Eduard Čech

Neúplná čísla

Střední škola : časopis pro středoškolskou pedagogiku a didaktiku, roč. 22 (1941/1942), č. 1, 20-25 a č. 2, 94-99

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500958

Dr. Eduard Čech (Brno):

Neúplná čísla.

1. Úvod. Jak známo, učí se u nás této partii aritmetiky v sekundě na konci školního roku; ve velké řadě tříd se toto vyučování v praksi redukovalo skoro jen na t. zv. zkrácené počítání. Učební osnovou z r. 1939 bylo však zkrácené počítání z vyučovacího programu výslovně vyloučeno; tím vznikl pro vyučovací praksi problém, který, pokud je mi známo, pokusil jsem se dosud pouze já sám nevyhýbavě řešiti, a to ve své Aritmetice pro sekundu, která je v aprobačním řízení. Moje pojetí nauky o neúplných číslech se liší od pojetí běžných učebnic nejen metodicky, nýbrž především věcně. Hlavním úkolem tohoto článku je podati profesorům elementární, ale rigorosní věcný výklad aritmetiky neúplných čísel v rámci učební osnovy nižší střední školy (odst. 2 až 10 tohoto článku). Zdá se mi totiž, že je v této partii elementární matematiky snad ještě ve větší míře než v kterékoli jiné důkladná znalost věci první podmínkou úspěchu při vyučování; mimoto bylo o tomto předmětu daleko méně psáno než o jiných částech elementární matematiky. Na tento věcný výklad navazuji několik poznámek o vyučování (odst. 11 a 12 tohoto článku). V aplikacích matematiky jsou neúplná čísla jistě daleko důležitější než mnohé jiné partie středoškolské matematiky, a jak jsem již uvedl, bylo o nich dosud velmi málo psáno. Proto doufám, že bude tento článek v kruzích středoškolských profesorů se zájmem čten a že jim bude vítaným podnětem k přemýšlení a k hledání vlastních metodických cest.

2. Co jsou neúplná čísla? Výsledek měření (v obecném smyslu, patří sem tedy také na př. vážení nebo měření času) nelze přesně vyjádřiti jedním číslem. Ale z toho nikterak neplyne, že by snad *matematické úvahy* o neúplných číslech byly méně přesné než na př. matematické úvahy o shodnosti trojúhelníků. Měřím-li na př. délku nějaké úsečky přesně na milimetry a najdu-li 37,4 cm, pak rovnice $u = 37{,}4$, ve které u znamená pravou délku té úsečky a jednotka je 1 cm, je prostě *nesprávná*, t. j. není matematicky vhodným vyjádřením provedeného měření. Správná matematická formulace je

$$37{,}35 < u < 37{,}45;$$

není v ní *jeden* numerický údaj, nýbrž *dva*. T. zv. neúplné číslo je něco jiného než to, čemu se v ryzí matematice říká číslo*); je to, čemu se v ryzí matematice říká *interval*. K určení intervalu je třeba *dvou* čísel, která se jmenují *dolní a horní mez*. V našem příkladě je dolní mez 37,35 a horní 37,45. V praksi se neúplné číslo obyčejně nepopisuje pomocí dolní a horní meze, nýbrž pomocí dvou jiných čísel, která nazvu *přibližná hodnota a chyba*. Je-li α dolní mez, β horní mez, c přibližná hodnota a ε chyba, jest

$$c = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{2}, \tag{1}$$

z čehož plyne

$$\alpha = c - \varepsilon, \quad \beta = c + \varepsilon. \tag{2}$$

Neúplné číslo píšeme nejčastěji ve tvaru

$$c + \varepsilon, \tag{3}$$

který připomíná vztahy (2).

Kdežto α, β, c a ε jsou čísla, není t. zv. *pravá hodnota* u neúplného čísla číslem, nýbrž je to, čemu v ryzí matematice říkáme *proměnná*. Vztah mezi pravou hodnotou a dolní a horní mezí je matematicky vyjádřen formulí

$$\alpha < u < \beta, \tag{4}$$

s níž ekvivalentní je

$$c - \varepsilon < u < c + \varepsilon \tag{5}$$

nebo

$$|u - c| < \varepsilon. \tag{6}$$

V hořejším příkladě $(37{,}4 \pm 0{,}05)$ cm byla nepřesnost měřicích přístrojů hlavním důvodem zavedení neúplného čísla. V jiných příkladech vystupuje jasněji jiný neméně důležitý důvod, totiž kolísání měřené veličiny. Na př. vzdálenost Země od Slunce můžeme vyjádřiti neúplným číslem 23400 ± 400, při čemž jednotkou je rovníkový poloměr Země. To neznamená, že bychom neuměli určit vzdálenost Země od Slunce s chybou mnohem menší než 400 zemských

