Eduard Čech

Sur la dimension des espaces parfaitement normaux

Bull. international de l' Académie des Sciences de Bohême (1932), 18 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501012

Sur la dimension des espaces parfaitement normaux.

Par

EDUARD ČECH.

Présenté le 5 février 1932.

Je modifie légèrement la définition récursive (Menger et Urysohn) de la dimension. Dans le cas des espaces séparables, seul étudié jusqu'à présent, la modification est purement formelle. Je démontre 1⁰ le théorème sur la dimension d'un sous-ensemble, 2⁰ le théorème sur la dimension d'une somme (Summensatz) et 3⁰ le théorème sur le recouvrement d'un espace à dimension finie (Zerlegungssatz) pour des espaces très géneraux comprenant comme cas particulier les espaces distanciés (metrische Räume).

Les théorèmes principaux de cet Ouvrage ont été énoncés sans démonstration dans la Note *Sur la théorie de la dimension* (C. R., nov. 1931).

I. Théorèmes auxiliaires.

1. Un ensemble R s'appelle un *espace topologique* (et les éléments de R s'appellent *points*) si l'on a donné une famille $\mathfrak{F}$ de sous-ensembles de R (appelés ensembles *fermés dans* R) de manière que:

1·1. L'ensemble vide 0 et l'espace R sont des ensembles fermés dans R.

1·2. x étant un point quelconque de R, l'ensemble (x) est fermé dans R.

1·3. La somme d'un nombre *fini* d'ensembles fermés dans R est fermée dans R.

1·4. Le produit (= partie commune) d'un nombre *quelconque* d'ensembles fermés dans R est fermé dans R.

2. Un ensemble $A \subset R$ s'appelle *ouvert dans* R si l'ensemble $R - A$ est fermé dans R.

3. Si $S \subset R$, on appelle *fermé dans* S chaque produit $A\,S$, A étant fermé dans R. Chaque sous-ensemble S de l'espace topologique R constitue alors un espace topologique.

4. Si $A \subset R$, je désigne par $\bar{A}$ la *fermeture* de A (le plus petit sousensemble fermé de R contenant A).

5. Si $A \subset S \subset R$, la fermeture de A dans l'espace S est $\bar{A} \,.\, S$.

6. Les ensembles $A, B \subset R$ s'appellent *séparés*, si 1° $A\,B = 0$, 2° A et B sont fermés (ou, ce qui revient au même, ouverts) dans $A + B$.

6·1. Si les ensembles A_i, B_j sont séparés pour $1 \leqq i \leqq h$, $1 \leqq j \leqq k$, les ensembles $\sum_{i=1}^{h} A_i$, $\sum_{j=1}^{k} B_j$ le sont aussi.

6·2. Les ensembles A, B étant séparés, si $A_1 \subset A, B_1 \subset B$, les ensembles A_1 et B_1 le sont aussi.

7·1. Les ensembles $A, B \subset R$ sont fermés dans $A + B$ si et seulement si $A\,\bar{B} + \bar{A}\,B = A\,B$.

7·2. Les ensembles A, B sont séparés si et seulement si $A\,\bar{B} = \bar{A}\,B = 0$.

8. Si $U \subset R$ est ouvert dans R, l'ensemble $H_R(U) = \bar{U} - U$ s'appelle la *frontière* de U (dans l'espace R).

8·1. $U \,.\, H_R(U) = 0$.

8·2. $U + H_R(U) = \bar{U}$.

8·3. Si U est ouvert dans R, $H_R(U)$ est fermé dans R.

9·1. [1]) Soient U_i $(1 \leqq i \leqq m)$ des ensembles ouverts dans R. Alors

$$H_R\left(\sum_{i=1}^{m} U_i\right) \subset \sum_{i=1}^{m} H_R(U_i).$$

9·2.[2]) Soient U, V des ensembles ouverts dans R. Alors

$$H_R(U - \bar{V}) \subset H_R(U) + H_R(V).$$

10.[3]) Soient Q_ν, V_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ des ensembles ouverts dans R. Soit $S = \prod_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu$. Soit $T \subset S$, $T \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu$. Pour $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ soit $Q_\nu \supset Q_{\nu+1}$, $V_\nu \subset Q_\nu$. Alors

$$H_R\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu\right) \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R(V_\nu) + M,$$

$$M = S \,.\, H_R\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu\right) \subset S - T.$$

11.[4]) Soit $S \subset R$; soit U un sousensemble ouvert de R. Alors

$$H_S(S\,U) \subset S \,.\, H_R(U).$$

12. Un espace topologique R s'appelle *normal*[5]) s'il jouit de la propriété suivante: Si $A\,B = 0$, les ensembles A, B étant fermés dans R, il existe des ensembles U, V ouverts dans R tels que $U \supset A$, $V \supset B$, $U\,V = 0$.

---

[1]) K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 36.

[2]) Menger, l. c., p. 36.

[3]) Menger, l. c., p. 37. L'énoncé de M. Menger est légèrement différent de celui du texte.

[4]) Menger, l. c., p. 35.

[5]) P. Urysohn, *Über die Mächtigkeit zusammenhängender Mengen*, Math. Annalen, t. 94, p. 265.

12·1.[6]) Soit R un espace normal. Soit A (U) un sousensemble fermé (ouvert) de R; soit $A \subset U$. Il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

13. Un espace topologique R s'appelle *complètement normal*[7]) s'il jouit de la propriété suivante: Si les ensembles $A, B \subset R$ sont séparés, il existe des ensembles U, V ouverts dans R tels que $U \supset A$, $V \supset B$, $U\,V = 0$.

13·1.[8]) Un espace complètement normal est normal.

13·2.[9]) Chaque sous-ensemble S d'un espace complètement normal R constitue un espace complètement normal.

13·3.[10]) Soit R un espace complètement normal; soit $S \subset R$. Soit U_0 (U) un ensemble ouvert dans S (dans R); soit $U_0 \subset U$. Il existe un ensemble V ouvert dans R tel que

$$V \subset U,\ S\,V = U_0,\ S\,.\,H_R\,(V) = H_S\,(U_0).$$

14. Un espace topologique R soit appelé *parfaitement normal*[11]) s'il possède les deux propriétés ci-après: 1^0 R est normal; 2^0 chaque sous-ensemble ouvert de R est un F_σ dans R (= somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés dans R). La propriété 2^0 peut être énoncée comme il suit: chaque sous-ensemble fermé de R est un G_δ dans R (= produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts dans R).

14·1. Un espace parfaitement normal est complètement normal.[12])

14·2. Chaque sous-ensemble d'un espace parfaitement normal constitue un espace parfaitement normal.[11])

14·3. Soit R un espace parfaitement normal; soit S un sous-ensemble fermé de R. Il existe des ensembles Q_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ fermés dans R tels que

$$S = \prod_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu = \prod_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu\,;\ \ Q_{\nu+1} \subset Q_\nu.$$

Démonstration. S étant fermé, c'est un G_δ dans R. Il existe par suite des ensembles U_ν ouverts dans R tels que $S = \prod_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$. D'après **12·1** on détermine des ensembles V_ν ouverts dans R tels que $S \subset V_\nu \subset \overline{V_\nu} \subset U_\nu$. Alors il suffit de poser $Q_\nu = \prod_{i=1}^{\nu} V_i$.

II. **Définition de la dimension.**

15. Soit R un espace topologique; on dit que le nombre de dimensions de R égale -1 (ou au plus -1) et l'on écrit $\dim R = -1$ (ou dim

[6]) Urysohn, l. c., p. 272.
[7]) Urysohn, l. c., p. 265.
[8]) Urysohn, l. c., p. 265.
[9]) Urysohn, l. c., p. 284.
[10]) Menger, l. c., p. 36.
[11]) Cette catégorie d'espace a été incidemment considérée (sans un nom spécial) par Urysohn, l. c., p. 286, note [41]) au bas de la page.
[12]) Urysohn, l. c. sub [11]).

$R \leqq -1$) si et seulement si $R = 0$. Supposons que l'on ait déjà défini, pour une certaine valeur de n ($= 0, 1, 2, 3 \ldots$) les espaces topologiques dont le nombre de dimensions égale au plus $n - 1$. Soit alors R un espace topologique et soit A un ensemble fermé dans R. On dit que le nombre de dimensions de R relativement à A égale au plus n et on écrit $\dim_A R \leqq n$ si l'on peut attacher à chaque ensemble $U \supset A$ ouvert dans R un ensemble V ouvert dans R de manière à avoir $A \subset V \subset U$, $\dim H_R(V) \leqq n - 1$. On dit que le nombre de dimensions de R égale au plus n et l'on écrit $\dim R \leqq u$ lorsque $\dim_A R \leqq n$ pour chaque sous-ensemble A fermé de R. On dit que le nombre de dimension de R [évent. relativement a un sous-ensemble fermé A] égale n et on écrit $\dim R = n$ ($\dim_A R = n$), lorsque $\dim R \leqq n$ [$\dim_A R \leqq n$] mais non $\dim R \leqq n - 1$ [$\dim_A R \leqq n - 1$].

