Eduard Čech

Úvod do theorie homologie

Spisy Přírod. Fak. Univ. Brno 184 (1933), 36 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501021

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1933 | ČÍS. 184

ÚVOD DO THEORIE HOMOLOGIE

(INTRODUCTION À LA THÉORIE DE L'HOMOLOGIE)

NAPSAL

EDUARD ČECH

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

ÚVOD DO THEORIE HOMOLOGIE.

(AVEC UN RÉSUMÉ EN FRANÇAIS.)

I. Moduly.

1. $\mathfrak{R}$ znamená množství všech racionálních čísel.

2. Nechť $\mathfrak{M}$ je množství jakýchkoliv prvků. Pravíme, že $\mathfrak{M}$ je *modul*, když 1° $\mathfrak{M} \neq 0$ (t. j. množství $\mathfrak{M}$ není prázdné, obsahuje tedy aspoň jeden prvek); 2° pro $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$* je definován *součet* $A + B \in \mathfrak{M}$; 3° pro $a \in \mathfrak{R}$, $A \in \mathfrak{M}$ je definován *součin* $aA = a.A \in \mathfrak{M}$, při čemž definice součtu a součinu jsou takové, že jsou splněna následující pravidla (axiomy) **2·1—2·7****:

2·1. $A + B = B + A$;

2·2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;

2·3. $a(A + B) = aA + aB$;

2·4. $(a + b) A = aA + bA$;

2·5. $a(bA) = (ab) A$;

2·6. $1A = A$;

2·7. Existuje *neutrální prvek* O množsví $\mathfrak{M}$, t. j. takový, že $A + O = A$, $0A = O$, $aO = O$ pro všecka $A \in \mathfrak{M}$, $a \in \mathfrak{R}$.

3. *Obecný součet* $\sum_{i=1}^{n} A_i$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ definujeme rekurentně: $\sum_{i=1}^{0} A_i = O$, $\sum_{i=1}^{n+1} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i + A_{n+1}$. Tedy $\sum_{i=1}^{1} A_i = A_1$, $\sum_{i=1}^{2} A_i = A_1 + A_2$. Z axiomu **2·2** se odvodí na př., že $\sum_{i=1}^{m+n} A_i = \sum_{i=1}^{m} A_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} A_i$, kde $\sum_{i=m+1}^{m+n} A_i$ znamená ovšem $\sum_{i=1}^{n} A_{m+i}$. Z axiomu **2·1** se odvodí, že, když $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ je jakákoli permutace cifer $(1, 2, \ldots, n)$, jest $\sum_{i=1}^{n} A_{\nu_i} = \sum_{i=1}^{n} A_i$. Z axiomu **2·3** se odvodí, že $a \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} aA_i$; z axiomu **2·4** se odvodí, že $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) A = \sum_{i=1}^{n} (a_i A)$. Podle axiomu **2·5** můžeme bez obavy z dvojznačnosti psáti na př. abA.

4. Podle axiomu **2·7** jest $0A = O$, $aO = O$. Obráceně, když $aA = O$, jest buďto $a = 0$ nebo $A = O$. Vskutku nechť $aA = O$, $a \neq 0$. Pak jest $A = 1A = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) A = \frac{1}{a}(aA) = \frac{1}{a} O = O$, t. j. $A = O$.

5. Místo $(-1) A$ píšeme $-A$, místo $B + (-A)$ píšeme $B - A$.

---

* $A \in \mathfrak{M}$ znamená, že A je prvkem množství $\mathfrak{M}$.

** V nich a v celé kapitole malá písmena značí racionální čísla, velká písmena značí prvky daného modulu.

6. Jest $X + A = B$ tehdy a jen tehdy, když $X = B - A$: I. Nechť $X + A = B$. Pak $B - A = (X + A) - A = X + (A - A) = X + [1A + (-1)A] = X + (1-1)A = X + 0A = X + O = X$, t. j. $X = B - A$. II. Nechť $X = B - A$. Pak $X + A = (B - A) + A = B + (-A + A) = B + [(-1)A + 1A] = B + (-1+1)A = B + 0A = B + O = B$, t. j. $X + A = B$.

7. Z **6** následuje zejména, že, když o prvku O' modulu $\mathfrak{M}$ víme, že existuje aspoň jeden prvek A modulu $\mathfrak{M}$ takový, že $A + O' = A$, jest $O' = O$. Neboť podle **6** má rovnice $A + X = A$ jediné řešení.

8. Jednoduchých pravidel, získaných ve **3**—**7** a čtenáři zcela běžných z počítání čísly, budu v dalším ovšem užívati bez jakéhokoli vysvětlování.

9. Jednoduchý příklad modulu tvoří $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ samo, dáme-li součtu $A + B$ a součinu aA obvyklý aritmetický význam. Neutrálním prvkem je číslo 0.

Obecnější příklad modulu tvoří pro $m = 1, 2, 3, \ldots$ množství $\mathfrak{M}$ všech m-členných vektorů $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, definujeme-li

$$(a_1, a_2, \ldots, a_m) + (b_1, b_2, \ldots, b_m) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m),$$
$$a(a_1, a_2, \ldots, a_m) = (a a_1, a a_2, \ldots, a a_m),$$

kde napravo součet a součin má aritmetický význam. Neutrálním prvkem je vektor $(0, 0, \ldots, 0)$.

10. Nechť $\mathfrak{M}$ je modul a nechť $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$*. Pravíme, že $\mathfrak{N}$ je *podmodul* modulu $\mathfrak{M}$, když množství $\mathfrak{N}$ tvoří modul vzhledem ke sčítání a násobení, jak bylo definováno v $\mathfrak{M}$. Zřejmě k tomu je nutné a stačí: 1^0 $\mathfrak{N} \neq 0$; 2^0 když $A \in \mathfrak{N}$, $B \in \mathfrak{N}$, pak $A + B \in \mathfrak{N}$; 3^0 když $A \in \mathfrak{N}$, pak $aA \in \mathfrak{N}$.

Podle 1^0 existuje $A \in \mathfrak{N}$; podle 3^0 jest $O = 0A \in \mathfrak{N}$. Tedy neutrální prvek O modulu $\mathfrak{M}$ náleží do každého podmodulu $\mathfrak{N}$ a je zřejmě neutrálním prvkem modulu $\mathfrak{M}$.

11. Nechť $A_1, \ldots, A_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ jsou dané prvky modulu $\mathfrak{M}$**. Množství $\mathfrak{N}$ všech $X = \sum_{i=1}^{m} a_i A_i$, kde každé a_i probíhá $\mathfrak{N}$, zřejmě tvoří podmodul, který označíme $\{A_1, \ldots, A_m\}$***.

*** Při $m = 0$ množství $\mathfrak{N}$ obsahuje jen neutrální prvek O.

O prvku X modulu $\mathfrak{M}$ pravíme, že je *závislý na* daných prvcích $A_1, \ldots, A_m$, když $X \in \mathfrak{N}$.

12. O prvcích $A_1, \ldots, A_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ modulu $\mathfrak{M}$ pravíme, že jsou *mezi sebou nezávislé****, když $\sum_{i=1}^{m} a_i A_i = O$ implikuje, že $a_i = 0$ pro $1 \leq i \leq m$. To nastane vždy pro $m = 0$.

---

* $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ nebo $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}$ znamená, že množství $\mathfrak{N}$ je částí množství $\mathfrak{M}$. (Při tom může býti $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$ nebo $\mathfrak{N} = 0$.)

** Pro $m = 0$ to znamená, že není dáno nic.

*** V opačném případě jsou *mezi sebou závislé.*

13. Prvky $A_1, \ldots, A_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ modulu $\mathfrak{M}$ tvoří *basi* tohoto modulu, když 1° jsou mezi sebou nezávislé; 2° $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_m\}$. Pro $m = 0$ to je splněno, když a jen když $\mathfrak{M}$ obsahuje pouze O.

14. Nechť $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_m\}$. Když $A_1, \ldots, A_m$ netvoří basi, jest $m > 0$ a $\sum_{i=1}^{m} a_i A_i = O$, kde třeba $a_m \neq 0$. Pak jest $A_m = \sum_{i=1}^{m-1} b_i A_i$, kde $b_i = - a_i : a_m$. Z toho následuje snadno, že $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_{m-1}\}$.

Opětovným užitím právě učiněného úsudku vychází, že, *když* $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_m\}$, *buďto* $A_1, \ldots, A_m$ *tvoří basi modulu* $\mathfrak{M}$, *nebo dostaneme basi, když některé z daných prvků* $A_1, \ldots, A_m$ *vynecháme.*

15. Modul $\mathfrak{M}$ nazývá se *konečný*, když $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Podle **14** každý konečný modul má basi. Obráceně každý modul, který má basi, podle **13** 2° je konečný.

16. *Nechť* $A_1, \ldots, A_m$ *je base modulu* $\mathfrak{M}$. *Nechť* $n > m$. *Nechť* $B_1, \ldots, B_m$ *jsou prvky modulu* $\mathfrak{M}$. *Pak* $B_1, \ldots, B_n$ *jsou mezi sebou závislé.*

Důkaz. Ježto $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_m\}$, existují racionální čísla a_{ik} taková, že $B_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} A_i$ $(1 \leq k \leq n)$. Soustava m lineárních homogenních rovnic $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = 0$ o $n > m$ neznámých má* řešení $(x_1, \ldots, x_n)$, kde aspoň jedno z racionálních čísel x_k je $\neq 0$. Avšak zřejmě $\sum_{k=1}^{n} x_k B_k = O$.

17. Ze **13** 1° a **15** následuje, že, když $A_1, \ldots, A_m$ je base modulu $\mathfrak{M}$, lze v $\mathfrak{M}$ udati m, nikoli však více než m, mezi sebou nezávislých prvků. Tedy číslo m je stejné pro všecky base. Nazývá se *hodnost konečného modulu* $\mathfrak{M}$. Zřejmě $m = 0$, když a jen když $\mathfrak{M}$ obsahuje pouze O. *Hodností nekonečného modulu* rozumíme symbol ∞, který považujeme za větší než každé $m = 0, 1, 2, \ldots$

18. *Nechť prvky* $A_1, \ldots, A_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ *modulu* $\mathfrak{M}$ *jsou mezi sebou nezávislé, nechť však neexistuje v* $\mathfrak{M}$ $m + 1$ *mezi sebou nezávislých prvků. Pak* $A_1, \ldots, A_m$ *je base modulu* $\mathfrak{M}$ (a tedy $\mathfrak{M}$ je konečný modul).

Důkaz. Ježto podmínka **13** 1° je splněna, jest pouze ukázati, že každý prvek B modulu $\mathfrak{M}$ je závislý na $A_1, \ldots A_m$. Ježto prvků $A_1, \ldots A_m$, B jest $m + 1$, jsou mezi sebou závislé. Tedy existují racionální čísla $a_1, \ldots, a_m$, b, z nichž aspoň jedno je $\neq 0$, taková, že $\sum_{i=1}^{m} a_i A_i + bB = O$. Ježto $A_1, \ldots, A_m$ jsou mezi sebou nezávislé, jest $b \neq 0$. Tedy $B = \sum_{i=1}^{m} c_i A_i$, kde $c_i = - a_i : b$.

19. *Nechť* $\mathfrak{N}$ *je podmodul konečného modulu* $\mathfrak{M}$. *Pak* $\mathfrak{N}$ *je konečný modul. Mimo to hodnost* n *modulu* $\mathfrak{N}$ *je* $\leq$ *hodnost* m *modulu* $\mathfrak{M}$ *a* $n = m$ *jen v případě* $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$.

Důkaz. Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou mezi sebou nezávislé prvky modulu $\mathfrak{N}$ (to lze pro $n = 0$), volené tak, aby číslo n bylo co největší (to

* V. na př. B. Bydžovský, *Základy teorie determinantů*, str. 71, ř. 8—6 zdola.

lze, neboť $n \leq m$ podle **16**). Podle **18** jest $\mathfrak{N} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, tedy $A_1, \ldots, A_n$ je base modulu $\mathfrak{N}$. Když $n = m$, podle **18** jest $\mathfrak{N} = \{A_1, \ldots, A_n\} = \mathfrak{M}$.

20. Nechť $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ jsou dva moduly. Nechť φ je funkce v oboru $\mathfrak{M}$* taková, že 1° $\varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}'$**; 2° když $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$, pak $\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B)$; 3° když $A \in \mathfrak{M}$, pak $\varphi(aA) = a\varphi(A)$. Pak pravíme, že f je *homomorfní zobrazení modulu* $\mathfrak{M}$ *na modul* $\mathfrak{M}'$, nebo že $\mathfrak{M}'$ je *homomorfní obraz modulu* $\mathfrak{M}$.

Jest $\varphi(A) + \varphi(O) = \varphi(A + O) = \varphi(A)$. Tedy podle **7** $\varphi(O)$ je neutrální prvek modulu $\mathfrak{M}'$.

21. Když $\varphi(A) = \varphi(B)$ implikuje $A = B$, pravíme, že moduly $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{M}'$ jsou *isomorfní*. Isomorfní moduly jsou v podstatě totožné: liší se jen označením prvků. Na př. mají vždy stejnou hodnost.

22. Když $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ a když $\mathfrak{M}_m$ znamená modul všech m-členných vektorů (v. **9**), položme $\varphi(a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{m} a_i A_i$. Zřejmě φ je homomorfní zobrazení modulu $\mathfrak{M}_m$ na modul $\mathfrak{M}$. Když $A_1, \ldots, A_m$ je base modulu $\mathfrak{M}$, jsou $\mathfrak{M}_m$ a $\mathfrak{M}$ isomorfní.

23. *Homomorfní obraz* $\varphi(\mathfrak{M})$ *konečného modulu* $\mathfrak{M}$ *je konečný modul.* Neboť $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ implikuje $\varphi(\mathfrak{M}) = \{\varphi(A_1), \ldots, \varphi(A_m)\}$. Mimo to zřejmě *hodnost* m' *modulu* $\varphi(\mathfrak{M})$ *je* $\leq$ *hodnost* m *modulu* $\mathfrak{M}$ *a jest* $m = m'$, *když a jen když zobrazení* φ *jest isomorfní.*

24. Nechť $\mathfrak{N}$ je podmodul modulu $\mathfrak{M}$. Můžeme rozděliti prvky modulu $\mathfrak{M}$ ve třídy $[A]$, definujíce pro dané $A \in \mathfrak{M}$: $B \in [A]$, když a jen když $B - A \in \mathfrak{N}$. Vidíme lehko, že každý prvek A modulu $\mathfrak{M}$ náleží do jediné třídy, totiž do $[A]$. Mimo to, když $[A] = [A']$, $[B] = [B']$, jest $[A + B] = [A' + B']$, $[aA] = [aA']$. Tedy můžeme definovati zcela jednoznačně:

$$[A] + [B] = [A + B], \quad a[A] = [aA].$$

Vzhledem k těmto definicím množství všech tříd tvoří modul, který označíme $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$. Neutrálním prvkem modulu $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ je třída $[O] = \mathfrak{N}$. Klademe-li $\varphi(A) = [A]$, je φ homomorfní zobrazení modulu $\mathfrak{M}$ na modul $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$.

V následujících kapitolách nebudeme užívati značky $[A]$, nýbrž místo $[A]$ budeme psáti prostě A. Že máme na mysli třídu $[A]$, naznačíme výrokem: Prvky $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$ považujeme za stejné, když $B - A \in \mathfrak{N}$***.

25. *Nechť* $\mathfrak{N}$ *je podmodul konečného modulu* $\mathfrak{M}$. *Pak každou basi modulu* $\mathfrak{N}$† *lze rozšířiti v basi modulu* $\mathfrak{M}$.

Důkaz. Nechť $A_1, \ldots, A_n$ je base modulu $\mathfrak{N}$. Modul $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ podle **24** je homomorfním obrazem modulu $\mathfrak{M}$. Tedy (podle **23**) $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ je

---

* To znamená, že φ přiřazuje každému $A \in \mathfrak{M}$ prvek $\varphi(A)$ jakéhosi množství.

** $\varphi(\mathfrak{M})$ je množství všech $\varphi(A)$, kde A probíhá $\mathfrak{M}$. Obecněji, když $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, $\varphi(\mathfrak{N})$ je množství všech $\varphi(A)$, kde A probíhá $\mathfrak{N}$.

*** Vskutku $B - A \in \mathfrak{N}$ tehdy a jen tehdy, když $[A] = [B]$.

† $\mathfrak{N}$ má basi podle **19**.

konečný modul, takže existují prvky $A_{n+1}, \ldots, A_m$ $(m = n, n+1, \ldots)$ modulu $\mathfrak{M}$ takové, že $[A_{n+1}], \ldots, [A_m]$ je base modulu $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$. Máme ukázati, že $A_1, \ldots, A_m$ je base modulu $\mathfrak{M}$, t. j. 1⁰ že $A_1, \ldots, A_m$ jsou mezi sebou nezávislé, 2⁰ že každý prvek B modulu $\mathfrak{M}$ je závislý na $A_1, \ldots, A_m$.

I. Nechť $\sum_{i=1}^{m} a_i A_i = O$. Pak $\sum_{i=1}^{m} a_i [A_i] = [O]$. Pro $1 \leqq i \leqq n$ je $A_i \in \mathfrak{N}$, tedy $[A_i] = [O]$, takže $\sum_{i=m+1}^{n} a_i [A_i] = [O]$. Ježto $[A_{n+1}], \ldots, [A_m]$ je base modulu $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$, je tedy $a_i = 0$ pro $n + 1 \leqq i \leqq m$, takže $\sum_{i=1}^{n} a_i A_i = 0$. Ježto $A_1, \ldots, A_n$ je base modulu $\mathfrak{N}$, je $a_i = 0$ také pro $1 \leqq i \leqq n$.

II. Ježto $[A_{n+1}], \ldots, [A_m]$ je base modulu $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$, existují racionální čísla a_i $(n + 1 \leqq i \leqq m)$ taková, že $[B] = \sum_{i=n+1}^{m} a_i [A_i]$, z čehož následuje $[B - \sum_{i=n+1}^{m} a_i A_i] = [O]$, t. j. $B - \sum_{i=n+1}^{m} a_i A_i \in \mathfrak{N}$. Ježto $A_1, \ldots, A_n$ je base modulu $\mathfrak{N}$, existují racionální čísla a_i $(1 \leqq i \leqq n)$ taková, že $B - \sum_{i=n+1}^{m} a_i A_i = \sum_{i=1}^{n} a_i A_i$, tedy $B = \sum_{i=1}^{m} a_i A_i$.

26. Nechť $\mathfrak{L}$ je část modulu $\mathfrak{M}$. Pravíme, že $\mathfrak{L}$ je *lineární systém vzhledem k* $\mathfrak{M}$, když existuje prvek $A_0 \in \mathfrak{L}$ a podmodul $\mathfrak{N}$ modulu $\mathfrak{M}$ takové, že $A \in \mathfrak{L}$ tehdy a jen tehdy, když $A - A_0 \in \mathfrak{N}$.

Podmodul $\mathfrak{N}$ je ostatně lineárním systémem $\mathfrak{L}$ jednoznačně určen: $\mathfrak{N}$ je množství všech $A - B$, kde $A \in \mathfrak{L}$, $B \in \mathfrak{L}$. Neboť: 1⁰ Když $A \in \mathfrak{L}$, $B \in \mathfrak{L}$, je $A - A_0 \in \mathfrak{N}$, $B - A_0 \in \mathfrak{N}$, tedy $A - B = (A - A_0) - (B - A_0) \in \mathfrak{N}$ podle **10** 2⁰ a 3⁰. 2⁰ Když $C \in \mathfrak{N}$, $A = A_0 + C$, jest $A - A_0 \in \mathfrak{N}$, tedo $A \in \mathfrak{L}$ a $C = A - A_0$.

Prvek A_0 nehraje v lineárním systému $\mathfrak{L}$ žádnou význačnou roli: Nechť A_1 je libovolný prvek lineárního systému $\mathfrak{L}$, Pak jest $A \in \mathfrak{L}$ tehdy a jen tehdy, když $A - A_1 \in \mathfrak{N}$. Neboť: 1⁰ Ježto $A_1 \in \mathfrak{L}$, existuje prvek $C_0 \in \mathfrak{N}$ takový, že $A_1 - A_0 = C_0$. 2⁰ Když $A \in \mathfrak{L}$, jest $C = A - A_0 \in \mathfrak{N}$, tedy $A - A_1 = C - C_0 \in \mathfrak{N}$. 3⁰ Když $C' = A - A_1 \in \mathfrak{N}$, jest $A - A_0 = C' + C_0 \in \mathfrak{N}$, tedy $A \in \mathfrak{L}$.

