Eduard Čech

Encore sur le théorème de Cauchy

Rendiconti Accad. d. L. Roma (6) 12 (1930), 286-289

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.
Estratto dal vol. XII, serie 6ª, 2º sem., fasc. 7-8. - Roma, ottobre 1930-VIII.

Matematica. — *Encore sur le théorème de Cauchy.* Nota [1] di E. Čech, presentata dal Corrisp. G. Fubini.

Dans la Note récente: *Une démonstration du théorème de Cauchy et de la formule de Gauss* [2] j'ai démontré l'énoncé suivant: *Soit* C *une courbe plane simple fermée positivement orientée rectifiable, désignons par* Γ *l'intérieur de* C *et posons* $\Delta = \Gamma + C$. *Soit* $f(z)$ *une fonction continue dans* Δ *et dérivable dans* Γ; *alors* $\int_C f(z)\,dz = 0$.

M. Picone m'a informé (dont je le remercie beaucoup) que le résultat n'est pas nouveau; il se trouve démontré dans la Note de M. Pollard *On the conditions for Cauchy's theorem*, « Proc. London Math. Soc. », vol. 21 (2), 1921, pp. 456–482. Le but de cette Note est d'en donner une nouvelle démonstration qui me semble plus simple que les deux précédentes. Je supposerai d'ailleurs comme connu le résultat particulier que l'on a $\int_P f(z)\,dz$, où P désigne un carré (ou, ce qui revient au même, un polygone aux côtés parallèles aux axes de coordonnées) contenu, ainsi que son intérieur, dans Γ.

Il suffit évidemment de démontrer que, δ étant un nombre positif donné, on a

$$(1)\qquad \left|\int_C f(z)\,dz\right| < 350\,\delta s\,,$$

s étant la longueur de C. Choisissons dans Γ un point fixe α et désignons par $\rho > 0$ sa distance de C. Il existe un nombre

$$(2)\qquad \eta > 0 \quad , \quad \eta < \frac{\rho}{2} \quad , \quad \eta < s$$

tel que pour z_1, z_2 appartenant à Δ

$$(3)\qquad |z_1 - z_2| < \eta \ \text{entraîne}\ |f(z_1) - f(z_2)| < \delta\,.$$

Il existe un nombre

$$(4)\qquad \varepsilon > 0 \quad , \quad \varepsilon < \frac{\eta}{14} \quad , \quad \varepsilon < s$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 settembre 1930.
(2) Ces « Rendiconti », mai 1930.

tel que pour z_1, z_2 appartenant à C

$$(5)\qquad |z_1 - z_2| < 7\varepsilon \text{ entraîne que la longueur de } C(z_1, z_2) \text{ est } < \frac{\eta}{2},$$

$C(z_1, z_2)$ étant le plus court arc de C aux extrémités z_1, z_2.

Pour $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ soit $Q_{m,n}$ le carré (intérieur + périmètre) à côté ε et au centre $(m + ni) \cdot \varepsilon$. Appelons *associés* les deux carrés $Q_{2m,2n}, Q_{2m+1,2n}$, ainsi que $Q_{2m,2n+1}, Q_{2m-1,2n+1}$. Soit Ω la somme de ceux des carrés $Q_{m,n}$ qui ou dont les associés rencontrent C. Ω est un continu borné dont la frontière se compose d'un nombre fini de polygones $P', P'' \cdots$ dont deux différents sont sans point commun.

On peut diviser C en un nombre $< \frac{s}{\varepsilon} + 1 < \frac{2s}{\varepsilon}$ d'arcs de longueur $< \varepsilon$; on en conclut que Ω contient au plus $\frac{16s}{\varepsilon}$ carrés Q_{mn}. Donc la longueur de $P', P'' \cdots$ est $< 49s$. Si le point z appartient à Ω, sa distance de C est $< 3\varepsilon$; donc, d'après (2) et (4), α n'appartient pas à Ω. La courbe C étant située à l'intérieur de Ω, un des polygones $P', P'' \cdots$ — désignons le par P — sépare α de C. Puisque α appartient à Γ, le point α est à l'intérieur de P et P est dans Γ. σ étant la longueur de P, on a

$$(6)\qquad \sigma < 49s;$$

on peut donc partager P (positivement orienté) en

$$(7)\qquad n < \frac{50s}{\varepsilon}$$

arcs P_ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ dont la longueur $\sigma_\nu \leqq \varepsilon$. Désignons par $u_{\nu-1}, u_\nu$ les extrémités de P_ν de manière que

$$(8)\qquad u_0 = u_n.$$

Les points u_ν faisant partie de Ω, leur distance de C est $< 3\varepsilon$. Il existe donc sur C des points v_ν $(0 \leqq v_\nu \leqq n)$ tels que

$$(9)\qquad v_0 = v_n;$$

les segments $[u_\nu, v_\nu]$ font partie de Δ et l'on a $|u_\nu - v_\nu| < 3\varepsilon$. Puisque $|u_\nu - u_{\nu-1}| < \varepsilon$, d'après (5) on a $s_\nu < \frac{\eta}{2}$, s_ν étant la longueur de $C_\nu = C(u_{\nu-1}, u_\nu)$.