*) Slovem číslo rozumím v tomto článku *kladné reálné číslo*.

poloměrů, nýbrž chyba v našem neúplném čísle pochází především z toho, že se vzdálenost Země od Slunce stále mění. Podobně na př. počet obyvatel určitého města v určitém roce lze vyjádřiti jen neúplným číslem.

3. **Poměrná chyba.** Místo názvu chyba užíváme také určitějšího názvu *prostá chyba* na rozdíl od *poměrné chyby.* Poměrnou chybou neúplného čísla $c \pm \varepsilon$ rozumíme číslo

$$p = \frac{\varepsilon}{c}; \tag{7}$$

je tedy

$$\varepsilon = p\,c \tag{8}$$

Když u znamená na př. délku, jsou také α, β, c, ε délky. Naproti tomu poměrná chyba p je vždy *nepojmenované číslo,* t. j. numerická hodnota p je nezávislá na volbě jednotky pro měřené veličiny. To je formální důvod, proč za míru „přesnosti" neúplného čísla nevolíme ε, nýbrž p. Ze dvou neúplných čísel považujeme za přesnější to, jehož poměrná chyba je menší. Jelikož bereme v úvahu pouze čísla kladná, je $\alpha = c - \varepsilon > 0$, tedy $p < 1$. Ale v praksi nazýváme neúplnými čísly pouze takové intervaly, u nichž je p velmi malé, jistě menší než 0,1 (zpravidla mnohem menší). Když na př. víme o váze nějakého předmětu pouze tolik, že je větší než 1 dkg a menší než 1 q, jistě nemluvíme o neúplném čísle (bylo by $p = 0{,}9998$).

4. **Shovívavé nazírání na neúplná čísla.** Vraťme se k úsečce, o které jsme mluvili v odst. 2 a jejíž délka byla vyjádřena neúplným číslem $(37{,}4 \pm 0{,}05)$ cm. Podle toho, co bylo řečeno v citovaném odstavci, bylo by možné, že by skutečná délka měřené úsečky byla 37,44995 cm, ale bylo by nemožné, aby skutečná délka byla 37,45005 cm. Toto stanovisko je formálně správné, ale rozmyslíme-li si, jaký cíl nás vedl a jakých prostředků jsme užili, když jsme provedli nějaké praktické měření, uznáme stejně v příkladě délky $(37{,}4 \pm 0{,}05)$ cm jako v každém příkladě jiném, že nestojí za to a není ani vhodné, býti tak striktní. Neboť když jsme provedli měření s výsledkem $(37{,}4 \pm 0{,}05)$ cm, nezáleželo nám buďto na desetinách milimetru nebo jsme je nedovedli spolehlivě rozpoznat. Připustíme-li tedy možnost skutečné délky 37,44995 cm, nesmíme možnost délky 37,45005 cm pouze o tisícinu milimetru větší příliš energicky zavrhovat. Proto na neúplné číslo $c + \varepsilon$ budeme nazírati takto: pravá hodnota se liší od přibližné hodnoty o rozdíl, který je buďto menší než ε nebo se málo liší od ε. Podrobněji řečeno [v příkladě délky $(37{,}4 \pm 0{,}05)$ cm]: skutečná délka je pravděpodobně menší než 37,45 cm a větší než 37,35 cm; není však vyloučeno, že je skutečná

délka o malinko větší než 37,45 cm nebo o malinko menší než 37,35 cm; je-li skutečná délka větší než 37,45 cm, pak přesahuje 37,45 cm jistě o podstatně méně než 0,05 cm; je-li skutečná délka menší než 37,35 cm, pak se jí nedostává do 37,35 cm jistě podstatně méně než 0,05 cm. Stručně: skutečná délka se liší od 37,4 cm, nejvýš asi o 0,05 cm.

