Eduard Čech

Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque

Fund. Math. 19 (1932), 149-183

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501004

Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque.

Par

Eduard Čech (Brno).

Dans les dernières années, plusieurs auteurs [1]) ont développé une théorie de l'homologie dans un espace *métrique et compact* R. Voici la manière de procéder de M. Alexandroff: D'après le théorème de Borel, on peut recouvrir R par un système *fini*

$$(1) \qquad U_1,\ U_2, \ldots,\ U_k$$

d'ensembles ouverts [2]) dont la norme (= maximum des diamètres des ensembles (1)) est inférieure à un nombre positif donné. Or on déduit de (1) un complexe (abstrait) N dont les sommets $a_1, a_2, \ldots, a_k$ correspondent aux ensembles (1), les sommets $a_{\nu_0}, a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_n}$ déterminant un n-simplexe de N si et seulement si les ensembles correspondants $U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_n}$ ont un point commun. Ceci étant, on considère une suite de recouvrements tels que (1), dont les normes

[1]) P. Alexandroff, Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension, Annals of Math., (2) 30, 1929; p. 101—187, où l'on trouve cités les travaux antérieurs du même auteur.

S. Lefschetz, Topology, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 12, 1930, Chap. 7, § 4.

L. Vietoris, Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen, Math. Annalen, 97, 1927, p. 454—472.

Pour le cas particulier où l'espace R est une partie du plan euclidien, v. déjà L. E. J. Brouwer, Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve, Math. Annalen, 72, 1912, p. 422—425.

[2]) M. Alexandroff considère des ensembles *fermés*; mais cette différence n'est pas essentielle (v. ce Mémoire, V, 8).

tendent vers zéro, chaque recouvrement de la suite s'obtenant du précédent par une subdivision, et l'on forme la suite

$$(2) \qquad N_1,\ N_2,\ N_3, \ldots$$

des complexes correspondants (Projektionsfolge). Chaque cycle $C^n_{\nu+1}$ situé dans $N_{\nu+1}$ détermine un cycle $C^n_\nu = \pi\, C^n_{\nu+1}$ dans N_ν, la *projection* de $C^n_{\nu+1}$. Une suite

$$C^n_1,\ C^n_2,\ C^n_3, \ldots,$$

de cycles contenus dans les complexes (2) constitue un cycle dans R (Projektionszyklus, Vollzyklus) si l'on a pour chaque ν l'homologie $C^n_\nu \sim \pi\, C^n_{\nu+1}$ dans N_ν.

Or si l'espace R est quelconque, on peut aussi considérer des recouvrements finis (1) formés d'ensembles ouverts (= réseaux ouverts). Ici encore, chaque réseau peut être considéré comme un complexe. L'unique différence consiste en ce qu'il n'existe plus une suite telle que (2) constituée par des réseaux „arbitrairement petits"; au lieu de la suite (2), on a ici à considérer la famille de *tous* les réseaux ouverts [1]). Le but principal de ce Mémoire est de montrer comment on arrive ainsi à une théorie de l'homologie dans un espace topologique quelconque; le traitement ne suppose d'ailleurs aucune connaissance des travaux antérieurs.

L'ouvrage est divisé en cinq Chapitres. Au Chap. I, je rappelle sans démonstration quelques propriétés connues des modules. Au Chap. II, j'expose une théorie générale d'une manière très abstraite. Je ne suppose ici *rien* sur la nature de l'espace R; au contraire je suppose donnée une *famille fondamentale de réseaux*, c'est-à-dire une famille de recouvrements finis de R soumis à la seule restriction qu'à deux recouvrements quelconques de la famille on en puisse déterminer un troisième qui soit un „affinement" simultané des deux recouvrements donnés. Chaque famille fondamentale de réseaux donne lieu à une théorie de l'homologie des cycles. Je considère d'ailleurs, d'après M. Lefschetz [2]), des cycles mod a, a étant un

[1]) On sait que M. Hurewicz a montré l'importance de la famille de tous les réseaux ouverts dans la théorie de la dimension des espaces métriques et séparables (v. W. Hurewicz, Proc. Acad. Amsterdam 30, 1927, p. 425 ou bien K. Menger, Dimensionstheorie, Chap. V).

[2]) Topology, Chap. I, n° 14.

sous-ensemble donné quelconque de R. Au Chap. III, je considère le cas important où R est un espace topologique, la famille fondamentale étant celle des réseaux ouverts. J'y expose d'abord les relations entre les cycles dans R et les cycles dans un sous-ensemble fermé de R. Ensuite, je montre que la théorie des cycles de dimension zéro coïncide avec la théorie de la connexité au sens de Lennes-Hausdorff. A la fin, je considère des réseaux *réguliers* [1]) par rapport à un sous-ensemble de R.

A ce but, je démontre (III 20) deux lemmes relatifs à un espace topologique complètement normal, qui ont peut-être quelque intérêt intrinsèque. Au Chap. IV, je traite une application de la théorie générale; notamment, je généralise un théorème de MM. Mayer et Vietoris [2]) relatif aux homologies dans la somme $R_1 + R_2$ de deux complexes, au cas où R_1 et R_2 sont deux espaces topologiques normaux fermés dans leur somme. La méthode dont je fais usage ici est celle de MM. Mayer et Vietoris, mais dans le cas bien plus général que j'envisage il y a des difficultés que l'on vainc d'une part au moyen de la notion d'un réseau régulier, d'autre part par un théorème général (II 21) relatif à l'existence des cycles. Le théorème que je démontre contient comme cas particulier le „théorème de Phragmén-Brouwer généralisé" de M. Alexandroff [3]). Au Chap. V je remarque d'abord que la théorie des cycles à coefficients rationnels (suivant M. Lefschetz [4]) exposée aux Chap. précédents peut se transporter au cas (considéré par M. Alexander [5]) des cycles dont les coefficients sont des entiers réduits mod. m. Ensuite, je montre que le cas où la famille fondamentale est celle des réseaux *fermés* est essentiellement identique au cas (que je considère) des réseaux ouverts. A la fin, je remarque que l'on peut obtenir une nouvelle théorie de l'homologie en choisissant une famille additive fixe de sous-ensembles de R; en particulier, on peut obtenir

[1]) Cf. Lefschetz, Topology, p. 91 (normal neighborhood N^L).

[2]) W. Mayer, Über abstrakte Topologie, Monatshefte f. Math. u. Phys. 36, 1929, p. 1—42.

L. Vietoris, Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe, ibidem, 37, 1930, p. 159—162.

[3]) Untersuchungen etc., p. 178.

[4]) Topology, Chap. VII.

[5]) J. W. Alexander, Combinatorial analysis situs, I. Transactions Amer. Math. Soc., 28, 1926, p. 301—329.

une théorie qui est à celle exposée au Chap. III dans le même rapport que la notion du *continu* à celle d'un ensemble *connexe.*

I. Modules.

1. $\mathfrak{R}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.

Un ensemble quelconque *non vide* M s'appelle un *module* si l'on a défini deux opérations: 1° la *somme* $a+b \in M$ de deux éléments $a, b \in M$; 2° le *produit* $ra \in M$ d'un élément $a \in M$ par un nombre $r \in \mathfrak{R}$; on suppose d'ailleurs que

1° par rapport à l'addition, M constitue un groupe commutatif dont l'élément identique soit désigné par $0'$;

2° pour $a, b \in M$; $r, s \in \mathfrak{R}$ on a

$$r(a+b) = ra + rb, \quad (r+s)a = ra + sa,$$

$$r(sa) = (rs)a, \quad 1a = a.$$

On en déduit en particulier que $0a = 0'$, $r0' = 0'$, tandis que pour $r \neq 0$, $a \neq 0'$ on a $ra \neq 0'$. Dorénavant, nous écrirons plus simplement 0 au lieu de $0'$.

2. On dit que l'élément $a \in M$ *dépend* de $A \subset M$ si $a = 0$ ou $a = \sum_1^n r_\nu a_\nu$ pour un choix convenable de $n = 1, 2, 3, \ldots$, $r_\nu \in \mathfrak{R}$, $a_\nu \in A$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$.

On dit qu'un sous-ensemble $A \subset M$ est *indépendant* si l'on ne peut trouver des éléments $a_1, \ldots, a_n \in M$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ différents l'un de l'autre et des nombres $r_1, \ldots, r_n \in \mathfrak{R}$ dont un au moins $\neq 0$ de manière que l'on ait $\sum_1^n r_\nu a_\nu = 0$. Cette condition est vérifiée si $A = 0$ est l'ensemble vide.

Un ensemble $A \subset M$ constitue une *base* du module M si 1° A est indépendant; 2° chaque élément de M dépend de A.

3. Chaque module possède au moins une base; le nombre h des termes d'une base (c'est un nombre naturel ou bien un aleph) est le même pour toutes les bases; nous appellerons h le *rang* du module M. Un module M est dit *fini* si son rang est fini.

4. Un ensemble $M_1 \subset M$, $M_1 \neq 0$, constitue un module si et seulement si

1° $a, b \in M_1$ implique $a + b \in M_1$;
2° $a \in M_1$, $r \in \mathfrak{R}$ implique $r a \in M_1$.

On dit alors que M_1 est un *sousmodule* du module M.

5. Soit A_1 une base d'un sousmodule M_1 du module M. Alors il existe une base $A \supset A_1$ du module M.

6. Soient h, h_1 les rangs d'un module M et de son sousmodule M_1. Alors $h_1 \leqq h$. Donc si le module M est fini, aussi M_1 est fini; dans ce cas, l'égalité $h_1 = h$ entraîne $M_1 = M$.

7. Une suite *décroissante* de sousmodules d'un module *fini* M est toujours *finie* (si le rang de M est h, la suite possède au plus $h + 1$ termes).

8. Soit $\mathfrak{M}$ une classe (non vide) de sousmodules d'un module *fini* M et soit P le produit ($=$ partie commune) de tous les modules de la classe $\mathfrak{M}$. Il existe alors des éléments $M_1, M_2, \ldots, M_k$ (k fini) de la classe $\mathfrak{M}$ tels que $P = M_1, M_2, \ldots, M_k$. Si $P \neq 0$, c'est un sousmodule de M.

9. Soient M, M' deux modules. Soit f une fonction univoque définie dans le domaine M et telle que: 1° pour $a \in M$ on a $f(a) \in M'$; 2° pour $a' \in M'$ il existe un élément $a \in M$ tel que $a' = f(a)$; 3° pour $a, b \in M$ on a $f(a + b) = f(a) + f(b)$; 4° pour $a \in M$, $r \in \mathfrak{R}$ on a $f(r a) = r f(a)$. On dit alors que le module M' est une image *homomorphe* du module M. Si $a \neq b$ entraîne $f(a) \neq f(b)$, on dit que les modules M, M' sont *isomorphes*.

10. Soient h, h' les rangs des modules M, M'. Si M' est une image homomorphe de M, $h' \leqq h$ (en particulier, une image homomorphe d'un module fini est un module fini); si M et M' sont isomorphes, $h' = h$. Et réciproquement.

11. Soit M_1 un sousmodule d'un module M. On peut considérer comme *égaux* deux éléments $a, b \in M$ tels que $a - b \in M_1$. En faisant ainsi, on obtient de M un nouveau module que nous désignerons par $M - M_1$. Evidemment $M - M_1$ est une image homomorphe de M.

12. Soient M_1, M_2 deux sousmodules d'un module M jouissant de la propriété suivante: Pour chaque $a \in M$ il existe un et un seul couple a_1, a_2 tel que $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$, $a = a_1 + a_2$. On dit alors

que le module M est la *somme directe* des modules M_1, M_2 et l'on écrit $M = M_1 + M_2$.

13. Soit M_1 un sousmodule d'un module M. Il existe alors un sousmodule M_2 de M tel que $M = M_1 + M_2$. Le module M_2 est isomorphe à $M - M_1$.

14. Soit M un module; soit $L \subset M$. Nous dirons que L est un *système linéaire* s'il existe un élément $a_0 \in L$ et un sousmodule M_1 de M tel que pour $a \in M$ on a $a \in L$ si et seulement si $a - a_0 \in M_1$.

15. Soit A une classe (non vide) de systèmes linéaires contenus dans un module *fini* M et soit Q le produit de tous les systèmes constituant la classe A. Il existe alors des éléments $L_1, L_2, \ldots, L_k$ (k fini) de la classe A tels que $Q = L_1 L_2 \ldots L_k$. Si $Q \neq 0$, c'est un système linéaire.

II. Homologies par rapport à une famille fondamentale de réseaux.

1. Soit R un ensemble arbitraire donné. Soit Z une famille donnée satisfaisant aux deux axiomes suivants:

1° Chaque élément $\mathfrak{U}$ de Z est un ensemble *fini* de parties $U_1, U_2, \ldots, U_k$ de R telles que $\sum_1^k U_\nu = R$; $U_\nu \neq 0$;

2° $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2 \in Z$ étant donnés, il existe un élement $\mathfrak{V} \in Z$ tel que $V \in \mathfrak{V}$ entraîne $V \subset U_1 U_2$ pour un choix convenable de $U_1 \in \mathfrak{U}_1$, $U_2 \in \mathfrak{U}_2$.

Chaque élément $\mathfrak{U}$ de Z sera nommé un *réseau*; la famille Z sera appelée la *famille fondamentale de réseaux*. Les éléments U d'un réseau $\mathfrak{U}$ seront appelés les *sommets* du réseau $\mathfrak{U}$ et aussi les $(0, \mathfrak{U})$-*simplexes*. Nous désignerons habituellement un réseau par une des lettres $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$; les sommets de $\mathfrak{U}$ p. ex. seront désignés par la lettre U (éventuellement avec un indice).

2. $\mathfrak{U}$ étant un réseau et n un nombre naturel, un $(n, \mathfrak{U})$-*simplexe* sera par définition un symbole de la forme

$$(U_0, U_1, \ldots, U_\nu),$$

où les U_ν (qui seront appelés les *sommets du simplexe*) sont des sommets de $\mathfrak{U}$ tous *distincts l'un de l'autre* et tels que l'ensemble

$$(1) \qquad \prod_{0}^{n} U_\nu$$

n'est pas vide. Si $(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n)$ est une permutation des indices $(0, 1, \ldots, n)$, nous poserons

$$(2) \qquad (U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_n}) = \pm (U_0, U_1, \ldots, U_n)$$

avec le signe supérieur (inférieur) dans le cas d'une permutation paire (impaire). L'ensemble (1) sera appelé le *noyau* du simplexe. Nous désignerons un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe par $S^n(\mathfrak{U})$ ou par S^n (éventuellement avec un indice inférieur). Le noyau du simplexe S^n sera désigné par $J(S^n)$.

3. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau; $n = 0, 1, 2, \ldots$ Soient $S_1^n, S_2^n, \ldots, S_{\alpha_n}^n$ tous les $(n, \mathfrak{U})$-simplexes (de deux simplexes tels que 2 (2) nous n'écrivons qu'un seul). Une $(n, \mathfrak{U})$-*chaîne* sera par définition un symbole de la forme

$$\sum_{1}^{\alpha_n} r_\nu S_\nu^n$$

où $r_\nu \in \mathfrak{R}$. Nous désignerons une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne par $K^n(\mathfrak{U})$ ou par K^n (éventuellement avec un indice inférieur). Après des conventions évidentes, l'ensemble de toutes les $(n, \mathfrak{U})$-chaînes constitue un *module fini*. Pour presque toutes les valeurs de n, on a $\alpha_n = 0$; alors il n'existe qu'une seule $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $K^n = 0$.

4. La *frontière* d'une $(0, \mathfrak{U})$-chaîne est zéro; notation $F(K^0) = 0$ ou $K^0 \to 0$. Soit maintenant $n > 0$. La *frontière* d'un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe $S^n = (U_0, U_1, \ldots, U_n)$ est la $(n-1, \mathfrak{U})$-chaîne

$$F(S^n) = \sum_{0}^{n-1} (-1)^\nu S_\nu^{n-1}, \quad S_\nu^{n-1}$$

étant le $(n-1, \mathfrak{U})$-simplexe dont le symbole s'obtient de $(U_0, U_1, \ldots, U_n)$ en y omettant le sommet U_ν. La *frontière* d'une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne

$$K^n = \sum_{1}^{\alpha_n} r_\nu S_\nu^n$$

est la $(n-1, \mathfrak{U})$-chaîne

$$F(K^n) = \sum_{1}^{\alpha_n}{}' r_\nu F(S_\nu^n).$$

Au lieu de $K^{n-1} = F(K^n)$ nous écrirons aussi $K^n \rightarrow K^{n-1}$. En vertu de l'opération F, un certain sousmodule du module des $(n-1, \mathfrak{U})$-chaînes est une image *homomorphe* du module des toutes les $(n, \mathfrak{U})$-chaînes.

5. Dorénavant, la lettre A désigne un sousensemble donné de R. Nous dirons que la $(n, \mathfrak{U})$-chaîne

$$K^n = \sum_{1}^{\alpha_n} r_\nu S_\nu^n$$

est *contenue dans* A (notation: $K^n \subset A$) si pour chaque valeur de ν on a un des deux cas suivants: 1° $r_\nu = 0$; 2° $A \cdot J(S_\nu^n) \neq 0$. Cette condition est toujours vérifiée dans le cas $A = R$. Les $(n, \mathfrak{U})$-chaînes contenues dans A constituent un *module*. Evidemment $K^n \subset A$ entraîne $F(K^n) \subset A$ [1])

6. Dorénavant, la lettre α désigne un sous-ensemble donné de A. La notation $K_1^n(\mathfrak{U}) = K_2^n(\mathfrak{U})$ mod α signifie que $K_1^n(\mathfrak{U}) - K_2^n(\mathfrak{U}) \subset \alpha$; dans ce cas, si $K_1^n(\mathfrak{U}) \subset A$, on a aussi $K_2^n(\mathfrak{U}) \subset A$. Si l'on considère comme égales deux $(n, \mathfrak{U})$-chaînes qui sont égales mod α, l'ensemble de toutes les $(n, \mathfrak{U})$-chaînes continue à constituer un module (v. I, 11). Nous écrirons

$$K^n \rightarrow K^{n-1} \bmod \alpha \tag{1}$$

pour indiquer que $F(K^n) = K^{n-1}$ mod α. Dans la relation (1) il est permis de remplacer chaque chaîne par une autre égale à elle mod α.

7. Une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $K^n \subset A$ sera appelée un $(n, \mathfrak{U})$-*cycle mod* α *dans* A dans le cas où $K^n \rightarrow 0$ mod α. [Dans le cas $A = R$ on parlera simplement d'un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α]. Les $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod α dans A constituent un module. On désignera les $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod α par $C^n(\mathfrak{U})$ ou par C^n, éventuellement avec un indice inférieur. Dans le cas $\alpha = 0$ on parlera de $(n, \mathfrak{U})$-cycles *absolus*. Evidemment, un

[1]) Il est important de remarquer que les relations $K^n \subset A_1$ $K^n \subset A_2$ n'entraînent pas $K^n \subset A_1 A_2$.

$(n, \mathfrak{U})$-cycle absolu est aussi un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α pour chaque choix de α.

8. On démontre sans peine [1]) que $F[S^{n+1}(\mathfrak{U})]$ est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle absolu. Donc une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne C^n est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α dans A s'il existe une $(n+1, \mathfrak{U})$-chaîne $K^{n+1} \subset A$ telle que $K^{n+1} \to C^n$ mod α (il en résulte $C^n \subset A$). Chaque $(n, \mathfrak{U})$-cycle C^n mod α dans A jouissant de cette propriété sera nommée *homologue à zéro* mod α dans A, ce qu'on écrit

$$C^n \sim 0 \text{ mod } \alpha \text{ dans } A.$$

[L'attribut „dans A“ sera omis si $A = R$]. La notation

$$C_1^n \sim C_2^n \text{ mod } \alpha \text{ dans } A \tag{1}$$

signifie que C_1^n et C_2^n sont des $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod α dans A tels que $C_1^n - C_2^n \sim 0$ mod α dans A. Les $(n, \mathfrak{U})$-cycles homologues à zéro mod α dans A constituent évidemment un sousmodule du module de tous les $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod α dans A. En considérant comme égaux deux cycles C_1^n, C_2^n liés par (1), ce que nous ferons dans tout ce qui suit, les $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod α dans A continuent donc (v. I 11) à constituer un module fini. La relation (1) vaut en particulier si $C_1^n = C_2^n$ mod α.

9. Un réseau $\mathfrak{V}$ est un *affinement* d'un réseau $\mathfrak{U}$ si chaque sommet V de $\mathfrak{V}$ fait partie d'un sommet U de $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_k$ étant des réseaux donnés (en nombre fini), d'après n° 1, axiome 2°, il existe un affinement simultané $\mathfrak{V}$ de tous les réseaux $\mathfrak{U}_\nu$. Evidemment un affinement d'un affinement d'un réseau $\mathfrak{U}$ est un affinement du réseau $\mathfrak{U}$.

10. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement d'un réseau $\mathfrak{U}$. A chaque sommet V de $\mathfrak{V}$ on peut alors faire correspondre un sommet $\pi V = U \supset V$ bien déterminé du réseau $\mathfrak{U}$. L'opération π sera appelée une *projection* du réseau $\mathfrak{V}$ dans le réseau $\mathfrak{U}$; nous écrirons $\pi = Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Les réseaux $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ étant donnés, il peut exister *plusieurs* projections de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{U}$.

11. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement d'un réseau $\mathfrak{U}$; $\pi = Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Soit

$$S^n = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$$

un $(n, \mathfrak{V})$-simplexe. Si les sommets

$$\pi V_0, \pi V_1, \ldots, \pi V_n$$

[1]) V. p. ex. Lefschetz, Topology, p. 19.

du réseau $\mathfrak{U}$ ne sont pas tous distincts l'un de l'autre, on posera $\pi S^n = 0$; dans le cas contraire

$$\pi S^n = (\pi V_0, \pi V_1, \ldots, \pi V_n)$$

est un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe. Si

$$K^n = \sum_{1}^{\alpha_n} r_\nu S_\nu^n.$$

est une $(n, \mathfrak{B})$-chaîne, sa projection πK^n sera par définition la $(n, \mathfrak{U})$-chaîne

$$\pi K^n = \sum_{1}^{\alpha_n} r_\nu \pi S_\nu^n.$$

En vertu de l'opération π, un certain sousmodule du module de toutes les $(n, \mathfrak{U})$-chaînes est une image *homomorphe* du module de toutes les $(n, \mathfrak{B})$-chaînes. Pour chaque $(n, \mathfrak{B})$-simplexe S^n on a la relation

$$\pi F(S^n) = F(\pi S^n)$$

qui est évidente si $\pi S^n \neq 0$ mais qui vaut aussi [1]) dans le cas $\pi S^n = 0$. Donc $\pi F(K^n) = F(\pi K^n)$ pour chaque $(n, \mathfrak{B})$-chaîne K^n. Lorsque $K^n \subset A$ où $K^n \subset \alpha$, évidemment aussi $\pi K^n \subset A$ ou $\pi K^n \subset \alpha$. De toutes ces remarques il résulte: si C^n est un $(n, \mathfrak{B})$-cycle mod α dans A, alors πC^n est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α dans A; si en outre $C^n \sim 0$ mod α dans A, aussi $\pi C^n \sim 0$ mod α dans A.

12. Soit $\mathfrak{B}$ un affinement d'un réseau $\mathfrak{A}$; soit $\pi_1 = Pr.\ (\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, $\pi_2 = Pr.\ (\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Rangeons tous les sommets de $\mathfrak{B}$ dans une suite finie bien déterminée

$$V_1, V_2, \ldots, V_k$$

et posons $\pi_1 V_\nu = U'_\nu$, $\pi_2 V_\nu = U''_\nu$. Maintenant soit

$$S^n = (V_{\nu_0}, V_{\nu_1}, \ldots, V_{\nu_n})$$

un $(n, \mathfrak{B})$ simplexe; on peut supposer que $\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_n$. Posons pour un moment

$$P(S^n) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l-1} (U''_{\nu_0} U''_{\nu_1} \ldots U''_{\nu_{l-1}} U''_{\nu_l} U'_{\nu_l} U'_{\nu_{l+1}} \ldots U'_{\nu_{n-1}} U'_{\nu_n})$$

[1]) V. p. ex. Lefschetz, op. c., Chap. II, n° 2.

en convenant qu'à droite chaque symbole dont les sommets ne sont pas tous distincts signifie zéro. Donc $P(S^n)$ est une $(n+1, \mathfrak{U})$-chaîne. Si $K^n = \sum_{1}^{\alpha_n} r_\nu S_\nu^n$ est une $(n, \mathfrak{V})$-chaîne, posons $P(K^n) = \sum_{1}^{\alpha_n} r_\nu P(S_\nu^n)$. On démontre sans peine [1] que

$$P(S^n) \quad \pi_2 S^n - \pi_1 S^n - P[F(S^n)]$$

d'où pour chaque $(n, \mathfrak{V})$-chaîne K^n

$$P(K^n) \to \pi_2 K^n - \pi_1 K^n - P[F(K^n)]. \tag{1}$$

En particulier, considérons une $(n, \mathfrak{V})$-cycle C^n mod α dans A; alors $C^n \subset A$, $F(C^n) \subset \alpha$, d'où $P(C^n) \subset A$, $P[F(C^n)] \subset \alpha$, de manière que la relation (1) donne

$$\pi_2 C^n \sim \pi_1 C^n \text{ mod } \alpha \text{ dans } A.$$

Or nous avons convenu de considérer comme égaux deux $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod α dans A homologues mod α dans A; donc *nous pouvons toujours choisir arbitrairement la projection* $Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$.

13. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement d'un réseau $\mathfrak{U}$ et soit $\mathfrak{W}$ un affinement du réseau $\mathfrak{V}$; soit $\pi = Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, $\pi' = Pr.(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$. Supposons qu'un $(n, \mathfrak{U})$-cycle $C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A jouisse de la propriété que $\pi' C^n(\mathfrak{W}) \sim C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A pour un choix convenable du $(n, \mathfrak{W})$-cycle $C^n(\mathfrak{W})$ mod α dans A; alors $\pi C^n(\mathfrak{V}) \sim C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A pour un choix convenable du $(n, \mathfrak{V})$-cycle $C^n(\mathfrak{V})$ mod α dans A.

En effet, soit $\pi'' = Pr.(\mathfrak{W}, \mathfrak{V})$; d'après 12 on peut supposer que $\pi' = \pi\pi''$ [2]; alors il suffit de poser $C^n(\mathfrak{V}) = \pi'' C(\mathfrak{W})$.

14. Un $(n, \mathfrak{U})$-cycle $C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A s'appellera *essentiel* si, pour chaque affinement $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$ il existe un $(n, \mathfrak{V})$-cycle $C^n(\mathfrak{V})$ mod α dans A tel que $\pi C^n(\mathfrak{V}) \sim C^n(\mathfrak{U})$ où $\pi = Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Si l'on considère comme égaux deux $(n, \mathfrak{U})$-cycles homologues mod α dans A, les $(n, \mathfrak{U})$-cycles essentiels mod α dans A constituent un module fini; cet important module sera désigné par $M_n(A, \mathfrak{U}; \alpha)$. Le symbole A s'omettra dans le cas $A = R$; le symbole α s'omettra dans le cas $\alpha = 0$; donc p. e. $M_n(\mathfrak{U}) = M_n(R, \mathfrak{U}; 0)$.

[1] Cf. Lefschetz, op. c., Chap. II, n° 8.

[2] L'opération $\pi\pi''$ s'obtient en effectuant d'abord l'opération π'' et ensuite π.

15. Un affinement $\mathfrak{B}$ d'un réseau $\mathfrak{U}$ est dit *normal*, lorsque pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, et pour chaque $(n, \mathfrak{B})$-cycle $C^n(\mathfrak{B})$ mod α dans A le $(n, \mathfrak{U})$-cycle $\pi C^n(\mathfrak{B})$ mod α dans $A\,[\pi = Pr.(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})]$ est essentiel. La notion de normalité dépend donc de A et α. D'après 13, chaque affinement d'un affinement normal du réseau $\mathfrak{U}$ est un affinement normal de $\mathfrak{U}$.

16. $\mathfrak{U}$ étant un réseau arbitrairement donné, il existe un affinement normal de $\mathfrak{U}$ (pour un choix donné de A, α).

