Eduard Čech

Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces

Rozpravy Československé Akad. Věd - Řada Mat. Přírod. Věd (3) 38 (1929), 38 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500909

ROZPRAVY II. TŘÍDY ČESKÉ AKADEMIE.
ROČNÍK XXXVIII. ČÍSLO 3.

Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces.

Par

Eduard Čech.

Dans la première de deux Notes portant le même titre que ce Mémoire (Rendiconti Lincei, (6) 8, 1928, p. 484-6 et 552-4) j'ai introduit deux invariants projectifs r, s d'une correspondance asymptotique entre deux surfaces. Ces deux invariants permettent de partager les correspondances asymptotiques en trois espèces. Le premier Chapitre de ce Mémoire contient les démonstrations des résultats énoncés dans la Note citée; en outre, je donne un résultat relatif aux correspondances qui ne conservent que les asymptotiques d'un seul système. Dans le second Chapitre, je détermine toutes les surfaces qui admettent un groupe continu, à deux paramètres au moins, de transformations asymptotiques de troisième espèce. Pour la seconde espèce, je partage les groupes correspondants en deux catégories; pour la première, je détermine encore tous les cas où le groupe a deux paramètres au moins; pour la seconde catégorie, au contraire, je me borne ici à quelques remarques préliminaires.

Dans la seconde des Notes citées j'ai appliqué les invariants r, s à l'étude des congruences W. Les démonstrations des résultats y énoncés seront données dans un Mémoire ultérieur.

Chapitre I.

Les invariants r, s d'une correspondance asymptotique.

§ 1. *L'invariant de Smith-Mehmke.*

Je commence par rappeler une proposition classique: *Soient C Γ deux courbes ayant en un point commun A, la même tangente et le même plan osculateur; alors le rapport des courbures de Γ et de C au point A est un invariant projectif.* Pour abréger, j'indiquerai cet invariant par.

$$J\,(C, \Gamma; A).$$

Cet invariant est indéterminé dans le cas où A est un point d'inflexion simultanément pour C et Γ. Si A est un point d'inflexion pour C (pour Γ) seulement on a $J = \infty$ ($J = 0$). Si A n'est point d'inflexion ni pour C ni pour Γ, J a une valeur finie et différente de zéro. Évidemment $J = 1$ alors et alors seulement si C et Γ ont un contact du second ordre au point A.

La proposition que je viens de rappeler a été donnée en 1891 par M. R. Mehmke (Zeitschrift f. Math. u. Physik t. 36, p. 56.). Pour la démontrer il suffit évidemment de considérer le cas simple où C et Γ soient situées dans un plan $\varkappa$. Or dans ce cas la proposition a été donnée en 1869 par H. J. S. Smith (Proceedings of the London Math. Soc. (1)2, p. 212 Je propose donc d'appeler J *l'invariant de Smith-Mehmke.* En 1897, l'invariant J a été retrouvé par C. Segre (Rendiconti Accad. dei Lincei, s. V, vol. VI) ; Segre définit J comme limite d'un certain rapport anharmonique. M. E. Bompiani a donné une application intéressante de l'invariant J relative à une équation de Laplace (Rendiconti Accad. dei Lincei s. VI, vol. III, 1926). M. Klobouček a généralisé en appliquant l'invariant J, la quadrique de Lie (Rozpravy české akademie t. 35, 1926). Moi j'ai aussi appliqué plusieurs fois l'invariant J (v. p. ex. Geometria proiettiva differenziale, p. 475).

§ 2. *Correspondances demiasymptotiques entre deux surfaces.*

Soient S, S_1 deux surfaces non développables rapportées aux coordonnées curvilignes $u = u_1$, $v = u_2$. Soient

$$\frac{\Sigma\, a_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t}{\Sigma\, a_{rs}\, du_r\, du_s}, \quad \frac{\Sigma\, b_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t}{\Sigma\, b_{rs}\, du_r\, du_s}$$

les éléments linéaires projectifs des surfaces S, S_1.