5. **Úkol aritmetiky neúplných čísel.** Kdyby při neúplných číslech šlo jen o veličiny přímo měřené a o chyby s měřením spojené, patřily by začátky vyučování neúplným číslům nesporně do hodin fysiky, nikoli aritmetiky. Ale často veličina u, o jejíž numerickou hodnotu se zajímáme, je funkcí několika jiných veličin,

$$u = f(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

při čemž je přímé měření mnohem snazší u veličin u_1, $u_2, \ldots, u_n$ nežli u veličiny u. Tím vzniká aritmetický problém výpočtu přibližné hodnoty a chyby veličiny u z přibližných hodnot a chyb veličin $u_1, u_2, \ldots, n_n$. To je právě úkol *aritmetiky* neúplných čísel; nás bude zajímati pouze případ, kdy f je některý ze základních výkonů početních, tedy $u = u_1 + u_2$ nebo $u = u_1 - u_2$ nebo $u = u_1 u_2$ nebo $u = u_1 : u_2$. Je zajímavé (ač je to mimo rámec elementární matematiky), že náš aritmetický problém má řešení platné pro „libovolnou" funkci f. Je to řešení *asymptotické,* t. j. nejsou to formule přesné, nýbrž správné pouze při shovívavém nazírání na neúplná čísla, při čemž však odchylka od přesných formulí je tím bezvýznamnější, čím menší jsou poměrné chyby veličin $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Označme c přibližnou hodnotu a ε chybu veličiny u; dále nechť (pro $i = 1, 2, \ldots, n$) je c_i přibližná hodnota a ε_i chyba veličiny u_i. Zmíněné asymptotické formule jsou

$$c = f(c_1, c_2, \cdots, c_n), \tag{9}$$

$$\varepsilon = \left|\frac{\partial f}{\partial u_1}\right| \varepsilon_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial u_2}\right| \varepsilon_2 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial u_n}\right| \varepsilon_n, \tag{10}$$

kde se v parciálních derivacích za $u_1, u_2, \ldots, n_n$ dosadí jejich přibližné hodnoty. „Odvození" vzorců (9) a (10), t. j. úvaha o tom, do jaké míry lze přesné formule těmito asymptotickými formulemi nahraditi, spočívá na známé Taylorově formuli; je zbytečné, abych to v tomto článku blíže rozváděl. Vzorec (9) je zvláště jednoduchý: říká, že k výpočtu přibližné hodnoty c stačí znáti pouze přibližné hodnoty $c_1, c_2, \ldots, c_n$, t. j., že c nezávisí na $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ (což je ovšem pouze asymptoticky správné). Podle vzorce (10) ε už na $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ závisí, ale velmi jednoduše (lineárně a homogenně). Při sčítání a odčítání jsou vzorce (9) a (10) přesné; vzorec (10) [ne však vzorec (9)] je i při násobení přesný; při dělení jsou oba vzorce asymptotické.

6. Sčítání a odčítání neúplných čísel. Označme α dolní mez, β horní mez, c přibližnou hodnotu a ε chybu veličiny $u = u_1 + u_2$; obdobný význam nechť mají α_1, β_1, c_1, ε_1 pro veličinu u_1 a α_2; β_2, c_2, ε_2 pro veličinu u_2. Snadnou úvahou dostaneme

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \qquad \beta = \beta_1 + \beta_2,$$

z čehož plyne

$$c = c_1 + c_2, \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \tag{11}$$

$$p = \frac{c_1 p_1 + c_2 p_2}{c_1 + c_2}. \tag{12}$$

Ze vzorce (12) plyne pozoruhodný výsledek

$$\min.\,(p_1, p_2) \leqq p \leqq \max.\,(p_1, p_2), \tag{13}$$

ve kterém platí rovnost pouze pro $p_1 = p_2$. Přesnost součtu je tedy mezi přesnostmi jednotlivých sčítanců.

Při odčítání máme podobné vzorce (označení už snad není třeba explicite popisovat):

$$\alpha = \alpha_1 - \beta_2, \qquad \beta = \beta_1 - \alpha_2,$$

$$c = c_1 - c_2, \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \tag{14}$$

$$p = \frac{c_1 p_1 + c_2 p_2}{c_1 - c_2}. \tag{15}$$

Není žádné obdoby ke vzorci (13); rozdíl může býti mnohem nepřesnější než menšenec a menšitel. Je-li c_1 mnohem menší než c_2, může býti p tak velké, že nelze mluvit o neúplném čísle, leda že jsou čísla p_1 a p_2 velmi malá.