Démonstration. La condition de normalité est banale pour toutes les valeurs suffisamment grandes de n (pour toutes les valeurs de n pour lesquelles les $(n, \mathfrak{U})$-simplexes n'existent pas). Il suffit donc (cf. la remarque faite à la fin du n° 15) de prouver l'existence d'un affinement tel que la condition de normalité soit satisfaite pour une valeur *donnée* de n. Cela étant, pour chaque affinement $\mathfrak{B}$ du réseau $\mathfrak{U}$ soit $\Gamma(\mathfrak{B})$ l'ensemble de tous les $(n, \mathfrak{U})$-cycles $C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A pour lesquels il existe un $(n, \mathfrak{B})$-cycle $C^n(\mathfrak{B})$ mod α dans A tel que $C^n(\mathfrak{U}) \sim \pi C^n(\mathfrak{B})$ mod α dans A, où $\pi = Pr.(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Pour chaque choix de $\mathfrak{B}$, $\Gamma(\mathfrak{B})$ est un sousmodule du module *fini* $M_n(A, \mathfrak{U}; \alpha)$; en outre, si $\mathfrak{W}$ est un affinement de $\mathfrak{B}$, d'après 13 on a $\Gamma(\mathfrak{W}) \subset \Gamma(\mathfrak{B})$.

Evidemment l'ensemble E de tous les $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod α dans A *essentiels* coïncide avec la partie commune de tous les $\Gamma(\mathfrak{B})$, où $\mathfrak{B}$ parcourt tous les affinements de $\mathfrak{U}$. D'après I 8, il existe des affinements $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_k$ (k fini) de $\mathfrak{U}$ tel que $E = \prod_1^k \Gamma(\mathfrak{B}_\nu)$. Soit $\mathfrak{W}$ un affinement simultané de tous les réseaux $\mathfrak{B}_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq k)$. Alors $\Gamma(\mathfrak{W}) \subset \Gamma(\mathfrak{B}_\nu)$, d'où $\Gamma(\mathfrak{W}) \subset E$ (et naturellement $\Gamma(\mathfrak{W}) = E$). L'affinement $\mathfrak{W}$ de $\mathfrak{U}$ jouit donc de la propriété voulue.

17. D'après la remarque à la fin du n° 15, on a plus généralement: $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_k$ étant des réseaux donnés en nombre fini, il existe un affinement normal simultané de tous les $\mathfrak{U}_\nu$.

18. Soit $\mathfrak{B}$ un affinement d'un réseau $\mathfrak{U}$; $\pi = Pr.(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Soit $C^n(\mathfrak{U})$ un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α dans A essentiel. Il existe un $(n, \mathfrak{B})$-cycle $C^n(\mathfrak{B})$ mod α dans A *essentiel* tel que $\pi C^n(\mathfrak{B}) \sim C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A.

Démonstration. Soit (16) $\mathfrak{W}$ un affinement *normal* du réseau $\mathfrak{B}$; $\pi' = Pr.(\mathfrak{W}, \mathfrak{B})$, donc $\pi\pi' = Pr.(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$. Le cycle $C^n(\mathfrak{U})$

étant essentiel, il existe un $(n, \mathfrak{W})$-cycle $C^n(\mathfrak{W})$ mod α dans A tel que $C^n(\mathfrak{U}) \sim \pi\pi' C^n(\mathfrak{W})$ mod α dans A. En posant $C^n(\mathfrak{V}) = \pi' C^n(\mathfrak{W})$; on a $C^n(\mathfrak{U}) \sim \pi C^n(\mathfrak{V})$ mod α dans A; en outre, le cycle $C^n(\mathfrak{V})$ est essentiel, car $\mathfrak{W}$ est un affinement normal de $\mathfrak{V}$.

19. Le théorème qui vient d'être prouvé peut évidemment s'énoncer ainsi: $\mathfrak{V}$ étant un affinement de $\mathfrak{U}$, le module $M_n(A, \mathfrak{U}; \alpha)$ est en vertu de l'opération $\pi = Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, une image homomorphe du module $M_n(A, \mathfrak{V}; \alpha)$.

20. Soit donné, pour *chaque* réseau $\mathfrak{U}$, un $(n, \mathfrak{U})$-cycle $C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A et supposons vérifiée la propriété suivante: Si $\mathfrak{V}$ est un affinement de $\mathfrak{U}$, $\pi = Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, alors $C^n(\mathfrak{U}) \sim \pi C^n(\mathfrak{V})$ mod α dans A. L'ensemble $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ de tous les cycles $C^n(\mathfrak{U})$ sera appelée un *(n, R)-cycle mod α dans A*. L'attribut „dans A" s'omettra dans le cas $A = R$; dans le cas $\alpha = 0$, nous parlerons de (n, R)-cycles *absolus*. En vertu des conventions évidentes, l'ensemble de tous les (n, R)-cycles mod α dans A constitue un *module*. L'*homologie* $\{C^n(\mathfrak{U})\} \sim 0$ mod α dans A signifie que $C^n(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod α dans A pour chaque réseau $\mathfrak{U}$. L'homologie $\{C_1^n(\mathfrak{U})\} \sim \{C_2^n(\mathfrak{U})\}$ signifie que $\{C_1^n(\mathfrak{U})\} - \{C_2^n(\mathfrak{U})\} = \{C_1^n(\mathfrak{U}) - C_2^n(\mathfrak{U})\} \sim 0$ mod α dans A. Si l'on considère comme égaux deux cycles homologues mod α dans A, l'ensemble de tous les (n, R)-cycles mod α dans A continue (v. I 11) à constituer un module. Cet important module sera désigné par $M_n(A, R; \alpha)$ et son rang (qui est un nombre naturel ou un aleph) sera désigné par $P_n(A, R; \alpha)$. La lettre A s'omettra dans le cas $A = R$; la lettre α s'omettra dans le cas $\alpha = 0$. Le nombre $P_n(R; \alpha)$ est le *$n^{\text{ième}}$ nombre de Betti* de R mod α; le nombre $P_n(R)$ est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Betti absolu de R.

21. Soit donné, pour *chaque* réseau $\mathfrak{U}$, un système linéaire [1]) (v. I 14) $L^n(\mathfrak{U})$ de $(n, \mathfrak{U})$-cycles mod α dans A et supposons vérifiée la propriété suivante: Si $\mathfrak{V}$ est un affinement de $\mathfrak{U}$, $\pi = Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, on a $\pi L^n(\mathfrak{V}) \subset L^n(\mathfrak{U})$. Alors il existe un (n, R)-cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ mod α dans A tel que $C^n(\mathfrak{U}) \in L^n(\mathfrak{U})$ pous chaque réseau $\mathfrak{U}$.

La démonstration de ce théorème fait l'objet des n^{os} 22—27.

[1]) Nous considérons comme égaux deux cycles homologues mod α dans A de manière que les rélations $C_1^n(\mathfrak{U}) \in L^n(\mathfrak{U})$, $C^n(\mathfrak{U}) \sim C_1^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A entraînent que $C_2^n(\mathfrak{U}) \in L^n(\mathfrak{U})$.

22. Pour chaque réseau $\mathfrak{U}$, soit $L_1^n(\mathfrak{U})$ la partie commune de tous les ensembles $\pi L^n(\mathfrak{B})$ [1], où $\mathfrak{B}$ parcourt tous les affinements de $\mathfrak{U}$, $\pi = Pr.(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Evidemment, chaque $\pi L^n(\mathfrak{B})$ est un système linéaire de $(n, \dot{\mathfrak{U}})$-cycles mod α dans A et, si $\mathfrak{W}$ est un affinement de $\mathfrak{B}$, $\pi' = Pr.(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$, on a $\pi' L^n(\mathfrak{W}) \subset \pi L^n(\mathfrak{B})$ (cf. 13) D'après I 15, il existe des affinements $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_k$ (k fini) de $\mathfrak{U}$ tels que $L_1^n(\mathfrak{U}) = \prod\limits_1^k \pi_\nu L^n(\mathfrak{B}_\nu)$, où $\pi_\nu = Pr.(\mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{U})$. Soit $\mathfrak{B}$ un affinement simultané des réseaux $\mathfrak{B}_\nu$, $\pi = Pr.(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$ Alors $\pi L^n(\mathfrak{B}) \subset \pi_\nu L^n(\mathfrak{B}_\nu)$, donc $\pi L^n(\mathfrak{B}) \subset L_1^n(\mathfrak{U})$, d'où $\pi L^n(\mathfrak{B}) = L_1^n(\mathfrak{U})$ en vertu de la définition même de $L_1^n(\mathfrak{U})$.

23. Un affinement $\mathfrak{B}$ d'un réseau $\mathfrak{U}$ soit appelé *favorable* si $\pi L^n(\mathfrak{B}) = L_1^n(\mathfrak{U})$; nous venons de voir que chaque réseau $\mathfrak{U}$ possède un affinement favorable. Evidemment chaque affinement d'un affinement favorable d'un réseau $\mathfrak{U}$ est un affinement favorable de $\mathfrak{U}$. Donc si l'on a donné un ensemble *fini* de réseaux, il existe un affinement favorable simultané de tous les réseaux donnés.

24. Soit $\mathfrak{B}$ un affinement d'un réseau $\mathfrak{U}$; $\pi = Pr.(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Alors $\pi L_1^n(\mathfrak{B}) = L_1^n(\mathfrak{U})$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\mathfrak{W}$ un affinement favorable simultané des réseaux $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, soit $\pi' = Pr.(\mathfrak{W}, \mathfrak{B})$, donc $\pi\pi' = Pr.(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$. D'après la définition même d'un affinement favorable. on a $\pi' L^n(\mathfrak{W}) = L_1^n(\mathfrak{B})$, $\pi\pi' L^n(\mathfrak{W}) = L_1^n(\mathfrak{U})$, d'où $\pi L_1^n(\mathfrak{B}) = L_1^n(\mathfrak{U})$.

25. Rangeons la famille fondamentale Z de réseaux sous la forme d'une suite transfinie bien ordonnée

$$\mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_\omega, \mathfrak{U}_{\omega+1}, \ldots, \mathfrak{U}_\xi, \ldots \quad (\xi < \gamma).$$

On peut alors former une suite transfinie

$$(1) \qquad C_0^n, C_1^n, \ldots, C_\omega^n, C_{\omega+1}^n, \ldots, C_\xi^n, \ldots \quad (\xi < \gamma)$$

où $C_\xi^n \in L_1^n(\mathfrak{U}_\xi)$ de manière que l'on ait la propriété P suivante: Si $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ sont des nombres ordinaux en nombre fini inférieurs à γ, il existe un affinement simultané $\mathfrak{B}$ des réseaux $\mathfrak{U}_{\eta_\nu}$ $(1 \leqq \nu \leqq k)$ et un cycle $C^n(\mathfrak{B}) \in L_1^n(\mathfrak{B})$ tel que $\pi_\nu C^n(\mathfrak{B})) \sim C_{\eta_\nu}^n$ mod α dans A $[1 \leqq \nu \leqq k;\ \pi_\nu = Pr.(\mathfrak{B}, \mathfrak{U}_{\eta_\nu})]$.

[1] $\pi L^n(\mathfrak{B})$ est l'ensemble de tous les $(n, \mathfrak{U})$-cycles $C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A tels que $C^n(\mathfrak{U}) \sim \pi C^n(\mathfrak{B})$ pour un choix convenable de $C^n(\mathfrak{B}) \in L^n(\mathfrak{B})$.

La démonstration en sera donnée dans les deux n^{os} suivants; l'énoncé du n^0 21 sera alors prouvé, car $\{C^n_\xi\}$ est un (n, R)-cycle mod α dans A. En effet si $\mathfrak{U}_{\eta_2}$ est affinement de $\mathfrak{U}_{\eta_1}$, $\pi = Pr.(\mathfrak{U}_{\eta_2}, \mathfrak{U}_{\eta_1})$, d'après la propriété P il existe un affinement $\mathfrak{V}$ simultané des réseaux $\mathfrak{U}_{\eta_1}$, $\mathfrak{U}_{\eta_2}$ et un cycle $C^n(\mathfrak{V}) \epsilon L^n_1(\mathfrak{V})$ tel que $\pi_1 C^n(\mathfrak{V}) \sim C^n_{\eta_1}$, $\pi_2 C^n(\mathfrak{V}) \sim C^n_{\eta_2}$ mod α dans A, où $\pi_1 = Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U}_{\eta_1})$, $\pi_2 = Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U}_{\eta_2})$; or on peut supposer que $\pi_1 = \pi\pi_2$ de manière que $C_{\eta_1} \sim \pi\pi_2 C^n(\mathfrak{V}) \sim$ $\sim \pi C^n_{\eta_2}$ mod α dans A.

26. On construit la suite transfinie 25 (1) par récurrence transfinie. Le cycle $C^n_0 \epsilon L^n_1(\mathfrak{U}_0)$ peut être choisi à volonté. Supposons que, ξ étant un nombre ordinal $< \gamma$ donné, on ait déjà déterminé tous les termes $C^n_\eta \epsilon L^n_1(\mathfrak{U}_\eta)$, $\eta < \xi$, de la suite 25 (1) de telle façon que l'on ait la propriété suivante: Si $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ sont des nombres ordinaux inférieurs à ξ en nombre fini, il existe un affinement simultané $\mathfrak{V}$ des réseaux $\mathfrak{U}_{\eta_n}$ $(1 \leqq \nu \leqq k)$ et un cycle $C^n(\mathfrak{V}) \epsilon L^n_1(\mathfrak{V})$ tel que $\pi_\nu C^n(\mathfrak{V}) \sim C^n_{\eta_\nu}$ mod α dans A, où $\pi_\nu = Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U}_{\eta_\nu})$. Il s'agit seulement de ce qu'il est alors possible de choisir un cycle $C^n_\xi \epsilon L^n_1(\mathfrak{U}_\xi)$ de telle façon que, pour $\eta_1, \ldots, \eta_k < \xi$ (k fini) il existe toujours un affinement $\mathfrak{W}$ simultané des $k+1$ réseaux $\mathfrak{U}_\xi, \mathfrak{U}_{\eta_1}, \ldots \mathfrak{U}_{\eta_k}$ et un cycle $C^n(\mathfrak{W}) \epsilon L^n_1(\mathfrak{W})$ tel que $\pi'_n C^n(\mathfrak{W}) \sim C^n_{\eta_\nu}$, $\pi C^n(\mathfrak{W}) \sim C^n_\xi$ mod α dans A, où $\pi'_n = Pr.(\mathfrak{W}, \mathfrak{U}_{\eta_\nu})$, $\pi = Pr.(\mathfrak{W}, \mathfrak{U}_\xi)$.