Les coordonnées curvilignes u, v définissent une correspondance entre S, S_1. Supposons que cette correspondance soit *demiasymptotique*, c'est-à-dire qu'aux asymptotiques d'*un* système de S correspondent des asymptotiques de S_1. Sans restreindre la généralité, je peux supposer que les courbes $v =$ const. soient des asymptotiques pour S et pour S_1. Alors

$$a_{11} = b_{11} = 0, \tag{1}$$

ainsi que, d'après les équations fondamentales de la théorie projective des surfaces[1])

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \left(\frac{\partial \log a_{12}}{\partial u} - \frac{a_{22}\, a_{111}}{a_{12}^2} + \frac{a_{112}}{a_{12}}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{a_{111}}{a_{12}}\frac{\partial x}{\partial v} + p\, x, \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} &= \left(\frac{\partial \log b_{12}}{\partial u} - \frac{b_{22}\, b_{111}}{b_{12}^2} + \frac{b_{112}}{b_{12}}\right)\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{b_{111}}{b_{12}}\frac{\partial x_1}{\partial v} + q\, x. \end{aligned} \tag{2}$$

---

[1]) V. G. Fubini et E. Čech, Geometria proiettiva differenziale, § 14 (I). Dorénavant, je citerai ce livre par G P D.

Ici, $x(u, v)$, $x_1(u, v)$ sont les points mobiles de S, S_1.

Fixons maintenant un point $x(u, v) = A$ de la surface S et désignons par K une homographie qui transporte S_1 en une surface $\overline{S}_1$ ayant, au point A, un contact analytique[1]) du premier ordre avec la surface S.

En désignant par $K y$ le point transporté du point y, on a évidemment

$$Kx_1 = x,\quad K\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + \lambda x,\quad K\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} + \mu x, \tag{3}$$

où les paramètres λ, μ peuvent être choisis arbitrairement.

Soit, pour un moment, C l'asymptotique $v =$ const. de S passant par le point fixé A et $\overline{\Gamma}$ l'asymptotique correspondante de la surface $\overline{S}_1$ transportée de S_1. Pour un déplacement le long de C on a, d'après (2_1)

$$\begin{aligned} x + dx + \tfrac{1}{2} d^2 x &= (1 + \tfrac{1}{2} p\, du^2)\, x + \\ &+ [du + (\dots)\, du^2] \frac{\partial x}{\partial u} + \tfrac{1}{2} \frac{a_{111}}{a_{12}} du^2 \frac{\partial x}{\partial v}. \end{aligned} \tag{4}$$

Pour le déplacement correspondant le long de Γ on obtient de (2_2) et de (3)

$$\begin{aligned} K(x_1 + dx_1 + \tfrac{1}{2} d^2 x_1) &= [1 + \lambda\, du + (\dots)\, du^2]\, x + \\ &+ [du + (\dots)\, du^2] \frac{\partial x}{\partial u} + \tfrac{1}{2} \frac{b_{111}}{b_{12}} dv^2 \frac{\partial x}{\partial v}. \end{aligned} \tag{5}$$

Les courbes C et Γ ayant, au point fixé A, la même tangente et le même plan osculateur, je pose

$$r = r(u, v) = J(C, \Gamma; A). \tag{6}$$

Des équations (4) et (5) on calcule

$$r = \frac{b_{111}\, a_{12}}{a_{111}\, b_{12}}. \tag{7}$$

La fonction $r(u, v)$ ainsi déterminée ne dépend point des paramètres λ, μ, c'est-à-dire du choix de l'homographie K. D'après sa définition même, elle ne change pas si l'on remplace S ou S_1 par une surface homographique. De l'expression (7) on voit en outre que r ne change pas si l'on remplace S ou S_1 par une surface projectivement appliquable; cela aussi était prévoyable *a priori*. Si l'on remplace S *ou* S_1 par sa corrélative, l'invariant r change de signe[2]).

§ 3. *Demidéformations projectives.*

Si l'on a indentiquement $r(u, v) = 1$, alors je nommerai la correspondance entre S et S_1 une *démidéformation projective* (relative aux asympto-

[1]) Pour la notion du contact analytique, v. GPD, § 3 ou bien E. Cartan, Sur la déformation projective des surfaces (Ann. de l'Ec. Norm., s. 3, t. 37, 1920). Je citerai dans ce qui suit ce Mémoire important par l'abréviation Déf.

