous-ensemble bicompact A de $R-S$ tel que $C_1^p - C_2^p \sim 0$ dans A. Donc d'après 64, on a $(C_1^p - C_2^p)C_2^{n-p} = 0$, car C_2^{n-p} est un $(n-p, R)$-cycle mod S. Reste à prouver que $C_1^p(C_1^{n-p} - C_2^{n-p}) = 0$. Or l'égalité $\Gamma_1^{n-p-1} = \Gamma_2^{n-p-1}$ signifie que $\Gamma_1^{n-p-1} \sim \Gamma_2^{n-p-1}$ dans S. D'autre part, dans chaque réseau $\mathfrak{U}$ on a $FC_1^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \Gamma_1^{n-p-1}(\mathfrak{U})$ dans S, $FC_2^{n-p}(\mathfrak{U}) \sim \Gamma_2^{n-p-1}(\mathfrak{U})$ dans S d'où il résulte qu'on peut déterminer une $(n-p, \mathfrak{U})$-chaîne $D^{n-p}(\mathfrak{U})$ dans S telle que $C_1^{n-p}(\mathfrak{U}) - C_2^{n-p}(\mathfrak{U}) - D^{n-p}(\mathfrak{U}) \to 0$. Pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ désignons par $L^{n-p}(\mathfrak{U})$ la famille de tous les $(n-p, \mathfrak{U})$-cycles absolus de la forme

$$C_1^{n-p}(\mathfrak{U}) - C_2^{n-p}(\mathfrak{U}) - D^{n-p}(\mathfrak{U}) + E^{n-p}(\mathfrak{U}) + FH^{n-p+1}(\mathfrak{U}),$$

où $E^{n-p}(\mathfrak{U})$ parcourt tous les $(n-p, \mathfrak{U})$-cycles dans S tandis que $H^{n-p+1}(\mathfrak{U})$ parcourt toutes les $(n-p+1, \mathfrak{U})$-chaînes. D'après *Homologie*, II, 21 on voit sans peine qu'il est possible de choisir $C^{n-p}(\mathfrak{U}) \in L^{n-p}(\mathfrak{U})$ de manière que $C^{n-p} = \{C^{n-p}(\mathfrak{U})\}$ soit un $(n-p, R)$-cycle (absolu). Evidemment $C^{n-p} \sim C_1^{n-p} - C_2^{n-p} \bmod S$, d'où $C_1^p(C_1^{n-p} - C_2^{n-p}) = C_1^p C^{n-p}$, de sorte qu'on doit seulement prouver que $C_1^p C^{n-p} = 0$, ce qui résulte de 64 (en y remplaçant S par 0), car $C_1^p \sim 0 \bmod R$.

Démonstration de A_2. Supposons que le cycle $C^p \in \Delta_1$ ne soit homologue à zéro dans aucun sous-ensemble bicompact de $R-S$. On doit prouver qu'il existe un $\Gamma^{n-p-1} \in \Delta_2$ tel que $C^p \times \Gamma^{n-p-1} = 1$. Or d'après 64 il existe un $(n-p, R)$-cycle $C^{n-p} \bmod S$ tel que $C^p C^{n-p} = 1$. Pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ soit $\Gamma^{n-p-1}(\mathfrak{U}) = FC^{n-p}(\mathfrak{U})$. On voit sans peine que $\Gamma^{n-p-1} = \{\Gamma^{n-p-1}(\mathfrak{U})\}$ est un élément de Δ_2 tel que $C^{n-p} = \varphi(\Gamma^{n-p-1})$, d'où $C^p \times \Gamma^{n-p-1} = 1$.