27. Pour $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k < \xi$ *donnés*, désignons par $A(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ l'ensemble de tous les cycles $C^n_\xi \epsilon L^n_1(\mathfrak{U}_\xi)$ jouissant de la propriété qui vient d'être énoncée. Alors $A(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k) \neq 0$. En effet, soit $\mathfrak{V}$ un affinement simultané des réseaux $\mathfrak{U}_{\eta_1}, \mathfrak{U}_{\eta_2}, \ldots, \mathfrak{U}_{\eta_k}$ tel que, pour un choix convenable de $C^n(\mathfrak{V}) \epsilon L^n_1(\mathfrak{V})$, on ait $\pi_\nu C^n(\mathfrak{V}) \sim C^n_{\eta_\nu}$ mod α dans A, où $\pi_\nu = Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U}_{\eta_\nu})$. Soit $\mathfrak{W}$ un affinement simultané des réseaux $\mathfrak{U}_\xi$ et $\mathfrak{V}$; $\pi = Pr.(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$, $\overline{\pi} = Pr.(\mathfrak{W}, \mathfrak{V})$. donc $\pi'_\nu = \pi_\nu \overline{\pi} =$ $= Pr.(\mathfrak{W}, \mathfrak{U}_{\eta_\nu})$. D'après 24, on a $\overline{\pi} L^n_1(\mathfrak{W}) = L^n_1(\mathfrak{V})$; donc il existe un cycle $C^n(\mathfrak{W}) \epsilon L^n_1(\mathfrak{W})$ tel que $\overline{\pi} C^n(\mathfrak{W}) \sim C^n(\mathfrak{V})$, donc aussi $\pi'_n C^n(\mathfrak{W}) \sim C^n_{\eta_\nu}$ mod α dans A. En posant $C^n_\xi = \pi C^n(\mathfrak{W}) \epsilon \pi L^n_1(\mathfrak{W}) =$ $= L^n_1(\mathfrak{U}_\xi)$, on a $C^n_\xi \epsilon A(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$. L'inégalité $A(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ étant ainsi démontrée, on vérifie sans peine que $A(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ est un *système linéaire* de $(n, \mathfrak{U}_\xi)$-cycles mod α dans A. La partie commune d'un nombre fini quelconque de tels systèmes linéaires

$$A(\eta_1^{(r)}, \eta_2^{(r)}, \ldots, \eta_{k_r}^{(r)} \quad (r = 1, 2, \ldots, h)$$

est toujours $\neq 0$, car elle contient évidemment le système linéaire

$$A(\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \ldots, \eta_{k_1}^{(1)}, \eta_1^{(2)}, \ldots, \eta_{k_h}^{(h)}).$$

D'après I 15 on en déduit que la partie commune A de *tous* les $A(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ (pour tous les choix possibles des nombres ordinaux $\eta_1, \ldots, \eta_k$ en nombre fini tous inférieurs à ξ) est elle aussi $\neq 0$. Il suffit évidemment de choisir arbitrairement $C_\xi^n \in A$.

28. Soit $\mathfrak{U}_0$ un réseau donné et soit C_0^n un $(n, \mathfrak{U}_0)$-cycle mod α dans A *essentiel* donné. Il existe un (n, R)-cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ mod α dans A tel que $C^n(\mathfrak{U}_0) = C_0^n$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\mathfrak{B}$ un réseau arbitraire. Désignons par $L^n(\mathfrak{B})$ l'ensemble de tous les $(n, \mathfrak{B})$ cycles mod α dans A jouissant de la propriété suivante: Il existe un affinement simultané $\mathfrak{B}_1$ des deux réseaux $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{U}_0$ et un $(n, \mathfrak{B}_1)$-cycle $C^n(\mathfrak{B}_1)$ mod α dans A tels que $\pi_1 C^n(\mathfrak{B}_1) \sim C^n(\mathfrak{B})$, $\pi_0 C^n(\mathfrak{B}_1) \sim C_0^n$ mod α dans A, où $\pi_1 = Pr.(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B})$, $\pi_0 = Pr.(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{U}_0)$. Evidemment $L^n(\mathfrak{B}) \neq 0$, parce que C_0^n est essentiel; on voit sans peine que $L^n(\mathfrak{B})$ est un système linéaire de $(n, \mathfrak{B})$-cycles mod α dans A. Supposons encore que le réseau $\mathfrak{B}$ soit un affinement d'un réseau $\mathfrak{U}$, choisissons $C^n(\mathfrak{B}) \in L^n(\mathfrak{B})$ et gardons les notations précédentes; soit $\pi = Pr.(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, donc $\pi_1' = \pi\pi_1 = Pr.(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{U})$. En posant $C^n(\mathfrak{U}) = \pi C^n(\mathfrak{B})$, on a $\pi_1' C^n(\mathfrak{B}_1) \sim C^n(\mathfrak{U})$, $\pi_0 C^n(\mathfrak{B}_1) \sim C_0^n$ mod α dans A, d'où $C^n(\mathfrak{U}) \in L^n(\mathfrak{B})$. Donc $\pi L^n(\mathfrak{B}) = L^n(\mathfrak{U})$. D'après 21, il existe donc un (n, R)-cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ mod α dans A tel que $C^n(\mathfrak{U}) \in L^n(\mathfrak{U})$ pour chaque réseau $\mathfrak{U}$. Or $C^n(\mathfrak{U}_0) \in L^n(\mathfrak{U}_0)$ entraîne évidemment que $C^n(\mathfrak{U}_0) \sim C_0^n$ mod α dans A, de manière que l'on peut poser $C^n(\mathfrak{U}_0) = C_0^n$.

29. Le résultat qui vient d'être démontré peut évidemment s'énoncer comme il suit: Soit $\mathfrak{U}_0$ un réseau fixe. En faisant correspondre, à chaque (n, R) cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ mod α dans A, le $(n, \mathfrak{U}_0)$-cycle $C^n(\mathfrak{U}_0)$ mod α dans A, le module fini $M_n(A, \mathfrak{U}_0; \alpha)$ apparaît comme une *image homomorphe* du module $M_n(A, R; \alpha)$. Lorsque le nombre de Betti $P_n(A, R; \alpha)$ est fini (et dans ce cas seulement) on peut évidemment choisir le réseau $\mathfrak{U}_0$ de manière que les modules $M_n(A, R; \alpha)$ et $M_n(A, \mathfrak{U}_0; \alpha)$ soient *isomorphes*. Chaque affinement d'un tel réseau jouit évidemment de la même propriété.

30. Soit Z_1 un sous-ensemble de la famille fondamentale Z de réseaux tel que, le réseau $\mathfrak{U} \in Z$ étant arbitrairement donné, il en

existe *dans* Z_1 un affinement $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$. La famille Z_1 satisfait évidemment aux axiomes 1° et 2° du n° 1. Nous dirons que Z_1 est une *famille complète de réseaux* (relativement à la famille fondamentale Z).

Pour un moment, appelons $(n, R)^*$-cycle la notion qui diffère du (n, R)-cycle seulement en ce que la famille fondamentale Z est remplacée par Z_1. De chaque (n, R)-cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ mod α dans A on obtient un $(n, R)^*$-cycle mod α dans A en négligeant les réseaux qui n'appartiennent pas à la famille Z_1. Réciproquement, soit $\{C^n(\mathfrak{V})\}$ un $(n, R)^*$-cycle mod α dans A arbitrairement donné. Si $\mathfrak{U} \in Z$ est un réseau ne faisant pas partie de Z_1, choisissons en un affinement $\mathfrak{V} \in Z_1$ et posons $C^n(\mathfrak{U}) = \pi C^n(\mathfrak{V})$, $\pi = Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. On voit sans peine que l'on obtient ainsi un (n, R)-cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ mod α dans A qui est bien déterminé par le $(n, R)^*$-cycle $\{C^n(\mathfrak{V})\}$ à une homologie mod α dans A près. *En remplaçant la famille fondamentale Z de réseaux par la famille complète Z_1, le module $M_n(A, R; \alpha)$ ne change pas.*

III. Homologies dans les espaces topologiques.

1. Dorénavant, R désigne un *espace topologique*, c'est-à-dire un ensemble (dont les éléments s'appellent *points*) où l'on a donné à des certains sous-ensembles le nom d'*ensembles ouverts* (dans R); l'ensemble complémentaire $R - A$ d'un ensemble A ouvert dans R s'appelle *fermé* (dans R). On suppose de plus les quatre axiomes suivants:

1° L'ensemble vide 0 est à la fois ouvert et fermé.

2° Un ensemble composé d'un point unique est fermé.

3° L'ensemble somme d'une famille arbitraire d'ensembles ouverts est ouvert.

4° L'ensemble produit de deux ensembles ouverts est ouvert.

Le plus petit ensemble fermé contenant un ensemble $A \subset R$ donné s'appelle la *fermeture* de A (dans R) et on le désigne par $\bar{A}$. On a $A = \bar{A}$ si A est fermé et dans ce cas seulement.

A étant une partie donnée de R, on appelle *ouvert* dans A chaque ensemble de la forme AU, où U est ouvert dans R. En vertu de cette définition, chaque partie d'un espace topologique est un espace topologique.

Les propriétés les plus élémentaires des espaces topologiques seront supposées connues.

2. Un *réseau* (*ouvert*) dans R est un système composé d'un nombre fini d'ensembles ouverts et non vides. dont la somme coïncide avec l'espace R tout entier. Dorénavant, la famille fondamentale Z de réseaux sera composée de tous les réseaux ouverts. L'axiome 1° du Chap. II, n° 1 est évident; mais aussi l'axiome 2° est vérifié; il suffit d'appeler $\mathfrak{V}$ le système des ensembles $U_1 U_2$, où U_1 parcourt les sommets de $\mathfrak{U}_1$ et U_2 ceux de $\mathfrak{U}_2$. On reconnaît sans peine que l'on peut, dans tout ce Chapitre, remplacer la famille fondamentale Z par une famille complète (II 30) $Z_1 \subset Z$ arbitrairement choisie.

3. Evidemment un ensemble ouvert rencontre $A \subset R$ s'il rencontre $\bar{A}$ et réciproquement. On en conclut [1]) que la théorie de l'homologie des (n, R)-cycles mod α dans A $(\alpha \subset A \subset R)$ reste inaltérée si l'on remplace α, A par α_1, A_1 de manière que $\alpha_1 \subset A_1$, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_1$, $\bar{A} = \bar{A}_1$. Il s'ensuit que l'on peut supposer, sans restreindre la généralité, que les ensembles α et A soient *fermés* dans R.

4. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R. En remplaçant chaque sommet U de $\mathfrak{U}$ par son intersection $u = AU$ avec $A \subset R$ et en omettant les intersections vides, on obtient un réseau $\mathfrak{u} = A \cdot \mathfrak{U}$ dans A.

5. Soit A fermé dans R et soit $\mathfrak{u}$ un réseau dans A. Il existe un réseau $\mathfrak{U}$ dans R tel que $\mathfrak{u} = A \cdot \mathfrak{U}$.

Il suffit de remplacer chaque sommet u de $\mathfrak{u}$ par un ensemble U ouvert dans R et tel que $u = A \cdot U$ et d'ajouter le sommet $U = R - A$.

6. Soit A fermé dans R; soit $\mathfrak{u}$ un réseau dans A; soient $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ des réseaux dans R tels que $A \cdot \mathfrak{U}_1 = A \cdot \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{u}$. Il existe un affinement simultané $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$ tel que $A \cdot \mathfrak{V} = \mathfrak{u}$.

Les sommets V de $\mathfrak{V}$ s'obtiennent comme il suit: 1° $V = U_1 U_2$, où $U_1 \in \mathfrak{U}_1$, $U_2 \in \mathfrak{U}_2$, $AU_1 = AU_2 \neq 0$; 2° $V = (R - A) U_1 U_2$, où $U_1 \in \mathfrak{U}_1$, $U_2 \in \mathfrak{U}_2$.

7. Soit A fermé dans R; soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R, $\mathfrak{u} = A\,\mathfrak{U}$. Soit S^n un $(n, \mathfrak{U})$-simplexe dans A, c'est à-dire $A \cdot J(S^n) \neq 0$. En

[1]) Il faut tenir compte de ce fait évident que le noyau (II 2) d'un simplexe est un ensemble ouvert.

remplaçant chaque sommet U de S^n par $u = A \cdot U$, on obtient de S^n un $(n, \mathfrak{u})$ simplexe $s^n = A \cdot S^n$, *si tous les* $n+1$ *sommets* u *sont distincts*; dans le cas contraire, on pose $s^n = 0$. Plus généralement, soit $K^n = \Sigma r_\nu S^n_\nu$ une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne dans A; alors $k^n = A \cdot K^n = \Sigma r_\nu \cdot A S^n_\nu$ est une $(n, \mathfrak{u})$-chaîne. Evidemment $F(AK^n) = AF(K^n)$. On en conclut: si C^n est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α dans A, alors AC^n est un $(n, \mathfrak{u})$-cycle; si l'on a de plus $C^n \sim 0$ mod α dans A, aussi $AC^n \sim 0$ mod α.

8. Réciproquement soit $\mathfrak{u}$ un réseau dans $A = \bar{A} \subset R$ et soit $c^n(\mathfrak{u})$ un $(n, \mathfrak{u})$ cycle mod α. D'après 5. on peut déterminer un réseau $\mathfrak{U}$ dans R tel que $\mathfrak{u} = A \cdot \mathfrak{U}$. Evidemment il existe un $(n, \mathfrak{U})$-cycle $C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A tel que $c^n(\mathfrak{u}) = A \cdot C^n(\mathfrak{U})$. Le cycle $C^n(\mathfrak{U})$ n'est pas complètement déterminé, mais on voit sans peine que $c^n(\mathfrak{u}) = A \cdot C^n_1(\mathfrak{U}) = A \cdot C^n_2(\mathfrak{U})$ entraîne que $C^n_1(\mathfrak{U}) \sim C^n_2(\mathfrak{U})$ mod α dans A. Plus généralement on reconnaît sans difficulté que $c^n_1(\mathfrak{u}) = A \cdot C^n_1(\mathfrak{U})$, $c^n_2(\mathfrak{u}) = A \cdot C^n_2(\mathfrak{U})$, alors $c^n_1(\mathfrak{u}) \sim c^n_2(\mathfrak{u})$ mod α entraîne $C^n_1(\mathfrak{U}) \sim C^n_2(\mathfrak{U})$ mod α dans A et réciproquement.

9. Soit $\{c^n(\mathfrak{u})\}$ un (n, A)-cycle mod α $(A = \bar{A})$. Pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ dans R choisissons (8) un $(n, \mathfrak{U})$-cycle $C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A de manière que $AC^n = c^n(A\mathfrak{U})$; chaque cycle $C^n(\mathfrak{U})$ est (8) déterminé à une homologie mod α dans A près. Soit $\mathfrak{V}$ un affinement de $\mathfrak{U}$; $\pi = Pr. (\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. On voit sans peine que $\pi C^n(\mathfrak{V})$ est une valeur admissible pour $C^n(\mathfrak{U})$, ce qui donne $C^n(\mathfrak{U}) \sim \pi C^n(\mathfrak{V})$ mod α dans A. Donc $\{C(\mathfrak{U})\}$ est un (n, R)-cycle mod α dans A. Evidemment, le cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ est déterminé par $\{c^n(\mathfrak{u})\}$ à une homologie mod α dans A près. Posons $\{c^n(\mathfrak{u})\} = A \cdot \{C^n(\mathfrak{U})\}$.