[2]) V. GPD, § 13 A.

tiques $v = \text{const.}$). Cela suppose que les asymptotiques $v = \text{const.}$ ne soient pas rectilignes ni sur S ni sur S_1.

Une correspondance entre deux surfaces S, S_1 est donc une demi-déformation projective si 1° à un système $[C]$ d'asymptotiques de S correspondent des asymptotiques $[\Gamma]$ de S_1; 2° A étant un point arbitraire de S, et K étant une homographie qui transporte S_1 en une surface $\overline{S}_1$ ayant un contact analytique du premier ordre avec S au point A, l'asymptotique C a en A un contact du second ordre avec l'asymptotique $\overline{\Gamma}$ correspondante de $\overline{S}_1$.

Or choisissons arbitrairement deux surfaces S, S_1 rapportées aux coordonnées asymptotiques u, v pour S, u_1, v_1 pour S_1. Les asymptotiques $v = \text{const.}$ de S et les asymptotiques $v_1 = \text{const.}$ de S_1 ne soient pas rectilignes. *Il existe toujours une infinité de demidéformations projectives entre S et S_1* (par rapport aux asymptotiques $v = \text{const.}$, $v_1 = \text{const.}$). *On peut préscrire arbitrairement la loi suivant laquelle aux asymptotiques $v = \text{const.}$ de S doivent correspondre les asymptotiques* $v_1 = \text{const.}$ *de S_1; en outre, k étant une courbe arbitrairement choisie sur S* (différente des courbes $v =$ const.) *on peut encore préscrire la courbe correspondante de S_1; il existe alors deux demidéformations satisfaisant aux conditions prescrites.*

La démonstration est facile. Je peux choisir les paramètres v, v_1 de manière qu'à chaque asymptotique $v = a$ de S doive correspondre, dans la demidéformation cherchée, l'asymptotique $v_1 = a$ de S_1. Soient[1])

$$\frac{\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3}{2\, du\, dv}, \quad \frac{\beta_1\, du_1^3 \quad \gamma_1\, dv_1^3}{2\, du_1\, dv_1}$$

les éléments linéaires projectifs de S et de S_1. Les asymptotiques $v = \text{const.}$ de S et $v_1 = \text{const.}$ de S_1 n'étant pas rectilignes, on a[2]) $\beta\, \beta_1 \neq 0$. Soient

(8) $$u_1 = \varphi\,(u, v),\ v_1 = v$$

les équations de la demidéformation cherchée. En vertu de la substitution (8), l'élément linéaire projectif de S_1 prend la forme

$$\beta_1 \left(\frac{\partial \varphi}{du}\, du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, dv \right)^3 + \gamma_1\, dv^3 : 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\, du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, dv \right),$$

ainsi que, d'après (7),

$$r \quad \frac{\beta_1}{\beta} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2.$$

Condition pour la demidéformation projective est donc

(9) $$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad \sqrt{\frac{\beta_1\,(\varphi, v)}{\beta\,(u, v)}}\,.$$

---

[1]) V. GPD, § 16 A.

[2]) GPD, § 16 B.

Soit encore $u = f(v)$ l'équation de la courbe k donnée sur S, et $u_1 = f_1(v_1)$ l'équation de la courbe correspondante donnée. On n'a alors qu' à résoudre l'équation différentielle (9), en y regardant v comme paramètre, sous la condition initiale

$$\varphi = f_1(v) \text{ pour } u = f(v).$$

On a *deux* solutions à cause de l'ambiguité du signe $\sqrt{\ }$.