16·1. Soit S un ensemble fermé dans R; soit A un ensemble fermé dans S. Soit $\dim_A R \leqq n$. Alors $\dim_A S \leqq n$.

16·2. Soit S un ensemble fermé dans R. Soit $\dim R \leqq n$. Alors $\dim S \leqq n$.

Démonstration. On voit sans peine qu'il suffit de déduire **16·1** pour la dimension n en supposant la proposition **16·2** vraie pour la dimension $n - 1$. Soit donc $U_0 \supset A$ un sous-ensemble ouvert de S. Il existe donc un sous-ensemble U ouvert de R tel que $U_0 = U S$, donc $A \subset U$. Puisque $\dim_A R \leqq n$, il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset U$, $\dim H_R(V) \leqq n - 1$. Posons $V_0 = S V$. L'ensemble V_0 est ouvert dans S, et l'on a $A \subset V_0 \subset U_0$. De plus, l'ensemble $H_S(V_0)$ est fermé dans S, donc aussi dans R, et l'on a $H_S(V_0) \subset H_R(V)$ d'après **11**. La proposition **16·2** pour la dimension $n - 1$ étant vraie, il s'ensuit $\dim H_S(V_0) \leqq n - 1$.

17·1. Soit S un sous-ensemble fermé de R; soit A un sous-ensemble fermé de S. Supposons qu'à chaque ensemble $U \supset A$ ouvert dans R on puisse attacher un ensemble V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset U$, $\dim S \,.\, H_R(V) \leqq n - 1$. Alors $\dim_A S \leqq n$.

Démonstration. Soit $U_0 \supset A$ un ensemble ouvert dans S. Il existe un ensemble U ouvert dans R tel que $U_0 = S U$. Il s'ensuit l'existence d'un ensemble V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset U$, $\dim S \,.\, H_R(V) \leqq n - 1$. Posons $V_0 = S V$. L'ensemble V_0 est ouvert dans S et l'on a $A \subset V_0 \subset U_0$. D'après **11** on a $H_S(V_0) \subset S \,.\, H_R(V)$. L'ensemble $H_S(V_0)$ étant fermé dans S, on conclut de **16·2** que $\dim H_S(V_0) \leqq n - 1$.

17·2. Soit R un espace complètement normal. Soit S un sous-ensemble fermé de R; soit A un sous-ensemble fermé de S. Soit $\dim_A S \leqq n$. Alors à chaque ensemble $U \supset A$ ouvert dans R on peut attacher un ensemble V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset U$, $\dim S \,.\, H_R(V) \leqq n - 1$.

Démonstration. L'ensemble $U_0 = S U$ est ouvert dans S et l'on a $U_0 \supset A$. Puisque $\dim_A S \leqq n$, il existe un ensemble V_0 ouvert dans S tel que $A \subset V_0 \subset U_0 \subset U$, $\dim H_S(V_0) \leqq n - 1$. Or d'après **13·3** il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $V \subset U$, $S V = V_0$ (donc $V \supset A$), $S \,.\, H_R(V) = H_S(V_0)$.

18. Soit R un espace topologique. Soient A, B des sous-ensembles fermés de R; soit $C \subset R$. Soit $R - C = P + Q$, les ensembles P, Q étant séparés (v. **6**) ; soit $P \supset A$, $Q \supset B$. Alors on dit que *l'ensemble C sépare A et B l'un de l'autre dans R.*

18·1. Soit R un espace normal. Soient A, B deux sous-ensembles fermés de R, soit $A\,B = 0$. Soit $\dim_A R \leqq n$. Il existe un sous-ensemble C fermé de R séparant A et B l'un de l'autre dans R et tel que $\dim C \leqq n - 1$.

Démonstration. D'après **12·1** il existe un ensemble U ouvert dans R tel que $A \subset U \subset \overline{U} \subset R - B$. Puisque $\dim_A R \leqq n$, il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset U$, $\dim H_R(V) \leqq n - 1$. On voit sans peine que l'ensemble $C = H_R(V)$ possède toutes les propriétés demandées.

18·2. Soit R un espace normal. Soit A un sous-ensemble fermé de R. Supposons qu'à chaque ensemble $B \subset R - A$ fermé dans R on puisse attacher un ensemble C fermé dans R séparant A et B l'un de l'autre dans R de manière que $\dim C \leqq n - 1$. Alors $\dim_A R \leqq n$.

Démonstration. Soit $U \supset A$ un ensemble ouvert dans R. En posant $B = R - U$ on voit qu'il existe un ensemble C fermé dans R et deux ensembles séparés P, Q de manière que $\dim C \leqq n - 1$, $R - C = P + Q$, $P \supset A$, $Q \supset B$. On voit sans peine que l'ensemble P est ouvert dans R, que $A \subset P \subset U$ et que $H_R(P) \subset C$, d'où $\dim H_R(P) \leqq n - 1$ d'après **16·2**.

18·3. Soit R un espace complètement normal. Soit $A, B, C \subset R$; supposons que C sépare A et B l'un de l'autre dans R. Il existe un ensemble $C^* \subset C$ fermé dans R séparant A et B l'un de l'autre dans R.

Démonstration. On a $R - C = P + Q$, où P, Q sont séparés. L'espace R étant complètement normal, il existe des ensembles U, V ouverts dans R tels que $U \supset P$, $V \supset Q$, $U\,V = 0$. Il suffit de poser $C^* = R - (U + V)$.

18·4. Soit A un sous-ensemble fermé d'un espace complètement normal R. Supposons qu'à chaque ensemble $B \subset R - A$ fermé dans R on puisse attacher un ensemble C séparant A et B l'un de l'autre dans R de manière qui $\dim C \leqq n - 1$. Alors $\dim_A R \leqq n$.

Démonstration. D'après **13·1**, **16·2**, **18·2** et **18·3**.

III. Théorème sur la dimension d'une somme.

19. Soit R un espace parfaitement normal. Soient S_i $(i = 1, 2, 3 \ldots)$ des sous-ensembles fermés de R; soit $\dim S_i \leqq n$ pour $i = 1, 2, 3 \ldots$ Alors $\dim \sum_{i=1}^{\infty} S_i \leqq n$.

Ce théorème est banal pour $n = -1$. On peut donc procéder comme il suit: Dans les démonstrations du *n*⁰ **20** on fera usage du théorème **19** pour la dimension $n - 1$; dans le *n*⁰ **21** on démontrera le théorème **19** en continuant le supposer vrai pour la dimension $n - 1$ et en faisant usage de la proposition **20·3**.

20·1. Soit R un espace parfaitement normal. Soit S un sous-ensemble fermé de R; soient A, B^* des sous-ensembles fermés de S. Soit C^* un sous-ensemble fermé de S séparant A et B^* l'un de l'autre dans S et tel que $\dim C^* \leqq n - 1$. Supposons que $\dim_F R \leqq n$ pour chaque ensemble $F \subset R - S$ fermé dans R. Soit B un sous-ensemble fermé de R tel que $B^* = S B$. Il existe un ensemble C fermé dans R séparant A et B l'un de l'autre dans R et tel que $\dim C \leqq n - 1$.