27. *Nechť A je neprázdná třída* lineárních systémů vzhledem k modulu $\mathfrak{M}$. Nechť $\mathfrak{Q}$ je součin** všech prvků třídy A. Pak existují prvky $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ třídy A*** takové, že $\mathfrak{Q} = \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{L}_i$. Když množství $\mathfrak{Q}$ není prázdné, je to lineární systém vzhledem k $\mathfrak{M}$.*

D ů k a z. Když lze ve třídě A nalézti konečný počet prvků, jejichž součin je prázdný, je $\mathfrak{Q} = 0$ a věta je zřejmá. Předpokládejme tedy

---

* Třída (nebo systém) je množství, jehož prvky jsou množství.

** Součin všech prvků dané třídy Λ je množství všech prvků společných každému množství, jež je prvkem třídy Λ. Označení jako u součinu čísel.

*** Podstatné je, že počet k je konečný.

opak. Nechť $\mathfrak{L}_1$ je libovolné množství z třídy A. Když $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_k$ je konečný počet množství z třídy A, tedy lineárních systémů vzhledem k $\mathfrak{M}$, nechť $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_k$ jsou příslušné podmoduly a nechť $\mathfrak{P}_k = \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{Q}_k = \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{L}_i$. Snadno shledáme, že $\mathfrak{Q}_k$ je lineární systém vzhledem k $\mathfrak{M}$ a že $\mathfrak{P}_k$ je příslušný podmodul. Ježto $\mathfrak{M}$ je konečný modul, podle **19** také $\mathfrak{P}_k$ je konečný modul, a je-li n_k hodnost modulu $\mathfrak{P}_k$, jest $0 \leqq n_{k+1} \leqq n_k$. Z toho následuje, že volíce postupně $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots$ z třídy A, při čemž, pokud možno, volíme $\mathfrak{L}_{k+1}$ tak, aby bylo $n_{k+1} < n_k$, dospějeme k takové hodnotě k, že to už možno není, že tedy při každé volbě $\mathfrak{L}_{k+1}$ jest $n_{k+1} = n_k$. Podle **19** je pak pro každé $\mathfrak{L}_{k+1} \in A$: $\mathfrak{P}_{k+1} = \mathfrak{P}_k$. Je-li však $A_0 \in \mathfrak{Q}_{k+1}$, tedy $A_0 \in \mathfrak{Q}_k$, pak $\mathfrak{Q}_k$ je množství těch A, pro něž $A - A_0 \in \mathfrak{P}_k$, a $\mathfrak{Q}_{k+1}$ je množství těch A, pro něž $A - A_0 \in \mathfrak{P}_{k+1}$. Tedy $\mathfrak{Q}_{k+1} = \mathfrak{Q}_k$, t. j. $\mathfrak{L}_{k+1} \supset \mathfrak{Q}_k$ pro každé $\mathfrak{L}_{k+1} \in A$, tedy $\mathfrak{Q}$ rovná se lineárnímu systému $\mathfrak{Q}_k$.

28. V dalším bez obavy z nedorozumění neutrální prvek každého modulu značíme prostě číslem 0.

II. Komplexy.

1. Nechť $\mathfrak{K}$ je konečné (event. prázdné) množství. Nechť Ω je daná třída, jejíž prvky jsou částí množství $\mathfrak{K}$. Při tom nechť jsou splněna tato dvě pravidla (axiomy):

1·1. Když $A \in \mathfrak{K}$, pak $(A) \in \Omega$*.

1·2. Když $0 \neq \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, když $\mathfrak{B} \in \Omega$, pak $\mathfrak{A} \in \Omega$.

Pak množství $\mathfrak{K}$ nazývá se *komplex* a jeho prvky nazývají se jeho *vrcholy*. Pravíme, že $\mathfrak{A}$ je *simplex* komplexu $\mathfrak{K}$, když $\mathfrak{A} \in \Omega$; když $\mathfrak{A}$ obsahuje $p + 1$ vrcholů, pravíme, že *dimense simplexu* $\mathfrak{A}$ rovná se p a že $\mathfrak{A}$ je $(p, \mathfrak{K})$-simplex. Specielně $(0, \mathfrak{K})$-simplex podle této definice je množství obsahující jediný prvek, vrchol komplexu $\mathfrak{K}$. Rozlišovati mezi vrcholem komplexu $\mathfrak{K}$ a jemu přiřazeným $(0, \mathfrak{K})$-simplexem není bez důležitosti: Viz pozn. pod čarou ke III. **2.**

Dimense komplexu $\mathfrak{K}$ je maximální dimense jeho simplexů, resp. číslo -1, když totiž $\mathfrak{K} = 0$.

2. Nechť $p = 1, 2, \ldots$ Nechť $\mathfrak{A}$ je $(p, \mathfrak{K})$-simplex. Vrcholy simplexu $\mathfrak{A}$ můžeme $(p + 1)!$ způsoby uspořádati. Jak známo**, lze tato uspořádání rozděliti ve dvě skupiny ψ_1, ψ_2, z nichž každá obsahuje $\frac{1}{2}(p + 1)!$ uspořádání, a to tak, že, když vyměníme mezi sebou dva z vrcholů simplexu $\mathfrak{A}$, přejdeme ze skupiny ψ_1 do ψ_2 neb naopak. Rozhodneme-li se pro jednu z obou skupin ψ_1 a ψ_2, pravíme, že jsme simplex $\mathfrak{A}$ orientovali. Lze tedy každý $(p, \mathfrak{K})$-simplex právě dvěma způsoby orien-

---

* (A) je množství obsahující jediný prvek, totiž A.

** V. na př. Bydžovský, l. c., § 2, 6 (str. 9—13).

tovati (když $p \geqq 1$; pro $p = 0$ orientaci nedefinujeme). Jsou-li $A_0, A_1, \ldots, A_p$ vrcholy $\mathfrak{A}$ v uspořádání z dané orientace ψ_1 nebo ψ_2, píšeme $\mathfrak{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_p)$. Je tedy na př. pro $p = 2$ $(A_0, A_1, A_2) = (A_1, A_2, A_0)$, nikoli však (vzhledem k orientaci) $= (A_0, A_2, A_1)$.

3. Nechť $\mathfrak{K}$ je komplex; nechť $p = 0, 1, 2, \ldots$. *$(p, \mathfrak{K})$-řetězem* rozumíme funkci φ, která každému (orientovanému, je-li $p \geqq 1$) $(p, \mathfrak{K})$-simplexu $\mathfrak{A}$ přiřazuje určité racionální číslo $\varphi(\mathfrak{A})$, při čemž, je-li $p \geqq 1$ a je-li $\mathfrak{A}'$ týž $(p, \mathfrak{K})$-simplex jako $\mathfrak{A}$, ale jinak orientovaný, musí býti $\varphi(\mathfrak{A}') = -\varphi(\mathfrak{A})$.

Je-li $a \in \mathfrak{R}$, pak $a\varphi$ znamená ovšem tu funkci, která každému $\mathfrak{A}$ přiřazuje číslo $a \cdot \varphi(\mathfrak{A})$; jsou-li φ, ψ dvě funkce uvažovaného typu, pak ovšem $\varphi + \psi$ znamená tu funkci, která každému $\mathfrak{A}$ přiřazuje číslo $\varphi(\mathfrak{A}) + \psi(\mathfrak{A})$. Vzhledem k těmto definicím *množství $\mathfrak{M}_p$ všech $(p, \mathfrak{K})$-řetězů je modul.*

Nechť $\sigma_1^p, \sigma_2^p, \ldots, \sigma_{\alpha_p}^p$ jsou všecky $(p, \mathfrak{K})$-simplexy*. Každý simplex σ_i^p $(p \geqq 1, 1 \leqq i \leqq \alpha_p)$ nechť jest určitým (libovolně zvoleným) způsobem orientován. Bez obavy z nedorozumění symbol σ_i^p $(p \geqq 0)$ nechť také znamená tu funkci φ (tedy $(p, \mathfrak{K})$-řetěz), pro kterou $\varphi(\sigma_i^p) = 1$ a $\varphi(\sigma_j^p) = 0$ pro $1 \leqq j \leqq \alpha_p$, $j \neq i$**. Pak každý $(p, \mathfrak{K})$-řetěz je tvaru $\sum_{i=1}^{\alpha_p} r_i \sigma_i^p$, $r_i \in \mathfrak{R}$, a čísla r_i jsou daným $(p, \mathfrak{K})$-řetězem jednoznačně určena (neboť $r_i = \varphi(\sigma_i^p)$). Jinak řečeno, $(p, \mathfrak{K})$-řetězy σ_i^p $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$ tvoří basi modulu $\mathfrak{M}_p$. Tedy $\mathfrak{M}_p$ je konečný modul hodnosti α_p.

$(p, \mathfrak{K})$-řetězy budeme značiti symboly $C^p(\mathfrak{K})$, $C_1^p(\mathfrak{K})$, $D^p(\mathfrak{K})$, $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ atp.

4. Nechť $p \geqq 1$. Nechť σ^p jest orientovaný $(p, \mathfrak{K})$-simplex. Nechť σ^{p-1} jest (orientovaný, je-li $p \geqq 2$) $(p-1, \mathfrak{K})$-simplex. Pravíme, že σ^p a σ^{p-1} jsou *incidentní*, když každý vrchol simplexu σ^{p-1} je vrcholem simplexu σ^p.

Předpokládejme, že σ^p a σ^{p-1} jsou incidentní. Nechť $A_1, \ldots, A_p$ jsou vrcholy simplexu σ^{p-1}; mimo $A_1, \ldots, A_p$ má σ^p ještě jeden vrchol, který označme A_0. Nechť $\sigma^{p-1} = (A_1, \ldots, A_p)$ (i co do orientace, je-li $p \geqq 2$). Pak jest (i co do orientace) $\sigma^p = \eta(A_0, A_1, \ldots, A_p)$, kde $\eta = \pm 1$. Je-li $B_1, \ldots, B_p$ jakákoli permutace vrcholů $A_1, \ldots, A_p$, jest $\sigma^{p-1} = \zeta(B_1, \ldots, B_p)$, kde $\zeta = \pm 1$ (pro $p = 1$ ovšem $\zeta = 1$). Snadno se zjistí***, že $\sigma^p = \eta\zeta(A_0, A_1, \ldots, A_p)$. Specielně $\sigma^p = \eta(A_0, A_1, \ldots, A_p)$, kdykoli $\zeta = 1$. Tedy znamení η je (orientovanými) simplexy σ^p a σ^{p-1} jednoznačně určeno. Mimo to vidíme, že při změně orientace simplexu σ^p (a když $p \geqq 2$, také při změně orientace simplexu σ^{p-1}), číslo η přijde v $-\eta$. Pišme určitěji $\eta = \eta(\sigma^p, \sigma^{p-1})$, a když σ^p a σ^{p-1} nejsou incidentní, položme $\eta(\sigma^p, \sigma^{p-1}) = 0$.

---

* Jest ovšem $\alpha_p = 0$, když a jen když číslo p je větší než dimense komplexu $\mathfrak{K}$.

** Podle učiněné dohody znamená tedy (když $p \geqq 1$) symbol $-\sigma_i^p$ týž $(p, \mathfrak{K})$-simplex jako σ_i^p, ale se změněnou orientací.

*** V. Bydžovský, l. c., § 2, 6, *d* (str. 12).

5. Nechť opět σ_i^p $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ mají týž význam jako ve **3.** Nechť $p \geqq 1$ a nechť σ^p je orientovaný $(p, \mathfrak{K})$-simplex. Klademe

$$F\,\sigma^p = \sum_{i=1}^{\alpha_{p-1}} \eta\,(\sigma^p, \sigma_i^{p-1}) . \sigma_i^{p-1}. \tag{1}$$

Je-li $\sigma^p = (A_0, A_1, \ldots, A_p)$, snadno nalezneme, že

$$F\,\sigma^p = \sum_{i=0}^{\alpha_p} (-1)^i\,\sigma_i^{p-1}, \tag{2}$$

kde σ_i^{p-1} vznikne z $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ vynecháním vrcholu A_i, při čemž pořádek ostatních vrcholů zůstane beze změny.

Tedy $F(\sigma^p)$ je $(p-1, \mathfrak{K})$-řetěz, který patrně (když $p \geqq 2$) nezávisí na volbě orientací simplexů σ_i^{p-1}. Při změně orientace simplexu σ^p máme $F(-\sigma^p) = -F(\sigma^p)$.

Nechť nyní

$$C^p(\mathfrak{K}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} r_i\,\sigma_i^p \quad (r_i \,\varepsilon\, \mathfrak{R})$$

je libovolný $(p, \mathfrak{K})$-řetěz. Klademe, zobecňujíce označení právě zavedené,

$$F C^p(\mathfrak{K}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} r_i\,F\,\sigma_i^p.$$

Tedy $FC^p(\mathfrak{K})$ je $(p-1, \mathfrak{K})$-řetěz, který patrně nezávisí na volbě orientací simplexů σ_i^p. Nazýváme jej *hranicí $(p, \mathfrak{K})$-řetězu* $C^p(\mathfrak{K})$.

Místo $FC^p(\mathfrak{K}) = \Gamma^{p-1}(\mathfrak{K})$ píšeme velmi často $C^p(\mathfrak{K}) \to \Gamma^{p-1}(\mathfrak{K})$.

Upozorňuji na zřejmá pravidla: Když $C^p(\mathfrak{K})$ a $D^p(\mathfrak{K})$ jsou $(p, \mathfrak{K})$-řetězy, když $a \,\varepsilon\, \mathfrak{R}$, jest

$$\begin{aligned} F\,[C^p(\mathfrak{K}) + D^p(\mathfrak{K})] &= FC^p(\mathfrak{K}) + FD^p(\mathfrak{K}), \\ F\,[a\,C^p(\mathfrak{K})] &= a\,FC^p(\mathfrak{K}). \end{aligned} \tag{3}$$

Jinak řečeno: *Operace F je homomorfní zobrazení* (v. I. **20**) *modulu $\mathfrak{M}_p$ všech $(p, \mathfrak{K})$-řetězů na jakýsi podmodul $\mathfrak{N}_{p-1}$ modulu $\mathfrak{M}_{p-1}$ všech $(p-1, \mathfrak{K})$-řetězů.*

6. Když $C^0(\mathfrak{K})$ je $(0, \mathfrak{K})$-řetěz, pak jeho *hranicí* rozumíme nulu a píšeme $FC^0(\mathfrak{K}) = 0$ nebo $C^0(\mathfrak{K}) \to 0$.

Nechť σ_i^0 $(1 \leqq i \leqq \alpha_0)$ jsou všecky $(0, \mathfrak{K})$-simplexy. Pak máme jednoznačně $C^0(\mathfrak{K}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} r_i\,\sigma_i^0$. Číslo $\sum_{i=1}^{\alpha_0} r_i \,\varepsilon\, \mathfrak{R}$ nazveme *indexem* (nebo *Kroneckerovým indexem*) $(0, \mathfrak{K})$-řetězu $C^0(\mathfrak{K})$ a značíme je $J[C^0(\mathfrak{K})]$. Jsou-li $C^0(\mathfrak{K})$ a $D^0(\mathfrak{K})$ dva $(0, \mathfrak{K})$-řetězy a je-li $a \,\varepsilon\, \mathfrak{R}$, je patrně

$$\begin{aligned} J\,[C^0(\mathfrak{K}) + D^0(\mathfrak{K})] &= J\,[C^0(\mathfrak{K})] + J\,[D^0(\mathfrak{K})], \\ J\,[a\,C^0(\mathfrak{K})] &= a\,J\,[C^0(\mathfrak{K})]. \end{aligned} \tag{1}$$

Jinak řečeno, *operace J je homomorfní zobrazení modulu $\mathfrak{M}_0$ na modul $\mathfrak{R}$.*

7. Nechť $\mathfrak{H}$ a $\mathfrak{K}$ jsou komplexy. Když každý simplex komplexu $\mathfrak{H}$ je simplexem komplexu $\mathfrak{K}$ [takže zejména každý vrchol komplexu $\mathfrak{H}$ je vrcholem komplexu $\mathfrak{K}$], pravíme, že *$\mathfrak{H}$ je podkomplex komplexu $\mathfrak{K}$*. Když všecky vrcholy nějakého simplexu σ komplexu $\mathfrak{K}$ jsou vrcholy podkomplexu $\mathfrak{H}$, nemusí ještě σ býti simplexem komplexu $\mathfrak{H}$.

Nechť σ_i^p $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$ jsou jako obvykle všecky $(p, \mathfrak{K})$-simplexy. Nechť $C^p(\mathfrak{K}) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} r_i \sigma_i^p$ je $(p, \mathfrak{K})$-řetěz. Pravíme, že $C^p(\mathfrak{K})$ leží v podkomplexu $\mathfrak{H}$, když pro každé i $(1 \leqq i \leqq \alpha_p)$ buďto $r_i = 0$ nebo σ_i^p je $(p, \mathfrak{H})$-simplex; píšeme pak $C^p(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{H}$ nebo $C^p(\mathfrak{K}) = 0 \bmod \mathfrak{H}$. Obecněji $C^p(\mathfrak{K}) = D^p(\mathfrak{K}) \bmod \mathfrak{H}$ znamená, že $C^p(\mathfrak{K}) - D^p(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{H}$. Místo $FC^{p+1}(\mathfrak{K}) = C^p(\mathfrak{K}) \bmod \mathfrak{H}$ píšeme často $C^{p+1}(\mathfrak{K}) \rightarrow C^p(\mathfrak{K}) \bmod \mathfrak{H}$.

Zřejmě množství $\mathfrak{M}_p(\mathfrak{H})$ všech v $\mathfrak{H}$ ležících $(p, \mathfrak{K})$-řetězů je modul isomorfní s modulem všech $(p, \mathfrak{H})$-řetězů. Můžeme oba moduly bez obavy z nedorozumění považovati za totožné.

8. Nechť $\mathfrak{H}$ je podkomplex komplexu $\mathfrak{K}$. Nechť $p \geqq 1$. Nechť $C^p(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{H}$. Pak $FC^p(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{H}$.

D ů k a z stačí provésti v případě, kdy $C^p(\mathfrak{K}) = \sigma^p$ je $(p, \mathfrak{H})$-simplex. Podle **1·2** každý $(p-1, \mathfrak{K})$-simplex incidentní se σ^p je $(p-1, \mathfrak{H})$-simplex. Tedy $F\sigma^p \subset \mathfrak{H}$.

9. $(p, \mathfrak{K})$-řetěz $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ nazýváme *absolutním $(p, \mathfrak{K})$-cyklem*, když $F\Gamma^p(\mathfrak{K}) = 0$. Tedy absolutní $(0, \mathfrak{K})$-cyklus je synonym $(0, \mathfrak{K})$-řetězu.

Podle **5** (3) *množství $\mathfrak{S}_p$ všech absolutních $(p, \mathfrak{K})$-cyklů je podmodul modulu $\mathfrak{M}_p$ všech $(p, \mathfrak{K})$-řetězů.*

Když $p \geqq 1$, pak na konci odst. **5** zavedený *modul $\mathfrak{N}_{p-1}$ hranic $(p, \mathfrak{K})$-řetězů je podmodul modulu $\mathfrak{S}_{p-1}$.*

Ježto v obvyklém označení (v. I **11**) $\mathfrak{H}_{p-1} = \{F\sigma_1^p, \ldots, F\sigma_{\alpha_p}^p\}$, stačí ukázati, že, když σ^p jest orientovaný $(p, \mathfrak{K})$-simplex, pak $F\sigma^p$ jest absolutní $(p-1, \mathfrak{K})$-cyklus, t. j. že $F\sigma^p \rightarrow 0$. To je zřejmé, když $p = 1$. Nechť tedy $p \geqq 2$. Podle **5** (1) jest o obvyklém označení

$$F(\sigma^p) \rightarrow \sum_{i=1}^{\alpha_{p-1}} \sum_{j=1}^{\alpha_{p-2}} \eta(\sigma^p, \sigma_i^{p-1}) \,.\, \eta(\sigma_i^{p-1}, \sigma_j^{p-2}) \,.\, \sigma_j^{p-2}.$$

Tedy máme dokázati, že pro každý $(p-2, \mathfrak{K})$-simplex σ^{p-2} jest

$$\sum_{i=1}^{\alpha_{p-1}} \eta(\sigma^p, \sigma_i^{p-1}) \,.\, \varepsilon(\sigma_i^{p-1}, \sigma^{p-2}) = 0. \tag{1}$$

Nechť $\sigma^{p-2} = (A_2, \ldots, A_p)$. Když $A_2, \ldots, A_p$ nejsou vesměs vrcholy simplexu σ^p, zřejmě v součtu (1) každý člen je roven nule. Nechť tedy

$$\sigma^p = (A_0, A_1, A_2, \ldots, A_p) = -(A_1, A_0, A_2, \ldots, A_p).$$

Můžeme předpokládati, že $\sigma_1^{p-1} = (A_1, A_2, \ldots, A_p)$, $\sigma_2^{p-1} = (A_0, A_2, \ldots, A_p)$. Pak (v. **4**)

$$\eta(\sigma^p, \sigma_1^{p-1}) = 1,\ \eta(\sigma^p, \sigma_2^{p-1}) = -1,\ \eta(\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}) = \eta(\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}) = 1,$$
$$\eta(\sigma^p, \sigma_i^{p-1}).\ \eta(\sigma_i^{p-1}, \sigma^{p-2}) = 0 \text{ pro } 3 \leqq i \leqq \alpha_{p-1},$$

z čehož následuje (1).