L'énonçé qui précède n'est vrai qu'au champ complexe. Dans le champ réel, il faut encore avoir soin que la quantité sous le signe $\sqrt{\ }$ en (9) soit *positive*. A ce but, faisons la définition suivante: L'orientation donnée par le paramètre v au systéme $[v]$ d'asymptotiques $v =$ const. de S soit *positive* si $\beta > 0$, *négative* si $\beta < 0$. On voit tout de suite que cette définition est intrinsèque[1]). La correspondance préscrite entre les asymptotiques $v_1 =$ const. de S et $v =$ const. de S_1 doit alors conserver l'orientation positive, et cela suffit pour la réalité des nos demidéformations. On peut encore distinguer géométriquement les deux solutions de notre problème; La courbe donnée k de S partage S en deux régions R', R''; pareillement la courbe qui doit correspondre a k sur S_1 partage S_1 en deux régions R'_1, R_1''. Dans une des deux solutions, à R' il correspond la région R'_1; dans l'autre, la région R_1''. Je laisse la démonstration au soin du lecteur.[2]).

§ 4. *Les invariants r, s d'une correspondance asymptotique.*

Dorénavant, soient S et S_1 deux surfaces *non réglées* en correspondance asymptotique . Soit (u, v) un système de coordonnées curvilignes asymptotiques pour la surface S, dont l'élément linéaire projectif a donc la forme

$$\frac{\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3}{2\, du\, dv}.$$

Pour la surface S_1 faisons usage des coordonnées curvilignes asymptotiques *correspondantes*, et soit

$$\frac{\beta_1\, du^3 + \gamma_1\, dv^3}{2 du\, dv}$$

l'élement linéaire projectif de S_1. Les surfaces S, S_1 n'étant pas réglées, on a

$$\beta\, \gamma\, \beta_1\, \gamma_1 \mp 0.$$

[1]) On peut donner une définition géométrique simple de cette orientation: Choisissons un point $A = (\mathring{u}, \mathring{v})$ de S. Soit c_0 une courbe touchant en A l'asymptotique $v = \mathring{v}$ et ayant en A une inflexion. Au voisinage de A, c_0 partage S en deux régions, donc l'une, soit R, contient l'asymptotique $v = \mathring{v}$. Dans le cas d'orientation positive, les asymptotiques $v =$ const. $> \mathring{v}$ appartiennent (au voisinage de A) à la région R.

[2]) On voit que les correspondances $r = c$ (ou $c \mp 0$ est une constante donnée) jouissent des mêmes propriétés que les correspondances $r = 1$ ici étudiées.

Portons d'abord notre attention sur les systèmes correspondants $v =$ const. d'asymptotiques de S et de S_1. Du § 2 nous connaissons la signification de l'invariant $r = r(u, v)$, dont l'expression actuelle, d'après (7), est tout simplement

$$r = \frac{\beta_1}{\beta}.$$

Or maintenant les systèmes correspondants $u =$ const. d'asymptotiques donnent lieu à un autre invariant que je désignerai par s; évidemment

$$s = \frac{\gamma_1}{\gamma}.$$

Les invariants r, s ne changent pas si l'on remplace une des deux surfaces S, S_1 par une déformée projective, et ils changent de signe si l'on remplace une et une seule de S, S_1 par une surface corrélative.

Les invariants r, s permettent de *partager les correspondances asymptotiques entre deux surfaces non réglées S et S_1 en trois espèces*:

Pour la première espèce, $r\,(u, v)$ et $s\,(u, v)$ sont deux fonctions indépendantes de u, v (c'est évidemment le cas général); pour la seconde espèce, r et s sont dépendantes, mais une au moins n'est pas constante; pour la troisième espèce, r et s sont des constantes.

Parmi les correspondances de seconde espèce, trois cas particuliers sont remarquables: 1° $r = 1$ *ou* $s = 1$; ce sont les correspondances asymptotiques qui sont en même temps des demidéformations projectives; je propose de nommer ces correspondances les *demidéformations asymptotiques.* 2° $rs = 1$; ce sont les correspondances qui conservent la forme normale $2\beta\gamma\,du\,dv$ de M. Fubini (GPD, § 15 D). 3° $r = s$; ce sont les corresponnances qui conservent les lignes de Darboux.[1])

[1]) Cela est analytiquement évident, l'équation différentielle de lignes de Darboux (*GPD.* § 11 *B* et 12 *A*) étant $\beta du^3 + \gamma dv^3 = 0$. Mais cela résulte aussi de notre définition géométrique des invariants r, s en vertu d'un quelconque des théorèmes suivants:

1° *Considérons une cubique plane passant par un point A de S, y ayant un point double et telle que chaque branche ait en A un contact du second ordre avec une asymptotique de S; alors les trois points d'inflexion de la cubique sont situés sur les tangeutes de Darboux de S en A.* (E. Čech, O křivkovém a plošném elementu třetího řádu projektivního prostoru, Časopis pro pěst. mat. a fys., t. 50, 1921, p. 240).