Démonstration. L'ensemble C^* séparant A et B^* l'un de l'autre dans S, il existe deux ensembles séparés P, Q tels que $S - C^* = P + Q$, $P \supset A$, $Q \supset B^*$. On voit sans peine que l'ensemble P est ouvert dans S, que $\bar{P} . B = 0$ et que $H_S(P) \subset C^*$, d'où $\dim H_S(P) \leqq n - 1$ d'après **16·2**. Les ensembles $\bar{P}$, B étant fermés dans l'espace normal R, la relation $\bar{P} B = 0$ donne l'existence de deux ensembles U, T ouverts dans R tels que $U \supset \bar{P}$, $T \subset B$, $U T = 0$, d'où $\bar{U} T = 0$ d'après **7·2**. D'après **13·3** et **14·1** il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $P = S V$, $V \subset U$, $S K = H_S(P)$, où $K = H_R(V)$. On voit sans peine que $A \subset V$, $B V = 0$, $B K = 0$. D'après **14·3** il existe des ensembles Q_ν ouverts dans R tels que

$$Q_\nu \supset Q_{\nu+1}, \; K = \prod_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu = \prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{Q_\nu}\,.$$

L'ensemble $K - S$ est ouvert dans K, c'est donc un F_σ dans K; K étant fermé dans R, $K - S$ est un F_σ dans R. Il existe par suite des ensembles F_ν fermés dans R tels que

$$K - S = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu .$$

D'après **12·1** et puisque $K B = 0$, il existe des ensembles Z_ν ouverts dans R tels que

$$F_\nu \subset Z_\nu \subset \bar{Z}_\nu \subset R - B.$$

Evidemment $F_\nu \subset R - S$, d'où $\dim_{F_\nu} R \leqq n$. Or $F_\nu \subset Q_\nu Z_\nu$ de manière qu'il existe des ensembles W_ν ouverts dans R tels que

$$F_\nu \subset W_\nu \subset Q_\nu Z_\nu, \; \dim H_R(W_\nu) \leqq n - 1.$$

On a $K - S \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu$ de manière que l'on conclut du théorème **10**, en se rappelant que $S K = H_S(P)$,

$$H_R\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu\Big) \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R(W_\nu) + H_S(P).$$

Posons

$$X = V + \sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu ,$$

$C = H_R(X)$, de manière que d'après **9·1**

$$(*) \qquad C \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R(W_\nu) + H_S(P).$$

Le théorème **19** étant par hypothèse vrai pour la dimension $n - 1$, le nombre de dimensions du second membre de la relation (*) est au plus égal à $n - 1$, d'où $\dim C \leqq n - 1$ d'après **16·2**. Or on vérifie sans peine que l'ensemble C sépare A et B l'un de l'autre dans R, car

$$R - C = X + (R - \overline{X}),\ X \supset A,\ R - \overline{X} \supset B.$$

20·2. Soit R un espace parfaitement normal. Soit S un sous-ensemble fermé de R; soit T un sous-ensemble arbitraire de R. Soit A un sous-ensemble fermé de S. Soit $\dim_A S \leqq n$; soit $\dim T \leqq n$. Alors $\dim_A (S + T) \leqq n$.

Démonstration. Sans restreindre la généralité on peut supposer que $R = S + T$ (v. **14·2**). De la relation $\dim T \leqq n$ on conclut alors sans peine que $\dim_F R \leqq n$ pour chaque choix d'un ensemble $F \subset R - S$ fermé dans R. Puisque $\dim_A S \leqq n$, d'après **18·1** à chaque ensemble $B^* \subset S - A$ fermé dans S on peut attacher un ensemble C^* fermé dans S séparant A et B^* l'un de l'autre dans S et tel que $\dim C^* \leqq n - 1$. Or soit $B \subset R - A$ un ensemble fermé dans R. En posant $B^* = S\,B$ on conclut de **20·1** qu'il existe un ensemble C fermé dans R séparant A et B l'un de l'autre dans R et tel que $\dim C \leqq n - 1$. D'après **18·2** on a donc $\dim_A R = \dim_A (S + T) \leqq n$.

20·3. Soit R un espace parfaitement normal. Soient S, T des ensembles fermés dans R. Soit $\dim S \leqq n$, $\dim T \leqq n$. Alors $\dim (S + T) \leqq n$.

Démonstration. De nouveau on peut supposer que $R = S + T$. Soit A fermé dans R; soit $U \supset A$ ouvert dans R. On doit construire un ensemble V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset U$, $\dim H_R(V) \leqq n - 1$. L'ensemble $A\,S$ est fermé dans S, d'où $\dim_{AS} S \leqq n$; on a de plus $\dim T \leqq n$, $R = S + T$. Donc on déduit de **20·2** que $\dim_{AS} R \leqq n$. Par suite il existe un ensemble V_1 ouvert dans R tel que $A\,S \subset V_1 \subset U$, $\dim H_R(V_1) \leqq n - 1$. Par raison de symmétrie il existe un ensemble V_2 ouvert dans R tel que $A\,T \subset V_2 \subset U$, $\dim H_R(V_2) \leqq n - 1$. Posons $V = V_1 + V_2$. Evidemment V est un sous-ensemble ouvert de R et $A \subset V \subset U$. D'après **9·1** on a

$$(*) \qquad H_R(V) \subset H_R(V_1) + H_R(V_2).$$

Or le théorème **20·3** n'est qu'un cas spécial du théorème **19** dont nous supposons la validité pour la dimension $n - 1$; donc le théorème **20·3** est vrai pour la dimension $n - 1$ de manière que le second membre de $(*)$ a le nombre de dimensions au plus égal à $n - 1$, d'où $\dim H_R(V) \leqq n - 1$ d'après **16·2**.

21·1. Passons à la démonstration du théorème **19** pour la dimension n. Les ensembles $\sum_{i=1}^{k} S_i$ sont fermés dans R; du théorème **20·3** on déduit par récurrence que $\dim \sum_{i=1}^{k} S_i \leqq n$; enfin $\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} S_i$. Il en résulte qu'il suffit de démontrer le théorème **19** sous la supposition

$$S_k \subset S_{k+1} \text{ pour } k = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Sans restreindre la généralité on peut aussi supposer (v. **14·2**) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k = R. \tag{2}$$

Choisissons un ensemble A fermé dans R et un ensemble $Z \supset A$ ouvert dans R. Il s'agit de construire un ensemble U_ω ouvert dans R tel que $A \subset U_\omega \subset Z$, $\dim H_R(U_\omega) \leqq n-1$. Commençons en construisant par récurrence, d'après **12·1**, des ensembles Z_r ouverts dans R tels que

$$A \subset Z_r \subset Z, \ \overline{Z}_r \subset Z_{r+1} \text{ pour } r = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

21·2. Le moyen essentiel pour la construction de l'ensemble U_ω cherché sera la construction préalable de trois suites U_r, V_r, T_r ($r = 1, 2, 3, \ldots$) d'ensembles ouverts dans R qui possède, pour $r = 1, 2, 3, \ldots$, les dix propriétés ci-après:

$$A\, S_r \subset U_r \subset Z_r, \qquad (a_r)$$
$$U_{r-1} \subset U_r, \qquad (b_r)$$
$$\dim S_r \,.\, H_R(U_r) \leqq n-1, \qquad (c_r)$$
$$U_r - U_{r-1} \subset V_{r-1}, \qquad (d_r)$$
$$H_R(U_r) - S_{r-1} \subset V_{r-1}, \qquad (e_r)$$
$$H_R(U_{r-1}) - S_{r-1} \subset V_{r-1}, \qquad (f_r)$$
$$A \subset V_{r-1}, \qquad (g_r)$$
$$S_{r-1} - \overline{U}_{r-1} \subset T_{r-1}, \qquad (h_r)$$
$$T_{r-2} \subset T_{r-1}, \qquad (i_r)$$
$$T_{r-1} \,.\, V_{r-1} = 0. \qquad (j_r)$$

Nous convenons d'ailleurs de poser

$$U_0 = 0, \ V_0 = R, \ S_0 = 0, \ T_0 = 0, \ T_{-1} = 0. \qquad (4)$$

Nous procèderons de la manière suivante: D'abord (en **21·3**) on construira l'ensemble U_1 ouvert dans R de manière à avoir (a_1) — (j_1). Ensuite (en **21·4**) en supposant que, pour une certaine valeur de k ($= 1, 2, 3, \ldots$) on ait déjà construit les ensembles U_r, V_s, T_s ($1 \leqq r \leqq k$, $1 \leqq s \leqq k-1$) de manière que les conditions (a_r) — (j_r) soient vérifiés pour $1 \leqq r \leqq k$, on construira les ensembles V_k, T_k ouverts dans R satisfaisant aux conditions (f_{k+1}) — (j_{k+1}). Enfin (en **21·5**) en supposant que, pour une valeur donnée de k ($= 1, 2, 3, \ldots$) on ait déjà construit les ensembles U_r, V_r, T_r ($1 \leqq r \leqq k$) ouverts dans R vérifiant les conditions (a_r) — (e_r), (f_s)—(j_s) ($1 \leqq r \leqq k$, $1 \leqq s \leqq k+1$), on construira l'ensemble U_{k+1} ouvert dans R satisfaisant aux conditions (a_{k+1}) — (e_{k+1}). Le but proposé sera ainsi atteint.