7. Násobení neúplných čísel. Při obdobném označení jako v odst. 6 jest

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2, \qquad \beta = \beta_1 \beta_2,$$

z čehož plynou přesné formule

$$c = c_1 c_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2, \tag{16}$$

$$\varepsilon = c_2 \varepsilon_1 + c_1 \varepsilon_2, \tag{17}$$

$$p = \frac{p_1 + p_2}{1 + p_1 p_2}. \tag{18}$$

Asymptotické hodnoty c a p označíme na rozdíl od přesných hodnot hvězdičkou; u ε je to zbytečné, neboť $\varepsilon^* = \varepsilon$. Jest

$$c^* = c_1 c_2, \tag{19}$$

$$p^* = p_1 + p_2. \tag{20}$$

Přesný interval od $c - \varepsilon$ do $c + \varepsilon$ a asymptotický interval od $c^* - \varepsilon$ do $c^* + \varepsilon$ mají stejnou délku, ale asymptotický interval je posunut doleva o délku $\varepsilon_1 \varepsilon_2$. Jsou-li obě poměrné chyby p_1, p_2, menší než $\delta (0 < \delta < 1)$, je velikost posunutí menší než

$\frac{1}{2}\,\delta$ krát společná délka obou intervalů, takže posunutí je prakticky bezvýznamné.

8. **Dělení neúplných čísel.** Zde jest

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\beta_2}, \quad \beta = \frac{\beta_1}{\alpha_2},$$

z čehož plynou přesné formule

$$c = \frac{c_1 c_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2}{c_2^2 - \varepsilon_2^2}, \tag{21}$$

$$\varepsilon = \frac{c_1 \varepsilon_2 + c_1 \varepsilon_2}{c_2^2 - \varepsilon_2^2}, \tag{22}$$

$$p = \frac{p_1 + p_2}{1 + p_1 p_2}. \tag{23}$$

Asymptotické formule jsou

$$c^* = \frac{c_1}{c_2}, \tag{24}$$

$$\varepsilon^* = \frac{c_2 \varepsilon_1 + c_1 \varepsilon_2}{c_2^2}, \tag{25}$$

$$p^* = p_1 + p_2. \tag{26}$$

Abychom porovnali přesný interval s asymptotickým, uvažme, že asymptotická dolní [horní] mez je $c^* - \varepsilon^*$ [$c^* + \varepsilon^*$] a pišme přesnou dolní [horní] mez ve tvaru $c^* - h\varepsilon^*$ [$c^* + k\varepsilon^*$] Snadným počtem najdeme

$$h = \frac{1}{1 + p_2}, \quad k = \frac{1}{1 - p_2}.$$

Tedy z asymptotického intervalu dostaneme přesný interval, když napravo připojíme interval, jehož délka je $\frac{p_2}{2(1-p_2)}$ krát délka asymptotického intervalu a nalevo ubereme interval, jehož délka je $\frac{p_2}{2(1+p_2)}$ krát délka asymptotického intervalu. Je-li p_2 malé, jsou to změny prakticky bezvýznamné.

(Dokončení příště)

Dr. Eduard Čech (Brno):

Neúplná čísla.

(Dokončení.)

9. Úprava neúplných čísel. U neúplných čísel získaných přímým měřením mívá chyba zpravidla jedinou platnou cifru a přibližná hodnota nemívá žádnou cifru (různou od nuly) nižšího řádu, než je řád platné cifry v chybě. Jinak je tomu u neúplných čísel, která získáme z neúplných čísel právě popsaného tvaru provedením nějakých početních výkonů. Má-li na př. obdélník rozměry $(47{,}6 \pm 0{,}05)$ cm, $(38{,}3 \pm 0{,}05)$ cm, dostaneme užitím asymptotické formule pro plošný obsah neúplné číslo

$$(1823{,}08 \pm 4{,}295)\ \mathrm{cm}^2$$

neobvyklého tvaru. Proto provádíme ve výsledku *úpravu*. Za prakticky výhodnou považuji následující úpravu, třebaže činí v nepříznivých případech dosti značný nárok na „shovívavost“. Danou chybu můžeme vždy psáti ve tvaru $\varepsilon = (n - \vartheta) . 10^k$, kde n má některou z hodnot, 2, 3, ..., 10, $0 \leqq \vartheta < 1$ a $k \gtreqless 0$ je celé. Danou přibližnou hodnotu můžeme psáti ve tvaru $c = (N + \xi) . 10^k$, kde N je celé a