2° *Dans le plan tangent à S au point A considérons les deux paraboles donc chacune à en A un contact du second ordre avec une asymptotique de S et donc l'axe soit parallèle à la tangente de l'autre asymptotique en A; les trois intersections, divers de A, de ces deux paraboles appartiennent aux tangentes de Segre* (conjuguées aux tangentes de Darboux) (E. Čech, L'intorno d'un punto d'una superficie considerato dal punto di vista proiettivo, Annali di Mat., s. 3, t. 31, p. 205).

Le théoréme 1° à été retrouvé par M. A. Terracini (Rendiconti Accad. Lincei, s. 6, v. 3, 1° sem., 1926, p. 591).

§ 5. *Correspondances asymptotiques de troisième espèce; cas $r = s$.*

Le cas $r = s = 1$ est bien connu; la correspondance entre S et S_1 est une simple homographie ou bien c'est une déformation projective proprement dite.[1])

Considérons maintenant le cas $r = s = c$, ou $c \neq +1$, $c \neq 0$ est une constante donnée. Rappelons[2]) que la surface S est déterminée (à une homographie près) si l'on connait en fonction de u, v, outre les coefficients β, γ de l'élément linéaire projectif, deux autres quantités L, M. Les quantités β, γ, L, M étant données, la surface S existe alors et alors seulement si

$$\begin{gathered} L_v = -(2\beta\gamma_u + \gamma\beta_u), \quad M_u = -(2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v), \\ \beta M_v + 2M\beta_v + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2L\gamma_u + \gamma_{uuu}, \end{gathered} \tag{10}$$

les indices u, v indiquant des dérivées partielles. Désignons par β_1, γ_1, L_1, M_1 les quantités relatives à la surface S_1. Dans le cas qui nous intéresse. on a $\beta_1 = c\beta$, $\gamma_1 = c\gamma$, ainsi que pour S_1, les équations analoques à (10) sont

$$\begin{gathered} L_{1v} = -c^2(2\beta\gamma_u + \gamma\beta_u), \quad M_{1u} = -c^2(2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v), \\ \beta M_{1v} + 2M_1\beta_v + \beta_{vvv} = \gamma L_{1u} + 2L_1\gamma_u + \gamma_{uuu}. \end{gathered} \tag{11}$$

Considérons la surface S comme donnée et essayons de déterminer S_1. Les équations (10) deviennent des identités et il s'agit de déterminer les quantités L_1, M_1 de manière à satisfaire aux équations (11). Or en posant

$$L_1 = c^2 L + (c^2 - 1)U, \quad M_1 = c^2 M + (c^2 - 1)V \tag{12}$$

et tenant compte de (10), les équations (11) prennent la forme

$$\begin{gathered} U_v = 0. \quad V_u = 0, \\ \beta V' + 2\beta_v V - \beta_{vvv} = \gamma U' + 2\gamma_u U - \gamma_{uuu}. \end{gathered} \tag{13}$$

La quantité U (V) ne doit donc dépendre que de u (v) et j'ai indiqué sa dérivée par un accent.

L'équation (13) ne contient plus c; on a donc le résultat suivant: *Si la surface S est telle que la correspondance avec $r = s = c$ est possible pour une valeur de c* ($\neq 1, -1, 0$), *la correspondance et possible pour chaque valeur de c.*

Si l'on a $\beta_{vvv} = \gamma_{uuu}$, alors l'équation (13) est vérifiée en posant $U = V = 0$. Inversement supposons qu'il existe une solution U, V de (13). Choisissons alors une solution f (u) $\neq 0$ de l'équation différentielle

$$2f'' = fU,$$

et une solution $g(v) \neq 0$ de l'équation différentielle

$$2g'' = gV$$

---

[1]) Au sujet des déformations projectives, v. Déf ou GFD, Chap. VII et VIII.