21·3. L'ensemble $A\, S_1$ est ouvert dans S_1; l'ensemble Z_1 est ouvert dans R et $A\, S_1 \subset Z_1$ d'après (3); l'ensemble S_1 est fermé dans R et $\dim S_1 \leqq n$. Donc il résulte de **14·1** et **17·2** qu'il existe un ensemble U_1 ouvert dans R tel que $A\, S_1 \subset U_1 \subset Z_1$, $\dim S_1 \,.\, H_R(U_1) \leqq n-1$. En tenant compte de (4) on voit que les conditions (a_1)—(j_1) sont réalisées.

21·4. Soit $k = 1, 2, 3, \ldots$ Supposons que les ensembles U_r, V_s, T_s ($1 \leqq r \leqq k$, $1 \leqq s \leqq k-1$) vérifient les conditions (a_r)—(j_r) pour $1 \leqq r \leqq k$. Montrons d'abord que

$$A, \ S_k - \overline{U}_k; \qquad (\alpha_k)$$
$$H_R(U_k) - S_k, \ S_k - \overline{U}_k; \qquad (\beta_k)$$

$$A,\ T_{k-1}; \tag{γ_k}$$
$$H_R\,(U_k) - S_k,\ T_{k-1} \tag{δ_k}$$

sont des couples d'ensembles séparés. L'ensemble $S_k - U_k$ est fermé dans R et contient $S_k - \overline{U}_k$; donc d'après (a_k)

$$\overline{A}\,(S_k - \overline{U}_k) + A\,.\,\overline{S_k - \overline{U}_k} = A\,.\,\overline{S_k - \overline{U}_k} \subset A\,(S_k - U_k) = A\,S_k - U_k = 0.$$

de manière que (v. **7·2**) les ensembles (α_k) sont séparés. De plus,

$$\overline{H_R\,(U_k) - S_k}\,.\,(S_k - \overline{U}_k) \subset H_R\,(\overline{U}_k)\,.\,(R - U_k) = 0,$$
$$(H_R\,(U_k) - S_k)\,.\,\overline{S_k - \overline{U}_k} \subset (R - S_k)\,S_k = 0,$$

de manière que les ensembles (β_k) sont séparés. Les ensembles V_{k-1}, T_{k-1}, étant ouverts dans R, ils sont donc séparés en vertu de (j_k). Donc, d'après **6·2** et (g_k), les ensembles (γ_k) sont séparés et, comme $H_R\,(U_k) - S_k \subset H_R\,(U_k) - S_{k-1}$ d'après (1) [pour $k = 1$ d'après (4)], il résulte de **6·2** et (e_k) que les ensembles (δ_k) sont séparés. Par suite on voit de **6·1** que les ensembles

$$A + [H_R\,(U_k) - S_k],\ (S_k - \overline{U}_k) + T_{k-1}$$

sont séparés; en tenant compte de **14·1** on en déduit qu'il existe des ensembles V_k, T_k ouverts dans R satisfaisant aux conditions (f_{k+1})—(j_{k+1}).

21·5. Soit $k = 1, 2, 3, \ldots$ Supposons que les ensembles U_r, V_r, T_r $(1 \leqq r \leqq k)$ vérifient les conditions (a_r)—(e_r), (f_s)—(j_s) pour $1 \leqq r \leqq k$, $1 \leqq s \leqq k+1$. D'après **14·3** il existe des ensembles Q_ν ouverts dans R tels que

$$Q_\nu \supset Q_{\nu+1} \text{ pour } \nu = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5}$$
$$[A + H_R\,(U_k)]\,.\,S_{k+1} = \prod_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu = \prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{Q}_\nu. \tag{6}$$

Les ensembles $[A + H_R\,(U_k)]\,.\,S_{k+1}$, S_k étant fermés dans l'espace parfaitement normal R, leur différence est un F_σ dans R. Il existe donc des ensembles F_ν fermés dans R tels que

$$[A + H_R\,(U_k)]\,.\,S_{k+1} - S_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu. \tag{7}$$

D'après (7), (f_{k+1}) et (g_{k+1}) on a $F_\nu \subset V_k$. En vertu de **12·1**, il existe donc des ensembles P_ν ouverts dans R tels que

$$\overline{P}_\nu \subset V_k \tag{8}$$

et $F_\nu \subset P_\nu$. D'après (6) et (7) $F_\nu \subset Q_\nu$. De (3), (7) et (a_k) on déduit sans peine que $F_\nu \subset Z_{k+1}$. D'après (7) on a $F_\nu \subset R - S_k$. L'ensemble F_ν fermé dans S_{k+1} [d'après (7)] fait donc partie de l'ensemble $P_\nu\,Q_\nu\,Z_{k+1}\,.\,(R - S_k)$. Or S_{k+1} est fermé dans R et $\dim S_{k+1} \leqq n$; il résulte donc de **14·1** et **17·2** qu'il existe des ensembles W_ν ouverts dans R tels que

$$F_\nu \subset W_\nu \text{ pour } \nu = 1, 2, 3, \ldots, \tag{9}$$
$$W_\nu \subset P_\nu\,Q_k\,Z_{k+1} - S_k \text{ pour } \nu = 1, 2, 3, \ldots, \tag{10}$$
$$\dim S_{k+1}\,.\,H_R\,(W_\nu) \leqq n - 1 \text{ pour } \nu = 1, 2, 3, \ldots \tag{11}$$

D'après (5), (6), (7), (9) et (10) les suppositions du théorème **10** sont satisfaites si l'on remplace S, T, Q_ν, V_ν par (6), (7), Q_ν, W_ν. Donc

$$H_R\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu\right) \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R(W_\nu) + S_k \cdot (A + H_R(U_k)). \tag{12}$$

Posons

$$U_{k+1} = U_k + \sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu \tag{13}$$

de manière que U_{k+1} est un sous-ensemble ouvert de R.

De (a_k), (3), (7), (9), (13) on déduit sans peine que la condition (a_{k+1}) est réalisée. La vérité de (b_{k+1}) est évidente. D'après (a_k), (12), (13) et **9·1** on a

$$H_R(U_{k+1}) \subset H_R(U_k) + \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R(W_\nu). \tag{14}$$

D'après (7), (9) et (13) on a $H_R(U_{k+1}) \cdot [S_{k+1} \cdot H_R(U_k) - S_k] = 0$, de manière que (14) donne

$$S_{k+1} \cdot H_R(U_{k+1}) \subset S_k \cdot H_R(U_k) + \sum_{\nu=1}^{\infty} S_{k+1} \cdot H_R(W_k). \tag{15}$$

Or nous supposons la validité du théorème **19** pour la dimension $n - 1$; de (c_k), (11), (15) et **16·2** résulte donc (c_{k+1}). D'après (8) et (10) $W_\nu \subset V_k$ de manière que (13) donne (d_{k+1}). D'après (8) et (10) $H_R(W_\nu) \subset V_k$; d'après (f_{k+1}) $H_R(U_k) - S_k \subset V_k$; donc (14) donne (e_{k+1}).

21·6. La construction des ensembles U_r, V_r, T_r ouverts dans R possédant les propriétés (a_r)—(j_r) pour $r = 1, 2, 3, \ldots$ est ainsi achevée. Nous devons (v. **21·1**) construire un ensemble U_ω ouvert dans R tel que

$$A \subset U_\omega \subset Z, \tag{16}$$
$$\dim H_R(U_\omega) \leqq n - 1. \tag{17}$$

Posons à cet effet

$$U_\omega = \sum_{r=1}^{\infty} U_r,$$

de manière que U_ω est un sous-ensemble ouvert de R. La condition (16) est vérifiée en vertu de (2), (3) et (a_r). Choisissons une valeur de k $(= 1, 2, 3, \ldots)$. D'après (b_r) et (d_r) on a

$$U_\omega \subset U_k + \sum_{r=k}^{\infty} V_r. \tag{18}$$

D'après (i_r) et (j_r) on a $T_k \cdot \sum_{r=k}^{\infty} V_r = 0$; les ensembles T_k et $\sum_{r=k}^{\infty} V_r$ étant ouverts dans R, ils sont séparés, d'où (v. **7·2**)

$$T_k \cdot \overline{\sum_{r=k}^{\infty} V_r} = 0.$$

Or d'après (18)

$$H_R(U_\omega) \subset \overline{U_\omega} \subset \overline{U_k} + \overline{\sum_{r=k}^{\infty} V_r}$$

de manière que

$$T_k \,.\, H_R\,(U_\omega) \subset \overline{U_k}.$$

Donc, en vertu de (h_{k+1}) $(S_k - \overline{U_k}) \,.\, H_R\,(U_\omega) = 0$, c'est-à-dire $S_k \,.\, H_R\,(U_\omega) \subset \overline{U_k}$. Or $U_k \subset U_\omega \subset R - H_R\,(U_\omega)$; $\overline{U_k} - U_k = H_R\,(U_k)$; donc $S_k \,.\, H_R\,(U_\omega) \subset S_k \,.\, H_R\,(U_k)$. Ceci étant vrai pour $k = 1, 2, 3, \ldots,$ on déduit de (2) que

$$H_R\,(U_\omega) \subset \sum_{k=1}^{\infty} S_k \,.\, H_R\,(U_k). \tag{19}$$

Comme nous supposons la validité du théorème **19** pour la dimension $n - 1$, la relation (17) s'obtient de (19) et (c_r) en vertu de **16·2**.