10. Nechť $p \geqq 0$. Nechť $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ jest absolutní $(p, \mathfrak{K})$-cyklus. Existuje-li $(p+1, \mathfrak{K})$-řetěz $C^{p+1}(\mathfrak{K})$, jehož hranicí jest $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ [tedy když $\Gamma^p(\mathfrak{K}) \in \mathfrak{H}_p$], pravíme, že $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ *je homologický s nulou* a píšeme $\Gamma^p(\mathfrak{K}) \sim 0$. Obecněji, když $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ a $\varDelta^p(\mathfrak{K})$ jsou dva absolutní $(p, \mathfrak{K})$-cykly a když $\Gamma^p(\mathfrak{K}) - \varDelta^p(\mathfrak{K}) \sim 0$, pravíme, že $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ *a* $\varDelta^p(\mathfrak{K})$ *jsou homologické* a píšeme $\Gamma^p(\mathfrak{K}) \sim \varDelta^p(\mathfrak{K})$.

Množství všech absolutních $(p, \mathfrak{K})$-cyklů, ve kterém homologické cykly považujeme za rovné, není nic jiného než modul $\mathfrak{G}_p - \mathfrak{N}_p$ (v. I **24**). Ježto $\mathfrak{M}_p$ je konečný modul, také $\mathfrak{G}_p - \mathfrak{N}_p$ je (v. I **19**, **23** a **24**) konečný modul. Jeho hodnost nazývá se $p^{\text{té}}$ *absolutní Bettiovo číslo komplexu* $\mathfrak{K}$; označení $B^p(\mathfrak{K})$.

11. Nechť $\Gamma^0(\mathfrak{K}) \sim 0$. *Pak* $J[\Gamma^0(\mathfrak{K})] = 0$.

Důkaz. Máme ukázati, že $J[FC^1(\mathfrak{K})] = 0$ pro každý $(1, \mathfrak{K})$-řetěz $C^1(\mathfrak{K})$. Podle **5** (3) a **6** (1) stačí to provésti v případě, že $C^1(\mathfrak{K}) = (A_0, A_1)$ je $(1, \mathfrak{K})$-simplex. Pak je však $FC^1(\mathfrak{K}) = (A_1) - (A_0)$, tedy $J[FC^1(\mathfrak{K})] = 1 - 1 = 0$.

12. Nechť $\mathfrak{H}$ je podkomplex komplexu $\mathfrak{K}$, $(p, \mathfrak{K})$-řetěz $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ nazveme $(p, \mathfrak{K})$-*cyklem* mod $\mathfrak{H}$, když $F\Gamma^p(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{H}$ (v. **7**). Zřejmě *množství* $\mathfrak{G}_p(\mathfrak{H})$ *všech* $(p, \mathfrak{K})$-*cyklů* mod $\mathfrak{H}$ *tvoří podmodul modulu* $\mathfrak{M}_p$ *všech* $(p, \mathfrak{K})$-*řetězů*. Jest $\mathfrak{G}_0(\mathfrak{H}) = \mathfrak{M}_0$ při každé volbě $\mathfrak{H}$.

Zřejmě absolutní $(p, \mathfrak{K})$-cyklus je totéž jako $(p, \mathfrak{K})$-cyklus mod 0. Když $\mathfrak{H}'$ je podkomplex komplexu $\mathfrak{H}$ a když $\mathfrak{H}$ je podkomplex komplexu $\mathfrak{K}$, zřejmě každý $(p, \mathfrak{K})$-cyklus mod $\mathfrak{H}'$ je také $(p, \mathfrak{K})$-cyklem mod $\mathfrak{H}$. Zejména absolutní $(p, \mathfrak{K})$-cyklus je $(p, \mathfrak{K})$-cyklem mod $\mathfrak{H}$ při každé volbě $\mathfrak{H}$.

Když $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ je $(p, \mathfrak{K})$-cyklus mod $\mathfrak{H}$, když $C^p(\mathfrak{K})$ je $(p, \mathfrak{K})$-řetěz a když $C^p(\mathfrak{K}) = \Gamma^p(\mathfrak{K})$ mod $\mathfrak{H}$ (v. **7**), podle **8** také $C^p(\mathfrak{K})$ je $(p, \mathfrak{K})$-cyklus mod $\mathfrak{H}$. Zejména $C^p(\mathfrak{K})$ je $(p, \mathfrak{K})$-cyklus mod $\mathfrak{H}$, když existuje $(p+1, \mathfrak{K})$-řetěz $C^{p+1}(\mathfrak{K})$ takový, že $FC^{p+1}(\mathfrak{K}) = C^p(\mathfrak{K})$ mod $\mathfrak{H}$.

13. Nechť $\mathfrak{H}$ je podkomplex komplexu $\mathfrak{K}$. Nechť $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ je $(p, \mathfrak{K})$-cyklus mod $\mathfrak{H}$. Existuje-li $(p+1, \mathfrak{K})$-řetěz $C^{p+1}(\mathfrak{K})$ takový, že $FC^{p+1}(\mathfrak{K}) = \Gamma^p(\mathfrak{K})$ mod $\mathfrak{H}$, pravíme, že $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ *je homologický s nulou* mod $\mathfrak{H}$ a píšeme $\Gamma^p(\mathfrak{K}) \sim 0$ mod $\mathfrak{H}$. Obecněji, když $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ a $\varDelta^p(\mathfrak{K})$ jsou dva $(p, \mathfrak{K})$-cykly mod $\mathfrak{H}$ a když $\Gamma^p(\mathfrak{K}) - \varDelta^p(\mathfrak{K}) \sim 0$ mod $\mathfrak{H}$, pravíme, že $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ *a* $\varDelta^p(\mathfrak{K})$ *jsou homologické* mod $\mathfrak{H}$ a píšeme $\Gamma^p(\mathfrak{K}) \sim \varDelta^p(\mathfrak{K})$ mod $\mathfrak{H}$.

Když $\mathfrak{H} = 0$, máme znovu definice z odst. **10**.

Když $\mathfrak{H}'$ je podkomplex komplexu $\mathfrak{H}$, když $\mathfrak{H}$ je podkomplex komplexu $\mathfrak{K}$, když $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ a $\varDelta^p(\mathfrak{K})$ jsou $(p, \mathfrak{K})$-cykly mod $\mathfrak{H}'$, když $\Gamma^p(\mathfrak{K}) \sim \varDelta^p(\mathfrak{K})$ mod $\mathfrak{H}'$, je také $\Gamma^p(\mathfrak{H}) \sim \varDelta^p(\mathfrak{K})$ mod $\mathfrak{H}$. Všimněme si případu $\mathfrak{H}' = 0$.

Označíme-li $\mathfrak{N}_p(\mathfrak{H})$ modul všech $(p, \mathfrak{K})$-řetězů rovných mod $\mathfrak{H}$ hranici nějakého $(p+1, \mathfrak{K})$-řetězu, pak množství všech $(p, \mathfrak{K})$-cyklů mod $\mathfrak{H}$, ve kterém cykly homologické mod $\mathfrak{H}$ považujeme za rovné, není nic jiného než modul $\mathfrak{G}_p(\mathfrak{H}) - \mathfrak{N}_p(\mathfrak{H})$. Je to opět (v. **10**) konečný modul. Jeho hodnost nazývá se $p^{t\acute{e}}$*-relativní. Bettiovo číslo komplexu* $\mathfrak{K}$ mod $\mathfrak{H}$; označení $\boldsymbol{B}^p(\mathfrak{K}, \mathfrak{H})$. Tedy $\boldsymbol{B}^p(\mathfrak{K}, 0) = \boldsymbol{B}^p(\mathfrak{K})$.

14. Nechť $\mathfrak{H}$ je podkomplex komplexu $\mathfrak{L}$; nechť $\mathfrak{L}$ je podkomplex komplexu $\mathfrak{K}$. Nechť $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ je $(p, \mathfrak{K})$-cyklus mod $\mathfrak{H}$; nechť $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ leží v $\mathfrak{L}$ (v. **7**). Pravíme, že $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ *je homologický s nulou* mod $\mathfrak{H}$ *v* $\mathfrak{L}$, když existuje $(p+1, \mathfrak{K})$-řetěz $C^{p+1}(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{L}$ takový, že $C^{p+1}(\mathfrak{K}) \rightarrow \Gamma^p(\mathfrak{K})$ mod $\mathfrak{H}$; píšeme $\Gamma^p(\mathfrak{K}) \sim 0$ mod $\mathfrak{H}$ v $\mathfrak{L}$. Obecněji, když $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ a $\Delta^p(\mathfrak{K})$ jsou dva v $\mathfrak{L}$ ležící $(p, \mathfrak{K})$-cykly mod $\mathfrak{H}$, pravíme, že $\Gamma^p(\mathfrak{K})$ *a* $\Delta^p(\mathfrak{K})$ *jsou homologické* mod $\mathfrak{H}$ *v* $\mathfrak{L}$ a píšeme $\Gamma^p(\mathfrak{K}) \sim \Delta^p(\mathfrak{K})$ mod $\mathfrak{H}$ v $\mathfrak{L}$, když $\Gamma^p(\mathfrak{K}) - \Delta^p(\mathfrak{K}) \sim 0$ mod $\mathfrak{H}$ v $\mathfrak{L}$. Všimněme si zvláštního případu $\mathfrak{H} = 0$; tu píšeme $\Gamma^p(\mathfrak{K}) - \Delta^p(\mathfrak{K}) \sim 0$ v $\mathfrak{L}$, vynechávajíce symbol mod $\mathfrak{H}$.

15. Rozdělme všecky vrcholy komplexu $\mathfrak{K}$ do m skupin $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots \mathfrak{S}_m$ tak, že každý vrchol je v jedné a jen jedné skupině*. Když každý $(1, \mathfrak{K})$-simplex má oba své vrcholy ve stejné skupině**, pravíme, že *skupiny* $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_m$ *jsou oddělené.*

Číslo $\boldsymbol{B}^0(\mathfrak{K})$ *je maximální počet neprázdných oddělených skupin, ve které lze rozděliti vrcholy komplexu* $\mathfrak{K}$.

Důkaz. I. Rozdělme všecky vrcholy komplexu $\mathfrak{K}$ ve skupiny tak, že vrcholy A, B jsou ve stejné skupině tehdy a jen tehdy, když $(A) \sim (B)$. Zřejmě každý vrchol je v jedné a jen jedné skupině, které označme $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \dots, \mathfrak{T}_n$. Je-li (A, B) $(1, \mathfrak{K})$-simplex, jest $(A, B) \rightarrow (A) - (B)$, tedy $(A) \sim (B)$. Tedy skupiny $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \dots, \mathfrak{T}_n$ jsou oddělené. Zvolme vrchol A_i ve skupině $\mathfrak{T}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Pak každý $(0, \mathfrak{K})$-simplex je homologický s jedním z $(0, \mathfrak{K})$-simplexů (A_i), takže každý $(0, \mathfrak{K})$-cyklus je homologický s $(0, \mathfrak{K})$-cyklem tvaru $\sum_{i=1}^{n} r_i(A_i)$. Tedy $\boldsymbol{B}^0(\mathfrak{K}) \leqq n$.

II. Zbývá ukázati, že, když vrcholy komplexu $\mathfrak{K}$ jsou jakkoli rozděleny v m neprázdných oddělených skupin $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_m$, jest $\boldsymbol{B}^0(\mathfrak{K}) \geqq m$. Je-li $C^0(\mathfrak{K}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} r_i \sigma_i^0$, pak pro $1 \leqq i \leqq \alpha_0$, $1 \leqq j \leqq m$ nechť $r_{ij} = r_i$, když σ_i^0 patří do skupiny $\mathfrak{S}_j$, a $r_{ij} = 0$, když σ_i^0 nepatří do $\mathfrak{S}_j$. Pro $1 \leqq j \leqq m$ nechť $J_j[C^0(\mathfrak{K})] = \sum_{i=1}^{\alpha_0} r_{ij}$. Je-li $\sigma^1 = (A, B)$ libovolný $(1, \mathfrak{K})$-simplex, jsou oba vrcholy A, B ve stejné skupině $\mathfrak{S}_j$. Tedy $J_j[F\sigma^1] = 0$. Z toho následuje snadno, že $J_j[FC^1(\mathfrak{K})] = 0$ pro $1 \leqq j \leqq m$ a pro každý $(1, \mathfrak{K})$-řetěz $C^1(\mathfrak{K})$, t. j. že $C^0(\mathfrak{K}) \sim 0$ implikuje $J_j[C^0(\mathfrak{K})] = 0$ pro $1 \leqq j \leqq m$. Nechť A_i je zvolený vrchol ze skupiny $\mathfrak{S}_j$. Pak

---

* Jest $m = 0$, když a jen když $\mathfrak{K} = 0$.

** Tato podmínka je splněna vždy, když dimense komplexu $\mathfrak{K}$ (v. **1**) je rovna nule.

$J_j\,[\sum\limits_{k=1}^{m} r_k\,(A_k)] = r_k$, takže $\sum\limits_{k=1}^{m} r_k\,(A_k) \sim 0$ jen, když $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Tedy $B^0\,(\mathfrak{K}) \geqq m$.

16. Symbol $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ má význam, jsou-li $A_0, A_1, \ldots, A_p$ mezi sebou různé vrcholy simplexu komplexu $\mathfrak{K}$. Někdy je výhodné, dáti tomuto symbolu význam i tehdy, když sice $A_0, A_1, \ldots, A_p$ jsou vrcholy nějakého simplexu komplexu $\mathfrak{K}$, nejsou však mezi sebou různé. V tomto případě nechť symbol $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ znamená nulu (určitěji: neutrální prvek modulu všech $(p, \mathfrak{K})$-řetězů).

Formule **5** (2) je správná, kdykoli symbol $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ má význam. Nejsou-li totiž $A_0, A_1, \ldots, A_p$ mezi sebou různé, je $\sigma^p = 0$, tedy $F\sigma^p = 0$. Nechť třeba $A_j = A_k$ $(0 \leqq j < k \leqq m)$. Pak jest $\sigma_i^{p-1} = 0$ pro $0 \leqq i \leqq p$, $i \neq j$, $i \neq k$, mimo to $\sigma_j^{p-1} = \sigma_k^{p-1}$, takže také pravá strana formule **5** (2) rovná se nule.

17. Nechť $\mathfrak{K}$ a $\mathfrak{L}$ jsou komplexy. Když každému vrcholu A komplexu $\mathfrak{L}$ přiřadíme určitý vrchol πA komplexu $\mathfrak{K}$ tak, že, kdykoli $A_0, A_1, \ldots, A_m$ jsou vrcholy nějakého simplexu komplexu $\mathfrak{L}$, také $\pi A_0, \pi A_1, \ldots, \pi A_m$ jsou vrcholy nějakého simplexu komplexu $\mathfrak{K}$, pak pravíme, že π je *simpliciální zobrazení komplexu $\mathfrak{L}$ do komplexu $\mathfrak{K}$*. Když B je daný vrchol komplexu $\mathfrak{K}$, nemusí býti $\pi A = B$ pro žádný vrchol A komplexu $\mathfrak{L}$.

Nechť $\tau^p = (A_0, A_1, \ldots, A_p)$ je $(p, \mathfrak{L})$-simplex. Klademe $\pi\tau^p = (\pi A_0, \pi A_1, \ldots, \pi A_p)$. Vzhledem k dohodě učiněné v **16** má symbol $\pi\tau^p$ vždy význam a podle **5** (2) (v. **16**) jest $F\pi\tau^p = \pi F\tau^p$.

Nechť $\tau_1^p, \tau_2^p, \ldots, \tau_\alpha^p$ jsou všecky $(p, \mathfrak{L})$-simplexy (nějak orientované, je-li $p > 0$). Je-li $C^p\,(\mathfrak{L}) = \sum\limits_{i=1}^{\alpha} r_i\tau_i^p$ $(p, \mathfrak{L})$-řetěz, pak symbolem $\pi C^p\,(\mathfrak{L})$ rozumíme $(p, \mathfrak{K})$-řetěz

$$\pi C^p\,(\mathfrak{L}) = \sum_{i=1}^{\alpha} r_i . \pi\tau_i^p.$$

Zřejmě hodnota symbolu $\pi C^p\,(\mathfrak{L})$ nezávisí na volbě orientací simplexů τ_i^p.

Jest patrně

$$\begin{aligned} \pi\,[C^p\,(\mathfrak{L}) + D^p\,(\mathfrak{L})] &= \pi C^p\,(\mathfrak{L}) + \pi D^p\,(\mathfrak{L}), \\ \pi\,[a\,C^p\,(\mathfrak{L})] &= a . \pi\,C^p\,(\mathfrak{L}). \end{aligned} \tag{1}$$

Jinak řečeno, *operace π je homomorfní zobrazení modulu všech $(p, \mathfrak{L})$-řetězů na jakýsi podmodul modulu všech $(p, \mathfrak{K})$-řetězů.*

Ježto $F\pi\tau^p = \pi F\tau^p$, jest

$$F\pi\,C^p\,(\mathfrak{L}) = \pi F C^p\,(\mathfrak{L}) \tag{2}$$

pro každý $(p, \mathfrak{L})$-řetěz $C^p\,(\mathfrak{L})$.

Je-li τ^0 libovolný $(0, \mathfrak{L})$-simplex, je $\pi\tau^0$ $(0, \mathfrak{K})$-simplex, tedy $J(\tau^0) = J(\pi\tau^0) = 1$. Tedy

$$J\,[\pi C^0\,(\mathfrak{L})] = J\,[C^0\,(\mathfrak{L})] \tag{3}$$

pro každý $(0, \mathfrak{L})$-řetěz $C^0\,(\mathfrak{L})$.

18. Nechť π_1 a π_2 jsou dvě simpliciální zobrazení komplexu $\mathfrak{L}$ do komplexu $\mathfrak{K}$. Pravíme, že π_1 a π_2 jsou *sousední*, když, kdykoli $A_0, A_1, \ldots, A_p$ jsou vrcholy nějakého simplexu komplexu $\mathfrak{L}$, také

$$\pi_1 A_0, \pi_1 A_1, \ldots, \pi_1 A_p, \pi_2 A_0, \pi_2 A_1, \ldots, \pi_2 A_p$$

jsou vrcholy nějakého simplexu komplexu $\mathfrak{K}$.

Nechť π_1 a π_2 jsou dvě sousední simpliciální zobrazení komplexu $\mathfrak{L}$ do komplexu $\mathfrak{K}$. Srovnejme všecky vrcholy komplexu $\mathfrak{L}$ jakýmkoli (ale pevně zvoleným) způsobem v konečnou posloupnost

$$A_1, A_2, \ldots, A_\alpha. \tag{1}$$

Každý $(p, \mathfrak{L})$-simplex lze pak psáti jedním a jen jedním způsobem ve tvaru

$$\tau^p = (A_{\nu_0}, A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_p}),\ 1 \leqq \nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_p \leqq \alpha. \tag{2}$$

Klademe pak

$$P\tau^p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\pi_1 A_{\nu_0}, \ldots, \pi_1 A_{\nu_i}, \pi_2 A_{\nu_i}, \ldots, \pi_2 A_{\nu_p}). \tag{3}$$

Podle dohody učiněné v **16** pravá strana ve (3) je vždy určitý $(p+1, \mathfrak{K})$-řetěz [závislý podstatně na volbě uspořádání (1)].

Nechť $\tau_1^p, \ldots, \tau_\beta^p$ jsou všecky $(p, \mathfrak{L})$-simplexy, libovolně uspořádané, ale (když $p \geqq 1$) orientované v souhlasu s (2). Je-li $C^p(\mathfrak{L}) = \sum_{k=1}^{\beta} r_k \tau_k^p$ libovolný $(p, \mathfrak{L})$-řetěz, klademe

$$PC^p(\mathfrak{L}) = \sum_{k=1}^{\beta} r_k \,.\, P\tau_k^p, \tag{4}$$

takže $PC^p(\mathfrak{L})$ je $(p+1, \mathfrak{K})$-řetěz. Jest

$$\begin{aligned} P[C^p(\mathfrak{L}) + D^p(\mathfrak{L})] &= PC^p(\mathfrak{L}) + PD^p(\mathfrak{L}), \\ P[aC^p(\mathfrak{L})] &= a[PC^p(\mathfrak{L})]. \end{aligned} \tag{5}$$

Vraťme se k formulím (2) a (3).