Démonstration de A_3. Supposons que le cycle $\Gamma^{n-p-1} \in \Delta_2$ ne soit pas homologue à zéro dans S. Soit $C_0^{n-p} = \varphi(\Gamma^{n-p-1})$. On doit prouver qu'il existe un $C_0^p \in \Delta_1$ tel que $C^p C_0^{n-p} = 1$. On voit sans peine que le $(n-p, R)$-cycle $C^{n-p} \bmod S$ n'est homologue mod S à aucun $(n-p, R)$-cycle absolu. Supposons par impossible que, pour chaque réseau $\mathfrak{U}$, le $(n-p, \mathfrak{U})$-cycle mod S: $C^{n-p}(\mathfrak{U})$ soit homologue mod S à un $(n-p, \mathfrak{U})$-cycle absolu $B^{n-p}(\mathfrak{U})$; désignons par $L^{n-p}(\mathfrak{U})$ la famille de tous ces $B^{n-p}(\mathfrak{U})$; de l'*Homologie*, II, 21 on déduit sans peine qu'on peut choisir $B^{n-p}(\mathfrak{U}) \in L^{n-p}(\mathfrak{U})$ de manière que $B^{n-p} = \{B^{n-p}(\mathfrak{U})\}$ soit un $(n-p, R)$-cycle absolu, d'où il résulte la contradiction $C_0^{n-p} \sim B^{n-p} \bmod S$.

Soit donc $\mathfrak{U}_0$ un réseau tel que $C_0^{n-p}(\mathfrak{U})$ ne soit homologue mod S à aucun $(n-p, \mathfrak{U}_0)$-cycle absolu; on voit sans peine (v. la démonstration de 6.1) qu'il existe un entourage Ω de S tel que, dans le réseau $\mathfrak{U}_0$, les frontières, cycles, homologies mod S soient les mêmes comme mod $\bar{\Omega}$. Donc $C_0^{n-p}(\mathfrak{U})$ n'est homologue mod $\bar{\Omega}$ à aucun $(n-p, \mathfrak{U}_0)$-cycle absolu; par suite C_0^{n-p} n'est homologue mod $\bar{\Omega}$ à aucun $(n-p, R)$-cycle absolu.

D'après 67, il existe un ensemble fini τ de $(n-p,\ R)$-cycles mod S tel que chaque $(n-p,\ R)$-cycle mod S soit homologue mod S à une combinaison linéaire de ces cycles, augmentée d'un $(n-p,\ R)$-cycle mod S dans $\overline{\Omega}$, tandis qu'aucune combinaison linéaire de ces cycles ne soit $\sim 0 \bmod \overline{\Omega}$. On voit sans peine qu'on peut supposer que le cycle C_0^{n-p} appartienne à la famille τ; en outre, on peut supposer que la famille τ contienne des cycles C_1^{n-p}, $C_2^{n-p}, \cdots, C_h^{n-p}$ $(h = 0, 1, 2, \cdots)$ tels qu'un $(n-p,\ R)$-cycle mod S est $\sim \sum_{i=1}^{h} a_i C_i^{n-p} \bmod \Omega$ si et seulement s'il est homologue mod $\overline{\Omega}$ à un $(n-p,\ R)$-cycle absolu. Soit

$$C_0^{n-p},\ C_1^{n-p},\ \cdots,\ C_h^{n-p},\ C_{h+1}^{n-p},\ \cdots,\ C_k^{n-p}$$

$0 \leqq h \leqq k)$ la famille τ. K_0 étant la famille de tous les sous-ensembles bicompacts de $R-\overline{\Omega}$, il résulte facilement de 64 (où l'on remplace S par $\overline{\Omega}$) qu'il existe des $(p,\ R)$-cycles absolus

$$C_0^p,\ C_1^p,\ \cdots,\ C_h^p,\ C_{h+1}^p,\ \cdots,\ C_k^p,$$

C_i^p $(0 \leqq i \leqq k)$ étant situé dans $A_i \in K_0$, tels que pour $0 \leqq i \leqq k$, $0 \leqq j \leqq k$: $C_i^p\, C_j^{n-p} = 1$ pour $i = j$, $= 0$ pour $i \neq j$.