$|\xi| \leq \frac{1}{2}$. Za upravené neúplné číslo volíme

$$c^* \pm \varepsilon^* = N \,.\, 10^k \pm n \,.\, 10^k \,.$$

Je tedy

$$c - \varepsilon = c^* - \lambda \varepsilon^*, \quad c + \varepsilon = c^* + \mu \varepsilon^*,$$

kde

$$\lambda = 1 + \frac{\xi - \vartheta}{n}, \quad \mu = 1 - \frac{\xi + \vartheta}{n}.$$

V hořejším příkladě zní upravený výsledek (1823 ± 5) cm². Úprava může zvýšit poměrnou chybu v nepříznivých případech až asi dvakrát; na př. neúplné číslo 24,24 ± 1,01 má poměrnou chybu $\frac{1}{24}$, upravené neúplné číslo 24 ± 2 má poměrnou chybu $\frac{1}{12}$. [Takový nepříznivý případ nastane pouze, když je $n = 2$ a současně je ϑ blízké jedné.] Mimo zvýšení poměrné chyby činí úprava, jak již bylo řečeno, někdy dosti značné nároky na „shovívavost"; bez shovívavého nazírání bylo by nutné v nepříznivých případech zvýšit ε^* až asi o čtvrtinu; na př. z neúplného čísla 37,5 ± 2 dostaneme úpravou 37 ± 2 nebo 38 ± 2; bez shovívavého nazírání bychom musili, ať už přibližnou hodnotu upravíme na 38 či na 37, zvýšiti chybu z hodnoty 2 na hodnotu $2\frac{1}{2}$ o čtvrtinu větší. Tyto nepříznivé případy nastanou pouze pro $n = 2$ a dalo by se jim snadno čeliti tím, že by se pro $n = 2$ (po případě i pro $n = 3$) prováděla úprava jinak. Ale myslím, že nevýhody navrhované úpravy nejsou tak zlé, aby stály za ztrátu jednotného jednoduchého předpisu.

Vedle popsané úpravy (nazveme ji určitěji *hrubou úpravou*), zavedeme si ještě *malou úpravu*. Ta spočívá v tom, že u chyby podržíme jen první dvě platné cifry a u přibližné hodnoty podržíme všecky platné cifry až po tu, která je téhož řádu jako poslední podržená hodnota v chybě. Na př. z neúplného čísla 372,84 ± 5,76, dostaneme malou úpravou 372,8 ± 5,7 a hrubou úpravou 373 ± 6. Malá úprava je tehdy na místě, když od veličin přímo měřených nedospějeme k veličině, o kterou se zajímáme, jedním početním výkonem, nýbrž řadou několika početních výkonů. Tu provádíme po každém jednotlivém početním výkonu malou úpravu, jen po posledním hrubou. Kdybychom prováděli hrubou úpravu po každém jednotlivém početním výkonu, daly by se snadno sestaviti příklady, kde by při každé úpravě nastal tak nepříznivý případ, že by místo správného intervalu vyšel nakonec interval ležící zcela vně správného intervalu. Kdybychom naopak po jednotlivých početních výkonech (mimo poslední) neprováděli žádnou úpravu, daly by se snadno sestaviti příklady, kde by prováděný počet byl velmi namáhavý, při čemž by zvýšení námahy mělo jen zcela bezvýznamný vliv na přesnost výsledku.

10. **Zaokrouhlená čísla.** Důležitým zvláštním případem neúplných čísel jsou *čísla zaokrouhlená.* To jsou neúplná čísla tvaru

$$N.\,10^k \pm \frac{1}{2}.\,10^k,$$

kde $N > 0$ a $k \gtreqless 0$ jsou čísla celá. U veličin *přímo měřených* lze se zajisté omeziti na zaokrouhlená čísla. Měříme-li na př. nějakou délku, měříme zpravidla přesně na metry nebo přesně na desetiny milimetru atp., t. j. výsledek měření je zaokrouhlené číslo. Proto je nutné při probírání neúplných čísel míti zvláštní zřetel k zaokrouhleným číslům. Ale *omezit se při počítání* neúplnými čísly na zaokrouhlená čísla považuji za málo vhodné. Když na př. strana čtverce je $(46 \pm 0{,}5)$ mm, je obvod (184 ± 2) mm. Tento jednoduchý výsledek lze vyjádřiti zaokrouhleným číslem pouze se značným snížením přesnosti.