Podle **5** (2) (v. **16**) jest

$$\begin{aligned} &F(\pi_1 A_{\nu_0}, \ldots, \pi_1 A_{\nu_i}, \pi_2 A_{\nu_i}, \ldots, \pi_2 A_{\nu_p}) = \\ &= \sum_{j=0}^{i} (-1)^j (\pi_1 A_{\nu_0}, \ldots, \pi_1 A_{\nu_i}, \pi_2 A_{\nu_i}, \ldots, \pi_2 A_{\nu_p})_j - \\ &- \sum_{j=i}^{p} (-1)^j (\pi_1 A_{\nu_0}, \ldots, \pi_1 A_{\nu_i}, \pi_2 A_{\nu_i}, \ldots, \pi_2 A_{\nu_p})^j, \end{aligned}$$

kde index j znamená, je-li umístěn dole, že jest vynechati vrchol $\pi_1 A_{\nu_j}$, a je-li umístěn nahoře, že jest vynechati vrchol $\pi_2 A_{\nu_j}$. Tedy

$$\begin{aligned} FP\tau^p &= \sum_{i=0}^{p} (\pi_1 A_{\nu_0}, \ldots, \pi_1 A_{\nu_i}, \pi_2 A_{\nu_i}, \ldots, \pi_2 A_{\nu_p})_i - \\ &- \sum_{i=0}^{p} (\pi_1 A_{\nu_0}, \ldots, \pi_1 A_{\nu_i}, \pi_2 A_{\nu_i}, \ldots, \pi_2 A_{\nu_p})^i + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{0 \leqq j < i \leqq p} (-1)^{i+j} (\pi_1 A_{\nu_0}, \ldots, \pi_1 \dot{A}_{\nu_i}, \pi_2 A_{\nu_i}, \ldots, \pi_2 A_{\nu_p})_j -$$

$$- \sum_{0 \leqq j < i \leqq p} (-1)^{i+j} (\pi_1 A_{\nu_0}, \ldots, \pi_1 \dot{A}_{\nu_i}, \pi_2 A_{\nu_i}, \ldots, \pi_2 A_{\nu_p})^j =$$

$$= S_1 - S_2 + S_3 - S_4.$$

Zřejmě

$$S_1 - S_2 = \pi_2 \tau^p - \pi_1 \tau^p.$$

Když $p = 0$, jest $S_3 - S_4 = 0$. Když $p \geqq 1$, součet těch členů z $S_3 - S_4$, které patří určité hodnotě indexu j, jest patrně roven $(-1)^{j+1} P\tau_j^{p-1}$, kde $\tau_j^{p-1} = (A_{\nu_0}, \ldots, \dot{A}_{\nu_p})_j$, při čemž index j znamená vynechání vrcholu A_{ν_j}. Podle (4) a **5** (2) je tedy $S_3 - S_4 = -PF\tau^p$, takže pro $p \geqq 1$ jest

$$FP\tau^p = \pi_2 \tau^p - \pi_1 \tau^p - PF\tau^p.$$

Tedy obecně pro každý $(p, \mathfrak{L})$-řetěz $C^p(\mathfrak{L})$ platí: 1° když $p = 0$,

$$FPC^0(\mathfrak{L}) = \pi_2 C^0(\mathfrak{L}) - \pi_1 C^0(\mathfrak{L}), \tag{6}$$

2° když $p \geqq 1$,

$$FP\,C^p(\mathfrak{L}) = \pi_2 C^p(\mathfrak{L}) - \pi_1 C^p(\mathfrak{L}) - PF\,C^p(\mathfrak{L}). \tag{7}$$

III. Sítě.

1. Obecný pojem (*topologického*) *prostoru* R jsem vyložil v odst. **1** článku *Množství ireducibilně souvislá mezi n body* (Časopis p. p. m. a f., LXI, 1932, str. 109—129). Připomeňme si (l. c. **5**), že každá část prostoru je prostor.

2. Nechť R je prostor. *Síť* (*v prostoru* R) je konečná třída $\mathfrak{U}$ neprázdných v R otevřených množství $U_1, U_2, \ldots, U_m$ (zvaných *vrcholy sítě*) taková, že $\sum_{i=1}^{m} U_i = R$. Mezi sebou různé vrcholy $U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_p}$ sítě R tvoří $(p, \mathfrak{U})$-*simplex*, když a jen když množství

$$\prod_{i=0}^{p} U_{\nu_i} \tag{1}$$

je $\neq 0$. Podmínky II **1·1** a **1·2** jsou splněny, takže *síť je komplex*. Množství (1) nazývá se *jádro* $(p, \mathfrak{U})$-*simplexu* $(U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_p})$.

3. Nechť S jest uzavřené v R. Nechť $\mathfrak{U}$ je síť v R. Nechť $\mathfrak{U}(S)$ znamená podkomplex (II **7**) sítě $\mathfrak{U}$ takto definovaný: $(p, \mathfrak{U})$-simplex je simplexem komplexu $\mathfrak{U}(S)$, když a jen když jeho jádro K protne S (t. j. $KS \neq 0$). Snadno vidíme, že $\mathfrak{U}(S)$ je skutečně podkomplex sítě $\mathfrak{U}$.

Nechť $C^p(\mathfrak{U})$ je $(p, \mathfrak{U})$-řetěz (II **3**). Místo $C^p(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{U}(S)$ (II **7**) píšeme $C^p(\mathfrak{U}) \subset S$ a pravíme, že $C^p(\mathfrak{U})$ *leží v* S*. Tedy [když jako ve II **3** $\sigma_1^p, \ldots, \sigma_{\alpha_p}^p$ jsou všecky $(p, \mathfrak{U})$-simplexy] je $\sum_{i=1}^{\alpha_p} r_i \sigma_i^p \subset S$, když a jen

* Když U je vrchol sítě $\mathfrak{U}$ a když $\sigma^0 = (U)$ je jemu přiřazený $(0, \mathfrak{U})$-simplex [podle dohody učiněné ve II 3 σ^0 je $(0, \mathfrak{U})$-řetěz], pak $\sigma^0 \subset S$ neznamená naprosto, že $U \subset S$, nýbrž pouze, že $US \neq 0$.

když pro každé i je buďto $r_i = 0$ nebo $SK_i \neq 0$, kde K_i je jádro simplexu σ_i^p. Zřejmě, když $S \subset T \subset R$ (S a T uzavřená v R), pak $C^p(\mathfrak{U}) \subset S$ implikuje $C^p(\mathfrak{U}) \subset T$. Naproti tomu, když $C^p(\mathfrak{U}) \subset S_1$, $C^p(\mathfrak{U}) \subset S_2$ (S_1 a S_2 uzavřená v R) nemusí býti $C^p(\mathfrak{U}) \subset S_1 S_2$. Místo $C^p(\mathfrak{U}) = D^p(\mathfrak{U})$ mod $\mathfrak{U}(S)$ (II **7**) píšeme $C^p(\mathfrak{U}) = D^p(\mathfrak{U})$ mod S.

Podobně $C^p(\mathfrak{U})$ je $(p, \mathfrak{U})$-cyklus mod S, když je to $(p, \mathfrak{U})$-cyklus mod $\mathfrak{U}(S)$ (II **12**). Jsou-li $C^p(\mathfrak{U})$, $D^p(\mathfrak{U})$ dva $(p, \mathfrak{U})$-cykly mod S, pak $C^p(\mathfrak{U}) \sim D^p(\mathfrak{U})$ mod S znamená, že $C^p(\mathfrak{U}) \sim D^p(\mathfrak{U})$ mod $\mathfrak{U}(S)$ (II **13**). Jsou-li $C^p(\mathfrak{U})$ a $D^p(\mathfrak{U})$ dva $(p, \mathfrak{U})$-cykly mod S v T (S a T uzavřená v R, $S \subset T$), pak $C^p(\mathfrak{U}) \sim D^p(\mathfrak{U})$ mod S v T znamená, že $C^p(\mathfrak{U}) \sim D^p(\mathfrak{U})$ mod $\mathfrak{U}(S)$ v $\mathfrak{U}(T)$ (II **14**).

Všimněme si zvláštního případu absolutních $(p, \mathfrak{U})$-cyklů ($S = 0$).

4. Síť $\mathfrak{V}$ nazývá se *zjemněním sítě* $\mathfrak{U}$, když každý vrchol sítě $\mathfrak{V}$ je částí některého vrcholu sítě S.

4·1. *Je-li* $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_m$ *konečný počet daných sítí, existuje síť* $\mathfrak{V}$, *která je zjemněním každé z daných sítí.*

Důkaz. Za $\mathfrak{V}$ můžeme zvoliti síť o vrcholech $\prod_{i=1}^{m} U_i$, kde U_i probíhá všecky vrcholy sítě $\mathfrak{U}_i$, při čemž vyloučíme takové hodnoty, pro něž $\prod_{i=1}^{m} U_i = 0$.

5. Nechť R je prostor; nechť S jest množství uzavřené v R. Nechť $\mathfrak{U}$ je síť v R; nechť $U_1, U_2, \ldots, U_\alpha$ jsou její vrcholy. Pak množství $SU_1, SU_2, \ldots, SU_\alpha$, ze kterých vynecháme ta, jež snad jsou prázdná, a z nichž každé počítáme jen jednou, ač se formálně může vyskytnouti několikrát, tvoří síť v prostoru S, kterou označíme $S\mathfrak{U}$.

Zřejmá je věta:

5·1. *Nechť* $\mathfrak{V}$ *je zjemnění sítě* $\mathfrak{U}$ *v prostoru* R; *pak* $S\mathfrak{V}$ *je zjemnění sítě* $S\mathfrak{U}$.

5·2. *Nechť* $\mathfrak{U}_0$ *je síť v* S; *pak existuje v* R *síť* $\mathfrak{U}$ *taková, že* $\mathfrak{U}_0 = S\mathfrak{U}$.

Důkaz. Nechť $U_{01}, U_{02}, \ldots, U_{0\alpha}$ jsou vrcholy sítě $\mathfrak{U}_0$. Pak existují v R otevřená množství $U_1, U_2, \ldots, U_\alpha$ taková, že $U_{0i} = SU_i$. Množství $U_1, U_2, \ldots, U_\alpha$ a $R - S$ (poslední odpadne v triviálním případě $S = R$) jsou vrcholy žádané sítě $\mathfrak{U}$.

5·3. *Nechť* $\mathfrak{U}$ *je síť v* R; *nechť* $\mathfrak{U}_0 = S\mathfrak{U}$; *nechť* $\mathfrak{V}_0$ *je zjemnění* $\mathfrak{U}_0$. *Pak existuje zjemnění* $\mathfrak{V}$ *sítě* $\mathfrak{U}$ *takové, že* $\mathfrak{V}_0 = S\mathfrak{V}$.

Důkaz. Nechť $V_{01}, V_{02}, \ldots, V_{0\beta}$ jsou všecky vrcholy sítě $\mathfrak{V}_0$. Pak pro $1 \leqq i \leqq \beta$ lze udati vrchol U_{0i} sítě $\mathfrak{U}_0$ tak, že $V_{0i} \subset U_{0i}$, dále vrchol U'_i sítě $\mathfrak{U}$ tak, že $U_{0i} = SU'_i$, a konečně množství W_i otevřené v R tak, že $V_{0i} = SW_i$. Nechť $U_1, U_2, \ldots. U_\alpha$ jsou všecky vrcholy sítě $\mathfrak{U}$. Množství

$$U'_1 W_1,\ U'_2 W_2, \ldots, U'_\beta W_\beta,\quad U_1 - S,\ U_2 - S, \ldots, U_\alpha - S,$$

z nichž každé prázdné vypustíme a každé neprázdné počítáme jen jednou, jsou vrcholy žádané sítě $\mathfrak{B}$.

6. Nechť $\mathfrak{B}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$ v prostoru R. Každému vrcholu V sítě $\mathfrak{B}$ můžeme přiřaditi vrchol $U = \pi V$ sítě $\mathfrak{U}$ tak, že $V \subset U$. Operace π nazývá se *projekce sítě* $\mathfrak{B}$ *do sítě* $\mathfrak{U}$; označení $\pi = \mathrm{Pr.}\ (\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Při daných $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ projekcí π může býti několik.

Projekce π je simpliciální zobrazení (v. II **17**) *sítě* $\mathfrak{B}$ *do sítě* $\mathfrak{U}$. Když S jest uzavřené v R, a když τ^p je $(p, \mathfrak{B})$-simplex, pak $\pi\tau^p$ (v. II **17**) buďto je $= 0$ nebo je to $(p, \mathfrak{U})$-simplex, jehož jádro protne S, neboť obsahuje jako část jádro simplexu τ^p. Tedy když $C^p(\mathfrak{B})$ je $(p, \mathfrak{B})$-řetěz ležící v S (v. **2**), pak $(p, \mathfrak{U})$-řetěz $\pi C^p(\mathfrak{B})$ leží v S. Z toho následuje dále, připomeneme-li si formuli II **17** (2):

Nechť $S \subset T \subset R$. Nechť S a T jsou uzavřená v R. Když $C^p(\mathfrak{B})$ je $(p, \mathfrak{B})$-cyklus mod S v T, pak $\pi C^p(\mathfrak{B})$ je $(p, \mathfrak{U})$-cyklus mod S v T. Když $C^p(\mathfrak{B}) \backsim D^p(\mathfrak{B})$ mod S v T, pak $\pi C^p(\mathfrak{B}) \backsim \pi D^p(\mathfrak{B})$ mod S v T.

Specielně: Nechť S jest uzavřené v R. Když $C^p(\mathfrak{B})$ je $(p, \mathfrak{B})$-cyklus mod S, pak $\pi C^p(\mathfrak{B})$ je $(p, \mathfrak{U})$-cyklus mod S. Když $C^p(\mathfrak{B}) \backsim D^p(\mathfrak{B})$ mod S, pak $\pi C^p(\mathfrak{B}) \backsim \pi D^p(\mathfrak{B})$ mod S.

Když $C^p(\mathfrak{B})$ jest absolutní $(p, \mathfrak{B})$-cyklus, pak $\pi C^p(\mathfrak{B})$ jest absolutní $(p, \mathfrak{U})$-cyklus. Když $C^p(\mathfrak{B}) \backsim D^p(\mathfrak{B})$, pak $\pi C^p(\mathfrak{B}) \backsim \pi D^p(\mathfrak{B})$. Když S jest uzavřené v R a když $C^p(\mathfrak{B})$ jest absolutní $(p, \mathfrak{B})$-cyklus v S, pak $\pi C^p(\mathfrak{B})$ jest absolutní $(p, \mathfrak{U})$-cyklus v S. Když $C^p(\mathfrak{B}) \backsim D^p(\mathfrak{B})$ v S, pak $\pi C^p(\mathfrak{B}) \backsim \pi D^p(\mathfrak{B})$ v S.

7. *Nechť* $S \subset T \subset R$; *nechť* S *a* T *jsou uzavřená v* R. *Nechť* $\mathfrak{U}$ *je síť v* R; *nechť* $\mathfrak{B}$ *je její zjemnění. Nechť* $\pi_1 = \mathrm{Pr.}\ (\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. *Nechť* $\pi_2 = \mathrm{Pr.}\ (\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. *Nechť* $C^p(\mathfrak{B})$ *je* $(p, \mathfrak{B})$-*cyklus mod* S *v* T. *Pak*

$$\pi_1 C^p(\mathfrak{B}) \backsim \pi_2 C^p(\mathfrak{B}) \text{ mod } S \text{ v } T. \tag{1}$$

Všimněme si zvláštních případů: $1^0\ T = R$; $2^0\ S = 0$; $3^0\ S = 0,\ T = R$.

Důkaz. Snadno se nahlédne, že π_1 a π_2 jsou dvě sousední (v. II **18**) simpliciální zobrazení sítě $\mathfrak{B}$ do sítě $\mathfrak{U}$. Tedy podle II **18**, (7) a (6) jest

$$PC^p(\mathfrak{B}) \to \pi_2 C^p(\mathfrak{B}) - \pi_1 C^p(\mathfrak{B}) - PFC^p(\mathfrak{B}),$$

kde poslední člen odpadne, když $p = 0$. Ježto $C^p(\mathfrak{B}) \subset T$, a (pro $p > 0$) $FC^p(\mathfrak{B}) \subset S$, vychází snadno z II **18** (3), že $PC^p(\mathfrak{B}) \subset T$ a (pro $p > 0$) $PFC^p(\mathfrak{B}) \subset S$. Tedy platí (1).

8. Nechť $\mathfrak{U}$ je síť v R. Nechť $S \subset T \subset R$; nechť S a T jsou uzavřená v R. Pravíme, že $C^p(\mathfrak{U})$ je *podstatný* $(p, \mathfrak{U})$-*cyklus* mod S *v* T (když $T = R$: *podstatný* $(p, \mathfrak{U})$-*cyklus* mod S; když $S = 0$: *podstatný absolutní* $(p, \mathfrak{U})$-*cyklus v* T; když $S = 0$, $T = R$: *podstatný absolutní* $(p, \mathfrak{U})$-*cyklus*), když netoliko $C^p(\mathfrak{U})$ je $(p, \mathfrak{U})$-cyklus mod S v T, nýbrž dokonce pro každé zjemnění $\mathfrak{B}$ sítě $\mathfrak{U}$ existuje $(p, \mathfrak{B})$-cyklus $C^p(\mathfrak{B})$ mod S v T takový, že $\pi C^p(\mathfrak{B}) \backsim C^p(\mathfrak{U})$ mod S v T. Při tom $\pi = \mathrm{Pr.}\ (\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$; na bližší volbě projekce π zde a zpravidla nikde později nezáleží vzhledem k **7** (1).

Zřejmě *podstatné* $(p, \mathfrak{U})$-*cykly* mod S v T *tvoří podmodul modulu všech* $(p, \mathfrak{U})$-*cyklů* mod S v T.

8·1. *Každý* $(0, \mathfrak{U})$-*cyklus* mod S v T *je podstatný.*

Důkaz. Nechť $U_1, \ldots, U_m$ jsou ty vrcholy sítě $\mathfrak{U}$, které protnou T. Pro $1 \leq i \leq m$ zvolme bod $a_i \in U_i T$. Nechť $C^0(\mathfrak{U})$ je $(0, \mathfrak{U})$-cyklus mod S v T; pak jest $C^0(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{m} r_i(U_i)$. Nechť $\mathfrak{V}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$; nechť $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Pro $1 \leq i \leq m$ zvolme vrchol V_i sítě $\mathfrak{V}$ tak, že $a_i \in V_i$, tedy $V_i T \neq 0$, takže $C^0(\mathfrak{V}) = \sum_{i=1}^{m} r_i(V_i)$ je $(0, \mathfrak{V})$-cyklus mod S v T. Ježto $a_i \in U_i \,.\, \pi V_i$, je buďto $(U_i, \pi V_i) = 0$ (v. II **16**) nebo $(U_i, \pi V_i)$ je $(1, \mathfrak{U})$-simplex ležící v T. Podle **5** (2) jest

$$\sum_{i=1}^{m} r_i(U_i, \pi V_i) \rightarrow \pi C^0(\mathfrak{V}) - C^0(\mathfrak{U}),$$

tedy $\pi C^0(\mathfrak{V}) \sim C^0(\mathfrak{U})$ v T, tedy tím spíše $\pi C^0(\mathfrak{V}) \sim C^0(\mathfrak{U})$ mod S v T.

8·2. *Nechť* $\mathfrak{U}_2$ *je zjemnění sítě* $\mathfrak{U}_1$; *nechť* $\pi_{21} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$. *Když* $C^p(\mathfrak{U}_2)$ *je podstatný* $(p, \mathfrak{U}_2)$-*cyklus* mod S *v* T, *pak* $\pi_{21} C^p(\mathfrak{U}_2)$ *je podstatný* $(p, \mathfrak{U}_1)$-*cyklus* mod S *v* T.

Důkaz. Nechť $\mathfrak{U}_3$ je jakékoli zjemnění sítě $\mathfrak{U}_1$; nechť $\pi_{31} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_1)$. Máme dokázati, že existuje $(p, \mathfrak{U}_3)$-cyklus $C^p(\mathfrak{U}_3)$ mod S v T takový, že $\pi_{31} C^p(\mathfrak{U}_3) \sim \pi_{21} C^p(\mathfrak{U}_2)$ mod S v T. Nechť (v. **4·1**) síť $\mathfrak{U}_4$ je zjemnění obou sítí $\mathfrak{U}_2$ a $\mathfrak{U}_3$; nechť $\pi_{42} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{43} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)$. Ježto $C^p(\mathfrak{U}_2)$ je podstatný $(p, \mathfrak{U}_2)$-cyklus mod S v T, existuje $(p, \mathfrak{U}_4)$-cyklus $C^p(\mathfrak{U}_4)$ mod S v T takový, že $\pi_{42} C^p(\mathfrak{U}_4) \sim C^p(\mathfrak{U}_2)$ mod S v T. Podle **6** jest* $\pi_{21}\pi_{42} C^p(\mathfrak{U}_4) \sim \pi_{21} C^p(\mathfrak{U}_2)$ mod S v T. Podle **7** (1) jest $\pi_{21}\pi_{42} C^p(\mathfrak{U}_4) \sim \pi_{31}\pi_{43} C^p(\mathfrak{U}_4)$ mod S v T, neboť $\pi_{21}\pi_{42} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_1)$ $\pi_{31}\pi_{43} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_1)$. Tedy $\pi_{31}\pi_{43} C^p(\mathfrak{U}_4) \sim \pi_{21} C^p(\mathfrak{U}_2)$ mod S v T, takže stačí položiti $C^p(\mathfrak{U}_3) = \pi_{43} C^p(\mathfrak{U}_4)$.

