Eduard Čech

Komplexní čísla na gymnasiu

Matematika a fysika ve škole 2 (1949-50), 132-135

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500968

Komplexní čísla na gymnasiu.

Prof. Dr EDUARD ČECH, *Praha*

Nauka o komplexních číslech se na gymnasiu probírala dosud pouze v malém rozsahu. Jedinou aplikací komplexních čísel bylo, že rovnice, které by jinak neměly řešení, zavedením těchto čísel se staly f o r m á l n ě řešitelnými. Avšak slovní úlohy vedoucí na rovnice, které se probíraly, byly bez výjimky toho druhu, že imaginární řešení rovnice nemělo žádného významu pro slovní úlohu rovnicí vyjádřenou a probírání imaginárních řešení jen zastíralo diskusi podmínek řešitelnosti problému.

U žáků nemohl potom nevzniknouti dojem, jako by nauka o komplexních číslech byla pouze samoúčelnou abstraktní theorií bez jakéhokoli životného významu.

Nové osnovy matematiky pro gymnasia jsou výrazem snahy soustředit pozornost v každé partii učiva na principiální logické otázky a zdůraznit co nejjasněji vzájemnou souvislost různých partií. Nauka o komplexních číslech je v nových osnovách poněkud rozšířena a vytržena ze své dosavadní isolace tím, že se mají probrat také základní geometrické aplikace těchto čísel. Jak je možné vyhověti v této partii duchu nových osnov do doby, než budou vydány nové učebnice? Srpnová didaktická konference ukázala potřebu nějakých pokynů v tomto směru, což je hlavním účelem tohoto článku.

Probírání komplexních čísel můžeme zcela dobře začíti tak, jak je to nastíněno v učebnici prof. Bydžovského, až na to, že bych doporučoval neodsouvat geometrické znázornění komplexních čísel až na konec, nýbrž užívat ho co nejhojněji od samého počátku. V jedné maličkosti bych doporučoval odchylku od citované učebnice. Na str. 43, řádek 3 (vydání z r. 1947) se zavádí i jako odmocnina $\sqrt{-1}$ *opatřená znaménkem* $+$ (kursiva moje). Já bych to raději formuloval tak, že i je nové číslo, s nímž se bude počítati (mimo jiné) podle pravidla $i \,.\, i = -1$, neboť co znamená „opatřiti znaménkem $+$“ dosud bezvýznamný symbol $\sqrt{-1}$? Po probrání základních početních výkonů s komplexními čísly můžeme (a po mém soudu musíme) dodatečně prokázati, že rovnice $x^2 = -1$, která v dosud probíraném oboru čísel reálných neměla žádný kořen, má v rozšířeném oboru čísel komplexních kořeny $x = i$ a $x = -i$ a žádný jiný, což není a priori samozřejmé.[1]) Ani potom není žádného důvodu, proč bychom měli psát

$$i = +\sqrt{-1}; \; -i = -\sqrt{-1} \qquad (*)$$

a ne naopak, leda že považujeme (*) za jednoznačnou definici symbolu $\sqrt{-1}$. Dále bych doporučoval jednu drobnou terminologickou odchylku: V citované učebnici se čísla tvaru bi (s výslovným vyloučením případu $b = 0$) nazývají čísly imaginárními. Já dávám přednost tomu, nazývati čísla tvaru bi čísly ryze imaginárními (a to i pro $b = 0$, takže číslo 0 patří potom i mezi čísla reálná i mezi čísla ryze imaginární), kdežto imaginárními čísly rozumím čísla tvaru $a + bi$, kde $a \neq 0$. Je to

---

[1]) To můžeme provésti tak, že dokážeme, že i v oboru komplexních čísel platí věta, že součin je roven nule pouze tehdy, je-li aspoň jeden činitel roven nule, načež užijeme indentity $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$. Můžeme také rovnici $x^2 = -1$ neboli $x \,.\, x = -1$ rozřešit geometricky na základě znázornění násobení komplexních čísel, o kterém si promluvíme později. Nejlépe je to provésti obojím způsobem, neboť dokázati touž věc dvěma podstatně různými způsoby je vždy velmi instruktivní.

sice subjektivní, ale každá terminologie má býti *důsledná*, čemuž v daném případě není, neboť na str. 88, řádek 13 zdola, a na str. 90, řádek 15 shora, musíme zřejmě slovo „imaginární“ chápat ve smyslu „nereálný“ mnou doporučovaném; rovněž tak na str. 98, řádek 7 zdola.