Je dis que C_0^p est l'élément cherché du module Δ_1. Puisque $C_0^p\, C_0^{n-p} = 1$, il faut seulement démontrer que $C_0^p \sim 0$ dans R. D'après 64, il suffit de prouver que $C_0^p\, C^{n-p} = 0$ pour chaque $(n-p,\ R)$-cycle absolu C^{n-p}. Or d'après ce que nous venons de dire, il existe des nombres $a_i \in \mathfrak{R}$ et un $(n-p,\ R)$-cycle ${}^*C^{n-p}$ mod S dans $\overline{\Omega}$ tels que

$$C^{n-p} \sim \sum_{i=1}^{h} a_i C_i^{n-p} + {}^*C^{n-p} \quad \bmod S,$$

d'où

$$C_0^p\, C^{n-p} = \sum_{i=1}^{h} a_i C_0^p\, C_i^{n-p} + C_0^p\, {}^*C^{n-p}.$$

Or nous savons que $C_0^p\, C_i^{n-p} = 0$ pour $1 \leqq i \leqq h$; d'autre part, $C_0^p\, {}^*C^{n-p} = 0$, car $C_0^p \subset A_0$, ${}^*C^{n-p} \subset \overline{\Omega}$, $A_0 \overline{\Omega} = 0$.

Remarque. Soit $\delta_i = 1$ pour $i = 0$, $\delta_i = 0$ pour $i \geqq 1$. Supposons que le $p^{\text{ème}}$ et le $(n-p-1)^{\text{ème}}$ nombre de Betti de l'espace R soient resp. égaux à δ_p et à δ_{n-p-1}. Alors Γ_1 est le module de tous les $(p,\ R)$-cycles C^p bicompacts dans $R-S$ (tels que $I(C^p) = 0$ si $p = 0$) tandis que Γ_2 est le module de tous les $(n-p-1,\ R)$-cycles C^{n-p-1} dans S (tels que $I(C^{n-p-1}) = 0$ si $n-p-1 = 0$). Le fait que les deux modules Γ_1 et Γ_2 sont duels constitue *le théorème de dualité de M. Alexander.*

69. Faisons l'hypothèse du n° 55. Soit Γ_1 l'ensemble de tous les $(p,\ R)$-cycles absolu dans A, où A parcourt tous les sous-ensembles bicompacts de $R-S$; deux éléments C_1^p, C_2^p seront considérés comme égaux si $C_1^p \sim C_2^p$

mod S. Soit Γ_2 l'ensemble qui s'obtient de Γ_1 en remplaçant p par $n-p$. On voit sans peine (v. 56, 4°) que le produit $C^p C^{n-p}$ où $C^p \in \Gamma_1$, $C^{n-p} \in \Gamma_2$, est bien déterminé malgré les conventions faites sur l'égalité de deux éléments de Γ_1 ou de Γ_2. En procédant comme dans les n^{os} 62 et 63, on démontre sans peine que les deux modules Γ_1 et Γ_2 sont duels relativement à la multiplication $C^p C^{n-p}$. C'est *le second théorème de dualité de M. Lefschetz*[75].

70. Soient A_1 et A_2 deux sous-ensembles de $R-S$, fermés dans $R-S$ et tels que $\overline{A_1 A_2} \subset R-S$. Soit C^p un (p, R)-cycle mod $\bar{A}_1 S$ dans A_1 ; soit C^{n-p} un $(n-p, R)$-cycle mod $\bar{A}_2 S$ dans $\bar{A}_2$. On voit sans peine qu'on peut étendre la définition du produit $C^p C^{n-p}$ du Chap. VII (qui a été exposée seulement sous l'hypothèse $\bar{A}_1 \bar{A}_2 = 0$) au cas plus général ici envisagé, et que les propriétés 1°, 2°, 3°, 4° du n° 61 restent vraies.

Sous la forme ainsi généralisée, le produit $C^p C^{n-p}$ ne dépend évidemment (cf. 6.3) que de l'espace $R-S$ (et de son orientation).

On pourrait aussi généraliser le théorème général de dualité du n° 61 en lui donnant une forme qui ne dépend plus que de l'espace $R-S$[76]. Nous omettons de le faire, car on n'arrive qu'à un énoncé fort compliqué et peu susceptible d'applications ; d'ailleurs, il est évident que l'important théorème de dualité du n° 64 exprime une propriété topologique de l'espace $R-S$ (v. 6.3).

---

[75] S. Lefschetz, Topology, p. 149, formule (20).

[76] Cf. Lefschetz, Topology, p. 314, formule (18).