9. Nechť $\mathfrak{U}$ je síť v R. Nechť $S \subset T \subset R$; nechť S a T jsou uzavřen. v R. Pravíme, že $\mathfrak{V}$ je *zjemnění sítě* $\mathfrak{U}$ *normální vzhledem k p-cyklům* mod S *v* T [když $T = R$: *vzhledem k p-cyklům* mod S; když $S = 0$: *vzhledem k absolutním p-cyklům v* T; když $S = 0$, $T = R$: *vzhledem k absolutním p-cyklům*], když netoliko $\mathfrak{V}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$, nýbrž také, kdykoli $C^p(\mathfrak{V})$ je $(p, \mathfrak{V})$-cyklus mod S v T, vždy $\pi C^p(\mathfrak{V})$, kde $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, je podstatný $(p, \mathfrak{U})$-cyklus mod S v T. Na bližší volbě projekce π opět nezáleží podle **7** (1).

Z **8·1** následuje:

9·1. *Každé zjemnění sítě* $\mathfrak{U}$ *je normální vzhledem k* $(0, \mathfrak{U})$-*cyklům* mod S *v* T.

Z **8·2** následuje:

9·2. *Nechť* $\mathfrak{U}_2$ *je zjemnění sítě* $\mathfrak{U}_1$. *Nechť* $\mathfrak{U}_3$ *je zjemnění sítě* $\mathfrak{U}_2$

---

* $\pi_{21}\,\pi_{42}$ znamená, že se provede nejprve operace π_{42} a potom operace π_{21}.

normální vzhledem k p-cyklům mod S *v* T. *Pak* $\mathfrak{U}_3$ *je zjemnění sítě* $\mathfrak{U}_1$ *normální vzhledem k p-cyklům* mod S *v* T.

Zřejmá je věta:

9·3. *Nechť* $\mathfrak{U}_2$ *je zjemnění sítě* $\mathfrak{U}_1$ *normální vzhledem k p-cyklům* mod S *v* T. *Nechť* $\mathfrak{U}_3$ *je zjemnění sítě* $\mathfrak{U}_2$. *Pak* $\mathfrak{U}_3$ *je zjemnění sítě* $\mathfrak{U}_1$ *normální vzhledem k p-cyklům* mod S *v* T.

10. *Nechť* $\mathfrak{U}$ *je síť v* R. *Nechť* S *a* T *jsou uzavřená v* R; *nechť* $S \subset T \subset R$. *Nechť* $p = 0, 1, 2, \cdots$. *Existuje zjemnění sítě* $\mathfrak{U}$ *normální vzhledem k p-cyklům* mod S *v* T.

Důkaz. Pro každé zjemnění $\mathfrak{V}$ sítě $\mathfrak{U}$ nechť $\mathfrak{M}(\mathfrak{V})$ znamená množství všech $(p, \mathfrak{U})$-cyklů $C^p(\mathfrak{U})$ mod S v T takových, že, když $\pi = \text{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$ [na bližší volbě π nezáleží podle **7** (1)], existuje $(p, \mathfrak{V})$-cyklus $C^p(\mathfrak{V})$ mod S v T takový, že $\pi C^p(\mathfrak{V}) \sim C^p(\mathfrak{U})$ mod S v T. Zřejmě $\mathfrak{M}(\mathfrak{V})$ je podmodul modulu $\mathfrak{M}^p$ všech $(p, \mathfrak{U})$-řetězů. Ježto (v. II **3**) $\mathfrak{M}_p$ je konečný modul, také $\mathfrak{M}(\mathfrak{V})$ je konečný modul (v. I **19**). Nechť $h(\mathfrak{V})$ je hodnost modulu $\mathfrak{M}(\mathfrak{V})$.

Když $\mathfrak{V}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$ a když $\mathfrak{W}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{V}$, zřejmě $\mathfrak{M}(\mathfrak{W})$ je podmodul modulu $\mathfrak{M}(\mathfrak{V})$, takže (v. I **19**) $h(\mathfrak{W}) \leqq h(\mathfrak{V})$.

Zvolme nyní zjemnění $\mathfrak{U}_1$ sítě $\mathfrak{U}$ tak, aby číslo $h(\mathfrak{U}_1)$ bylo co nejmenší. Dokážeme, že $\mathfrak{U}_1$ je normální zjemnění sítě $\mathfrak{U}$ vzhledem k p-cyklům mod S v T.

Nechť $\pi_{10} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U})$. Nechť $C^p(\mathfrak{U}_1)$ je $(p, \mathfrak{U}_1)$-cyklus mod S v T. Máme dokázati, že $\pi_{10} C^p(\mathfrak{U}_1)$ je podstatný $(p, \mathfrak{U})$-cyklus mod S v T, t. j., když $\mathfrak{U}_2$ je libovolné zjemnění sítě $\mathfrak{U}$ a $\pi_{20} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U})$, že existuje $(p, \mathfrak{U}_2)$-cyklus $C^p(\mathfrak{U}_2)$ mod S v T takový, že $\pi_{20} C^p(\mathfrak{U}_2) \sim \pi_{10} C^p(\mathfrak{U}_1)$ mod S v T. Nechť (v. **4·1.**) síť $\mathfrak{U}_3$ je zjemnění obou sítí $\mathfrak{U}_1$ a $\mathfrak{U}_2$. Pak modul $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_3)$ je podmodulem obou modulů $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$, $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_2)$, takže $h(\mathfrak{U}_3) \leqq h(\mathfrak{U}_1)$, $h(\mathfrak{U}_3) \leqq h(\mathfrak{U}_2)$. Vzhledem k minimální hodnotě čísla $h(\mathfrak{U}_1)$ nemůže býti $h(\mathfrak{U}_3) < h(\mathfrak{U}_1)$, takže $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_3) = \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$ podle I **19.** Avšak $\pi_{10} C^p(\mathfrak{U}_1) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$; tedy $\pi_{10} C^p(\mathfrak{U}_1) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_3)$; ježto $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_3)$ je podmodul modulu $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_2)$, jest $\pi_{10} C^p(\mathfrak{U}_1) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_2)$. Tedy existuje $(p, \mathfrak{U}_2)$-cyklus $C^p(\mathfrak{U}_2)$ mod S v T takový, že $\pi_{20} C^p(\mathfrak{U}_2) \sim \pi_{10} C^p(\mathfrak{U}_1)$ mod S v T.

IV. Kombinatorické charaktery prostoru.

1. Nechť R je prostor. Nechť S a T jsou uzavřená v R; nechť $S \subset T$. Nechť $p = 0, 1, 2, \cdots$. *(p, R)-cyklus* mod *S v T* [když $T = R$: *(p, R)-cyklus* mod *S*; když $S = 0$: *absolutní (p, R)-cyklus v T*; když $S = 0$, $T = R$: *absolutní (p, R)-cyklus*] je funkce, jejímž oborem je množství všech sítí v R a jejíž hodnota $C^p(\mathfrak{U})$ v každé síti $\mathfrak{U}$ jest $(p, \mathfrak{U})$-cyklus mod S v T, při čemž je splněna následující podmínka: Je-li $\mathfrak{V}$ zjemnění sítě $\mathfrak{U}$, je-li $\pi = \text{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, pak $\pi C^p(\mathfrak{U}) \sim C^p(\mathfrak{U})$ mod S v T. Na bližší volbě projekce π nezáleží podle III **7**.

(p, R)-cykly budeme značiti C^p, $C_1{}^p$, D^p, Γ^p atp. Když na př. C^p znamená (p, R)-cyklus mod S v T, pak při každé síti $\mathfrak{U}$ znamená $C^p(\mathfrak{U})$ příslušný $(p, \mathfrak{U})$-cyklus mod S v T (hodnotu funkce C^p v síti $\mathfrak{U}$).

1·1. *Nechť C^0 je absolutní $(0, R)$-cyklus. Číslo $J[C^0(\mathfrak{U})]$* (v. II **6**) *je nezávislé na volbě síti $\mathfrak{U}$.*

Budeme psáti $J(C^0) = J[C^0(\mathfrak{A})]$.

Důkaz. Nechť $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ jsou dvě dané sítě. Nechť (v. III **4·1**) $\mathfrak{U}_3$ je zjemnění obou sítí $\mathfrak{U}_1$ a $\mathfrak{U}_2$; nechť $\pi_1 = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_2 = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_3\, \mathfrak{U}_2)$. Pak jest $\pi_1\, C^0(\mathfrak{U}_3) \sim C^0(\mathfrak{U}_1)$, $\pi_2\, C^0(\mathfrak{U}_3) \sim C^0(\mathfrak{U}_2)$, tedy $J[C^0(\mathfrak{U}_3)] = J[C^0(\mathfrak{U}_1)]$, $J[C^0\, \mathfrak{U}_3) = J[C^0(\mathfrak{U}_2)]$ podle II **6** (1), **11** a **17** (3).

Jsou-li C^p a D^p dva (p, R)-cykly mod S v T a je-li $a \in \mathfrak{R}$, definujeme (p, R)-cykly $E^p = C^p + D^p$, $\Gamma^p = a\ C^p$ mod S v T takto:

$E^p(\mathfrak{U}) = C^p(\mathfrak{U}) + D^p(\mathfrak{U})$, $\Gamma^p(\mathfrak{U}) = a\, C^p(\mathfrak{U})$ pro každou síť $\mathfrak{U}$. Vzhledem k těmto definicím tvoří (p, R)-cykly mod S v T modul.

2. Když C^p je (p, R)-cyklus mod S v T, pak $C^p \sim 0$ mod S v T znamená, že v $C^p(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod S v T pro každou síť $\mathfrak{U}$. Jsou-li C^p a D^p dva (p, R)-cykly mod S v T, pak $C^p \sim D^p$ mod S v T znamená, že $C^p - D^p \sim 0$ mod S v T, tedy že $C^p(\mathfrak{U}) \sim D^p(\mathfrak{U})$ mod S v T pro každou síť $\mathfrak{U}$.

Množství $\mathfrak{N}^p$ všech (p, R)-cyklů mod S v T homologických s nulou mod S v T zřejmě je podmodul modulu $\mathfrak{M}^p$ všech (p, R)-cyklů mod S v T. Tedy (v. I **24**) také $\mathfrak{M}^p - \mathfrak{N}^p$ je modul, jehož hodnost označíme $\boldsymbol{B}^p(R, T, S)$. Klademe $\boldsymbol{B}^p(R, S) = \boldsymbol{B}^p(R, R, S)$, $\boldsymbol{B}^p(R) = \boldsymbol{B}^p(R, 0) = \boldsymbol{B}^p(R, R, 0)$. Číslo $\boldsymbol{B}^p$ (R, S) nazývá se *$p^{\text{té}}$ relativní Bettiovo číslo prostoru R* mod S. Číslo $\boldsymbol{B}^p(R)$ nazývá se *$p^{\text{té}}$ absolutní Bettiovo číslo prostoru R.*

Podle I **13**, **16** a **17** platí:

2·1. *Jest $\boldsymbol{B}^p(R, T, S) = 0$, když a jen když každý (p, R)-cyklus* mod *S v T je homologický s nulou* mod *S v T.*

2·2. *Jest $\boldsymbol{B}^p(R, T, S) = m\ (= 1, 2, 3, \ldots)$, když a jen když existují (p, R)-cykly $C_i{}^p$ $(1 \leq i \leq m)$* mod *S v T takové, že: 1^0 každému (p, R)-cyklu Γ^p* mod *S v T lze přiřaditi racionální čísla $r_1, \ldots, r_m$ taková, že $\Gamma^p \sim \sum\limits_{i=1}^{m} r_i\, C_i{}^p$* mod *$S$ v T; 2^0 $\sum\limits_{i=1}^{m} r_i\, C_i{}^p \sim 0$* mod *$S$ v T implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$.*

2·3. *Jest $\boldsymbol{B}^p(R, T, S) = \infty$, když a jen když existuje nekonečná posloupnost $C_1{}^p$, $C_2{}^p$, $C_3{}^p, \ldots$ (p, R)-cyklů* mod *S v T taková, že, kdykoli, $\sum\limits_{i=1}^{m} r_i\, C_i{}^p \sim 0$* mod *$S$ v T $(m = 1, 2, 3, \ldots, r_i \in \mathfrak{R})$, jest $r_1 = \ldots = r_m = 0$.*

3. Nechť S a T jsou uzavřená v R a nechť $S \subset T$.

Nechť $\mathfrak{U}$ je síť v R; nechť $\mathfrak{U}_0$ je síť v T; nechť $\mathfrak{U}_0 = T\,\mathfrak{U}$ (v. III **5**). Nechť $U_1, U_2, \ldots, U_m$ jsou ty vrcholy sítě $\mathfrak{U}$, které protnou T; pak TU_1, $TU_2, \ldots, TU_m$ jsou všecky vrcholy sítě $\mathfrak{U}_0$; pro $i \neq k$ jest $U_i \neq U_k$, může však býti $TU_i = TU_k$. Je-li $C^p(\mathfrak{U}) = \Sigma r_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}(U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_p})$ libovolný $(p, \mathfrak{U})$-řetěz v T, pak (v. II **16**) $\Sigma r_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}(TU_{\nu_0}, TU_{\nu_1}, \ldots, TU_{\nu_p})$ je $(p, \mathfrak{U}_0)$-řetěz, který označíme $(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U})$. Zřejmě operace $(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)$ je homomorfní zobrazení modulu všech v T ležících $(p, \mathfrak{U})$-řetězů na modul všech $(p, \mathfrak{U}_0)$-řetězů. Zřejmě

$$J[C^0(\mathfrak{U})] = J[(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, C^0(\mathfrak{U})]. \tag{1}$$

Zřejmě

když $C^p(\mathfrak{U})$ je $(p, \mathfrak{U})$-cyklus mod S *v* T, *pak*

$$(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}) \text{ je } (p, \mathfrak{U}_0)\text{-cyklus mod } S. \tag{2}$$

Obrácení není vždy správné, zřejmě však

každému $(p, \mathfrak{U}_0)$-cyklu $C_0^p(\mathfrak{U}_0)$ mod S *lze přiřaditi $(p, \mathfrak{U})$-cyklus $C^p(\mathfrak{U})$* mod S *v T takový, že*

$$(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}) = C_0^p(\mathfrak{U}_0). \tag{3}$$

Dále platí, že

jsou-li $C^p(\mathfrak{U})$ a $D^p(\mathfrak{U})$ dva $(p, \mathfrak{U})$-cykly mod S *v T, pak $C^p(\mathfrak{U}) \sim D^p(\mathfrak{U})$* mod S *v T, když a jen když*

$$(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}) \sim (\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, D^p(\mathfrak{U}) \text{ mod } S. \tag{4}$$

D ů k a z. Když $C^p(\mathfrak{U}) \sim D^p(\mathfrak{U})$ mod S v T, zřejmě $(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}) \sim (\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, D^p(\mathfrak{U})$ mod S. Nechť tedy $(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}) \sim (\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, D^p(\mathfrak{U})$ mod S. Nechť $T(\mathfrak{U})$ je podkomplex sítě $\mathfrak{U}$ definovaný jako ve III **3**; jeho vrcholy jsou $U_1, U_2, \ldots, U_m$. Můžeme předpokládati, že $TU_1, TU_2, \ldots, TU_n$ jsou mezi sebou různé, a že každému i $(1 \leqq i \leqq m)$ lze přiřaditi $f(i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ tak, že $TU_i = TU_{f(i)}$; jest ovšem $f(i) = i$ pro $1 \leqq i \leqq n$. Pro $1 \leqq i \leqq m$ nechť $\pi_1 U_i = U_i$, $\pi_2 U_i = U_{f(i)}$. Snadno vidíme, že π_1 a π_2 jsou dvě sousední simpliciální zobrazení komplexu $T(\mathfrak{U})$ do komplexu $T(\mathfrak{U})$, takže podle II **18** (6) a (7) existuje $(p+1, \mathfrak{U})$-řetěz $P[C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})]$ a $(p, \mathfrak{U})$-řetěz $PF[C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})]$ (který odpadne pro $p = 0$) takové, že

$$P[C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})] \to \pi_2[C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})] - [C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})] - PF[C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})].$$

Ježto $C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U}) \subset T$, $F[C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})] \subset S$, je tedy

$$C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U}) \sim \pi_2[C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})] \text{ mod } S \text{ v } T.$$

Ježto $(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)[C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})] \sim 0$ mod S, vychází snadno z definice operace π_2, že $\pi_2[C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U})] \sim 0$ mod S v T, takže $C^p(\mathfrak{U}) - D^p(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod S v T.

Nechť $\mathfrak{V}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$, takže $\mathfrak{V}_0 = T\mathfrak{V}$ je (III **5·1**) *zjemnění sítě $\mathfrak{U}_0$.*

Nechť $\pi =$ Pr. $(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, $\pi' =$ Pr. $(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{U}_0)$. *Nechť $C^p(\mathfrak{V})$ je $(p, \mathfrak{V})$-cyklus* mod S *v T. Pak*

$$(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, \pi\, C^p(\mathfrak{V}) \sim \pi' (\mathfrak{V} \mid \mathfrak{V}_0)\, C^p(\mathfrak{V}) \text{ mod } S. \tag{5}$$

Důkaz. Nechť $V_1, V_2, \ldots, V_m$ jsou ty vrcholy sítě $\mathfrak{V}$, které protnou T. Jsou to tedy vrcholy komplexu $T(\mathfrak{V})$ (v. III **3**). Mohu předpokládati, že $TV_1, \ldots, TV_n$ jsou mezi sebou různé, a že každému i $(1 \leqq i \leqq m)$ lze přiřaditi $f(i)$ $(1 \leqq f(i) \leqq n)$ tak, že $TV_i = TV_{f(i)}$; jest $f(i) = i$ pro $1 \leqq i \leqq n$. Pro $1 \leqq i \leqq m$ nechť $\pi_1 V_i = T\pi V_i$, $\pi_2 V_i = T\pi V_{f(i)}$. Zřejmě π_1 a π_2 jsou dvě sousední simpliciální zobrazení komplexu $T\mathfrak{V}$ do sítě $\mathfrak{U}_0$. Pro $1 \leqq i \leqq n$ položme $\pi' TV_i = T\pi V_{f(i)}$; pak $\pi' = \text{Pr.}\ (\mathfrak{V}_0, \mathfrak{U}_0)$; podle III **7** stačí vésti důkaz pro tuto volbu projekce π'.

Podle II **18** jest

$$FPC^p(\mathfrak{V}) = \pi_2 C^p(\mathfrak{V}) - \pi_1 C^p(\mathfrak{V}) - PFC^p(\mathfrak{V}),$$

kde poslední člen odpadne pro $p = 0$. Avšak $PFC^p(\mathfrak{V}) \subset S$, $\pi_1 C^p(\mathfrak{V}) = (\mathfrak{U} \mid \mathfrak{U}_0)\, \pi\, C^p(\mathfrak{V})$, $\pi_2 C^p(\mathfrak{V}) = \pi' (\mathfrak{V} \mid \mathfrak{V}_0)\, C^p(\mathfrak{V})$.

Nechť C^p je (p, R)-cyklus mod *S v T. Nechť $\mathfrak{U}_1$ a $\mathfrak{U}_2$ jsou dvě sítě v R takové, že $T\mathfrak{U}_1 = T\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_0$. Pak jest*

$$(\mathfrak{U}_1 \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_1) \sim (\mathfrak{U}_2 \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_2) \text{ mod } S. \tag{6}$$

Důkaz. Nechť (III **4·1**) síť $\mathfrak{U}_3$ je zjemněním obou sítí $\mathfrak{U}_1$ a $\mathfrak{U}_2$, takže (III **5·1**) síť $\mathfrak{V}_0 = T\mathfrak{U}_3$ je zjemněním sítě $\mathfrak{U}_0$. Nechť $\pi_1 = \text{Pr.}\ (\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_2 = \text{Pr.}\ (\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi' = \text{Pr.}\ (\mathfrak{V}_0, \mathfrak{U}_0)$. Ježto C^p je (p, R)-cyklus mod S v T, je $C^p(\mathfrak{U}_1) \sim \pi_1 C^p(\mathfrak{U}_3)$ mod S v T, $C^p(\mathfrak{U}_2) \sim \pi_2 C^p(\mathfrak{U}_3)$ mod S v T, takže podle (4)

$$(\mathfrak{U}_1 \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_1) \sim (\mathfrak{U}_1 \mid \mathfrak{U}_0)\, \pi_1 C^p(\mathfrak{U}_3) \text{ mod } S,$$
$$(\mathfrak{U}_2 \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_2) \sim (\mathfrak{U}_2 \mid \mathfrak{U}_0)\, \pi_2 C^p(\mathfrak{U}_3) \text{ mod } S.$$

Avšak podle (5)

$$(\mathfrak{U}_1 \mid \mathfrak{U}_0)\, \pi_1 C^p(\mathfrak{U}_3) \sim \pi' (\mathfrak{U}_3 \mid \mathfrak{V}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_3) \text{ mod } S,$$
$$(\mathfrak{U}_2 \mid \mathfrak{U}_0)\, \pi_2 C^p(\mathfrak{U}_3) \sim \pi' (\mathfrak{U}_3 \mid \mathfrak{V}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_3) \text{ mod } S,$$

takže $(\mathfrak{U}_1 \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_1) \sim (\mathfrak{U}_2 \mid \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_2)$ mod S.