O geometrickém znázornění komplexních čísel jsem se již zmínil. (Vyskytuje se v učebnici Bydžovského, ale není o něm řeč v učebnici Mukově.) Nesmíme se však spokojiti pouhým znázorňováním komplexních čísel samotných, nýbrž důležité je zejména probrati znázornění základních početních výkonů s těmito čísly. Jelikož znázornění nepřímého početního výkonu je snadným důsledkem znázornění příslušného přímého výkonu, je hlavní probrat znázornění sčítání a násobení. — U sčítání je věc velmi jednoduchá a známá, pročež se zde nebudu o tom šířiti a omezím se na stručný popis jednoho způsobu, jak probrat geometrický význam násobení komplexních čísel. Nejprve vyložíme, což je zcela snadné, že při reálném $c \neq 0$ přechod od čísla $x + yi$ k číslu $(x + yi)c$ znamená homothetii se středem v počátku. Neméně snadno potom ukážeme, že přechod od čísla $x + yi$ k číslu $(x + yi)i$ resp. k číslu $(x + yi)(-i)$ znamená rotaci kolem počátku o pravý úhel v kladném resp. v záporném smyslu. Spojením obou výsledků dospějeme ke geometrickému významu přechodu od čísla $x + yi$ k číslu $(x + yi) . ci$. Nyní přistoupíme k obecnému případu násobení komplexního čísla $x + yi$ libovolným komplexním číslem $a + bi \neq 0$. Pro stručnost označím obecně $[x + y\,i]$ bod, který je obrazem komplexního čísla $x + yi$. Body $[0]$, $[x]$, $[x + yi]$, $[yi]$ jsou vrcholy obdélníka P, při čemž pravý úhel $\sphericalangle\, [x]\, [0]\, [yi]$ vznikne otáčením v kladném nebo v záporném smyslu podle toho, zda čísla x, y mají stejná či nestejná znamení. (Pro stručnost předpokládám $x \neq 0$, $y \neq 0$.) Ježto geometrický smysl násobení pro případ jednoho činitele reálného nebo ryze imaginárního je nám již znám, dovedeme umístiti body $[x(a + bi)]$, $[yi(a + bi)]$ a konstatujeme, že $\sphericalangle\, [x(a + bi)]\, [0]\, [yi(a + bi)]$ je pravý úhel téhož smyslu jako pravý úhel $\sphericalangle\, [x]\, [0]\, [yi]$. Ježto geometrický smysl sčítání komplexních čísel je nám také již znám a ježto

$$(x + yi)(a + bi) = x(a + bi) + yi(a + bi),$$

konstatujeme, že body $[0]$, $[x(a + bi)]$, $[(x + yi)(a + bi)]$, $[yi(a + bi)]$ jsou vrcholy obdélníka P'. Posléze konstatujeme, že rotace kolem počátku o úhel $\sphericalangle\, [1]\, [0]\, [a + bi]$ kombinovaná s homothetií o poměru rovném $|a + bi|$ převede obdélník P v obdélník P' a speciálně bod $[x + yi]$ v bod $[(x + yi)(a + bi)]$, čímž je nalezen geometrický význam násobení komplexních čísel v obecném případě. Samozřejmě ve škole nebudeme provádět explicitně obecnou úvahu, nýbrž provedeme rozbor v několika konkretních numerických příkladech, na př. $x + yi = 2 - i$, $a + bi = -3 - 4i$ (je nutné vzít rozmanitá znamení čísel x, y, a, b). Důležité je zdůraznit ve výsledku zvláště důležitý speciální případ, kdy

$a + bi$ je komplexní jednotka, t. j. kdy prostá hodnota $|a + bi|$ je rovná jedné. V tomto případě bod $[(x + yi)(a + bi)]$ vznikne z bodu $[x + yi]$ rotací kolem počátku o úhel $\sphericalangle [1][0][a + bi]$. Připomeneme zvláštní případy komplexních jednotek $+1, -1, +i, -i$ probrané už dříve.

Aplikace jsou nasnadě. Na základě geometrické interpretace násobení dojdeme snadno ke geometrické interpretaci mocniny $(x + yi)^n$, zejména k výsledku že algebraický problém řešení rovnice $x^n = 1$ v komplexním oboru je úplně ekvivalentní s geometrickým problémem konstrukce pravidelného n-úhelníka, což můžeme podrobně rozvésti v případech $n = 3, 4, 5, 6$. Můžeme se také zmínit o tom, že tímto způsobem byla prokázána nemožnost euklidovské konstrukce pravidelného sedmiúhelníka a devítiúhelníka a možnost euklidovské konstrukce pravidelného sedmnáctiúhelníka. Rovněž na nemožnost euklidovské konstrukce trisekce úhlu můžeme při této příležitosti poukázati.

Nejdůležitější je ovšem aplikace na goniometrii. Ježto goniometrické funkce ostrého úhlu podle nových osnov budou známy již před probíráním komplexních čísel, konstatujeme, že jestliže obraz komplexní jednotky $a + bi$ leží v prvém kvadrantu, t. j. jestliže je $a > 0$, $b > 0$, $|a + bi| = 1$, platí identita

$$a + bi = \cos\varphi + i\sin\varphi, \text{ kde } \varphi = \sphericalangle [1][0][a + bi].$$

Rozšíření této identity na zcela libovolné komplexní jednotky je ekvivalentní s rozšířením definice funkcí kosinus a sinus na libovolné úhly. Na základě geometrické interpretace násobení komplexních čísel dostáváme ihned Moivreovu identitu

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$$

shrnující obě známé formule pro $\cos(\alpha + \beta)$ a pro $\sin(\alpha + \beta)$ ve velmi přehledném tvaru. Tento způsob odvození vzorců pro goniometrické funkce součtu dvou úhlů má mimo jiné tu přednost, že můžeme probrati na ráz všecky možné případy velikosti daných úhlů. Hlavní a zásadní výhoda je ovšem v tom, že žáci jasně vidí, jaké překvapující souvislosti jsou mezi zdánlivě velmi odlehlými partiemi matematiky. Celá nauka o komplexních číslech, budeme-li ji probírati tak, aby vynikly principy a aby myšlenkové procesy nebyly zastírány přeceňováním mechanického výcviku, bude možná v dohledné době patřit mezi nejoblíbenější partie gymnasijního učiva jak pro učitele, tak i pro žáky. Je pouze třeba se nebát počátečních obtíží, které při každé změně vyučovacího programu jsou nevyhnutelné.