IV. **Quelques conséquences.**

22. Soit R un espace parfaitement normal; soit $\dim R \leqq n$. Soit A un sous-ensemble arbitraire de R. Soit $U \supset A$ un sous-ensemble ouvert de R. Il existe un ensemble V ouvert dans R tel que

$$A \subset V \subset U,\ H_R\,(V) = \Phi_1 + \Phi_2,$$
$$\dim \Phi_1 \leqq n - 1,\ \Phi_2 = \overline{A} \,.\, H_R\,(V) = (\overline{A} - A) \,.\, H_R\,(V).$$

Démonstration. L'espace R étant parfaitement normal, l'ensemble $\overline{A} \,.\, U$ est un F_σ dans R. Il existe donc des ensembles F_ν fermés dans R tels que

$$\overline{A} \,.\, U = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu. \tag{1}$$

D'après **14·3** il existe des ensembles Q_ν ouverts dans R tels que

$$Q_\nu \supset Q_{\nu+1},\ \overline{A} = \prod_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu = \prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{Q_\nu}. \tag{2}$$

D'après (1) et (2) $F_\nu \subset U\,Q_\nu$; or $\dim R \leqq n$ de manière qu'il existe des ensembles W_ν ouverts dans R tels que

$$F_\nu \subset W_\nu \subset U\,Q_\nu, \tag{3}$$
$$\dim H_R\,(W_\nu) \leqq n - 1. \tag{4}$$

D'après **10**

$$H_R\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu\Big) \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R\,(W_\nu) + (\overline{A} - U). \tag{5}$$

Posons

$$V = \sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu\,;\ \Phi_1 = H_R\,(V) \,.\, \sum_{\nu=1}^{\infty} H_R\,(W_\nu)\,;\ \Phi_2 = \overline{A} \,.\, H_R\,(V).$$

L'ensemble V est ouvert dans R; comme $A \subset U$, d'après (1) et (3) $A \subset \overline{A} \,.\, U \subset V$; donc $A \,.\, H_R\,(V) = 0$, d'où $\Phi_2 = (\overline{A} - A) \,.\, H_R\,(V)$; d'après (5) $H_R\,(V) = \Phi_1 + \Phi_2$; d'après (4), 19 et **16·2** $\dim \Phi_1 \leqq n - 1$.

23. Soit R un espace parfaitement normal; soit $\dim R \leqq n$. Soit S un sous-ensemble arbitraire de R. Alors $\dim S \leqq n$.

Démonstration. Le théorème étant banal pour $n = -1$, supposons le vrai pour la dimension $n - 1$. Soit A un ensemble fermé dans S; soit $U_0 \supset A$ un ensemble ouvert dans S de manière qu'il existe un ensemble U ouvert dans R tel que $U_0 = S\, U$, d'où $U \supset A$. D'après **22** il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $A \subset V \subset U$, $H_R(V) = \Phi_1 + \Phi_2$, dim $\Phi_1 \leqq n - 1$, $\Phi_2 \subset \overline{A} - A$. Posons $V_0 = S\, V$; l'ensemble V_0 est ouvert dans S et l'on a $A \subset V_0 \subset U_0$. D'après **5** $A = S\, \overline{A}$, d'où $S\, \Phi_2 = 0$, donc $S \,.\, H_R(V) \subset \Phi_1$ et par suite $H_S(V_0) \subset \Phi_1$ en vertu de **11**. Or nous supposons la validité du théorème à démontrer pour la dimension $n - 1$; donc dim $H_S(V_0) \leqq n - 1$. Par suite dim $S \leqq n$.

24·1. Soit R un espace parfaitement normal; soit dim $R \leqq n$. Soit S un sous-ensemble fermé de R. Soit U_0 un ensemble ouvert dans S, soit $U \supset U_0$ un ensemble ouvert dans R. Soit dim $H_S(U_0) \leqq n - 1$. Alors il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $U_0 \subset V \subset U$, $S\, V = U_0$, $S \,.\, H_R(V) = H_S(U_0)$, dim $H_R(V) \leqq n - 1$.

Démonstration. D'après **13·3** et **14·1** il existe un ensemble W ouvert dans R tel que $S\, W = U_0$, $U_0 \subset W \subset U$, $S \,.\, H_R(W) = H_S(U_0)$. D'après le théorème **22** (où l'on remplace A, U par U_0, W) il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $U_0 \subset V \subset W \subset U$ (donc $S\, V = U_0$), $H_R(V) = \Phi_1 + \Phi_2$, dim $\Phi_1 \leqq n - 1$, $\Phi_2 = \overline{U}_0 \,.\, H_R(V) = (\overline{U}_0 - U_0)\, H_R(V)$. L'ensemble Φ_2 est fermé dans R. On a $H_R(V) \subset \overline{V} \subset \overline{W}$; or $S\, W = U_0 \subset V \subset R - H_R(V)$, de manière $S \,.\, H_R(V) \subset S \,.\, H_R(W) = H_S(U_0)$, d'où $S \,.\, H_R(V) = H_S(U_0)$ d'après **11**. Or $H_S(U_0) = S \,.\, \overline{U}_0 - U_0 = \overline{U}_0 - U_0$ (car $U_0 \subset S$ entraîne $\overline{U}_0 \subset S$, S étant fermé dans R) et par suite $\Phi_2 = (\overline{U}_0 - U_0)\, H_R(V) = H_S(V_0)$, donc dim $\Phi_2 \leqq n - 1$. L'ensemble Φ_2 étant fermé dans R, l'ensemble $H_R(V) - \Phi_2 \subset \Phi_1$ est (l'espace R étant parfaitement normal) un F_σ dans R, d'où $H_R(V) = \Phi_2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$, les F_ν étant des sous-ensembles de Φ_1 fermés dans R. Comme dim $\Phi_1 \leqq n - 1$, dim $F_\nu \leqq n - 1$ d'après **23** (ou bien d'après **16·2**). Donc dim $H_R(V) \leqq n - 1$ d'après **19**.

24·2. Soit R un espace parfaitement normal. Soient $S_1, S_2, \ldots, S_k$ des sous-ensembles fermés de R. Soit $R = S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_k$. Soit U_0 un ensemble ouvert dans S_k; soit $U \supset U_0$ un ensemble ouvert dans R. Soit dim $S_\nu \leqq n_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq k$. Soit dim $H_{S_k}(U_0) \leqq n_k - 1$. Alors il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $U_0 \subset V \subset U$, $S_k \,.\, V = U_0$, $S_k \,.\, H_R(V) = H_{S_k}(U_0)$, dim $S_\nu \,.\, H_R(V) \leqq n_\nu - 1$ pour $1 \leqq \nu \leqq k$.

Démonstration. Le théorème étant banal pour $k = 1$, supposons le vrai pour $k - 1$. Il existe donc (v. **14·2**) un ensemble V_0 ouvert dans S_2 tel que $U_0 \subset V_0 \subset S_2 \,.\, U$, $S_k \,.\, V_0 = U_0$, $S_k \,.\, H_{S_2}(V_0) = H_{S_k}(U_0)$, dim $S_\nu \,.\, H_{S_2}(V_0) \leqq n_\nu - 1$ pour $2 \leqq \nu \leqq k$. D'après **24·1** (où on remplace n, S, U_0 par n_1, S_2, V_0) il existe un ensemble V ouvert dans R tel que $U_0 \subset V_0 \subset V \subset U$, $S_2\, V = V_0$ (et donc $S_k\, V = U_0$), $S_2 \,.\, H_R(V) = H_{S_2}(V_0)$, dim $H_R(V) \leqq n_1 - 1$. Comme $S_k \subset S_2$, on a $S_k \,.\, H_R(V) = S_k \,.\, H_{S_2}(V_0) = H_{S_k}(U_0)$. Comme $S_1 = R$, la relation dim $S_\nu \,.\, H_R(V) \leqq n_\nu - 1$ est vraie pour $\nu = 1$. Pour $2 \leqq \nu \leqq k$ on a $S_\nu \subset S_2$, donc $S_\nu . H_R(V) = S_\nu . H_{S_2}(V_0)$ d'où ici encore $\dim S_\nu . H_R(V) \leqq n_\nu - 1$.