4. Nechť opět S a T jsou uzavřená v R a $S \subset T$. Podle III **5·2** můžeme každé síti $\mathfrak{U}_0$ v T přiřaditi síť $\varphi\mathfrak{U}_0$ v R tak, že $\mathfrak{U}_0 = T\varphi\mathfrak{U}_0$. Funkce φ není ovšem jednoznačně určena.

Nechť C^p je (p, R)-cyklus mod S v T. Každé síti $\mathfrak{U}_0$ v T přiřaďme $(p, \mathfrak{U}_0)$-řetěz $C_0{}^p(\mathfrak{U}_0) = (\varphi\mathfrak{U}_0 \mid \mathfrak{U}_0))\, C^p(\varphi\mathfrak{U}_0)$. Podle **3** (2) $C_0{}^p(\mathfrak{U}_0)$ je $(p, \mathfrak{U}_0)$-cyklus mod S. Nechť $\mathfrak{V}_0$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}_0$; nechť $\pi' = \text{Pr.}\ (\mathfrak{V}_0, \mathfrak{U}_0)$. Podle III **5·3** existuje zjemnění $\mathfrak{W}$ sítě $\varphi\mathfrak{U}_0$ takové, že $T\mathfrak{W} = \mathfrak{V}_0$. Nechť $\pi = \text{Pr.}\ (\mathfrak{W}, \varphi\mathfrak{U}_0)$, takže $\pi C^p(\mathfrak{W}) \sim C^p(\varphi\mathfrak{U}_0)$ mod S v T, tedy podle **3** (4)

$$(\varphi\mathfrak{U}_0 \mid \mathfrak{U}_0)\, \pi C^p(\mathfrak{W}) \sim C_0{}^p(\mathfrak{U}_0) \text{ mod } S.$$

Avšak podle **3** (5)

$$(\varphi\mathfrak{U}_0 \mid \mathfrak{U}_0)\, \pi C^p(\mathfrak{W}) \sim \pi' (\mathfrak{W} \mid \mathfrak{V}_0)\, C^p(\mathfrak{W}) \text{ mod } S,$$

a podle **3** (6) je $(\mathfrak{W} | \mathfrak{V}_0)\, C^p(\mathfrak{W}) \sim C_0^p(\mathfrak{V}_0) \bmod S$, tedy podle III **6**

$$\pi' (\mathfrak{W} | \mathfrak{V}_0)\, C^p(\mathfrak{W}) \sim \pi' C_0^p(\mathfrak{V}_0) \bmod S,$$

takže $\pi' C_0^p \sim C_0^p(\mathfrak{U}_0) \bmod S$. Tedy řetězy $C_0^p(\mathfrak{U}_0)$ definují (p, T)-cyklus $C_0^p \bmod S$; píšeme $C_0^p = (R|T)\, C^p$.

Obráceně nechť C_0^p je (p, T)-cyklus mod S. Je-li $\mathfrak{U}$ libovolná síť v R, zvolme podle **3** (3) $(p, \mathfrak{U})$-cyklus $C^p(\mathfrak{U}) \bmod S$ v T tak, aby bylo

$$(\mathfrak{U} | T\mathfrak{U})\, C^p(\mathfrak{U}) = C_0^p(T\mathfrak{U}).$$

Nechť síť $\mathfrak{V}$ je zjemněním sítě $\mathfrak{U}$; nechť $\pi = \text{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$; nechť (v. III **5·1**) $\pi' = \text{Pr.}(T\mathfrak{V}, T\mathfrak{U})$. Pak jest

$$\pi' C_0^p(T\mathfrak{V}) \sim C_0^p(T\mathfrak{U}) \bmod S,$$

t. j.

$$\pi' (\mathfrak{V} | T\mathfrak{V})\, C^p(\mathfrak{V}) \sim (\mathfrak{U} | T\mathfrak{U})\, C^p(\mathfrak{U}) \bmod S.$$

Avšak podle **3** (5)

$$\pi' (\mathfrak{V} | T\mathfrak{V})\, C^p(\mathfrak{V}) \sim (\mathfrak{U} | T\mathfrak{U})\, \pi\, C^p(\mathfrak{V}) \bmod S,$$

takže

$$(\mathfrak{U} | T\mathfrak{U})\, \pi\, C^p(\mathfrak{V}) \sim (\mathfrak{U} | T\mathfrak{U})\, C^p(\mathfrak{U}) \bmod S,$$

tedy podle **3** (4) $\pi\, C^p(\mathfrak{V}) \sim C^p(\mathfrak{U}) \bmod S$ v T, t. j. řetězy $C^p(\mathfrak{U})$ definují (p, R)-cyklus $C^p \bmod S$ v T. Zřejmě $(R|T)\, C^p = C_0^p$.

Tedy operace $(R|T)$ je zobrazení modulu $\mathfrak{M}_p$ všech (p, R)-cyklů $C^p \bmod S$ v T na modul $\mathfrak{M}'_p$ všech (p, T)-cyklů $C_0^p \bmod S$; zřejmě toto zobrazení (závislé na volbě funkce φ) jest homomorfní. Nechť $\mathfrak{N}_p$ je modul těch C_p, jež jsou $\sim 0 \bmod S$ v T; nechť $\mathfrak{N}'_p$ je modul těch C_0^p, jež jsou $\sim 0 \bmod S$. Když $C^p \in \mathfrak{N}_p$, podle **3** (4) zřejmě $(R|T)\, C^p \in \mathfrak{N}'_p$. Obráceně nechť $C_0^p = (R|T)\, C^p \in \mathfrak{N}'_p$; dokážeme, že $C^p \in \mathfrak{N}_p$. Nechť $\mathfrak{U}$ je libovolná síť v R; máme dokázati, že $C^p(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod S$ v T. Nechť $\mathfrak{U}_0 = T\mathfrak{U}$; nechť $\mathfrak{U}_1 = \varphi\,\mathfrak{U}_0$. Podle **3** (6) $(\mathfrak{U}_1 | \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_1) \sim (\mathfrak{U} | \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}) \bmod S$; avšak $(\mathfrak{U}_1 | \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}_1) = C_0^p(\mathfrak{U}_0) \sim 0 \bmod S$; tedy $(\mathfrak{U} | \mathfrak{U}_0)\, C^p(\mathfrak{U}) \bmod S$, tedy $C^p(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod S$ v T podle **3** (4).

Z právě dokázaného výsledku následuje zřejmě, že operace $(R|T)$ definuje isomorfní zobrazení modulu $\mathfrak{M}_p - \mathfrak{N}_p$ na modul $\mathfrak{M}'_p - \mathfrak{N}'_p$. Ze **3** (6) následuje snadno, že tento isomorfismus je nezávislý na volbě funkce φ. Avšak hodnost modulu $\mathfrak{M}_p - \mathfrak{N}_p$ jest $\boldsymbol{B}^p(R, T, S)$ a hodnost modulu $\mathfrak{M}'_p - \mathfrak{N}'_p$ jest $\boldsymbol{B}^p(T, S)$. Tedy

$$\boldsymbol{B}^p(T, S) = \boldsymbol{B}^p(R, T, S) \tag{1}$$

a zejména

$$\boldsymbol{B}^p(T) = \boldsymbol{B}^p(R, T, 0). \tag{2}$$

5. *Nechť R je prostor. Nechť S a T jsou uzavřená v R a nechť $S \subset T$. Nechť každé síti $\mathfrak{U}$ v prostoru R je přiřazen lineární systém* (v. I 26) *$\Phi(\mathfrak{U})$ vzhledem k modulu $\mathfrak{M}_p(\mathfrak{U})$ všech $(p, \mathfrak{U})$-cyklů* mod *S v T. Je-li $\mathfrak{V}$ zjemnění sítě $\mathfrak{U}$, je-li $\pi =$* Pr. $(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$ *a je-li $C^p(\mathfrak{V}) \in \Phi(\mathfrak{V})$, nechť existuje*

$C^p(\mathfrak{U}) \in \Phi(\mathfrak{U})$ *takové, že* $C^p(\mathfrak{U}) \sim \pi\, C^p(\mathfrak{V})$ mod S *v* T*. *Pak existuje* (p, R)*-cyklus* Γ^p mod S *v* T *takový, že pro každou síť* $\mathfrak{U}$ *existuje* $C^p(\mathfrak{U}) \in \Phi(\mathfrak{U})$ *takové, že* $\Gamma^p(\mathfrak{U}) \sim C^p(\mathfrak{U})$ mod S *v* T.

Obecný důkaz tohoto teorému dá se vyložiti pouze s užitím t. zv. čísel transfinitních; takový důkaz je v kap. II, odst. 21—27 pojednání *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque* (Fundam. Math. XIX, 1932, str. 149—183). Zde podám důkaz za předpokladu, že R je metrický kompaktní prostor**. Pak existuje*** posloupnost $\{\mathfrak{Z}_n\}$ sítí taková, že 1° $\mathfrak{Z}_{n+1}$ je zjemnění $\mathfrak{Z}_n$ (nechť $\pi_{n,1} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{Z}_{n+1}, \mathfrak{Z}_n)$); 2° je-li $\mathfrak{U}$ libovolná síť a je-li n dosti veliké, pak síť $\mathfrak{Z}_n$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$. Nechť $\pi_{n,2} = \pi_{n,1}\pi_{n+1,1}$, $\pi_{n,3} = \pi_{n,2}\pi_{n+2,1}, \ldots$

Nechť $n = 1, 2, 3, \ldots$; $k = 1, 2, 3, \cdots$. Nechť $\Psi_{n,k}$ je množství všech $(p, \mathfrak{Z}_n)$-cyklů $C^p(\mathfrak{Z}_n)$ mod S v T takových, že existuje $(p, \mathfrak{Z}_{n+k})$-cyklus $C^p(\mathfrak{Z}_{n+k}) \in \Phi(\mathfrak{Z}_{n+k})$ mod S v T takový, že $C^p(\mathfrak{Z}_n) \sim \pi_{n,k} C^p(\mathfrak{Z}_{n+k})$ mod S v T. Zřejmě $\Psi_{n,k}$ má následující vlastnost, které v dalším užijeme: každému $C^p(\mathfrak{Z}_n) \in \Psi_{n,k}$ lze přiřaditi $D^p(\mathfrak{Z}_n) \in \Phi(\mathfrak{Z}_n)$ tak, že $C^p(\mathfrak{Z}_n) \sim D^p(\mathfrak{Z}_n)$ mod S v T. Ježto $C^p(\mathfrak{Z}_{n+k}) \in \Phi(\mathfrak{Z}_{n+k})$, existuje pak $C^p(\mathfrak{Z}_{n+k+1}) \in \Phi(\mathfrak{Z}_{n+k+1})$ takový, že $C^p(\mathfrak{Z}_{n+k}) \sim \pi_{n+k,1} C^p(\mathfrak{Z}_{n+k+1})$ mod S v T, z čehož následuje $C^p(\mathfrak{Z}_n) \sim \pi_{n,k+1} C^p(\mathfrak{Z}_{n+k+1})$ mod S v T. Tedy $\Psi_{n,k} \supset \Psi_{n,k+1}$. Zřejmě každé $\Psi_{n,k}$ jest lineární systém vzhledem k modulu $\mathfrak{M}_p(\mathfrak{Z}_n)$. Ježto $\Psi_{n,k} \supset \Psi_{n,k+1}$, vychází z I **27**, že každému $n = 1, 2, 3, \ldots$ lze přiřaditi $f(n) = 1, 2, 3 \ldots$ tak, že pro $k \geqq f(n)$ je $\Psi_{n,k} = \Psi_{n,f(n)}$. Pišme $\Psi_n = \Psi_{n,f(n)}$.

Nechť $C^p(\mathfrak{Z}_n) \in \Psi_n$. Pak pro každé $k = 1, 2, 3 \ldots$ je $C^p(\mathfrak{Z}_n) \in \Psi_{n,k}$, takže existuje $C_k^p(\mathfrak{Z}_{n+k}) \in \Phi(\mathfrak{Z}_{n+k})$ takové, že $C^p(\mathfrak{Z}_n) \sim \pi_{n,k} C_k^p(\mathfrak{Z}_{n+k})$ mod S v T. Položme $D^p(\mathfrak{Z}_{n+1}) = \pi_{n+1,f(n+1)} C^p_{f(n+1)+1}(\mathfrak{Z}_{n+1+f(n+1)})$. Pak jest $D^p(\mathfrak{Z}_{n+1}) \in \Psi_{n+1}$ a $C^p(\mathfrak{Z}_n) \sim \pi_{n,1} D^p(\mathfrak{Z}_{n+1})$ mod S v T.

Zvolme $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_1) \in \Psi_1$ libovolně. Je-li už sestrojeno $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_n) \in \Psi_n$, můžeme podle právě dokázaného výsledku udati $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_{n+1}) \in \Psi_{n+1}$ tak, že $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_n) \sim \pi_{n,1} \Gamma^p(\mathfrak{Z}_{n+1})$ mod S v T. Tím je rekurentně vytvořena posloupnost $\{\Gamma^p(\mathfrak{Z}_n)\}$ taková, že $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_n) \in \Psi_n$, $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_n) \sim \pi_{n,k} \Gamma^p(\mathfrak{Z}_{n+k})$ mod S v T pro $n, k = 1, 2, 3, \ldots$ Podle výše uvedené vlastnosti množství $\Psi_{n,k}$ můžeme každému n přiřaditi $C^p(\mathfrak{Z}_n) \in \Phi(\mathfrak{Z}_n)$ tak, že $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_n) \sim C^p(\mathfrak{Z}_n)$ mod S v T.

Nechť nyní $\mathfrak{U}$ je libovolná síť v R. Je-li $\mathfrak{U} = \mathfrak{Z}_n$ pro nějaké n, je $\Gamma^p(\mathfrak{U})$ již definováno. V opačném případě zvolme n tak, že $\mathfrak{Z}_n$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$ a položme $\Gamma^p(\mathfrak{U}) = \pi\, \Gamma^p(\mathfrak{Z}_n)$, kde $\pi = \mathrm{Pr.}\ (\mathfrak{Z}_n, \mathfrak{U})$. Pak jest $\Gamma^p(\mathfrak{U}) \sim \pi\, C^p(\mathfrak{Z}_n)$ mod S v T, $C^p(\mathfrak{Z}_n) \in \Phi(\mathfrak{Z}_n)$, takže existuje $C^p(\mathfrak{U}) \in \Phi(\mathfrak{U})$ takové, že $\Gamma^p(\mathfrak{U}) \sim C^p(\mathfrak{U})$ mod S v T.

Nechť síť $\mathfrak{V}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$; nechť $\pi = \mathrm{Pr.}\ (\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Pak existují

---

* Podle III **7** tento předpoklad je nezávislý na volbě projekce π.

** Definice metrického kompaktního prostoru jest udána na př. v kap. II, odst. **1** článku *Užití teorie homologie na teorii souvislosti*, který vyjde v těchto Spisech.

*** V. tamtéž, kap. II, odst. **11**.

n, m taková, že $\mathfrak{Z}_n$ je zjemnění $\mathfrak{U}$, že $\mathfrak{Z}_m$ je zjemnění $\mathfrak{V}$ a že $\Gamma^p(\mathfrak{U}) = \pi' \Gamma^p(\mathfrak{Z}_n)$, $\Gamma^p(\mathfrak{V}) = \pi'' \Gamma^p(\mathfrak{Z}_n)$, kde $\pi' = \text{Pr.}(\mathfrak{Z}_n, \mathfrak{U})$, $\pi'' = \text{Pr.}(\mathfrak{Z}_m, \mathfrak{V})$. Nechť $h > n$, $h > m$. Pak jest $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_n) \sim \pi_{n, h-n} \Gamma^p(\mathfrak{Z}_h)$, $\Gamma^p(\mathfrak{Z}_m) \sim \pi_{m, h-m} \Gamma^p(\mathfrak{Z}_h)$, tedy $\Gamma^p(\mathfrak{V}) \sim \pi'' \pi_{m, h-m} \Gamma^p(\mathfrak{Z}_h)$ mod S v T, $\Gamma^p(\mathfrak{U}) \sim \pi' \pi_{n, h-n} \Gamma^p(\mathfrak{Z}_h)$ mod S v T. Podle III **7** je $\pi' \pi_{n, h-n} \Gamma^p(\mathfrak{Z}_h) \sim \pi \pi''_{m, h-m} \Gamma^p(\mathfrak{Z}_h)$ mod S v T, tedy $\Gamma^p(\mathfrak{U}) \sim \pi \Gamma^p(\mathfrak{V})$ mod S v T. Tedy řetězy $\Gamma^p(\mathfrak{U})$ definují žádaný (p, R)-cyklus Γ^p mod S v T.

6. Z **1** a III **8** a **10** následuje, že, *když C^p je (p, R)-cyklus* mod *S v T a když $\mathfrak{U}$ je libovolná síť v R, pak $C^p(\mathfrak{U})$ je podstatný $(p, \mathfrak{U})$-cyklus* mod S *v* T. Obráceně platí:

6·1. *Nechť $\mathfrak{U}_0$ je síť v R. Nechť $C_0{}^p(\mathfrak{U}_0)$ je podstatný $(p, \mathfrak{U}_0)$-cyklus* mod *S v T. Pak existuje (p, R)-cyklus Γ^p* mod *S v T takový, že $\Gamma^p(\mathfrak{U}_0) = C_0{}^p(\mathfrak{U}_0)$.*

Důkaz. Nechť $\mathfrak{V}$ je libovolná síť. Nechť $\Phi(\mathfrak{V})$ je množství všech $(p, \mathfrak{V})$-cyklů $C^p(\mathfrak{V})$ mod S v T majících následující vlastnost: Existuje síť $\mathfrak{V}'$, která je zjemněním obou sítí $\mathfrak{V}$ a $\mathfrak{V}_0$, a $(p, \mathfrak{V}')$-cyklus $D^p(\mathfrak{V}')$ mod S v T takový, že $C^p(\mathfrak{V}) \sim \pi' D^p(\mathfrak{V}')$ mod S v T, $C_0{}^p(\mathfrak{V}_0) \sim \pi'_0 D^p(\mathfrak{V}')$ mod S v T, kde $\pi' = \text{Pr.}(\mathfrak{V}', \mathfrak{V})$, $\pi'_0 = \text{Pr.}(\mathfrak{V}', \mathfrak{V}_0)$. Ježto $C_0{}^p(\mathfrak{U}_0)$ je odstatný $(p, \mathfrak{U}_0)$-cyklus mod S v T, zřejmě $\Phi(\mathfrak{V}) \neq 0$. Zřejme $\Phi(\mathfrak{V})$ je lineární systém vzhledem k modulu všech $(p, \mathfrak{V})$-cyklů mod S v T. Zřejmě $C^p(\mathfrak{U}_0) \in \Phi(\mathfrak{U}_0)$, když a jen když $C^p(\mathfrak{U}_0) \sim C_0{}^p(\mathfrak{U}_0)$ mod S v T.

Nechť síť $\mathfrak{V}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$; vzhledem k síti $\mathfrak{V}$ podržme dosavadní označení. Nechť $\pi = \text{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Podle III **6** jest $\pi C^p(\mathfrak{V}) \sim \pi\pi' D^p(\mathfrak{V}')$ mod S v T. Tedy $C^p(\mathfrak{V}) \in \Phi(\mathfrak{V})$ implikuje $\pi C^p(\mathfrak{V}) \in \Phi(\mathfrak{U})$.

Podle **5** existuje (p, R)-cyklus Γ^p mod S v T takový, že $\Gamma^p(\mathfrak{U}) \in \Phi(\mathfrak{U})$ pro každou síť $\mathfrak{U}$. Zejména $\Gamma^p(\mathfrak{U}_0) \sim C_0{}^p(\mathfrak{U}_0)$ mod S v T, takže můžeme předpokládati, že $\Gamma^p(\mathfrak{U}_0) = C_0{}^p(\mathfrak{U}_0)$.