10. Réciproquement, soit $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ un (n, R)-cycle mod α dans $A = \bar{A}$. Il existe un (n, A)-cycle $\{c^n(\mathfrak{u})\}$ mod α tel que $\{c^n(\mathfrak{u})\} = A \cdot \{C^n(\mathfrak{U})\}$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\mathfrak{u}$ un réseau dans A. Choisissons (5) le réseau $\mathfrak{U}$ dans R de manière que $\mathfrak{u} = A \cdot \mathfrak{U}$ et posons $c^n(\mathfrak{u}) = A \cdot C^n(\mathfrak{U})$. Il faut démontrer que le $(n, \mathfrak{u})$-cycle $c^n(\mathfrak{u})$ est bien déterminé à une homologie mod α près. Soit donc $\mathfrak{u} = A \cdot \mathfrak{U}_1 = A \cdot \mathfrak{U}_2$; on doit démontrer que $A \cdot C^n(\mathfrak{U}_1) \sim A \cdot C^n(\mathfrak{U}_2)$ mod α. D'après 6, nous pouvons évidemment supposer que $\mathfrak{U}_2$ est un affinement de $\mathfrak{U}_1$, $\pi = Pr. (\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$. Par la méthode du Chap. II n° 12 on reconnaît que $A\pi C^n(\mathfrak{U}_2) \sim A C^n(\mathfrak{U}_1)$ mod α. Or $\pi C^n(\mathfrak{U}_2) \sim$ $\sim C^n(\mathfrak{U}_1)$ mod α dans A de manière que (8) $A\pi C^n(\mathfrak{U}_2) \sim A C^n(\mathfrak{U}_1)$ mod α, donc finalement $A C^n(\mathfrak{U}_1) \sim A C^n(\mathfrak{U}_2)$ mod α.

Soit $\mathfrak{w}$ un affinement du $\mathfrak{u}$. On voit sans peine que l'on peut déterminer $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{W}$ de manière que $\mathfrak{w} = A \cdot \mathfrak{W}$, $\mathfrak{u} = A \cdot \mathfrak{U}$ et que $\mathfrak{W}$ soit un affinement de $\mathfrak{U}$, $\pi = Pr.(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$. Comme $\pi C^n(\mathfrak{W}) \sim C^n(\mathfrak{U})$ mod α dans A, on vérifie aisément que $\pi' c^n(\mathfrak{w}) \sim c^n(\mathfrak{u})$ mod α, où $\pi' = Pr.(\mathfrak{w}, \mathfrak{u})$.

Donc $\{c^n(\mathfrak{u})\}$ est le (n, A)-cycle mod α demandé.

11. Les considérations qui viennent d'être faites prouvent qu'il y a, *si A est fermé dans R*, une correspondance biunivoque entre les modules[1]) $M_n(A, R; \alpha)$ et $M_n(A; \alpha)$. En particulier $P_n(A, R; \alpha) =$ $= P_n(A, \alpha)$.

12. Soit p un point donné de R. Pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ dans R, choisissons un $(0, \mathfrak{U})$-cycle absolu $C^0(\mathfrak{U})$ constitué par un seul $(0, \mathfrak{U})$-simplexe U tel que $p \in U$. Evidemment $\{C^0(\mathfrak{U})\}$ est un $(0, R)$-cycle absolu; nous le désignerons par $\{p\}$. Ce cycle n'est pas absolument déterminé (car un réseau peut avoir plusieurs sommets contenant p), mais il est certainement déterminé à une homologie près.

13. Soient A, B deux sous ensembles de R qui peuvent se réduire à des points. Pour abréger, disons qu'un réseau $\mathfrak{U}$ dans R *sépare* A de B lorsque pour deux sommets U_1, U_2 de $\mathfrak{U}$ tels que $AU_1 \neq 0$, $BU_2 \neq 0$ on n'a jamais l'homologie $U_1 \sim U_2$; évidemment, chaque affinement $\mathfrak{W}$ d'un tel réseau $\mathfrak{U}$ sépare aussi A de B. Si le réseau $\mathfrak{U}$ sépare A de B, soit U la somme de tous les $(0, \mathfrak{U})$-simplexes homologues à un $(0, \mathfrak{U})$-simplexe rencontrant A et soit V la somme des autres $(0, \mathfrak{U})$-simplexes. Alors on a évidemment

(1) $R = U + V$; $UV = 0$; $A \subset U$, $B \subset V$; U, V ouverts dans R.

Réciproquement, sous les conditions (1) le réseau constitué par U, V sépare A de B.

On voit que l'espace R est *connexe* si et seulement si deux quelconques de ses points ne sont jamais séparés par aucun réseau. Rappelons que chaque point p de R appartient toujours à un sous-ensemble Γ *connexe maximé* de R; on dit que Γ est une *composante* de R.

[1]) Pour la notation, v. II 20.

Soit p un point donné de R; soit Q l'ensemble de tous les points $q \varepsilon R$ qui ne sont séparés de p par aucun réseau; l'ensemble Q est une *quasicomposante* de R au sens de M. Hausdorff[1]). On sait que chaque quasicomposante de R est une composante de R ou bien une somme de composantes de R; si le nombre des quasicomposantes est *fini*, elles coïncident avec les composantes.

14. Si les points p et q appartiennent à la même quasicomposante de R, on a $\{p\} \sim \{q\}$.

Soit $\{p\} = \{C_1^0(\mathfrak{U})\}$, $\{q\} = \{C_2^0(\mathfrak{U})\}$. Un réseau arbitraire $\mathfrak{U}$ ne peut séparer p de q; donc $C_1^0(\mathfrak{U}) \sim C_2^0(\mathfrak{U})$.

15. Soit $\alpha \subset R$. Une quasicomposante Q sera dite *essentielle* mod α, s'il existe un réseau $\mathfrak{U}$ séparant Q de α. Si la composante Q n'est pas essentielle mod α et si $p \varepsilon Q$, évidemment aucun réseau ne sépare p de α.

Si α ne rencontre qu'un nombre *fini* de quasicomposantes de R et si $Q \cdot \alpha = 0$, la quasicomposante Q est essentielle. En effet, pour chaque quasicomposante α_ν rencontrant α il existe évidemment un réseau $\mathfrak{U}_\nu$ séparant Q de α_ν; un affinement $\mathfrak{U}$ simultané des reseaux $\mathfrak{U}_\nu$ sépare alors Q de α.

16. Soit $p \varepsilon R$, $\alpha \subset R$. Si la quasicomposante Q contenant p n'est pas essentielle mod α, on a $\{p\} \sim 0$ mod α.

Soit $\{p\} = \{C^0(\mathfrak{U})\}$. Un réseau arbitraire $\mathfrak{U}$ ne pouvant séparer p de α, évidemment $C^0(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod α

17. Soient $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ des quasicomposantes distinctes et essentielles mod α; soit $p_\nu \varepsilon Q_\nu$. Alors les $(0, R)$-cycles $\{p_\nu\}$ sont indépendants mod α.

Démonstration. Soit $\{p_\nu\} = \{C_\nu^0(\mathfrak{U})\}$. Soit $\mathfrak{U}_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq k)$ un réseau séparant p_ν de α; soit $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$ $(1 \leqq \mu < \nu \leqq k)$ un réseau séparant p_μ de p_ν; soit $\mathfrak{W}$ un affinement simultané de tous les réseaux $\mathfrak{U}_\nu$, $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$. Le réseau $\mathfrak{W}$ sépare alors simultanément chaque point p_ν de α et de tous les autres p_μ. On en déduit sans peine qu'une homologie $\Sigma r_\nu C_\nu^0(\mathfrak{W}) \sim 0$ mod α exige $r_1 = \ldots = r_k = 0$.

18. Les raisonnements qui précèdent conduisent sans peine au théorème général suivant: Le nombre des quasicomposantes essen-

[1]) Grundzüge der Mengenlehre, 1914, p. 248—249.

tielles mod α est égal à $P_0(R; \alpha)$. Cas particuliers: Si α ne rencontre qu'un nombre fini k de quasicomposantes de R, le nombre total des quasicomposantes de R est égal à $P_0(R; \alpha)+k$. Le nombre des quasicomposantes de R est égal à $P_0(R)$; etc.

19. Dorénavant, nous allons supposer que l'espace topologique R est *complètement normal* [1]); cela veut dire que l'on a, outre les axiomes 1⁰—4⁰ du n⁰ 1, l'axiome suivant:

5⁰ si deux ensembles A, $B \subset R$ sont séparés par un réseau $\mathfrak{u}$ dans $A+B$ [2]), ils le sont aussi par un réseau $\mathfrak{U}$ dans R.

Chaque sousensemble A de R constitue un espace topologique complètement normal [3]).

20. *Lemme h'* ($h=1, 2, 3,\ldots$): Soient $u_1, u_2, \ldots, u_h$ des ensembles ouverts (fermés) dans $A \subset R$; soit $\prod_1^h u_\nu = 0$. Il existe des ensembles $U_1, U_2, \ldots, U_h$ ouverts dans R et tels que $U_\nu \supset u_\nu$, $\prod_1^h U_\nu = 0$.

Lemme h'' ($h=1, 2, 3,\ldots$): Soient $u_1, u_2, \ldots, u_h$ des ensembles ouverts (fermés) dans $A \subset R$; soit V un ensemble ouvert dans R; soit $V \supset \prod_1^h u_\nu$. Il existe des ensembles $U_1, U_2, \ldots, U_h$ ouverts dans R et tels que $U_\nu \supset u_\nu$, $\prod_1^h U_\nu = V$.

Les lemmes étant évidents pour $h=1$, il suffit de déduire 1⁰ h'' de h'; 2⁰ $(h+1)'$ de h''.

Supposons donc *en premier lieu* la validité de h' ainsi que la prémisse de h''. Posons $A' = A - \prod_1^h u_\nu$; $u'_\nu = A' \cdot u_\nu$. Les ensembles u'_ν sont alors ouverts (fermés) dans A' et l'on a $\prod_1^h u'_\nu = 0$. D'après h', il existe des ensembles U'_ν ouverts dans R et tels que $U'_\nu \supset u'_\nu$; $\prod_1^h U'_\nu = 0$. On voit sans peine qu'il suffit de poser $U_\nu = U'_\nu + V$.

[1]) Cette notion a été introduite par M. Tietze (Math. Annalen, 88, p. 301); la dénomination est celle d'Urysohn (Math. Annalen, 94, p. 265).

[2]) La supposition peut évidemment s'énoncer sous la forme suivante: $A \cdot B = 0$ et A, B sont ouverts dans $A+B$; ou encore sous la forme: $A\overline{B} + B\overline{A} = 0$.

[3]) V. Urysohn, l. c., p. 284.

En second lieu, supposons la validité de h'' ainsi que la prémisse de $(h+1)'$. Evidemment

$$\bar{u}_{h+1} \cdot v = u_{h+1} \cdot \bar{v}_{h+1} = 0 \cdot \left(v = \prod_1^h u_\nu \right).$$

L'espace R étant complètement normal, on en déduit (v. 13 (1)) qu'il existe des ensembles V et U_{h+1} ouverts dans R et tels que $V \supset \prod_1^h u_\nu$, $U_{h+1} \supset u_{h+1}$, $V \cdot U = 0$. D'après h'', il existe des ensembles $U_1, U_2, \ldots, U_h$ ouverts dans R et tels que $U_\nu \supset u_\nu$, $\prod_1^h U_\nu = V$. On voit bien que les ensembles $U_1, U_2, \ldots, U_{h+1}$ jouissent des propriétés demandées.

21. Soit $A \subset R$. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_k$ (k fini) des ensembles ouverts (fermés) dans A. Il existe des ensembles $V_1, V_2, \ldots, V_k$ ouverts dans R et tels que: 1° $V_\nu \supset u_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq k)$; 2° on a $V_{\nu_1} \cdot V_{\nu_2} \cdot \ldots \cdot V_{\nu_h} = 0$ pour chaque combinaison $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h)$ d'indices $1, 2, \ldots, k$ $(1 \leqq h \leqq k)$ telle que $u_{\nu_1} \cdot u_{\nu_2} \cdot \ldots \cdot u_{\nu_h} = 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que le symbole $\varkappa = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h)$ parcourt toutes les combinaisons pour lesquelles $u_{\nu_1} \cdot u_{\nu_2} \cdot \ldots \cdot u_{\nu_h} = 0$. D'après le lemme h', il existe des ensembles $U^{(\varkappa)}_{\nu_1}, U^{(\varkappa)}_{\nu_2}, \ldots, U^{(\varkappa)}_{\nu_h}$ ouverts dans R et tels que $U^{(\varkappa)}_{\nu_1} \supset u_{\nu_1}, \ldots, U^{(\varkappa)}_{\nu_h} \supset u_{\nu_h}$ et $U^{(\varkappa)}_{\nu_1} \cdot U^{(\varkappa)}_{\nu_2} \cdot \ldots \cdot U^{(\varkappa)}_{\nu_h} = 0$. Pour une valeur arbitraire de ν $(1 \leqq \nu \leqq k)$ posons

$$V_\nu = \prod_\varkappa U^{(\varkappa)}_\nu,$$

l'indice $\varkappa$ parcourant *celles* de ses valeurs $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h)$ qui contiennent l'indice donné ν. On voit sans peine que les ensembles $V_1, V_2, \ldots, V_k$ jouissent des propriétés demandées.

22. Un réseau $\mathfrak{U}$ dans R s'appelle *régulier* par rapport à un ensemble $A \subset R$ si chaque $(n, \mathfrak{U})$-simplexe S^n de $\mathfrak{U}$ jouit de la propriété suivante: *ou bien* aucun sommet de S^n ne rencontre A, *ou bien* le noyau de S^n rencontre A. On voit (v. 3) que cette propriété dépend seulement de la *fermeture* $\bar{A}$ de A; on peut donc supposer A fermé.

23. Soit $A \subset R$. Soit $\mathfrak{U}$ un réseau dans R. Il existe un affinement $\mathfrak{W}$ de $\mathfrak{U}$ régulier par rapport à A et tels que $A \cdot \mathfrak{U} = A \cdot \mathfrak{W}$.