V. **Théorème sur le recouvrement d'un espace à dimension finie.**

25·1. Soit R un espace normal. Soient $U_1, \ldots, U_m$ des sous-ensembles ouverts de R; soit $\sum_{\nu=1}^{m} U_\nu = R$. Il existe un ensemble V_1 ouvert dans R tel que $\overline{V_1} \subset U_1$, $V_1 + \sum_{\nu=2}^{m} U_\nu = R$.

Démonstration.[13] L'ensemble $R - \sum_{\nu=2}^{m} U_\nu$ est fermé dans R et est contenu dans U_1. Donc d'après **12·1** il existe un ensemble V_1 ouvert dans R tel que

$$R - \sum_{\nu=2}^{m} U_\nu \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1;$$

évidemment $V_1 + \sum_{\nu=2}^{m} U_\nu = R$.

25·2. Soit R un espace normal. Soient $U_1, \ldots, U_m$ des sous-ensembles ouverts de R; soit $\sum_{\nu=1}^{m} U_\nu = R$. Il existe des ensembles $V_1, \ldots, V_m$ ouverts dans R tels que $\overline{V_1} \subset U_1, \ldots, \overline{V_m} \subset U_m$, $\sum_{\nu=1}^{m} V_\nu = R$.

Démonstration.[13] Les ensembles V_ν s'obtiennent en appliquant n fois la proposition **25·1**.

25·3. Soit R un espace parfaitement normal; soit $\dim R \leqq n$. Soient $U_1, \ldots, U_m$ des sous-ensembles ouverts de R; soit $\sum_{\nu=1}^{m} U_\nu = R$. Il existe des ensembles $V_1, \ldots, V_m$ ouverts dans R tels que: $\overline{V_\nu} \subset U_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$; $\sum_{\nu=1}^{m} \overline{V_\nu} = R$; $V_\mu V_\nu = 0$ pour $1 \leqq \mu < \nu \leqq m$; $\dim H_R(V_\nu) \leqq n - 1$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$.

Démonstration. D'après **25·2** il existe des ensembles $F_1, \ldots, F_m$ fermés dans R tels que $F_\nu \subset U_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$, $\sum_{\nu=1}^{m} F_\nu = R$. D'après **12·1** il existe des ensembles $W_1, \ldots, W_m$ ouverts dans R tels que $F_\nu \subset W_\nu \subset \overline{W_\nu} \subset U_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$. Puisque $\dim R \leqq n$, il existe des ensembles $Z_1, \ldots, Z_m$ ouverts dans R tels que $F_\nu \subset Z_\nu \subset W_\nu$, $\dim H_R(Z_\nu) \leqq n - 1$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$. Posons $V_1 = Z_1$; pour $2 \leqq \nu \leqq m$ posons $V_\nu = Z_\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \overline{Z_\mu}$. Les ensembles V_ν sont ouverts dans R et l'on a $\overline{V_\nu} \subset \overline{Z_\nu} \subset \overline{W_\nu} \subset U_\nu$. Soit p un point arbitraire de R; comme $R = \sum_{\nu=1}^{m} F_\nu \subset \sum_{\nu=1}^{m} \overline{Z_\nu}$, soit ν le plus petit indice tel que

---

[13]) Menger, l. c., p. 159—160 (Bemerkung).

$(p) \subset \overline{Z}_\nu$; on voit sans peine que $(p) \subset \overline{V}_\nu$. Donc $\sum_{\nu=1}^{m} \overline{V}_\nu = R$. Pour $1 \leqq \mu < \nu \leqq m$ on a $V_\nu \subset R - \sum_{i=1}^{\nu-1} \overline{Z}_i \subset R - \overline{Z}_\mu \subset R - \overline{V}_\mu \subset R - V_\mu$, d'où $V_\mu V_\nu = 0$. Comme $V_1 = Z_1$, on a $\dim H_R(V_1) \leqq n - 1$. Pour $2 \leqq \nu \leqq m$ on a

$$V_\nu = Z_\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \overline{Z}_\mu = Z_\nu - \overline{\sum_{\mu=1}^{\nu-1} Z_\mu},$$

donc d'après **9·1** et **9·2**

$$H_R(V_\nu) \subset \sum_{\mu=1}^{\nu} H_R(Z_\mu)$$

d'où $\dim H_R(V_\nu) \leqq n - 1$ d'après **19** et **23** (ou bien **16·2**).

26. Soit R un espace parfaitement normal; soit $\dim R \leqq n$. Soient $U_1, \ldots, U_m$ des sous-ensembles ouverts de R; soit $\sum_{\nu=1}^{m} U_\nu = R$. Il existe des ensembles V_i $(1 \leqq i \leqq (n+1)m)$ ouverts dans R jouissant des propriétés suivantes:

1⁰ $\overline{V}_i \subset U_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$, $(n+1)(\nu-1)+1 \leqq i \leqq (n+1)\nu$;

2⁰ $\sum_{i=1}^{(n+1)m} \overline{V}_i = R$;

3⁰ $V_i \,.\, V_j = 0$ pour $1 \leqq i < j \leqq (n+1)m$;

4⁰ $\dim H_R(V_i) \leqq n - 1$ pour $1 \leqq i \leqq (n+1)m$;

5⁰ soit $i_1, i_2, \ldots, i_r$ $(2 \leqq r \leqq n+2)$ une combinaison des indices $1, 2, \ldots, (n+1)m$: alors $\dim \prod_{s=1}^{r} \overline{V}_{i_s} \leqq n - r + 1$.

Démonstration. Pour $k = 1$, il résulte sans peine de **25·3** qu'il existe des ensembles $V_i^{(k)}$ $(1 \leqq i \leqq km)$ ouverts dans R tels que

$V_i^{(k)} \subset U_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$, $k(\nu-1)+1 \leqq i \leqq k\nu$; (a_k)

$\sum_{i=1}^{km} \overline{V}_i^{(k)} = R$; (b_k)

$V_i^{(k)} \,.\, V_j^{(k)} = 0$ pour $1 \leqq i < j \leqq km$; (c_k)

$\dim H_R(V_i^{(k)}) \leqq n - 1$ pour $1 \leqq i \leqq km$; (d_k)

pour chaque combinaison $i_1, i_2, \ldots, i_r$ des indices $1, 2, \ldots, km$ telle que $2 \leqq r \leqq k+1$ on a $\dim \prod_{s=1}^{r} \overline{V}_{i_s}^{(k)} \leqq n - r + 1$.[14]) (e_k)

On doit prouver que de tels ensembles $V_i^{(k)}$ existent aussi pour $k = n + 2$. Supposons donc que, pour une certaine valeur de k $(1 \leqq k \leqq n+1)$, on ait construit des ensembles $V_i^{(k)}$ $(1 \leqq i \leqq km)$ ouverts dans R jouissant des propriétés (a_k)—(e_k); il s'agit seulement d'en déduire des ensembles $V_i^{(k+1)}$ $(1 \leqq i \leqq (k+1)m)$ ouverts dans R vérifiant (a_{k+1})—(e_{k+1}).

---

[14]) Pour $k = 1$, donc $r = 2$, on a $P = \prod_{s=1}^{r} \overline{V}_{i_s}^{(k)} = \overline{V}_{i_1}^{(1)} \,.\, \overline{V}_{i_2}^{(1)}$. Or d'après (c_1) $V_{i_1}^{(1)} . V_{i_2}^{(1)} = 0$ d'où $\overline{V}_{i_1}^{(1)} \overline{V}_{i_2}^{(1)} = 0$ selon **7·2**; donc $P \subset H_R(V_{i_1}^{(1)})$, d'où $\dim P \leqq n - r + 1 = n - 1$ d'après **16·2** et (d_1).