7. Je-li $\mathfrak{U}$ síť v R, označme $\mathfrak{M}_p(\mathfrak{U})$ modul všech podstatných $(p, \mathfrak{U})$-cyklů mod S v T; $\mathfrak{N}_p(\mathfrak{U})$ nechť je podmodul modulu $\mathfrak{M}_p(\mathfrak{U})$ skládající se z těch $C^p(\mathfrak{U}) \in \mathfrak{M}_p(\mathfrak{U})$, jež jsou ~ 0 mod S v T. Nechť $\mathfrak{M}_p$ je modul všech (p, R)-cyklů mod S v T; $\mathfrak{N}_p$ nechť je podmodul modulu $\mathfrak{M}_p$ skládající se z těch $C^p \in \mathfrak{M}_p$, jež jsou ~ 0 mod S v T. Modul $\mathfrak{M}_p(\mathfrak{U}) - \mathfrak{N}_p(\mathfrak{U})$ (v. I **24**) je zřejmě konečný; jeho hodnost označíme $\boldsymbol{B}_r{}^p(\mathfrak{U}, S, T)$. Píšeme $\boldsymbol{B}_r{}^p(\mathfrak{U}, S) = \boldsymbol{B}_r{}^p(\mathfrak{U}, S, R)$, $\boldsymbol{B}_r{}^p(\mathfrak{U}) = \boldsymbol{B}_r{}^p(\mathfrak{U}, 0, R)$. Číslo $\boldsymbol{B}_r{}^p(\mathfrak{U}, S)$ nazveme *$p^{té}$ redukované relativní Bettiovo číslo sítě* $\mathfrak{U}$ mod S; číslo $\boldsymbol{B}_r{}^p(\mathfrak{U})$ nazveme *$p^{té}$ redukované absolutní Bettiovo číslo sítě* $\mathfrak{U}$. Slovo redukované vztahuje se na okolnost, že do $\mathfrak{M}_p(\mathfrak{U})$ bereme pouze *podstatné* $(p, \mathfrak{U})$-cykly mod S v T.

Z **6** soudíme snadno, že modul $\mathfrak{M}_p(\mathfrak{U}) - \mathfrak{N}_p(\mathfrak{U})$ je homomorfní obraz modulu $\mathfrak{M}_p - \mathfrak{N}_p$, takže podle I **23** je $\boldsymbol{B}_r{}^p(\mathfrak{U}, S, T) \leq \boldsymbol{B}^p(R, S, T)$ (v. **2**). Snadno se dokáží věty:

7·1. *Když $\boldsymbol{B}^p(R, S, T)$ je konečné, pak $\boldsymbol{B}_r{}^p(\mathfrak{U}; S, T) = \boldsymbol{B}^p(R; S, T)$ pro všecky dosti jemné sítě* $\mathfrak{U}$.

7·2. *Když* $\boldsymbol{B}^p(R, S, T) = \infty$ *a když* $m = 1, 2, 3, \dots$, *pak* $\boldsymbol{B}^p(\mathfrak{U}; S, T) > m$ *pro všecky dosti jemné sítě* $\mathfrak{U}$.

Podle III **9·1** je (v. II **13** a III **3**)

$$\boldsymbol{B}_r^0(\mathfrak{U}, S, T) = \boldsymbol{B}^0[\mathfrak{U}(T), \mathfrak{U}(S)], \tag{1}$$

specielně

$$\boldsymbol{B}_r^0(\mathfrak{U}, S) = \boldsymbol{B}^0[\mathfrak{U}, \mathfrak{U}(S)], \ \boldsymbol{B}_r^0(\mathfrak{U}) = \boldsymbol{B}^0(\mathfrak{U}). \tag{2}$$

8. *Počet komponent prostoru* R *rovná se* $\boldsymbol{B}^0(R)$.

Důkaz. I. Nechť R má nekonečně mnoho komponent. Nechť $m = 1, 2, 3, \dots$ Podle **M** 18* existuje rozklad $R = \sum_{i=1}^{m} U_i$ s neprázdnými oddělenými sčítanci (v. **M** 7), kde $n > m$. $U_1, \dots, U_n$ jsou vrcholy sítě $\mathfrak{U}$. Podle II **15** zřejmě $\boldsymbol{B}^0(\mathfrak{U}) = n$. Tedy $\boldsymbol{B}^0(R) = \infty$ podle **7·1**, **7·2** a (2).

II. Nechť R má konečný počet komponent; označme je $K_i (1 \leqq i \leqq m)$. Podle **M 19** $R = \sum_{i=1}^{m} K_i$ s oddělenými sčítanci $\neq 0$. Tedy $\boldsymbol{B}^0(\mathfrak{K}) = m$, kde $\mathfrak{K}$ je síť o vrcholech $K_1, \dots, K_m$. Nechť $\mathfrak{U}$ je libovolná síť v R; rozdělme vrcholy sítě $\mathfrak{U}$ v oddělené skupiny (v. II **15**); jsou-li $S_1, \dots, S_n$ součty vrcholů z jednotlivých skupin, je zřejmě $R = \sum_{i=1}^{n} S_i$ s oddělenými sčítanci, takže zřejmě $n \leqq m$; tedy $\boldsymbol{B}^0(\mathfrak{U}) \leqq m$ podle II **15**. Tedy $\boldsymbol{B}^0(R) = m$ podle **7·1**, **7·2** a (2).

* **M** znamená článek citovaný ve III **1**.

9. Nechť R je prostor. Nechť $\mathfrak{M}_0$ je modul všech absolutních $(0, R)$-cyklů C^0. Nechť $\mathfrak{M}_{00}$ je modul těch C^0, pro něž $J(C^0) = 0$ (v. **1·1**). Nechť $\mathfrak{N}_0$ je modul těch C^0, jež jsou ~ 0. Pak $\mathfrak{M}_{00}$ je podmodul modulu $\mathfrak{M}_0$ a (podle II **11**) $\mathfrak{N}_0$ je podmodul modulu $\mathfrak{M}_{00}$. Označme $\boldsymbol{B}_0^0(R)$ hodnost modulu $\mathfrak{M}_{00} - \mathfrak{N}_0$.

9·1. *Když* $R = 0$, *pak* $\boldsymbol{B}_0^0(R) = \boldsymbol{B}^0(R) = 0$. *Když* $\boldsymbol{B}_0^0(R) = \infty$, *pak* $\boldsymbol{B}^0(R) = \infty$. *Když* $R \neq 0$ *a* $\boldsymbol{B}_0^0(R) = m (= 0, 1, 2, \dots)$, *pak* $\boldsymbol{B}^0(R) = m + 1$.

Důkaz. Prvé tvrzení je zřejmé a druhé následuje z I **19**. Nechť tedy $R \neq 0$ a nechť $\mathfrak{M}_{00} - \mathfrak{N}_0$ je konečný modul. Nechť $C_1^0, C_2^0, \dots, C_m^0$ je base modulu $\mathfrak{M}_{00} - \mathfrak{N}_0$. Nechť $a \in R$. V každé síti $\mathfrak{U}$ zvolme vrchol U tak, že $a \in U$ a položme $C^0(\mathfrak{U}) = (U)$. Zřejmě řetězy $C^0(\mathfrak{U})$ definují absolutní $(0, R)$-cyklus C^0 takový, že $J(C^0) = 1$. Zřejmě $C^0, C_1^0, \dots C_m^0$ je base modulu $\mathfrak{M}_0 - \mathfrak{N}_0$, takže $\boldsymbol{B}^0(R) = m + 1$.

Obdobně pro T uzavřené v R definujeme číslo $\boldsymbol{B}_0^0(R, T, 0)$. Podle **3** (1) a **7** (2) jest

$$\boldsymbol{B}_0^0(R, T, 0) = \boldsymbol{B}_0^0(T). \tag{1}$$

10. Nechť R je prostor. Nechť S jest uzavřené v R. Nechť $p = 0, 1, 2, \dots$. Nechť $a \in S$. Litery U, V, W znamenají množství otevřená v R a obsahující bod a.

Nechť $V \subset U$. Nechť $\mathfrak{A}_p$ znamená množství všech (p, R)-cyklů C^p mod $(S - U)$ v S; nechť $\mathfrak{B}_p$ znamená množství všech těch C^p, jež jsou

~ 0 mod $(S - V)$ v S. Pak $\mathfrak{A}_p$ je modul a $\mathfrak{B}_p$ je jeho podmodul. Hodnost modulu $\mathfrak{A}_p - \mathfrak{B}_p$ označme $\beta_p(V, U; S, R)$.

Když $W \subset V \subset U$, zřejmě $\beta_p(W, U; S, R) \leqq \beta_p(V, U; S, R)$. Z toho následuje snadno, že, když U je dáno, mohu zv oliti $V \subset U$ tak, že pro všecka $W \subset V$ číslo $\beta_p(W, U; S, R)$ má pevnou (na W nezávislou) hodnotu, kterou označíme $\beta_p(a, U; S, R)$.

Když $W \subset V \subset U$, zřejmě $\beta_p(W, V; S, R) \geqq \beta_p(W, U; S, R)$. Tedy, když $V \subset U$, jest $\beta_p(a, V; S, R) \geqq \beta_p(a, U; S, R)$. Z toho následuje snadno, že jsou tři možné případy:

I. Existuje $m (= 0, 1, 2, \ldots)$ a U takové, že $\beta_p(a, V; S, R) = m$ pro všecka $V \subset U$. Tu klademe $\beta_p(a; S, R) = m$.

II. Číslo $\beta_p(a, V; S, R)$ je konečné pro všecka V, ale při libovolně daném $m (= 0, 1, 2, \ldots)$ existuje U takové, že $\beta_p(a, V; S, R) > m$ pro všecka $V \subset U$. Tu klademe $\beta_p(a; S, R) = \omega$.

III. Existuje U takové, že $\beta_p(a, V; S, R) = \infty$ pro všecka $V \subset U$. Tu klademe $\beta_p(a; S, R) = \infty$.

Symbol ω považujeme za menší než symbol ∞, ale za větší než každé, $m (= 0, 1, 2, \ldots)$.

Klademe $\beta_p(V, U; R, R) = \beta_p(V, U; R)$, $\beta_p(a, U; R, R) = \beta_p(a, U; R)$, $\beta_p(a; R, R) = \beta_p(a, R)$.

Z diskuse provedené v odstavcích **3** a **4** následuje snadno, že $\beta_p(V, U; S, R) = \beta_p(V, U; S)$, $\beta_p(a, U; S, R) = \beta_p(a, U; S)$, $\beta_p(a; S, R) = \beta_p(a, S)$.

Číslo $\beta_p(a, R)$ nazývá se *$p^{té}$ lokální Bettiovo číslo prostoru R v bodě a.*

Snadno se dokáže, že, když S_1 a S_2 jsou uzavřená v R, když $a \in S_1 S_2$, když existuje množství U otevřené v R a takové, že $a \in U$, $US_1 = US_2$, je $\beta_p(V, U; S_1, R) = \beta_p(V, U; S_2, R)$ pro všecka V taková, že $a \in V \subset U$. Z toho následuje, že

$$\beta_p(a, S_1) = \beta_p(a, S_2). \tag{1}$$

11. Nechť R je prostor. Nechť $a \in R$. *Kvasikomponentou prostoru R určenou bodem a* rozumíme množství [v dalším označené $Q(a)$] všech bodů $x \in R$ majících následující vlastnost: Když $R = A + B$ s oddělenými sčítanci (v. **M 7**, kde **M** znamená opět článek citovaný ve III **1**), když $a \in A$, pak $x \in A$. Zřejmě $a \in Q(a)$.

Z **M 11** následuje:

11·1. *Komponenta prostoru R obsahující bod a je částí kvasikomponenty prostoru R určené bodem a.*

11·2. *Každá kvasikomponenta prostoru R jest uzavřená v R.*

Důkaz. Zřejmě $Q(a) = \Pi A$, kde A probíhá všecky části R takové, že 1° $a \in A$, 2° součet $A + (R - A)$ má oddělené sčítance. Ježto (v. **M 7**) každé A jest uzavřené v R, podle **M 1·4** také $Q(a)$ jest uzavřené v R.

11·3. *Každý bod prostoru R je v jediné kvasikomponentě prostoru R.*

Důkaz. Nechť $b \in Q(a)$. Stačí dokázati, že $Q(a) = Q(b)$. Stačí dokonce odvoditi, že $Q(a) \subset Q(b)$, neboť pak $a \in Q(b)$, takže také $Q(b) \subset Q(a)$. Nechť $x \in Q(a)$ a nechť $R = A + B$ s oddělenými sčítanci, kde $b \in A$. Máme odvoditi, že $x \in A$. Kdyby bylo $a \in B$, bylo by $Q(a) \subset B$ podle definice $Q(a)$, tedy $b \in B$, což je spor. Tedy $a \in A$, takže podle definice $Q(a)$ jest $Q(a) \subset A$, tedy $x \in A$.

11·4. *Když prostor R má konečný počet kvasikomponent *, pak jeho komponenty jsou identické s kvasikomponentami.*

Důkaz. Nechť $R = \sum_{i=1}^{m} Q(a_i)$, kde kvasikomponenty napravo jsou mezi sebou různé. Podle **11·1** a podle definice komponenty stačí ukázati, že na př. množství $Q(a_1)$ je souvislé. Předpokládejme opak. Pak $Q(a_1) = A + B$, kde A a B jsou uzavřená v $Q(a_1)$, $a_1 \in A$, $B \neq 0$, $AB = 0$. Podle **11·2** a **M 5** množství A a B jsou uzavřená v R. Tedy $R = A + [B + \sum_{i=2}^{m} Q(a_i)]$ s oddělenými sčítanci (v. **11·2**). Ježto $a_1 \in A$, podle definice $Q(a_1)$ jest $Q(a_1) \subset A$, tedy $B \subset A$, což je spor, neboť $B \neq 0$, $AB = 0$.

11·5. *Když R je metrický kompaktní prostor, pak jeho komponenty jsou identické s kvasikomponentami.*

Důkaz. Podle **S II 9** (**S** znamená článek *Užití teorie homologie atd.* citovaný v **8**) z každého nekonečného systému v R otevřených množství pokrývajícího R lze vybrati konečný počet množství pokrývající R. Podle **S II 3** každé v R uzavřené množství má stejnou vlastnost.

Opět stačí ukázati, že množství $Q(a)$ je souvislé. Předpokládejme opak. Pak $Q(a) = A + B$ s oddělenými sčítanci $\neq 0$, kde $a \in A$. Množství A a B jsou uzavřená v $Q(a)$, tedy podle **11·2** i v R. Mimo to $AB = 0$. Když $x \in B$, pak množství (x) jest uzavřené v R, množství $R - A$ jest otevřené v R a jest $(x) \subset R - A$. Tedy podle odst. **10** a **16** článku *Příspěvek k teorii dimense* (Časopis p. p. m. a f., LXII, 1933, str. 277—291) existuje v R otevřené U_x takové, že $x \in U_x \subset \overline{U}_x \subset R - A$. Když x probíhá B, množství BU_x jsou otevřená v B a pokrývají B. Ježto B jest uzavřené v R, existuje konečný počet bodů $x_1, x_2, \ldots, x_m \in B$ takových, že $\sum_{i=1}^{m} U_{x_i} \supset B$. Nechť $C = \sum_{i=1}^{m} \overline{U}_{x_i} - \sum_{i=1}^{m} U_{x_i}$. Pak množství C jest uzavřené v R a jest $AC = BC = 0$, tedy $C \subset R - Q(a)$. Tedy každému $y \in C$ lze přiřaditi rozklad $R = H_y + K_y$ s oddělenými sčítanci takový, že $y \in K_y$, kdežto $a \in H_y$, tedy $Q(a) \subset H_y$. Množství K_y jsou (v. **M 7**) otevřená v R a pokrývají C. Ježto C jest uzavřené v R, existuje konečný počet bodů $y_1, y_2, \ldots, y_n \in C$ takových, že $\sum_{j=1}^{n} K_{y_j} \supset C$. Ježto

---

* Tedy (v. **11·1**) tím spíše, když R má konečný počet komponent.

$$C = \sum_{i=1}^{m} \overline{U}_{x_i} - \sum_{i=1}^{m} U_{x_i} \subset \sum_{j=1}^{n} K_{y_j},$$

mohu položiti

$$M = \sum_{i=1}^{m} U_{x_i} + \sum_{j=1}^{n} K_{y_j} = \sum_{i=1}^{m} \overline{U}_{x_i} + \sum_{j=1}^{n} K_{y_j}.$$

Ježto množství U_x a K_y jsou otevřená v R, také M jest otevřené v R. Ježto množství $\overline{U}_x$ a K_y jsou uzavřená v R, také M jest uzavřené v R. Tedy $R = M + (R - M)$ s oddělenými sčítanci. Ježto $a \in A$, $U_x \subset R - A$, $a \in H_y$, $H_y K_y = 0$, jest $a \in R - M$. Tedy $Q(a) \subset R - M$ podle definice $Q(a)$. Tedy $B \subset R - M$, ježto $B \subset Q(a)$. Avšak $B \subset \sum_{i=1}^{m} U_{x_i} \subset M$. Tedy $B \subset M(R - M)$, t. j. $B = 0$, což je spor.

11·6. *Nechť K je komponenta metrického kompaktního prostoru R. Nechť G jest otevřené v R; nechť $K \subset G$. Pak existuje rozklad $R = A + B$ s oddělenými sčítanci takový, že $K \subset A \subset G$.*

Důkaz. Nechť $a \in K$, takže $K = Q(a)$ podle **11·5**. Když $x \in R - G$, jest $x \in R - Q(a)$, takže existuje rozklad $R = U_x + V_x$ s oddělenými sčítanci takový, že $x \in V_x$, kdežto $a \in U_x$, tedy $K = Q(a) \subset U_x$. Když x probíhá $R - G$, množství $(R - G) V_x$ jsou otevřená v $R - G$ a pokrývají $R - G$. Ježto $R - G$ jest uzavřené v R, podle **S II 3** a **S II 9** existuje konečný počet bodů $x_1, x_2, \ldots, x_m \in R - G$ takových, že $\sum_{i=1}^{m} V_{x_i} \supset R - G$. Položme $\prod_{i=1}^{m} U_{x_i} = A$, $\sum_{i=1}^{m} V_{x_i} = B$. Ježto U_x a V_x jsou otevřená v R, také A a B jsou otevřená v R. Ježto $R = U_x + V_x$, jest $R = A + B$. Ježto $U_x V_x = 0$, jest $AB = 0$. Tedy $R = A + B$ s oddělenými sčítanci. Ježto $K \subset U_x$, jest $K \subset A$. Ježto $B \supset R - G$, $AB = 0$, jest $A \subset G$.

12. Nechť R je prostor. Nechť $a \in R$. V každé síti $\mathfrak{U}$ mohu zvoliti vrchol U tak, že $a \in U$. Když $\mathfrak{U}$ probíhá všecky sítě v R, vidíme snadno, že $(0, \mathfrak{U})$-simplexy (U) definují absolutní $(0, R)$-cyklus, který označíme $\{a\}$. Zřejmě $\{a\}$ leží v (a), kde (a) znamená množství obsahující jen bod a.

$(0, R)$-cyklus $\{a\}$ není bodem a jednoznačně určen, jsou-li však $\{a\}_1$, $\{a\}_2$ dvě jeho hodnoty, dokáže se snadno, že $\{a\}_1 \sim \{a\}_2$ v (a).

Zřejmě $J(\{a\}) = 1$.

12·1. *Nechť R je prostor; nechť $a \in R$, $b \in R$. Body a a b jsou ve stejné kvasikomponentě prostoru R, když a jen když $\{a\} \sim \{b\}$.*

Důkaz. Nechť $\{a\} = C^0$, $\{b\} = D^0$.

I. Nechť $C^0 \sim D^0$. Nechť $R = U_1 + U_2$ s oddělenými sčítanci; nechť $a \in U_1$. Máme dokázati, že $b \in U_1$. Množství U_1 a U_2 jsou otevřená v R a tedy tvoří síť $\mathfrak{U}$ v R. Ježto $C^0 \sim D^0$, existuje $(1, \mathfrak{U})$-řetěz $E^1(\mathfrak{U}) \to C^0(\mathfrak{U}) - D^0(\mathfrak{U})$. Avšak síť $\mathfrak{U}$ má řád 0; tedy $E^1(\mathfrak{U}) = 0$, takže $C^0(\mathfrak{U}) = D^0(\mathfrak{U})$. Ježto $a \in U_1$, $U_1 U_2 = 0$, jest $C^0(\mathfrak{U}) = (U_1)$. Tedy $D^0(\mathfrak{U}) = (U_1)$, takže $b \in U_1$.

