Eduard Čech

Sur la théorie de la dimension

C. R. Acad. Sci. Paris 193 (1931), 976-977

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500996

et

$$Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) - \alpha = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Désignons par (E_α) un ensemble de polynomes correspondant au même coefficient α :

La condition nécessaire et suffisante pour que les zéros des polynomes $P(x)$ *appartenant à l'un ou à l'autre des ensembles* (E_{α_1}) *et* (E_{α_2}) *aient leurs modules bornés est que la famille des polynomes* $Q(x)$ *soit normale autour de l'origine. Dans ce cas les modules des zéros sont bornés pour toute valeur de* α.

ANALYSIS SITUS. — *Sur la théorie de la dimension.* Note (¹) de M. **Eduard Čech**, présentée par M. Élie Cartan.

1. Dans cette Note j'appelle *espace* un espace topologique R possédant les deux propriétés ci-après (²) : 1° si F_1, F_2 sont deux sous-ensembles *fermés* de R sans point commun, il existe deux sous-ensembles *ouverts* de R sans point commun contenant respectivement F_1 et F_2; 2° chaque sous-ensemble ouvert de R est une somme d'une infinité dénombrable de sous-ensembles fermés de R. Chaque sous-ensemble d'un espace est un espace. Chaque espace *distancié* (metrischer Raum) constitue un cas particulier de nos espaces.

2. $\dim R = -1$ si $R = 0$ et réciproquement. $\dim R \leqq n$ signifie que, A étant un sous-ensemble fermé de R et U un sous-ensemble ouvert de R contenant A, il existe un sous-ensemble ouvert V de R contenant A, contenu dans U et tel que $\dim H \leqq n - 1$, où H est la frontière de V. On sait que pour les espaces *séparables* cette définition de la dimension coïncide avec celle de Menger-Urysohn (³). Or j'ai démontré les trois théorèmes ci-après, qui ne l'étaient jusqu'à présent que pour les espaces séparables.

3. S étant un sous-ensemble arbitraire de R, on a $\dim S \leqq \dim R$ (⁴).

4. Lorsque $R = \sum_{i=1}^{\infty} S_i$, les ensembles S_i étant fermés dans R, si $\dim S_i \leqq n$ pour chaque i, on a aussi $\dim R \leqq n$ (⁵).

(¹) Séance du 16 novembre 1931.

(²) P. Urysohn, *Math. Annalen*, 94, 1925, p. 286, note (⁴¹) au bas de la page.

(³) K. Menger, *Dimensionstheorie*, Leipzig-Berlin, Teubner, 1928, p. 116.

(⁴) Menger, *loc. cit.*, p. 8[illegible].

(⁵) Menger, *loc. cit.*, p. 92.

5. Soit $R = \sum_{\nu=1}^{m} U_\nu$, les U_ν étant ouverts dans R; soit $\dim R = n$. Il existe des sous-ensembles ouverts V_i de R en nombre fini tels que : 1° $R = \Sigma \overline{V}_i$, où $\overline{V}_i$ est la fermeture de V_i; 2° chaque $\overline{V}_i$ fait partie d'un U_ν; 3° pour $2 \leqq \mu \leqq n+2$, si S_μ désigne l'ensemble de tous les points de R appartenant à μ au moins des ensembles $\overline{V}_i$, on a $\dim S_\mu \leqq n - r + 1$ [1].

6. Les démonstrations seront publiées dans un autre Recueil.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le minimum du rapport de certaines intégrales.* Note [2] de M. **Maurice Janet.**

1. J'ai déterminé [3] le minimum du rapport

$$\frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)^2 dx}{\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)^2 dx},$$

lorsque y est assujettie à s'annuler ainsi que ses $n-1$ premières dérivées aux extrémités de l'intervalle $(-1, +1)$. Le résultat trouvé peut s'énoncer sous une forme très simple : le minimum en question est égal au plus petit zéro de *la dérivée d'ordre* $n-1$ de

$$\cos\sqrt{\lambda}.$$

2. Le minimum (cf. G. Cimmino, *Bollettino della unione matematica italiana*, 8, p. 225, et M. Janet, *Bull. des Sc. math.*, 2ᵉ série, 55, 1931) du rapport

$$\frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)^2 dx}{\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left(\frac{d^{n-p} y}{dx^{n-p}}\right)^2 dx}, \qquad (n \geqq p \geqq 1),$$

lorsque y est assujettie à s'annuler ainsi que ses $n-1$ premières dérivées aux extrémités de l'intervalle $(-1, +1)$, est égal à la puissance $2p$ du plus petit zéro positif du déterminant

$$\| A_k(x) \quad j^{-2k}A_k(jx) \quad j^{-4k}A_k(j^2x) \quad \ldots \quad j^{-2(p-1)k}A_k(j^{p-1}x) \|$$
$$(k = n-2p,\ n-2p+1,\ \ldots,\ n-p-1).$$

---

[1] Menger, *loc. cit.*, p. 156.

[2] Séance du 16 novembre 1931.

[3] *Comptes rendus*, 190, 1930, p. 32.