26·1. Pour $1 \leqq r \leqq k$, soit S_r l'ensemble de tous les points p de l'espace R tels que $(p) \subset V_i^{(k)}$ pour r valeurs différentes au moins de l'indice i $(1 \leqq i \leqq k\,m)$. D'après (b_k) on a $S_1 = R$. Evidemment $S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_k$ et les ensembles S_k $(1 \leqq r \leqq k)$ sont fermés dans R. D'après **19** et (e_k) on a $\dim S_r \leqq n - r + 1$ pour $1 \leqq r \leqq k$. Les ensembles $S_k\, U_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq m)$ sont ouverts dans S_k et l'on a $\sum\limits_{\nu=1}^{m} S_k\, U_\nu = S_k$. Donc, en vertu de **14·2** et **25·3**, il existe des ensembles T_ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ ouverts dans S_k tels que

$$\overline{T}_\nu \subset U_\nu \quad \text{pour } 1 \leqq \nu \leqq m; \tag{1}$$

$$\sum_{\nu=1}^{m} \overline{T}_\nu = S_k; \tag{2}$$

$$T_\mu T_\nu = 0 \quad \text{pour } 1 \leqq \mu < \nu \leqq m; \tag{3}$$

$$\dim H_{S_k}(T_\nu) \leqq n - k \quad \text{pour } 1 \leqq \nu \leqq m. \tag{4}$$

26·2. Nous allons construire des ensembles W_ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ ouverts dans R tels que:

$$W_\nu \subset U_\nu \quad \text{pour } 1 \leqq \nu \leqq m; \tag{α_ν}$$

$$S_k \,.\, W_\nu = T_\nu \quad \text{pour } 1 \leqq \nu \leqq m; \tag{β_ν}$$

$$S_k \,.\, H_R(W_\nu) = H_{S_k}(T_\nu) \quad \text{pour } 1 \leqq \nu \leqq m; \tag{γ_ν}$$

$$\dim S_k \,.\, H_R(W_\nu) \leqq n - r \quad \text{pour } 1 \leqq r \leqq k,\ 1 \leqq \nu \leqq m; \tag{δ_ν}$$

$$\overline{W}_\mu\, W_\nu = 0 \quad \text{pour } 1 \leqq \mu < \nu \leqq m; \tag{ε_ν}$$

$$\overline{W}_\mu \,.\, \overline{W}_\nu \subset S_k \quad \text{pour } 1 \leqq \mu < \nu \leqq m. \tag{ζ_ν}$$

Les conditions (ε_1) et (ζ_1) sont à regarder comme banales. D'après (1) et **12·1** on construit d'abord des ensembles Z_ν ouverts dans R tels que

$$\overline{T}_\nu \subset Z_\nu \subset \overline{Z}_\nu \subset U_\nu \quad \text{pour } 1 \leqq \nu \leqq m. \tag{5}$$

D'après **26·1** les hypothèses du théorème **24·2** sont vérifiées lorsqu'on y remplace U_0, U, n_r $(1 \leqq r \leqq k)$ par $T_1, Z_1, n - r$. Il existe donc un ensemble W_1 ouvert dans R vérifiant (α_1)—(ζ_1). Supposons donc que, pour une certaine valeur de ν $(2 \leqq \nu \leqq m)$, on ait déjà construit des ensembles $W_1, \ldots, W_{\nu-1}$ ouverts dans R tels que les propriétés (α_μ)—(ζ_μ) aient lieu pour $1 \leqq \mu < \nu$. On doit construire un ensemble W_ν ouvert dans R jouissant des propriétés (α_ν)—(ζ_ν). Pour $1 \leqq \mu < \nu$ on a d'après (β_μ) et (γ_μ)

$$(\overline{W}_\mu - S_k)\,\overline{T}_\nu \subset (\overline{W}_\mu - S_k)\, S_k = 0,\ \ \overline{\overline{W}_\mu - S_k} \,.\, T_\nu \subset \overline{W}_\mu \,.\, S_k\, T_\nu \subset \overline{T}_\mu\, T_\nu;$$

les ensembles T_μ et T_ν étant ouverts dans S_k, ils sont séparés d'après (3), d'où $\overline{T}_\mu \,.\, T_\nu = 0$. Donc (v. **7·2**) les ensembles $\overline{W}_\mu - S_k$ et T_ν sont séparés; les ensembles $\sum\limits_{\mu=1}^{\nu-1} (\overline{W}_\mu - S_k)$, T_ν le sont aussi en vertu de **6·1**; donc (v. **14·1**) il existe des ensembles P_ν, Q_ν ouverts dans R tels que

$$P_\nu \supset \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \overline{W}_\mu - S_k,\quad Q_\nu \supset T_\nu,\quad P_\nu\, Q_\nu = 0. \tag{6}$$

Or on peut appliquer le théorème **24·2** en y remplaçant U_0, U, n_r $(1 \leqq r \leqq k)$ par $T_\nu, Z_\nu\, Q_\nu, n - r$. Il s'ensuit l'existence d'un ensemble W_ν ouvert dans R tel que

$$T_\nu \subset W_\nu \subset Z_\nu\, Q_\nu \tag{7}$$

et que les conditions (β_ν), (γ_ν), (δ_ν) soient réalisées. D'après (7) on a $\overline{W}_\nu \subset \overline{Z}_\nu$, d'où il résulte (α_ν) d'après (5). Les ensembles P_ν, Q_ν ouverts dans R sont séparés d'après (6), de manière que (v. **7·2**) $P_\nu\, \overline{Q}_\nu = 0$, donc $\overline{W}_\mu\, \overline{Q}_\nu \subset S_k$ pour $1 \leqq \mu < \nu$. Or on a $\overline{W}_\nu \subset \overline{Q}_\nu$ en vertu de (7), donc on a (ζ_ν). Par suite pour $1 \leqq \mu < \nu$ on a $\overline{W}_\mu \,.\, W_\nu = [W_\mu + H_R(W_\mu)] \,.\, W_\nu \subset S_k$, d'où, en tenant compte de (β_μ), (γ_μ) et (β_ν),

$$\overline{W}_\mu \,.\, W_\nu = [S_k\, W_\mu + S_k\, H_R(W_\mu)] \,.\, S_k\, W_\nu = [T_\nu + H_{S_k}(T_\mu)]\, T_\nu = \overline{T}_\mu\, T_\nu = 0$$

d'après (3) et **7·2**; il en résulte (ε_ν).

26·3. Posons

$$V_{i+r}^{(k+1)} = V_i^{(k)} - \sum_{\nu=1}^{m} \overline{W}_\nu \text{ pour } 0 \leqq r \leqq m-1,\ r k + 1 \leqq i \leqq (r+1) k, \tag{8}$$

$$V_{r(k+1)}^{(k+1)} = W_\nu \text{ pour } 1 \leqq \nu \leqq m, \tag{9}$$

de manière que $V_i^{(k+1)}$ $(1 \leqq i \leqq (k+1)\, m)$ sont des sou-ensembles ouverts de R. D'après (a_k) et (α_ν) on a (a_{k+1}). Pour $0 \leqq r \leqq m-1$, $r k + 1 \leqq i \leqq (r+1)\, k$ on a d'après (8) $V_i^{(k)} \subset V_{i+r}^{(k+1)} + \sum_{\nu=1}^{m} \overline{W}_\nu$, d'où $\overline{V}_i^{(k)} \subset \overline{V}_{i+r}^{(k+1)} + \sum_{\nu=1}^{m} \overline{W}_\nu$, donc (b_{k+1}) en vertu de (9) et (b_k). D'après (8), (9), (c_k) et (ε_ν) on a (c_{k+1}). D'après **9·1** et **9·2** on a pour $0 \leqq r \leqq m-1$, $r k + 1 \leqq i \leqq (r+1)\, k$

$$H_R(V_{i+r}^{(k+1)}) \subset H_R(V_i^{(k)}) + \sum_{\nu=1}^{m} H_R(W_\nu),$$

d'où (d_{k+1}) d'après (δ_ν), (d_k), **16·2** et **20·3**.

26·4. Il reste à prouver (e_{k+1}). Soit donc $j_1, j_2, \ldots, j_r$ $(2 \leqq r \leqq k+1)$ une combinaison des indices $1, 2, \ldots, (k+1)\, m$. Soit

$$Q = \prod_{s=1}^{r} V_{j_s}^{(k+1)}.$$

On doit démontrer que $\dim Q \leqq n - r + 1$. Quatre cas sont à distinguer:

Premier cas. Deux au moins parmi les ensembles $V_{j_s}^{(k+1)}$ $(1 \leqq s \leqq r)$ sont donnés par (9); soit pour fixer les idées

$$V_{j_1}^{(k+1)} = W_\mu,\quad V_{j_2}^{(k+1)} = W_\nu$$

avec $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, m$; $\mu < \nu$. On a $Q \subset \overline{W}_\mu \,.\, \overline{W}_\nu$, d'où $Q \subset S_k$ d'après (ζ_ν). En outre $\overline{W}_\mu\, W_\nu = 0$ d'après (ε_ν), d'où $Q \subset H_R(W_\nu)$. Donc d'après **16·2** et (δ_ν) $\dim Q \leqq n - k \leqq n - r + 1$, car $r \leqq k + 1$.