II. Nechť $Q(a) = Q(b)$. Nechť $\mathfrak{U}$ je síť v R. Máme dokázati, že $C^0(\mathfrak{U}) \backsim D^0(\mathfrak{U})$. Nechť $C^0(\mathfrak{U}) = (U')$. Nechť Φ_1 je systém těch vrcholů U sítě $\mathfrak{U}$, pro něž platí $(U) \backsim (U')$; nechť Φ_2 je systém ostatních vrcholů sítě $\mathfrak{U}$. Nechť A jest součet všech prvků systému Φ_1; nechť B je součet všech prvků systému Φ_2. Pak množství A a B jsou otevřená v R a jest $R = A + B$. Když $c \varepsilon A\hat{B}$, existují $U_1 \varepsilon \Phi_1$ a $U_2 \varepsilon \Phi_2$ takové, že $c \varepsilon U_1 U_2$. Pak (U_1, U_2) je $(1, \mathfrak{U})$-simplex a $(U_1, U_2) \rightarrow (U_2) - (U_1)$, takže $(U_1) \backsim (U_2)$. Ježto $U_1 \varepsilon \Phi_1$, jest $(U_1) \backsim (U')$; tedy $(U_2) \backsim (U')$, t. j. $U_2 \varepsilon \Phi_1$, což je spor. Tedy $AB = 0$, takže $R = A + B$ s oddělenými sčítanci. Ježto $a \varepsilon U' \subset A$, jest $Q(a) \subset A$ podle definice $Q(a)$. Ježto $Q(a) = Q(b)$, jest $b \varepsilon A$. Tedy existuje $U'' \varepsilon \Phi_1$ takové, že $b \varepsilon U''$. Ježto $b \varepsilon U''$, jest $(U'') \backsim D^0(\mathfrak{U})$. Ježto $U'' \varepsilon \Phi_1$, jest $(U'') \backsim (U') = C^0(\mathfrak{U})$. Tedy $C^0(\mathfrak{U}) \backsim D^0(\mathfrak{U})$.

13. Nechť $p = 0, 1, 2, \ldots$. Prostor R nazveme *acyklický řádu* p 1^0 pro $p = 0$, když $\boldsymbol{B}_0^0(R) = 0$ (v. **9**); 2^0 pro $p \geqq 1$, když $\boldsymbol{B}^p(R) = 0$ (v. **2**).

Podle **8** a **9·1** *prostor* R *jest acyklický řádu* 0, *když a jen když je prázdný nebo souvislý.*

14. Nechť R je prostor. Nechť S jest uzavřené v R. Nechť $p = 0, 1, 2 \ldots$. Nechť $a \varepsilon S$. Litery U, V, W znamenají množství otevřená v R a obsahující bod a.

Nechť $V \subset U$. Nechť $\mathfrak{C}_p$ znamená množství všech absolutních (p, R)-cyklů Γ^p v $\overline{SV}$; pro $p = 0$ předpokládáme ještě, že $J(\Gamma^0) = 0$. Nechť $\mathfrak{D}_p$ znamená množství těch Γ^p, jež jsou $\backsim 0$ v $\overline{SU}$. Pak $\mathfrak{C}_p$ je modul a $\mathfrak{D}_p$ je jeho podmodul. Hodnost modulu $\mathfrak{C}_p - \mathfrak{D}_p$ označme $\gamma_p(V, U; S, R)$.

Když $W \subset V \subset U$, zřejmě $\gamma_p(W, U; S, R) \leqq \gamma_p(V, U; S, R)$. Z toho následuje snadno, že, je-li U dáno, mohu zvoliti $V \subset U$ tak, že pro všecka $W \subset V$ číslo $\gamma_p(W, U; S, R)$ má pevnou (na W nezávislou) hodnotu, kterou označíme $\gamma_p(a, U; S, R)$.

Když $W \subset V \subset U$, zřejmě $\gamma_p(W, V; S, R) \geqq \gamma_p(W, U; S, R)$. Tedy, když $V \subset U$, jest $\gamma_p(a, V; S, R) \geqq \gamma_p(a, U; S, R)$. Z toho následuje snadno, že jsou tři možné případy:

I. Existuje m $(= 0, 1, 2, \ldots)$ a U takové, že $\gamma_p(a, V; S, R) = m$ pro všecka $V \subset U$. Tu klademe $\gamma_p(a; S, R) = m$.

II. Číslo $\gamma_p(a, V; S, R)$ je konečné pro všecka V, ale při libovolně daném m $(= 0, 1, 2, \ldots)$ existuje U takové, že $\gamma_p(a, V; S, R) > m$ pro všecka $V \subset U$. Tu klademe $\gamma_p(a; S, R) = \omega$.

III. Existuje U takové, že $\gamma_p(a, V; S, R) = \infty$ pro všecka $V \subset U$. Tu klademe $\gamma_p(a; S, R) + \infty$.

Klademe $\gamma_p(V, U; R, R) = \gamma_p(V, U; R)$, $\gamma_p(a, U; R, R) = \gamma_p(a, U; R)$, $\gamma_p(a; R, R) = \gamma_p(a, R)$.

Z diskuse provedené v odst. **3** a **4** následuje snadno, že $\gamma_p(V, U; S, R) = \gamma_p(V, U; S)$, $\gamma_p(a, U; S, R) = \gamma_p(a, U; S)$, $\gamma_p(a; S, R) = \gamma_p(a, S)$.

Pravíme, že prostor R je *v bodě a lokálně acyklický řádu p*, když $\gamma_p(a, R) = 0$.

Snadno se dokáže, že, když S_1 a S_2 jsou uzavřená v R, když $a \in S_1 S_2$, když existuje množství U otevřené v R a takové, že $a \in U$, $US_1 = US_2$, je $\gamma_p(V, U; S_1, R) = \gamma_p(V, U; S_2, R)$ pro všecka V taková, že $a \in V \subset U$. Z toho následuje, že

$$\gamma_p(a, S_1) = \gamma_p(a, S_2). \tag{1}$$

15. Prostor R nazýváme *regulární v bodě* $a \in R$, když má následující vlastnost: Je-li U otevřené v R a je-li $a \in U$, existuje množství V otevřené v R a takové, že $a \in V \subset \overline{V} \subset U$.

Podle **D 10** (**D** znamená pojednání citované v důkaze věty **11·5**) platí:

15·1. *Normální prostor je v každém svém bodě regulární.*

Tedy podle **D 16** platí:

15·2. *Metrický prostor je v každém svém bodě regulární.*

16. *Nechť $p = 0, 1, 2 \ldots$. Když prostor R je regulární v bodě a, je buďto $\gamma_p(a, R) = 0$ nebo $\gamma_p(a, R) = \infty$.*

Důkaz. Nechť $\gamma_p(a, R) \geqq 1$. Pak existuje v R otevřené U obsahující bod a a takové, že $\gamma_p(a, U; R) \geqq 1$. Máme dokázati, že $\gamma_p(a, U; R) = \infty$. Nechť V jest otevřené v R a nechť $a \in V \subset U$. Máme dokázati, že $\gamma_p(V, U; R) = \infty$. Nechť naopak $\gamma_p(V, U; R) = m (= 0, 1, 2 \ldots)$. Pak existují absolutní (p, R)-cykly Γ_i^p $(1 \leqq i \leqq m$, $J(\Gamma_i^0) = 0$ pro $p = 0)$ ve $\overline{V}$ takové, že homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim 0$ v $\overline{U}$ $(r_i \in \mathfrak{R})$ implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$.

Pro každou síť $\mathfrak{U}$ nechť $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ je množství všech vektorů $(r_1, r_2 \ldots, r_m)$ (v. I **9**) takových, že $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}) \sim 0$ v $\overline{U}$. Zřejmě $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ je konečný modul hodnosti $h(\mathfrak{U}) \leqq m$. Když $\mathfrak{B}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$, zřejmě $\mathfrak{M}(\mathfrak{B})$ je podmodul modulu $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$, tedy (I **19**) $h(\mathfrak{B}) \leqq h(\mathfrak{U})$. Zřejmě existuje síť $\mathfrak{U}_0$ taková, že pro každou síť $\mathfrak{U}$ jest $h(\mathfrak{U}) \geqq h(\mathfrak{U}_0)$, takže pro každé zjemnění $\mathfrak{U}$ sítě $\mathfrak{U}_0$ jest $h(\mathfrak{U}) = h(\mathfrak{U}_0)$ a tedy (I **19**) $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_0)$, takže pro každou síť $\mathfrak{U}$ jest $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_0) \subset \mathfrak{M}(\mathfrak{U})$. Když $(r_1, \ldots, r_m) \subset \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_0)$, jest $(r_1, \ldots, r_m) \subset \mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ pro každou síť $\mathfrak{U}$, tedy $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim 0$ v $\overline{U}$, tedy $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Tedy homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_0) \sim 0$ v $\overline{U}$ implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$.

Nechť U_0 je vrchol sítě $\mathfrak{U}_0$ takový, že $a \in U_0$. Ježto R je regulární v bodě a, existuje množství W otevřené v R a takové, že $a \in W \subset \overline{W} \subset U_0 U$. Dvě otevřená množství U_0 a $R - \overline{W}$ tvoří síť $\mathfrak{U}_1$. Nechť (v. II **4·1**) síť $\mathfrak{U}_2$ je zjemněním obou sítí $\mathfrak{U}_0$ a $\mathfrak{U}_1$. Ježto $\mathfrak{U}_2$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}_1$, jest $U_2 \subset U_0$ pro každý vrchol U_2 sítě $\mathfrak{U}_2$ takový, že $U_2 \overline{W} \neq 0$. Tedy existuje projekce $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_0)$ taková, že $\pi U_2 = U_0$ pro každý vrchol U_2 sítě $\mathfrak{U}_2$ takový, že $U_2 \overline{W} \neq 0$.

Ježto $\gamma_p(a, U; R) \geq 1$, jest $\gamma_p(W, U; R) \geq 1$. Tedy existuje absolutní (p, R)-cyklus Γ_0^p ve $\overline{W}[J(\Gamma_0^0) = 0$ pro $p = 0]$, který není ~ 0 v $\overline{U}$. Stačí dokázati, že homologie $\sum_{i=0}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim 0$ v $\overline{U}$ implikuje $r_0 = r_1 = \ldots = r_m = 0$, neboť pak $\gamma_p(V, U; R) \geq m + 1$, což je spor.

Nechť tedy $\sum_{i=0}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim 0$ v $\overline{U}$. Pak jest $\sum_{i=0}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_0) \sim 0$ v $\overline{U}$. Avšak $\Gamma_0^p \subset \overline{W}$; tedy $\Gamma_0^p(\mathfrak{U}_2) \subset \overline{W}$. To znamená, že jádro každého simplexu řetězu $\Gamma_0^p(\mathfrak{U})$ protne $\overline{W}$, takže pro každý vrchol U_2 každého takového simplexu platí $U_2 \overline{W} \neq 0$ a tedy $\pi U_2 = U_0$. V důsledku toho pro $p \geq 1$ je $\pi\sigma^p = 0$ pro každý simplex σ^p řetězu $\Gamma_0^p(\mathfrak{U}_2)$, takže $\pi\Gamma_0^p(\mathfrak{U}_2) = 0$. Pro $p = 0$ je však $\pi\Gamma_0^0(\mathfrak{U}_2) = r(U_0)$ $(r \in \Re)$; ježto $J[\pi\Gamma_0^0(\mathfrak{U}_2)] = J[\Gamma_0^0(\mathfrak{U}_2)] = 0$, jest $r = 0$. Tedy $\pi\Gamma_0^p(\mathfrak{U}_2) = 0$ pro všecky hodnoty p. Avšak $\pi\Gamma_0^p(\mathfrak{U}_2) \sim \Gamma_0^p(\mathfrak{U}_0)$ v $\overline{U}$, takže $\Gamma_0^p(\mathfrak{U}_0) \sim 0$ v $\overline{U}$. Ježto $\sum_{i=0}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_0) \sim 0$ v $\overline{U}$, jest $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_0) \sim 0$ v $\overline{U}$, takže $r_1 = \ldots = r_m$ podle definice sítě $\mathfrak{U}_0$. Ježto $\sum_{i=0}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim 0$ v $\overline{U}$, jest $r_0 \Gamma_0^p \sim 0$ v $\overline{U}$, tedy $r_0 = 0$ podle definice cyklu Γ_0^p.

17. *Prostor R je v bodě $a \in R$ lokálně acyklický řádu 0, když a jen když každému v R otevřenému U obsahujícímu a lze přiřaditi v R otevřené $V \subset U$ obsahující a tak, že $\overline{V}$ je částí kvasikomponenty prostoru $\overline{U}$ určené bodem a.*

D ů k a z. Zřejmě R je v bodě a lokálně acyklický řádu 0, když a jen když každému v R otevřenému U obsahujícímu a lze přiřaditi v R otevřené $V \subset U$ obsahující a tak, že $\Gamma^0 \sim 0$ v $\overline{U}$ pro každý absolutní $(0, R)$-cyklus Γ^0 ve $\overline{V}$ takový, že $J(\Gamma^0) = 0$.

I. Nechť $\overline{V}$ je částí kvasikomponenty prostoru $\overline{U}$ určené bodem a. Nechť Γ^0 je absolutní $(0, R)$-cyklus ve $\overline{V}$ takový, že $J(\Gamma^0) = 0$. Nechť $\mathfrak{U}$ je síť v R. Máme dokázati, že $\Gamma^0(\mathfrak{U}) \sim 0$ v $\overline{U}$. Nechť $\Gamma^0(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{m} r_i(U_i)$, $U_i \in \mathfrak{U}$. Ježto $J(\Gamma^0) = 0$, jest $\sum_{i=1}^{m} r_i = 0$. Ježto $\Gamma^0 \subset \overline{V}$, existují body $a_i \in \overline{V} U_i$. Ježto $a_i \in \overline{V}$, podle **12·1** (v. též **3** a **4**) jest $\{a_i\} \sim \{a\}$ v $\overline{U}$, tedy $\sum_{i=1}^{m} r_i \{a_i\} \sim 0$ v $\overline{U}$, ježto $\sum_{i=1}^{m} r_i = 0$. Když $\{a_i\} = C_i$, zřejmě $(U_i) \sim C_i^0(\mathfrak{U})$ ve $\overline{V}$, tedy i v $\overline{U}$. Tedy $\sum_{i=1}^{m} r_i (U_i) \sim 0$ v $\overline{U}$, t. j. $\Gamma^0 \sim 0$ v $\overline{U}$.

II. Nechť $\Gamma^0 \sim 0$ v $\overline{U}$ pro každý absolutní $(0, R)$-cyklus Γ^0 ve $\overline{V}$ takový, že $J(\Gamma^0) = 0$. Nechť $b \in \overline{V}$. Pak $\{a\} - \{b\}$ jest absolutní $(0, R)$-cyklus ve $\overline{V}$ a $J(\{a\} - \{b\}) = 0$. Tedy $\{a\} \sim \{b\}$ v $\overline{U}$, takže podle **12·1** (v. též **3** a **4**) b náleží do kvasikomponenty prostoru $\overline{U}$ určené bodem a.

17. Pravíme, že prostor R je *v bodě $a \in R$ lokálně souvislý*, když každému v R otevřenému U obsahujícímu a lze přiřaditi v R otevřené

$V \subset U$ obsahující a tak, že $\overline{V}$ je částí komponenty prostoru $\overline{U}$ určené bodem a.

Podle **11·1** a **17** platí:

18·1. *Když prostor R je v bodě a lokálně souvislý, pak R je v a lokálně acyklický řádu* 0.

Podle **11·5** (v. též **S** II **3**) platí:

18·2. *Když metrický kompaktní prostor R je v bodě a lokálně acyklický řádu* 0, *pak R je v a lokálně souvislý.*

Prostor R nazývá se *lokálně souvislý,* když je v každém svém bodě lokálně souvislý.

18·3. *Prostor R je lokálně souvislý, když a jen když každá komponenta každého v R otevřeného množství je v R otevřená.*

Důkaz. I. Nechť R je lokálně souvislý. Nechť U jest otevřené v R. Nechť K je komponenta množství U. Máme dokázati, že K jest otevřené v R. V opačném případě existuje bod $a \in K \,.\, \overline{R - K}$. Ježto $a \in K$, jest $a \in U$. Ježto U jest otevřené v R a ježto R je lokálně souvislý v bodě a, existuje v R otevřené $V \subset U$, $a \in V$ takové, že $V \subset K$. Tedy $R - K \subset R - V$, tedy $\overline{R - K} \subset \overline{R - V} = R - V$, což je spor, neboť $a \in V \,.\, \overline{R - K}$.

II. Nechť každá komponenta každého v R otevřeného množství je v R otevřená. Nechť $a \in U$, kde U jest otevřené v R. Nechť K je komponenta množství U obsahující a. Pak K jest otevřené v R, jest $a \in K \subset U$. Tedy R je lokálně souvislý v bodě a.

Prostor R nazývá se *lokálně acyklický řádu p* $(= 0, 1, 2, \ldots)$, když je v každém svém bodě lokálně acyklický řádu p.

18·4. *Prostor R je lokálně acyklický řádu* 0, *když a jen když každá kvasikomponenta každého v R otevřeného množství je v R otevřená.*

Důkaz liší se od důkazu věty **18·3** jen tím, že definice lokální souvislosti se nahradí větou **17**.

18·5. *Když prostor R je lokálně souvislý, pak jeho komponenty jsou identické s kvasikomponentami.*

Důkaz. Nechť K je komponenta prostoru R; nechť $a \in K$. Máme dokázati, že $K = Q(a)$. Podle **18·3** K jest otevřené v R; ježto $R - K$ je součet ostatních komponent prostoru R, podle **18·3** také $R - K$ jest otevřené v R. Tedy $R = K + (R - K)$ s oddělenými sčítanci. Ježto $a \in K$, podle definice $Q(a)$ jest $Q(a) \subset K$. Avšak $Q(a) \supset K$ podle **11·1**. Tedy $Q(a) = K$.

INTRODUCTION À LA THÉORIE DE L'HOMOLOGIE.

PAR

EDUARD ČECH.

(RÉSUMÉ.)

Ce Mémoire, dont la lecture n'exige aucune connaissance de la topologie, contient un exposé tout à fait élémentaire des principes de la théorie de l'homologie dans les espaces topologiques. Il est fondé sur un Mémoire antérieur *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque* (Fund. Math., XIX, 1932, pp. 149—183; cité **H**).

Le Mémoire est divisé en quatre chapitres. Au chap. I, la théorie élémentaire des modules (cf. **H** I) est exposée avec des démonstrations complètes; je m'y borne souvent à considérer les modules finis.

A la théorie des réseaux j'ai fait cette fois précéder, au chap. II, une brève exposition des principes de la théorie des complexes abstraits (cycles absolus et relatifs). En particulier, je prouve (II **18**) le théorème abstrait correspondant au théorème **H** II **12**; ce théorème abstrait a, en effet, aussi d'autres applications.

Le chap. III contient une brève théorie des réseaux $\mathfrak{U}$ et des $(p, \mathfrak{U})$-cycles. Je ne considère que le cas des réseaux ouverts et des coefficients rationnels.

Le chap. IV est consacré au principal sujet du Mémoire, à savoir aux cycles (absolus et relatifs) dans les espaces topologiques. J'y traite (IV **3** et **4**) d'une manière détaillée la correspondance biunivoque (à homologie près) entre les (p, R)-cycles mod S dans T et les (p, T)-cycles mod S $(S = \overline{S} \subset T = \overline{T} \subset R)$; cette correspondance n'était traitée que sommairement dans **H** III **3**—**11**. Dans IV **5**, je m'occupe du théorème **H** II **21**. Je le démontre cette fois seulement dans le cas important d'un espace métrique et compact, où la démonstration est beaucoup plus courte (en particulier, on peut éviter les nombres transfinis). Pour le théorème que le nombre des composantes de R est égal au $0^{\text{ème}}$ nombre de Betti, je donne dans IV **8** une démonstration différente de celle donnée dans **H** III **18**.

Dans IV **10**, je définis ce que j'appelle les *nombres de Betti locaux* d'un ensemble. Une théorie complète de ces nombres se trouve dans le Mémoire *Sur les nombres de Betti locaux* que j'ai l'intention d'écrire pour les Annals of Math.

Dans IV **11**, je donne un bref exposé de la théorie des quasicomposantes d'un ensemble (Hausdorff). Pour le théorème que les quasicomposantes d'une espace métrique et compact sont connexes j'expose (IV **11·5**) la démonstration de M. Menger (Dimensionstheorie, p. 213).

Dans IV **14** je définis ce que j'appelle *l'acyclicité locale** d'un ensemble. Une étude détaillée de cette notion se trouve au Mémoire *Sur la connexité locale d'ordre supérieur* (sous presse dans Compositio Math.).

On ne trouvera dans ce Mémoire que les notions principales de la théorie générale de l'homologie. Je n'en donne ici aucune application. Un autre Mémoire qui en fera la suite s'occupera des applications à la théorie de la connexité.

---

* Au Mémoire que je vais citer, je dis *localement connexe* au lieu de *localement acyclique*.