De plus, si $a \subset R$ est un ensemble fermé donné, on peut s'arranger de façon que, pour chaque sommet W de $\mathfrak{W}$, on ait $WA = 0$, ou bien $Wa = 0$ ou enfini $WAa \neq 0$.

Démonstration. On peut supposer A fermé. Désignons par $U_1, U_2, \ldots, U_k$ tous les sommets de $\mathfrak{U}$ rencontrant A et posons $u_\nu = A \cdot U_\nu$. A ces ensembles $u_1, u_2, \ldots, u_k$ ouverts dans A associons des ensembles $V_1, V_2, \ldots V_k$ ouverts dans R d'après le théorème du n^0 21 et posons $W_\nu = U_\nu V_\nu$ si $u_\nu a \neq 0$, $W_\nu = U_\nu V_\nu (R - a)$ dans le cas contraire. Aux ensembles W ainsi définis ajoutons encore les $W = U \cdot (R - A)$, U parcourant *tous* les sommets de $\mathfrak{U}$. On voit sans peine que les W constituent un affinement $\mathfrak{W}$ de $\mathfrak{U}$ possédant la propriété voulue.

IV. Homologies dans la somme de deux espaces.

1. Soit R un espace topologique normal. Soient R_1 et R_2 deux sous-ensembles *fermés* de R tels que $R = R_1 + R_2$; posons $R_3 = R_1 R_2$. Soit a un sous-ensemble fermé de R; posons (pour $i = 1, 2, 3$) $a_i = R_i a$, de manière que a_i est un sous-ensemble fermé de R_i.

2. Désignons par N_3 la famille de tous les réseaux (ouverts) dans R_3 réguliers (v. III 22) par rapport à a_3. D'après III 23, N_3 est une famille complète (v. II 30) de réseaux ouverts dans R_3. Il en résulte sans peine que la famille N' constituée par tous les réseaux (ouverts) $\mathfrak{U}$ dans R tels que $R_3 \cdot \mathfrak{U} \in N_3$ est aussi complète. Soit N', la famille constituée par ceux des réseaux $\mathfrak{U} \in N'$ qui sont réguliers par rapport à R_3 et qui jouissent en outre de la propriété suivante: Si U est un sommet de $\mathfrak{U}$, on a $UR_3 = 0$ ou bien $Ua = 0$ ou enfin $Ua_3 \neq 0$. D'après III 23, N'' est une famille complète de réseaux dans R. De chaque réseau $\mathfrak{U} \in N''$ déduisons un nouveau réseau $\mathfrak{V}$ dans R de la manière suivante: si U est un sommet de $\mathfrak{U}$ tel que $UR_3 = 0$, on le remplace par les deux sommets $U_1 = U(R - R_1)$, $U_2 = U(R - R_2)$ [on a $U_1 + U_2 = U(R - R_3) = U$]; désignons par N la famille constituée par tous les réseaux $\mathfrak{V}$ ainsi déduits de tous les réseaux $\mathfrak{U} \in N''$.

Dans la suite, *nous considérons*, au lieu de la famille constituée par tous les réseaux ouverts dans R, *la famille N comme la famille fondamentale de réseaux dans R.* Ceci est permis (v. II 30 et III 2), car N est évidemment une famille complète de réseaux ouverts dans R.

3. La famille fondamentale N jouit donc des propriétés suivantes ($\mathfrak{U} \in N$):

1° Pour chaque sommet U de $\mathfrak{U}$ on a

$$UR_3 \neq 0 \quad \text{ou bien} \quad UR_1 = 0 \quad \text{ou enfin} \quad UR_2 = 0.$$

2° Si chaque sommet d'un $(n, \mathfrak{U})$ simplexe S^n rencontre R_3, on a $R_3 \cdot J(S^n) \neq 0$.

3° Si chaque sommet d'un $(n, \mathfrak{U})$ simplexe S^n rencontre α_3, on a $\alpha_3 \cdot J(S^n) \neq 0$.

4° Pour chaque sommet U de $\mathfrak{U}$ tel que $UR_3 \neq 0$, $U\alpha \neq 0$ on a $U\alpha_3 \neq 0$.

4. Des propriétés 1°, 2° du n° 3 il résulte pour $\mathfrak{U} \in N$: 1° Chaque $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $K^n(\mathfrak{U})$ peut se mettre sous la forme

$$K^n(\mathfrak{U}) = K_1^n(\mathfrak{U}) - K_2^n(\mathfrak{U}); \quad K_1^n(\mathfrak{U}) \subset R_1; \quad K_2^n(\mathfrak{U}) \subset R_2.$$

2° Si $K^n(\mathfrak{U}) \subset R_1$ et $K^n(\mathfrak{U}) \subset R_2$, alors $K^n(\mathfrak{U}) \subset R_3$.

5. Soit $C^n(\mathfrak{U})$ un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α dans R_i ($i = 1, 2, 3$). Alors $C^n(\mathfrak{U})$ est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α_i dans R_i.

D é m o n s t r a t i o n. Posons $F(C^n(\mathfrak{U})) = \Sigma r_\nu S_\nu^{n-1}$ où nous pouvons supposer que dans chaque terme à droite on a $r_\nu \neq 0$, donc $S_\nu^{n-1} \subset R_i$, $S_\nu^{n-1} \subset \alpha$. Soit d'abord $i = 3$. Chaque sommet U de chaque S_ν^{n-1} rencontre R_3 et α, donc (d'après 4° dans n° 3) aussi α_3; il en résulte (d'après 3° dans n° 3) que $S_\nu^{n-1} \subset \alpha_3$, d'où $F(C^n(\mathfrak{U})) \subset \alpha_3$, $C^n(\mathfrak{U}) \to 0$ mod α_3. En second lieu, soit $i = 1$ (le cas $i = 2$ se traite de la même manière). Si, pour une valeur de ν, le simplexe S_ν^{n-1} possède un sommet U tel que $UR_3 = 0$, d'après 1° du n° 3 on a $UR_1 = 0$ ou bien $UR_2 = 0$; or $S_\nu^{n-1} \subset R_1$ entraîne que $UR_1 \neq 0$; donc $J(S_\nu^{n-1}) \subset U \subset R - R_2 \subset R_1$, d'où $J(S_\nu^{n-1}) \cdot \alpha = J(S_\nu^{n-1}) \cdot \alpha_1$. Or $J(S_\nu^{n-1}) \cdot \alpha \neq 0$, car $S_\nu^{n-1} \subset \alpha$; donc $J(S_\nu^{n-1}) \cdot \alpha_1 \neq 0$. D'autre part, si chaque sommet de S_ν^{n-1} rencontre R_3, la relation $S_\nu^{n-1} \subset \alpha$ donne (d'après 4° du n° 3) que chaque sommet de S_ν^{n-1} rencontre α_3, donc (d'après 3° du n° 3) $0 \neq J(S_\nu^{n-1}) \cdot \alpha_3 \subset J(S_\nu^{n-1}) \cdot \alpha_1$. En résumé, pour chaque valeur de l'indice ν on a l'inclusion $J(S_\nu^{n-1}) \subset \alpha_1$, ce qui signifie que $C^n(\mathfrak{U}) \to 0$ mod α_1.

6. Soit $C^{n+1}(\mathfrak{U})$ un $(n+1, \mathfrak{U})$-cycle mod α arbitrairement donné ($\mathfrak{U} \in N$). D'après 4, on peut poser

$$C^{n+1}(\mathfrak{U}) = K_1^{n+1}(\mathfrak{U}) - K_2^{n+1}(\mathfrak{U}) \tag{1}$$

avec

(2) $$K_1^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_1, \quad K_2^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_2.$$

On a $F[K_1^{n+1}(\mathfrak{U})] = F[K_2^{n+1}(\mathfrak{U})] \bmod \alpha$. Désignons par $C^n(\mathfrak{U})$ une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne qui se déduit de $F(K_1^{n+1}(\mathfrak{U}))$ [et donc aussi de $F(K_2^{n+1}(\mathfrak{U}))$] en enlevant tous les $(n, \mathfrak{U})$-simplexes contenues dans α et en ajoutant ensuite une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne *contenue dans* α_3 arbitraire. Evidemment

(3) $$C^n(\mathfrak{U}) = F[K_1^{n+1}(\mathfrak{U})] \bmod \alpha_1, \quad C^n(\mathfrak{U}) = F]K_2^{n+1}(\mathfrak{U})] \bmod \alpha_2.$$

D'après (2) et (3), on a $C^n(\mathfrak{U}) \subset R_1$, $C^n(\mathfrak{U}) \subset R_2$, d'où (4) $C^n(\mathfrak{U}) \subset R_3$. D'après (3) $C^n(\mathfrak{U})$ est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α. Donc (v. 5) $C^n(\mathfrak{U})$ est un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α_3 dans R_3. De plus les relations (2) et (3) donnent encore

(4) $$C^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod \alpha_1 \text{ dans } R_1, \quad C^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod \alpha_2 \text{ dans } R_2.$$

Pour abréger, écrivons

$$C^n(\mathfrak{U}) = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$$

pour indiquer que le cycle $C^n(\mathfrak{U})$ a été déduit du cycle $C^{n+1}(\mathfrak{U})$ de la manière qui vient d'être expliquée.

7. La fonction Φ n'est pas univoque. Au lieu de 6 (1), on peut poser généralement

$$C^{n+1}(\mathfrak{U}) = \overline{K}_1^{n+1}(\mathfrak{U}) - \overline{K}_2^{n+1}(\mathfrak{U})$$

où

$$\overline{K}_i^{n+1}(\mathfrak{U}) = K_i^{n+1}(\mathfrak{U}) + K_3^{n+1}(\mathfrak{U}), \quad (i = 1, 2)$$

$K_3^{n+1}(\mathfrak{U})$ étant une chaîne telle que $K_3^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_1$, $K_3^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_2$ et donc (4) $K_3^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_3$. Au lieu de $C^n(\mathfrak{U})$ on a donc généralement

$$\overline{C}^n(\mathfrak{U}) = C^n(\mathfrak{U}) + F[K_3^{n+1}(\mathfrak{U})] \quad \bmod \alpha_3.$$

Donc: Si $C^n(\mathfrak{U}) = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$, on a aussi $\overline{C}^n(\mathfrak{U}) = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$ si $\overline{C}^n(\mathfrak{U}) \sim C^n(\mathfrak{U})$ mod α_3 dans R_3 et dans ce cas seulement.

8. Réciproquement, soit $C^n(\mathfrak{U})$ un $(n, \mathfrak{U})$-cycle mod α_3 dans R_3 tel que

$$C^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod \alpha_1 \text{ dans } R_1; \quad C^n(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod \alpha_2 \text{ dans } R_2.$$

Alors il existe pour $i=1$ et pour $i=2$ une $(n+1, \mathfrak{U})$-chaîne $K_i^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_i$ telle que

$$F[K_i^{n+1}(\mathfrak{U})] = C^n(\mathfrak{U}) \mod \alpha_i.$$

En posant

$$C^{n+1}(\mathfrak{U}) = K_1^{n+1}(\mathfrak{U}) - K_2^{n+1}(\mathfrak{U})$$

on a évidemment $C^n(\mathfrak{U}) = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$.

9. Si

$$C^{n+1}(\mathfrak{U}) = \sum_1^k r_\nu \, C_\nu^{n+1}(\mathfrak{U}), \quad C_\nu^n(\mathfrak{U}) = \Phi\,[C_\nu^{n+1}(\mathfrak{U})],$$

évidemment

$$\sum_1^k r_\nu \, C_\nu^n(\mathfrak{U}) = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})].$$

10. Soient $C^{n+1}(\mathfrak{U})$, $C_1^{n+1}(\mathfrak{U})$, $C_2^{n+1}(\mathfrak{U})$ des $(n+1, \mathfrak{U})$-cycles mod α tels que

(1) $C^{n+1}(\mathfrak{U}) = C_1^{n+1}(\mathfrak{U}) - C_2^{n+1}(\mathfrak{U})$; $\quad C_1^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_1$; $\quad C_2^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_2$;

alors $0 = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$. Et réciproquement, si $0 = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$, il existe deux $(n+1, \mathfrak{U})$-cycles mod α $C_i^{n+1}(\mathfrak{U})$ $(i=1, 2)$ tel que l'on ait (1).

11. Soit $C^{n+1}(\mathfrak{U})$ un $(n+1, \mathfrak{U})$-cycle mod α homologue à zéro mod α. Alors $0 = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$.

Démonstration. Il existe une $(n+2, \mathfrak{U})$-chaîne $K^{n+2}(\mathfrak{U})$ et une $(n+1, \mathfrak{U})$-chaîne $\overline{K}^{n+1}(\mathfrak{U})$ telles que

$$C^{n+1}(\mathfrak{U}) = F[K^{n+2}(\mathfrak{U})] + \overline{K}^{n+1}(\mathfrak{U}); \quad \overline{K}^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset \alpha.$$

D'après 4 on peut poser

$$K^{n+2}(\mathfrak{U}) = K_1^{n+2}(\mathfrak{U}) - K_2^{n+2}(\mathfrak{U}); \quad \overline{K}^{n+1}(\mathfrak{U}) = \overline{K}_1^{n+1}(\mathfrak{U}) - \overline{K}_2^{n+1}(\mathfrak{U})$$

où

$$K_i^{n+2}(\mathfrak{U}) \subset R_i; \quad \overline{K}_i^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R_i \quad (i=1,2).$$

Evidemment, on peut s'arranger de façon que $\overline{K}_i^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset \alpha$.

En posant

$$C_i^{n+1}(\mathfrak{U}) = F[K_i^{n+2}(\mathfrak{U})] + \overline{K}_i^{n+1}(\mathfrak{U}),$$

les conditions 10(1) sont réalisées; en outre, $C_i^{n+1}(\mathfrak{U})$ est un $(n+1, \mathfrak{U})$-cycle mod α dans R_i.

12. Soit $\mathfrak{V} \in N$ un affinement d'un réseau $\mathfrak{U} \in N$; $\pi = Pr. (\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Soit $C^{n+1}(\mathfrak{U})$ un $(n+1, \mathfrak{U})$-cycle mod α et $C^n(\mathfrak{U}) = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{V})]$. On vérifie sans peine que

$$\pi\, C^n(\mathfrak{U}) = \Phi[\pi\, C^{n+1}(\mathfrak{U})].$$

13. Maintenant, soit $\{C^{n+1}(\mathfrak{U})\}$ un $(n+1, R)$-cycle mod α. Pour chaque réseau[1] $\mathfrak{U}$, soit $C^n(\mathfrak{U}) = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$. Chaque $C^n(\mathfrak{U})$ est un (n, R)-cycle mod α_3 dans R_3 (6) déterminé précisément à une homologie mod α_3 dans R_3 près. D'après (12), $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ est un (n, R)-cycle mod α_3 dans R_3. Posons $\{C^n(\mathfrak{U})\} = \Phi[\{C^{n+1}(\mathfrak{U})\}]$.