Také při zaokrouhlování čísel je podle mého soudu na místě shovívavé nazírání. Nechť na př. $k = 0$, t. j. zaokrouhlujme na jednotky. Při shovívavém nazírání můžeme zaokrouhlit na hodnotu N (N celé číslo), každé číslo tvaru $N + \xi$, kde ξ je nula, kladné nebo záporné a $|\xi|$ je nejvýš o malinko větší, než $\frac{1}{2}$. Tedy na př. číslo 537,498 můžeme zaokrouhlit podle libosti na 537 nebo na 538. Samozřejmě zaokrouhlíme raději na 537, ale 538 je zrovna tak dobré. Zdali 537,5 zaokrouhlíme na 537 či na 538, je už zcela jedno. Je pravda, že existuje jakési pravidlo, které si nalezlo cestu do „Názvů a značek", podle něhož se mezi oběma možnými hodnotami 537 a 538 dá jednoznačně rozhodnout. Ale to je pravidlo „právnické", matematicky úplně bezcenné. Ostatně čísla, která zaokrouhlujeme, jsou obyčejně sama už neúplná a pak nám to pravidlo nepomůže nic. Na př. neúplné číslo

$$537{,}4999999 \pm 0{,}0000004$$

má chybu menší než 10^{-6} přesto bez shovívavého nazírání bylo by nemožné zaokrouhlit je na celky.

11. **Neúplná čísla v sekundě.** Vyučování aritmetice neúplných čísel v sekundě by se mělo podle mého názoru skládati ze dvou částí, které nazveme *částí přípravnou* a *částí hlavní.*

V přípravné části mají si žáci uvědomiti na řadě jednoduchých příkladů oba hlavní důvody zavedení neúplných čísel: obtíže, které se stavějí v cestu přesnému měření a kolísání měřených veličin. Potom se mají v této části seznámiti se základními pojmy dolní a horní meze, přibližné hodnoty, chyby a poměrné chyby (také v procentech).

V hlavní části se mají cvičiti ve sčítání, odčítání, násobení a dělení (po případě také umocňování a odmocňování dvěma) neúplných čísel. Cílem je v této části především mechanická početní zručnost. Odůvodnění užívaných pravidel je při sčítání a odčítání lehké; při násobení a dělení se může odůvodnění posunout do vyšších tříd (nejlépe asi do kvarty), a zatím je nahradit verifikací na několika příkladech. Úpravě neúplných čísel a „shovívavému nazírání" nemá býti věnována zvláštní vyučovací hodina, nýbrž toto vyučování se musí díti nenápadnou formou při konkrétních numerických příkladech.

Proti způsobu vyučování neúplným číslům, který navrhuji pro sekundu, dá se očekávati paušální laciná námitka, že je to na sekundány těžké. Pokusím se o rozbor této námitky a vyzývám čtenáře, kteří po mém vysvětlení na této námitce trvají, aby neváhali mé důvody vyvrátiti tiskem; dosavadní vyučování neúplným číslům je totiž notoricky neúspěšné.

Jsem *předně* přesvědčen, že je možné a nutné vyučování neúplným číslům poněkud připraviti. Ve své Aritmetice pro sekundu pamatuji na tuto přípravu tím, že zavádím velmi brzo *zaokrouhlování čísel* a podávám příležitostné slovní úlohy, v kterých se žádá výsledek zaokrouhlený tak, jak to odpovídá povaze úlohy; při řešení takových slovních úloh má učitel dobrou příležitost, aby připravil půdu neúplným číslům. V mé chystané Geometrii pro sekundu se budou vyskytovati mimo jiné praktické úlohy, podobné některým trigonometrickým úlohám ze sexty; řešení se ovšem v sekundě nemá dít počtem, nýbrž graficky. Při těchto úlohách je zase příležitost připravit půdu neúplným číslům.

Za druhé úspěch vyučování neúplným číslům v sekundě závisí podstatně na počtu hodin, který lze této látce věnovati. Ve své Aritmetice pro sekundu jsem se snažil celou obsáhlou partii úsudkových počtů založiti na jednotném základě změny veličiny v určitém poměru. Tím se mi podařilo získati čas (bez redukce látky!), který přijde při vyučování neúplným číslům vhod.