Pour abréger l'écriture posons $\varphi(C_\nu) = \int\limits_{C_\nu} f(z)\,dz$ etc. D'après (8) et (9), on a

$$(10) \qquad \sum_1^n [\varphi(C_\nu) - \varphi(P_\nu)] = \sum_1^n \varphi(\gamma_\nu),$$

γ_ν étant la courbe (non simple) fermée contenue dans Δ qui se compose: 1° de l'arc C_ν; 2° du segment $[v_\nu, u_\nu]$; 3° de l'arc P_ν dont on a changé l'orientation; 4° du segment $[u_{\nu-1}, v_{\nu-1}]$. On voit que (v. (2) et (4))

(11) la longueur de γ_ν est $< s_\nu + \sigma_\nu + 6\varepsilon < \frac{\eta}{2} + 7\varepsilon < \eta < \frac{\rho}{2}$.

Donc aucune des courbes C_ν, P_ν, γ_ν ne contient pas α de sorte que la formule (10) reste valable lorsqu'on y remplace $f(z)$ par $\frac{1}{z-\alpha}$ ce qui donne

$$\sum_1^n [\psi(C_\nu) - \psi(P_\nu)] = \sum_1^n \psi(\gamma_\nu),$$

où $\psi(C_\nu)$, p. ex., est la variation de l'argument de $z - \alpha$ lorsque z parcourt C_ν. Or si z appartient à γ, (11) donne $|z - v_\nu| < \frac{\rho}{2}$, tandis que $|\alpha - v_\nu| \geqq \rho$. On peut donc séparer le point α de la courbe γ_ν par une droite (horizontale ou verticale) ce qui donne $\psi(\gamma_\nu) = 0$. Le point α étant situé à l'intérieur de P, on a $\sum_1^n \psi(P_\nu) = \psi(P) = 2\pi$. Il en résulte que

$$(12) \qquad \sum_1^n \psi(C_\nu) = 2\pi.$$

En choisissant un point fixe a de la courbe C désignons pour chaque z agrégé à C par $C(z)$ l'arc que l'on obtient en parcourant C au sens positif de a à z. La courbe C contient, pour $1 \leqq \nu \leqq n$, un arc différent de C_ν aux extrémités $v_{\nu-1}, v_\nu$; désignons le par C'_ν. Evidemment un des deux nombres $\varphi(C_\nu), \varphi(C'_\nu)$ est égal à $\varphi[C(v_\nu)] - \varphi[C(v_{\nu-1})]$; or $\varphi(C_\nu) - \varphi(C'_\nu) = \pm\, \varphi(C)$ de manière que

$$(13) \qquad \varphi(C_\nu) = \varphi[C(v_\nu)] - \varphi[C(v_{\nu-1})] + h_\nu \cdot \varphi(C),$$

h_ν étant un nombre entier, $|h_\nu| \leq 1$. Dans la formule (13), on peut évidemment remplacer $f(z)$ par $\frac{1}{z-\alpha}$, ce qui donne, d'après (8) et (9),

$$\sum_1^n \varphi(C_\nu) = \varphi(C) \cdot \sum_1^n h_\nu \,, \quad \sum_1^n \psi(C_\nu) = \psi(C) \cdot \sum_1^n h_\nu \,.$$

Or le point α appartenant à Γ, on a $\psi(C) = 2\pi$. Vu la formule (12), il en résulte que $\sum_1^n \varphi(C_\nu) = \varphi(C)$. D'autre part, $\sum_1^n \varphi(P_\nu) = \varphi(P) = = \int_P f(z)\, dz = 0$ d'après le cas particulier du théorème de Cauchy que nous supposons connu. Donc la formule (10) devient

$$\varphi(C) = \sum_1^n \varphi(\gamma_\nu) \,. \tag{14}$$

La courbe γ_ν étant fermée, on a

$$\varphi(\gamma_\nu) = \int_{\gamma_\nu} [f(z) - f(u_\nu)]\, dz$$

de manière que, d'après (3) et (11)

$$|\varphi(\gamma_\nu)| < \delta\,(s_\nu + \sigma_\nu + 6\varepsilon) \,.$$

Mais alors la formule (14) donne [v. (6) et (7)]

$$|\varphi(C)| < \delta\,(s + \sigma + 6\varepsilon n) < 350\,\delta s$$

et la formule (1) est démontrée.

On voit facilement que la démonstration que je viens d'achever s'étend sans peine, également à celle donnée dans la Note précédente, au cas plus général ou la frontière C de la région Γ se compose d'un nombre fini d'arcs simples rectifiables, ayant deux à deux au plus une extrémité en commun.

Roma, 1930 — Dott. G. Bardi, Tip. della R. Accad. Naz. dei Lincei.