D'après 6 (4), on a

$$(1) \qquad \{C^n(\mathfrak{U})\} \sim 0 \text{ mod } \alpha_i \text{ dans } R_i \quad (i = 1, 2).$$

14. Réciproquement, soit $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ un (n, R)-cycle mod α_3 dans R_3 tel que l'on ait les deux relations 13 (1). Pour chaque réseau $\mathfrak{U} \in N$, désignons par $L^{n+1}(\mathfrak{U})$ l'ensemble des $(n+1, R)$-cycles mod α dans R tels que $C^n(\mathfrak{U}) = \Phi[C^{n+1}(\mathfrak{U})]$. D'après (8), $L^{n+1}(\mathfrak{U}) \neq 0$. D'après 9 et 11, $L^{n+1}(\mathfrak{U})$ est un système linéaire de $(n+1, R)$-cycles mod α. Si $\mathfrak{V} \in N$ est un affinement de $\mathfrak{U} \in N$, $\pi = Pr. (\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, on a $\pi L^{n+1}(\mathfrak{V}) \subset \subset L^{n+1}(\mathfrak{U})$. En vertu du théorème énoncé au Chap. II, n° 21 on peut choisir $C^{n+1}(\mathfrak{U}) \in L^{n+1}(\mathfrak{U})$ de manière que l'on obtient un $(n+1, R)$-cycle mod α $\{C^{n+1}(\mathfrak{U})\}$ tel que

$$\{C^n(\mathfrak{U})\} = \Phi[\{C^{n+1}(\mathfrak{U})\}].$$

15. Soit $\mu_n(R_3; \alpha_3)$ le sousmodule du module $M_n(R_3, R; \alpha_3)$ constitué par les (n, R)-cycles mod α_3 dans R_3 homologues à zéro mod α_1 dans R_1, ainsi que mod α_2 dans R_2. Moyennant la fonction Φ le module $\mu_n(R_3; \alpha_3)$ est (v. 9, 11, 13 et 14) une image homomorphe du module $M_{n+1}(R; \alpha)$. Plus précisément, d'après 10, le module $\mu_n(R_3, R; \alpha_3)$ est isomorphe au module (v. I 11) $M_{n+1}(R; \alpha) - M^*_{n+1}(R; \alpha)$ où $M^*_{n+1}(R; \alpha)$ est constitué par les $(n+1, R)$-cycles mod α de la forme $\{C_1^n(\mathfrak{U})\} - \{C_2^n(\mathfrak{U})\}$, $\{C_i^n(\mathfrak{U})\}$ $(i = 1, 2)$ étant un $(n+1, R)$-cycle mod α_i dans R_i. D'après I 12, le module $M_{n+1}(R; \alpha)$ est une somme directe du module $M^*_{n+1}(R; \alpha)$ est d'un module isomorphe à $\mu_n(R_3; \alpha_3)$; donc

$$(1) \qquad P_{n+1}(R; \alpha) = P^*_{n+1}(R; \alpha) + \pi_n(R_3; \alpha_3),$$

[1]) Rappelons que nous ne considérons que les réseaux $\mathfrak{U} \in N$.

où $P^*_{n+1}(R;\alpha)$ est le rang du module $M^*_{n+1}(R;\alpha)$ et $\pi_n(R_3;\alpha_3)$ celui du module $\mu_n(R_3;\alpha_3)$.

16. Soit $\{C_i^{n+1}(\mathfrak{U})\}$ $(i=1,2)$ un $(n+1, R)$-cycle mod α_i dans R_i; soit $\{C_1^{n+1}(\mathfrak{U})\} \sim \{C_2^{n+1}(\mathfrak{U})\}$ mod α. Il existe un $(n+1, R)$-cycle $C_3^{n+1}(\mathfrak{U})$ mod α_3 dans R_3 tel que $\{C_i^{n+1}(\mathfrak{U})\} \sim \{C_3^{n+1}(\mathfrak{U})\}$ mod α_i dans R_i pour $i=1$ et par $i=2$.

Démonstration. Pour chaque $\mathfrak{U}\in N$, il existe une $(n+2, \mathfrak{U})$-chaîne $K_1^{n+2}(\mathfrak{U}) - K_2^{n+2}(\mathfrak{U})$ telle que

$$C_1^{n+1}(\mathfrak{U}) - C_2^{n+1}(\mathfrak{U}) = F[K_1^{n+2}(\mathfrak{U}) - K_2^{n+2}(\mathfrak{U})] \text{ mod } \alpha.$$

On peut supposer (v. 4) que $K_i^{n+2}(\mathfrak{U})\subset R_i$ $(i=1,2)$. Il en résulte sans peine (cf. 6) qu'il existe un $(n+1, \mathfrak{U})$-cycle $C_3^{n+1}(\mathfrak{U})$ mod α_3 dans R_3 tel que l'on ait pour $i=1, 2$

$$C_3^{n+1}(\mathfrak{U}) = C_i^{n+1}(\mathfrak{U}) - F[K_i^{n+2}(\mathfrak{U})] \text{ mod } \alpha,$$

c'est-à-dire

$$C_3^{n+1}(\mathfrak{U}) \sim C_i^{n+1}(\mathfrak{U}) \text{ mod } \alpha_i \text{ dans } R_i.$$

Le cycle $C_3^{n+1}(\mathfrak{U})$ n'est pas univoquement déterminé; or en désignant par $L^{n+1}(\mathfrak{U})$ l'ensemble de tous ses valeurs, on voit sans peine que $L^{n+1}(\mathfrak{U})$ est un système linéaire de $(n+1, \mathfrak{U})$-cycles mod α_3 dans R_3; de plus, si $\mathfrak{V}\in N$ est un affinement de $\mathfrak{U}\in N$, $\pi = Pr.(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, on a manifestement $\pi\, L^{n+1}(\mathfrak{V})\subset L^{n+1}(\mathfrak{U})$. Donc, d'après II 21, on peut choisir $C_3^{n+1}(\mathfrak{U})\in L^{n+1}(\mathfrak{U})$ pour chaque $\mathfrak{U}\in N$ de manière que $\{C_3^{n+1}(\mathfrak{U})\}$ constitue un $(n+1, R)$-cycle mod α_3 dans R_3 qui jouit évidemment de la propriété demandée.

17. Désignons, pour un moment, par $\overline{M}_{n+1}(R_1, R_2)$ la somme directe (I 12) de deux modules respectivement isomorphes à

$$M_{n+1}(R_1, R;\alpha_1) \quad \text{et à} \quad M_{n+1}(R_2, R;\alpha_2).$$

$\overline{M}_{n+1}(R_1, R_2)$ peut être considéré comme constitué par des couples $[\{C_1^{n+1}(\mathfrak{U})\}, \{C_2^{n+1}(\mathfrak{U})\}]$ où (pour $i=1, 2$) $\{C_i^{n+1}(\mathfrak{U})\}$ est un $(n+1, R)$-cycle mod α_i dans R_i et où deux couples $[\{C_1^{n+1}(\mathfrak{U})\}, \{C_2^{n+1}(\mathfrak{U})\}]$ et $[\{\overline{C}_1^{n+1}(\mathfrak{U})\}, \{\overline{C}_2^{n+1}(\mathfrak{U})\}]$ sont égaux si et seulement si $\{\overline{C}_i^{n+1}(\mathfrak{U})\}\sim\{C_i^{n+1}(\mathfrak{U})\}$ mod α_i dans R_i pour $i=1$ et pour $i=2$. Evidemment, le module $M^*_{n+1}(R;\alpha)$ est une image homomorphe de $\overline{M}_{n+1}(R;\alpha)$ de manière que (v. I 13) $\overline{M}_{n+1}(R_1, R_2)$ est la somme directe d'un module isomorphe à $M^*_{n+1}(R;\alpha)$

et du module $M^0_{n+1}(R_1, R_2)$ constitué par les couples $[\{C_1^{n+1}(\mathfrak{U})\}, \{C_2^{n+1}(\mathfrak{U})\}]$ dont l'image dans $M^*_{n+1}(R; \alpha)$ est zéro. Donc (v. III 11)

$$(1) \qquad P_{n+1}(R_1, \alpha_1) + P_{n+1}(R_2; \alpha_2) = P^*_{n+1}(R; \alpha) + P^0_{n+1}(R_1, R_2)$$

où $P^0_{n+1}(R_1, R_2)$ désigne le rang du module $M^0_{n+1}(R_1, R_2)$. Or, d'aprés 16, le module $M^0_{n+1}(R_1, R_2)$ est constitué par les couples de la forme $[\{C_3^{n+1}(\mathfrak{U})\}, \{C_3^{n+1}(\mathfrak{U})\}]$, où $C_3^{n+1}(\mathfrak{U})$ est un $(n+1, R)$-cycle mod α_3 dans R_3 et où le couple que nous venons d'écrire est considéré comme égal au couple $[\{\overline{C}_3^{n+1}(\mathfrak{U})\}, \{\overline{C}_3^{n+1}(\mathfrak{U})\}]$ si et seulement si

$$\{\overline{C}_3^{n+1}(\mathfrak{U})\} - \{C_3^{n+1}(\mathfrak{U})\} \sim 0 \text{ mod } \alpha_i \text{ dans } R_i$$

pour $i = 1$ et pour $i = 2$. Donc le module $M^0_{n+1}(R_1, R_2)$ est une image homomorphe du module $M_{n+1}(R_3, R; \alpha_3)$ de sorte que les cycles du module $M_{n+1}(R_3, R; \alpha_3)$ dont l'image dans le module $M^0_{n+1}(R_1, R_2)$ est zéro constituent le module $\mu_{n+1}(R_3; \alpha_3)$ (la notation est celle du n° 15). Donc (v. III 11)

$$(2) \qquad P_{n+1}(R_3; \alpha_3) = P^0_{n+1}(R_1, R_2) + \pi_{n+1}(R_3; \alpha_3).$$

18. De (15 (1) et de 17 (1), (2) on obtient le résultat définitif:

$$P_{n+1}(R_1; \alpha_1) + P_{n+1}(R_2; \alpha_2) + \pi_n(R_3; \alpha_3) + \pi_{n+1}(R_3; \alpha_3) =$$
$$= P_{n+1}(R; \alpha) + P_{n+1}(R_3; \alpha_3),$$

où $\pi_n(R_3; \alpha_3)$ est le rang du module constitué par tous les (n, R)-cycles mod α_3 dans R_2 homologues à zéro mod α_1 dans R_1 ainsi que mod α_2 dans R_2, deux tels cycles étant considérés comme égaux s'ils sont homologues mod α_3 dans R_3.

V. Compléments.

1. Dans ce qui précède, les coefficients de tous les cycles ont été pris dans l'ensemble $\mathfrak{R}$ des *nombres rationnels.* On ne peut remplacer $\mathfrak{R}$ par l'ensemble des *nombres entiers*, car alors les théorème I 7 et I 8 ne valent plus et, en conséquence, l'important théorème II 16 cesse d'être vrai. Or on peut choisir pour module un *module arithmétique* fixe $m = 2, 3, 4, \ldots$ et remplacer $\mathfrak{R}$ par l'ensemble $\mathfrak{R}_m$ consittué par tous les nombres entiers, *deux entiers congruents mod m étant considérés comme égaux.* Si $m = m_1 \cdot m_2$, les deux facteurs m_1 et m_2 étant *sans facteur commun*, on voit sans peine que le module constitué par les cycles mod m d'une quelconque des diverses sortes

considérées dans les Chapitres précédents est une *somme directe* du module constitué par les cycles mod m_1 et de celui constitué par les cycles mod m_2. [Ceci résulte immédiatement du fait connu que l'anneau (Ring) $\mathfrak{R}_m$ est une somme directe des deux anneaux $\mathfrak{R}_{m_1}$, $\mathfrak{R}_{m_2}$]. On peut donc se borner au cas où $m = p^h$, p étant un nombre premier $k = 1, 2, 3 \ldots$ Dans le cas $k = 1$ $(m = p)$ la théorie mod m est *formellement* identique à celle exposée aux Chapitres précédents; la raison en est simplement que l'ensemble $\mathfrak{R}_p$ constitue un *corps* comme l'ensemble $\mathfrak{R}$. Dans le cas $m = p^k$, $k > 1$, il y a des différences qui consistent principalement en ce qu'un module n'est plus caractérisé par un nombre cardinal *unique* (son rang); outre les nombres de Betti, on a ici à considérer encore des coefficients de torsion. Néanmoins, le contenu essentiel de la théorie reste le même.

2. Au Chap. II, nous avons pris comme famille fondamentale des réseaux dans un espace topologique R celle constituée par tous les réseaux *ouverts*. On peut aussi fonder la théorie sur les réseaux *fermés* (ce sont naturellement les réseaux dont les sommets sont des sousensembles fermés de R). Or nous allons prouver (dans les n^{os} 3—8), que, *si R est un espace topologique complètement normal, les deux manières de procéder sont absolument équivalentes.*

3. Soit donc R un espace topologique complètement normal et soit α un sousensemble fermé de R donné d'avance. Un réseau fermé $\mathfrak{U}_f$ et un réseau ouvert $\mathfrak{U}_g$ dans R soient appelés *isologues*, s'il existe une correspondance biunivoque entre les sommets $u_1, u_2, \ldots u_k$ de $\mathfrak{U}_f$ et ceux $U_1, U_2, \ldots, U_k$ de $\mathfrak{U}_g$ jouissant des propriétés suivantes:

1° $u_\nu \subset U_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq k)$;
2° $U_{\nu_1} \cdot U_{\nu_2} \cdot \ldots \cdot U_{\nu_h} \neq 0$ entraîne $u_{\nu_1} \cdot u_{\nu_2} \cdot \ldots \cdot u_{\nu_h} \neq 0$.
3° $\alpha \cdot U_{\nu_1} \cdot U_{\nu_2} \cdot \ldots \cdot U_{\nu_h} \neq 0$ entraîne $\alpha \cdot u_{\nu_1} \cdot \ldots \cdot u_{\nu_h} \neq 0$.