Deuxième cas. Parmi les r ensembles $V_{j_s}^{(k+1)}$, un seul est donné par (9). Il existe un indice ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$ et une combinaison $i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}$ d'indices $1, 2, \ldots k\, m$ de manière que

$$Q = \overline{W}_\nu \,.\, \prod_{s=1}^{r-1} V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W}_\mu \subset \overline{W}_\nu \,.\, \prod_{s=1}^{r-1} \overline{V}_{i_s}^{(k)} \subset \overline{W}_\nu \,.\, S_{r-1}.$$

Les ensembles W_ν, $V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W}_\mu$ sans point commun étant ouverts dans R, ils sont séparés; donc $W_\nu . \overline{\prod_{s=1}^{r-1} V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W_\mu}} = 0$ d'après **7·2**, d'où $Q \subset S_{r-1} . H_R(W_\nu)$ et $\dim Q \leqq n - r + 1$ d'après **16·2** et (δ_ν).

Troisième cas. Tous les ensembles $V_{i_s}^{(k+1)}$ sont donnés par (8) et $2 \leqq r \leqq k$. Il existe donc une combinaison $i_1, i_2, \ldots, i_r$ d'indices $1, 2, \ldots, k\, m$ telle que

$$Q = \overline{\prod_{s=1}^{r} V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W_\mu}} \subset \prod_{s=1}^{r} \overline{V}_{i_s}^{(k)}, \tag{*}$$

donc $\dim Q \leqq n - r + 1$ d'après **16·2** et (e_k).

Quatrième cas. Tous les ensembles $V_{i_s}^{(k+1)}$ sont donnés par (8) et $r = k + 1$. On a de nouveau la formule (*). Comme $r = k + 1$, on a $Q \subset S_k$ en vertu de la définition de S_k, d'où $Q \subset \sum_{\nu=1}^{m} \overline{W_\mu}$ d'après (2) et (β_ν). Or $(V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W_\mu}) . W_\nu = 0$, d'où $\overline{V_{i_s}^{(k)} - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{W_\mu}} . W_\nu = 0$ d'après **7·2** de manière que $Q . W_\nu = 0$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$. Donc $Q \subset \sum_{\nu=1}^{m} (\overline{W_\nu} - W_\nu)$, $Q \subset S_k$ et par suite $Q \subset \sum_{\nu=1}^{m} S_k . H_R(W_\nu)$, donc d'après **16·2** et (δ_ν) $\dim Q \leqq n - k = n - r + 1$.

27. Soit R un espace parfaitement normal. Soit S un sous-ensemble fermé de R; soit $\dim S \leqq n$. Soient $U_1, \ldots, U_m$ des sous-ensembles ouverts de R; soit $\sum_{\nu=1}^{m} U_\nu \supset S$. Il existe des ensembles V_i $(1 \leqq i \leqq (n+1)\, m)$ ouverts dans R tels que:

1⁰ $\overline{V}_i \subset U_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$, $(n+1)(\nu - 1) + 1 \leqq i \leqq (n+1)\,\nu$;

2⁰ $\sum_{i=1}^{(n+1)m} V_i \supset S$;

3⁰ $V_i V_j = 0$ pour $1 \leqq i < j \leqq (n+1)\, m$;

4⁰ $\dim S . H_R(V_i) \leqq n - 1$ pour $1 \leqq i \leqq (n+1)\, m$;

5⁰ pour chaque combinaison $i_1, i_2, \ldots, i_r$ $(2 \leqq r \leqq n + 2)$ d'indices $1, 2, \ldots, (n+1)\, m$ on a $\prod_{s=1}^{r} \overline{V}_{i_s} \subset S$, $\dim \prod_{s=1}^{r} \overline{V}_{i_s} \leqq n - r + 1$.

Démonstration. D'après **26** et **14·2** il existe des ensembles T_i ouverts dans S tels que:

6⁰ $\overline{T}_i \subset U_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq m$, $(n+1)(\nu - 1) + 1 \leqq i \leqq (n+1)\nu$;

7⁰ $\sum_{i=1}^{(n+1)m} \overline{T}_i = S$;

8⁰ $T_i . T_j = 0$ pour $1 \leqq i < j \leqq (n+1)\, m$;

9⁰ $\dim H_S(T_i) \leqq n - 1$ pour $1 \leqq i \leqq (n+1)\, m$;

10⁰ pour chaque combinaison $i_1, i_2, \ldots, i_r$ $(2 \leqq r \leqq n + 2)$ d'indices $1, 2, \ldots, (n+1)\, m$ on a $\dim \prod_{s=1}^{r} \overline{T}_{i_s} \leqq n - r + 1$.

D'après 6^0 et **12·1** il existe des ensembles Z_i ouverts dans R tels que

$$\overline{T}_i \subset Z_i \subset \overline{Z}_i \subset U_\nu \quad \text{pour} \quad 1 \leqq \nu \leqq m, \ (n+1)(\nu - 1) + 1 \leqq i \leqq (n+1)\,\nu.$$

Evidemment il suffit de construire des ensembles V_i $(1 \leqq i \leqq (n+1)\,m)$ ouverts dans R de manière que

$$T_i \subset V_i \subset Z_i,\ T_i = S\,V_i, \ \text{pour} \ 1 \leqq i \leqq (n+1)\,m; \qquad (a_i)$$
$$V_i \,.\, V_j = 0 \ \text{pour} \ 1 \leqq j < i \leqq (n+1)\,m; \qquad (b_i)$$
$$S \,.\, H_R(V_i) = H_S(T_i) \ \text{pour} \ 1 \leqq i \leqq (n+1)\,m; \qquad (c_i)$$
$$\overline{V}_i \,.\, \overline{V}_j = \overline{T}_i \,.\, \overline{T}_j \ \text{pour} \ 1 \leqq j < i \leqq (n+1)\,m. \qquad (d_i)$$

D'après **13·3** et **14·1** il existe un ensemble V_1 ouvert dans R vérifiant (a_1) et (c_1), tandis que (b_1) et (d_1) n'exigent rien. Supposons donc que pour une certaine valeur de i $(2 \leqq i \leqq (n+1)\,m)$ on ait déjà construit des ensembles V_j $(1 \leqq j < i)$ ouverts dans R tels que les conditions (a_j)—(d_j) soient satisfaites pour $1 \leqq j < i$. On doit construire un ensemble V_i ouvert dans R vérifiant (a_i)—(d_i). Pour $1 \leqq j < i$ on a

$$(\overline{V}_j - S) \,.\, \overline{T}_i \subset (R - S)\,S = 0,$$
$$\overline{\overline{V}_j - S} \,.\, T_i \subset \overline{V}_j \,.\, S \,.\, T_i = [S \,.\, V_j + S \,.\, H_R(V_j)]\,T_i =$$
$$= [T_j + H_S(T_j)]\,T_i = \overline{T}_j \,.\, T_i$$

et $\overline{T}_j \,.\, T_i = 0$ d'après 8^0 et **7·2**. Par suite, en vertu de **6·1** et **7·2**, les ensembles $\sum\limits_{j=1}^{i-1} \overline{V}_j - S$ et T_i sont séparés; il existe donc (v. **14·1**) des ensembles P_i, Q_i ouverts dans R tels que

$$P_i \supset \sum_{j=1}^{i-1} V_j - S, \quad Q_i \supset T_i, \quad P_i\,Q_i = 0.$$

D'après **7·2** $P_i\,\overline{Q}_i = 0$. D'après **13·3** et **14·1** il existe un ensemble V_i ouvert dans R tel que

$$T_i \subset V_i \subset Z_i\,Q_i,\ T_i = S\,V_i,\ H_S(T_i) = S \,.\, H_R(V_i).$$

Les propriétés (a_i) et (c_i) sont évidentes. Puisque $V_i \subset Q_i$, $V_j \subset S + P_i$ $(1 \leqq j < i)$, on a $\overline{V}_i\,\overline{V}_j \subset P_i\,\overline{Q}_i + S = S$. Donc $V_i\,V_j = S$, d'où $V_i\,V_j = S\,V_i \,.\, S\,V_j = T_i\,T_j = 0$, d'où (b_i). De plus $S\,\overline{V}_i = S \,.\, [V_i + H_R(V_i)] = T_i + H_S(T_i) = \overline{T}_i$; comme $\overline{V}_i\,\overline{V}_j \subset S$, on a $\overline{V}_i\,\overline{V}_j = S\,\overline{V}_i \,.\, S\,\overline{V}_j = \overline{T}_i\,\overline{T}_j$, d'où (d_i).