Za třetí je míti na paměti, že t. zv. zkrácené počítání bylo osnovou z r. 1939 z vyučování vyloučeno. V aritmetice neúplných čísel běží o problém posouditi, do jaké míry mají jednotlivé cifry výsledku reálný význam; při zkráceném počítání běží o úplně jiný problém, totiž jak prováděti početní výkony, aby se cifry, které se nakonec škrtnou, vůbec nepočítaly. Dokud se šlo za těmito dvěma různými problémy současně, bylo těžké dosáhnouti toho, aby měli žáci stále cíl vyučování na paměti; když je nyní osnovami nařízeno ponechati druhý problém stranou (s čímž plně souhlasím), je daleko lehčí dosáhnouti od žáků porozumění pracovnímu programu.

Za čtvrté bude zejména v hlavní části (viz začátek tohoto odstavce) vyučovací úspěch podstatně závislý na tom, jak byla probírána aritmetika v primě. Podle mého soudu je naprosto nutné věnovati značný počet vyučovacích hodin v primě tomu, aby se zvýšila spolehlivost a zručnost při provádění základních výkonů početních zpaměti i písemně. Ve své Aritmetice pro primu jsem se snažil přispěti k tomuto cíli co nejvydatněji. Bude-li aritmetika v primě probíhati v tomto duchu, půjdou v sekundě neúplná čísla (a stejně mnoho jiné látky v sekundě i ve vyšších třídách) daleko hladčeji, nežli když bude potřebný čas proplýtván složitými slovními úlohami. Ale tuto stručnou zmínku rozvedu podrobně zvláštním článkem.

Za páté není podle mého názoru vyučovacím cílem při neúplných číslech v sekundě podati uzavřenou a dokončenou partii matematiky; toto vyučování má jen tehdy v celkové osnově matematiky na střední škole správný smysl, bude-li jím náležitě připraveno užití neúplných čísel ve vyšších třídách, k němuž je v aritmetice, geometrii i fysice mnoho příležitosti, dnes ovšem jen velmi málo využité. V přípravné části je zajisté nutno u sekundána vzbuditi představu o užitečnosti neúplných čísel; v hlavní části však je nejdůležitější mechanické nacvičení početních výkonů, což je část vyučovacího programu, kterou sice milovníci velkých frází podceňují, bez níž však není trvalý vyučovací úspěch v žádné partii matematiky možný. Proto nepovažuji za vhodné zmenšovati rozsah výcviku tím, že by se dávaly úlohy ve slovním znění: stačí holé numerické příklady; na aplikace je ve vyšších třídách času dost.

12. **Neúplná čísla ve vyšších třídách.** Nakonec bych rád řekl několik slov o mínění, že by se měla neúplná čísla posuzovati do některé vyšší třídy. S tímto míněním nesouhlasím. Především nesmíme zapomínati na fakt, že prima a sekunda jsou jediné třídy se čtyřmi hodinami matematiky, takže už proto není tak jednoduché, přesunout část jejich učiva do vyšších tříd. Ale hlavní je, že je zcela nemožné, aby se žáci s neúplnými čísly dobře seznámili průběhem jediného vyučovacího roku. Jak jsem v tomto článku již jasně řekl, kladu sekundě po prvém seznámení se základními pojmy za hlavní úkol mechanický výcvik v provádění základních početních výkonů. V tercii začíná fysika a je velmi žádoucí, aby ke studiu fysiky přistupovali

žáci již se základními vědomostmi o neúplných číslech; při fysice je pak dobrá příležitost, aby se tyto poznatky prohloubily. Dále se v tercii probírají geometrické věty (jako obsah trojúhelníka, obvod a obsah kruhu, Pythagorova věta), při jejichž studiu mohou žáci zdokonalit svoji početní techniku s neúplnými čísly, ovšem zase jen tehdy, mají-li už prvý kurs neúplných čísel za sebou. V kvartě je programem matematického učiva především opakování a ucelení dosavadní látky; zde je vhodná příležitost k tomu, aby se početní pravidla pro neúplná čísla algebraicky odůvodnila, naprosto ne však k tomu, aby se teprve zaváděla jako novum. Vyučování neúplným číslům v rozsahu základních výkonů početních musí býti kvartou dokončeno; ovšem logaritmy v kvintě, trigonometrie v sextě a pravděpodobnost v septimě dávají příležitost k dalšímu studiu neúplných čísel, to je už však mimo rámec tohoto článku.