On a alors évidemment une correspondance biunivoque entre les $(n, \mathfrak{U}_f)$-cycles mod α et les $(n, \mathfrak{U}_g)$-cycles mod α et cette correspondance conserve les homologies mod α; nous dirons qu'on *transporte* un cycle de $\mathfrak{U}_f$ à $\mathfrak{U}_g$ ou réciproquement.

4. Soit $\mathfrak{U}_f$ un réseau fermé dans R. Il existe un réseau ouvert $\mathfrak{U}_g$ isologue a $\mathfrak{U}_f$.

Démonstration. Désignons par $u_1, u_2, \ldots, u_k$ les sommets de $\mathfrak{U}_f$. En appliquant aux sousensembles fermés α, u_1, $u_2, \ldots, u_k$

de R le théorème du Chap. III, n° 21 ($A = R$), on obtient des sousensembles ouverts $V, U_1, U_2, \dots, U_k$ de R. On voit sans peine que $U_1, U_2, \dots, U_k$ constituent un réseau ouvert $\mathfrak{U}_g$ isologue à $\mathfrak{U}_f$.

5. Soient $\mathfrak{U}_g$ un réseau ouvert donné dans R. Il existe un réseau fermé $\mathfrak{U}_f$ isologue à $\mathfrak{U}_g$.

Démonstration. Désignons par $U_1, U_2, \dots, U_k$ les sommets de $\mathfrak{U}_g$. D'après un lemme de M. Menger[1]) il existe des ensembles ouverts $V_1, V_2, \dots, V_k$ tels que 1° $\overline{V}_\nu \subset U_\nu$; 2° $\sum_1^k V_\nu = R$. Pour chaque combinaison $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_h)$ des indices $1, 2, \dots, k$ telle que l'ensemble $U_{\nu_1} \cdot U_{\nu_2} \cdot \dots \cdot U_{\nu_h}$ n'est pas vide, choisissons un point $p_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_h} \in U_{\nu_1} \cdot U_{\nu_2} \cdot \dots \cdot U_{\nu_h}$; ce point soit choisi dans α toujours lorsque cela est possible. Pour $\nu = 1, 2, \dots, k$ désignons par I_ν l'ensemble fini constitué par les points $p_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_h}$ tels qu'un des indices $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_h$ coïncide avec ν. Posons $u_\nu = \overline{V}_\nu + I_\nu$; on voit sans peine que $u_1, u_2, \dots, u_k$ sont les sommets d'un réseau fermé $\mathfrak{U}_f$ isologue à $\mathfrak{U}_g$.

6. Soit $\{C^n(\mathfrak{U}_g)\}$ un $(n, R)_g$-cycle[2]) mod α donné. A chaque réseau fermé $\mathfrak{U}_f$ attachons un réseau ouvert $\mathfrak{U}_g = I(\mathfrak{U}_f)$ isologue à $\mathfrak{U}_f$ et désignons par $C^n(\mathfrak{U}_f)$ le $(n, \mathfrak{U}_f)$-cycle mod α obtenu en transportant $C^n(\mathfrak{U}_g)$ de $\mathfrak{U}_g$ à $\mathfrak{U}_f$. Soit $\mathfrak{B}_f$ un affinement de $\mathfrak{U}_f$; soit $\mathfrak{U}_g = I(\mathfrak{U}_f)$, $\mathfrak{B}_g = I(\mathfrak{B}_f)$. Désignons par $u_1, u_2, \dots, u_k$ $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ les sommets de $\mathfrak{U}_f(\mathfrak{B}_f)$ et par $U_1, U_2, \dots, U_k$ $(V_1, V_2, \dots, V_k)$ les sommets correspondants de $\mathfrak{U}_g(\mathfrak{B}_g)$. Soit $\pi = Pr.\ (\mathfrak{B}_f, \mathfrak{U}_f)$; $\pi v_\nu = u_{\pi(\nu)}$. Remplaçons chaque sommet V_ν de $\mathfrak{B}_g$ par l'ensemble ouvert $V \cdot U_{\pi(\nu)}$; le réseau $\mathfrak{B}_g$ se transforme de cette manière en un nouveau réseau ouvert $\mathfrak{W}_g$ qui est évidemment un affinement simultané des deux réseaux $\mathfrak{U}_g$ et $\mathfrak{B}_g$; aussi on voit sans peine que $\mathfrak{W}_g$ est isologue à $\mathfrak{B}_f$. Posons

$$\pi'[V_\nu \cdot U_{\pi(\nu)}] = V_\nu, \quad \pi''[V_\nu \cdot U_{\pi(\nu)}] = U_{\pi(\nu)},$$

[1]) K. Menger, Dimensionstheorie, „Bemerkung" p. 156—160. M. Menger suppose l'espace R séparable; mais on voit bien que la démonstration est valable dans chaque espace complètement normal (même, plus généralement, dans chaque espace normal).

[2]) L'indice $g(f)$ signifie tout partout que l'on a pris les réseaux ouverts (fermés) comme famille fondamentale de réseaux.

de manière que $\pi' = Pr.(\mathfrak{W}_g, \mathfrak{V}_g)$, $\pi'' = Pr.(\mathfrak{W}_g, \mathfrak{U}_g)$. Posons

$$C'^n(\mathfrak{V}_g) = \pi' C^n(\mathfrak{W}_g), \quad C''^n(\mathfrak{U}_g) = \pi'' C^n(\mathfrak{W}_g)$$

de manière que

$$C^n(\mathfrak{V}_g) \sim C'^n(\mathfrak{V}_g) \bmod \alpha, \quad C^n(\mathfrak{U}_g) \sim C''^n(\mathfrak{U}_g) \bmod \alpha.$$

Il en résulte que

$$(1) \qquad C^n(\mathfrak{V}_f) \sim C'^n(\mathfrak{V}_f) \bmod \alpha, \quad C^n(\mathfrak{U}_f) \sim C''^n(\mathfrak{U}_f) \bmod \alpha,$$

où les cycles $C'^n(\mathfrak{V}_f)$ et $C''^n(\mathfrak{U}_f)$ s'obtiennent en transportant $C'^n(\mathfrak{V}_g)$ de $\mathfrak{V}_g$ à $\mathfrak{V}_f$ et $C''^n(\mathfrak{U}_g)$ de $\mathfrak{U}_g$ à $\mathfrak{U}_f$. Or il est évident que $C''^n(\mathfrak{U}_f) = \pi C'^n(\mathfrak{U}_f)$ de manière que les homologies (1) entraînent

$$(2) \qquad C^n(\mathfrak{U}_f) \sim \pi C^n(\mathfrak{V}_f) \bmod \alpha.$$

Donc $\{C^n(\mathfrak{U}_f)\}$ est un $(n, R)_f$-cycle mod α. Ce cycle n'est pas absolument déterminé, car l'opération $\mathfrak{U}_g = I(\mathfrak{U}_f)$ ne l'est pas. Or si l'on pose $\mathfrak{U}_f = \mathfrak{V}_f$ dans le raisonnement qui précède, la relation (2), (dans la quelle π est l'identité) montre que le cycle $\{C^n(\mathfrak{U}_f)\}$ est bien déterminé à une homologie mod α près.

7. Soit $\{C^n(\mathfrak{U}_f)\}$ un $(n, R)_f$-cycle mod α donné. A chaque réseau ouvert $\mathfrak{U}_g$ attachons un réseau fermé $\mathfrak{U}_f = I(\mathfrak{U}_g)$ isologue à $\mathfrak{U}_g$ et désignons par $C^n(\mathfrak{U}_g)$ le $(n, \mathfrak{U}_g)$-cycle mod α obtenu en transportant $C^n(\mathfrak{U}_f)$ de $\mathfrak{U}_f$ à $\mathfrak{U}_g$. Soit $\mathfrak{V}_g$ un affinement de $\mathfrak{U}_g$; soit $\mathfrak{U}_f = I(\mathfrak{U}_g)$, $\mathfrak{V}_f = I(\mathfrak{V}_g)$. Choisissons un affinement simultané $\mathfrak{W}_f$ des deux réseaux $\mathfrak{U}_f$ et $\mathfrak{V}_f$; soit $\pi' = Pr.(\mathfrak{W}_f, \mathfrak{V}_f)$, $\pi'' = Pr.(\mathfrak{W}_f, \mathfrak{U}_f)$. Soit $\mathfrak{W}_g^*$ un réseau ouvert isologue à $\mathfrak{W}_f$. Soit W^* un sommet arbitraire de $\mathfrak{W}_g^*$ et w le sommet correspondant de $\mathfrak{W}_f$; soit V le sommet de $\mathfrak{V}_g$ correspondant au sommet $\pi'\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{V}_f$; remplaçons W^* par l'ensemble $W = W^* \cdot V$. En procédant ainsi avec tous les sommets W^* de $\mathfrak{W}_g^*$, ce réseau se transforme en un nouveau réseau ouvert $\mathfrak{W}_g$, qui est évidemment un affinement de $\mathfrak{W}_g$; on voit sans peine que $\mathfrak{W}_g$ est isologue à $\mathfrak{W}_f$.

Désignons par $C'^n(\mathfrak{V}_g)$ $[C''^n(\mathfrak{U}_g)]$ le cycle obtenu en transportant $\pi' C^n(\mathfrak{W}_f)$ $[\pi'' C^n(\mathfrak{W}_f)]$ de $\mathfrak{V}_f$ a $\mathfrak{V}_g$ [de $\mathfrak{U}_f$ a $\mathfrak{U}_g$]; on voit sans peine (cf. **6** (1)) que

$$(1) \qquad C^n(\mathfrak{V}_g) \sim C'^n(\mathfrak{V}_g) \bmod \alpha, \quad C^n(\mathfrak{U}_g) \sim C''^n(\mathfrak{U}_g) \bmod \alpha.$$

Soit $\pi = Pr.(\mathfrak{V}_g, \mathfrak{U}_g)$, $\bar{\pi} = Pr.(\mathfrak{W}_g, \mathfrak{V}_g)$, donc $\pi\bar{\pi} = Pr.(\mathfrak{W}_g, \mathfrak{U}_g)$. Désignons par $C_0^n(\mathfrak{W}_g)$ le cycle obtenu en transportant $C^n(\mathfrak{W}_f)$ de

$\mathfrak{W}_f$ à $\mathfrak{W}_g$ et posons $C^n(\mathfrak{B}_g) = \bar{\pi}\, C_0^n(\mathfrak{W}_g)$, $C_0^n(\mathfrak{U}_g) = \pi\, \bar{\pi}\, C_0^n(\mathfrak{W}_g)$, de manière que

(2) $$C_0^n(\mathfrak{U}_g) = \pi\, C_0^n(\mathfrak{B}_g).$$

Or le raisonnement du Chap. II, n⁰ 12 est évidemment appliquable pour montrer que

(3) $$C'^n(\mathfrak{B}_g) \sim C_0^n(\mathfrak{B}_g) \bmod \alpha, \quad C''^n(\mathfrak{U}_g) \sim C_0^n(\mathfrak{U}_g) \bmod \alpha.$$

Des relations (1), (2), (3) on déduit

(4) $$C^n(\mathfrak{U}_g) \sim \pi\, C^n(\mathfrak{B}_g) \bmod \alpha.$$

Donc $\{C^n(\mathfrak{U}_g)\}$ est un $(n, R)_g$-cycle mod α. En posant $\mathfrak{U}_g = \mathfrak{B}_g$ dans le raisonnement qui précède, la relation (4) montre que ce cycle est bien déterminé à une homologie mod α près.

8. Les opérations considérées dans les deux n^{os} précédents étant évidemment inverses l'une à l'autre, on voit qu'il existe une correspondance biunivoque entre les deux modules $M_n(R; \alpha)_g$ et $M_n(R; \alpha)_f$. Or on voit sans peine que cette correspondance est une *isomorphie*, donc $P_n(R; \alpha)_g = P_n(R; \alpha)_f$. Les deux familles fondamentales composées respectivement de réseaux ouverts et de réseaux fermés sont donc bien équivalentes; or les réseaux ouverts sont peut-être plus commodes dans les applications; cf. le théorème III, 11 qui a joué un rôle si important au Chap. IV.

9. Revenons à la théorie générale de l'homologie exposée au Chap. II. Supposons que nous ayons choisi une certaine famille $\varkappa$ de sousensembles de R jouissant de la propriété que $A_1 \in \varkappa$, $A_2 \in \varkappa$ entraînent $A_1 + A_2 \in \varkappa$. Par un $(n, R)_\varkappa$-cycle mod α (α étant un sousensemble donné de R) nous voulons entendre un (n, R)-cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ mod α tel qu'il existe un ensemble $A \in \varkappa$ jouissant de la propriété $C^n(\mathfrak{U}) \subset A$ (dans le sens du Chap. II, n⁰ 5) pour chaque réseau $\mathfrak{U}$. Un $(n, R)_\varkappa$-cycle $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ mod α ne sera considéré comme homologue à zéro mod α que s'il existe un ensemble $B \in \varkappa$ tel que pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ on ait $K^{n+1}(\mathfrak{U}) \to C^n(\mathfrak{U})$ mod α, *la* $(n+1, \mathfrak{U})$ *chaîne étant contenue dans* B. En vertu de la propriété additive de la famille $\varkappa$, les $(n, R)_\varkappa$-cycles mod α constituent un *module* $M_n(R; \alpha)_\varkappa$, en considérant comme égaux deux cycles homologues dans le sens qui vient d'être précisé. Le rang $P_n(R; \alpha)_\varkappa$ de ce module est le *$n^{ième}$ nombre de Betti d'espèce $\varkappa$ de R.* Si $R \in \varkappa$, la nouvelle théorie ne diffère pas de la précédente.

10. Voici un cas particulier bien important des définitions qui viennent d'être posées. Soit R un espace *métrisable* où nous prenons les réseaux ouverts comme famille fondamentale; posons $\alpha = 0$. Soit $\varkappa$ la famille de sousensembles *compacts* de R, c'est-à-dire des ensembles $A \subset R$ tels que de chaque suite $x_n \varepsilon A$ on puisse extraire une autre y_n possédant un point limite $y \varepsilon A$. D'après un théorème connu de M. Hausdorff, les quasicomposantes d'un ensemble métrisable compact sont elles mêmes compactes et coïncident avec les composantes. Donc, d'après III, 14 et 17, on a $\{p\} \sim \{q\}$ au sens de la théorie d'espèce $\varkappa$ si et seulement s'il existe un *continu* (= ensemble compact et connexe) contenant p et q. Donc le nombre $P_0(R)_\varkappa$ est le nombre des *constituantes* de R, c'est-à-dire des semicontinus maximés, le nom semicontinu désignant un ensemble $A \subset R$ dont chaque couple de points appartient à un continu $C \subset A$.