[2]) GPD, § 16 D.

et posons

$$u_1 = \int \frac{du}{[f(u)]^2}, \quad v_1 = \int \frac{dv}{[g(v)]^2}.$$

En introduisant u_1, v_1, au lieu de u, v, comme coordonnés curvilignes, l'élément linéaire projectif de S prend la forme

$$\frac{B\, du_1^3 + C\, dv_1^3}{2\, du_1\, dv_1}$$

et on déduit de (13) par un calcul que j'omets que

$$\frac{\partial^3 B}{\partial v^3} = \frac{\partial^3 C}{\partial u^3}.$$

On a donc le théorème suivant: *Une correspondance de troisième espèce avec $r = s = c$ ($c \neq 1, -1, 0$) est possible alors et alors seulement si l'on peut choisir les cordonnées curvilignes u, v de manière que l'élément linéaire projectif de S ait la forme*

$$\frac{\varphi_{uuu}\, du^3 + \varphi_{vvv}\, dv^3}{2\, du\, dv}. \tag{14}$$

On obtient alors une correspondance du type cherché en déterminant S_1 de manière que[1])

$$\beta_1 = c\,\varphi_{uuu},\ \gamma_1 = c\,\varphi_{vvv},\ L_1 = c^2 L,\ M_1 = c^2 M.$$

Les coordonées curvilignes u, v ne sont pas entièrement déterminées par la propriété que l'élément linéaire projectif de S prende la forme (14)i De ce qui précède il résulte que les substitutions

$$u_1 = \frac{a_1 u + b_1}{c_1 u + d_1}, \quad v_1 = \frac{a_2 v + b_2}{c_2 v + d_2},$$

où $a_1, b_1 \ldots d_2$ sont des constantes, ne changent pas la forme (14) de l'élément linéaire projectif. Dans des cas particuliers, d'autres substitutions peuvent avoir la même propriété.

Les correspondances ici considérées dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument. Pour le démontrer je ferai usage des méthodes si puissantes de M. Cartan. Attachons à la surface S un système de référence normal.[2]) On a alors, faisant usage des notations de M. Cartan,

$$(15)\begin{cases} \omega_3 = 0,\ \omega_{12} = \omega_1,\ \omega_{21} = \omega_2,\ \omega_{13} = \omega_2,\ \omega_{23} = \omega_1, \\ \omega_{00} - \omega_{11} = \omega_{22} - \omega_{33} = \quad 2\,\alpha\,\omega_1 - \beta\,\omega_2, \\ \omega_{00} - \omega_{22} = \omega_{11} \quad \omega_{33} = \quad \alpha\,\omega_1 - 2\,\beta\,\omega_2, \\ \omega_{32} - \omega_{10} - \lambda\,\omega_1 + \mu\,\omega_2,\ \omega_{20} - \omega_{31} \quad \nu\,\omega_1 + \varrho\omega_2,\ \omega_{30} = \varrho\,\omega_1 + \lambda\,\omega_2. \end{cases}$$

[1]) Si S est projectivement indéformable alors S_1 doit nécessairement être ainsi choisie. Je ne sais pas qu'elle est la généralité des surfaces projectivement défoımables du type ici envisagé. (Ici appartiennent p. ex. les surfaces pour les quelles $\beta = \gamma = 1$).

[2]) Déf., pp. 280–286.

L'élément linéaire projectif de S est

(16) $$\frac{\omega_1^3 + \omega_2^3}{2\,\omega_1\,\omega_2}.$$

Rappelons[1]) les relations extérieures

(17) $$\omega'_1 - \beta\,[\omega_1\,\omega_2],\ \omega'_2 = -\alpha\,[\omega_1\,\omega_2].$$

À la surface S_1 attachons aussi un système de référence normal; pour S_1, j'écrirai Ω, $\bar\alpha$, $\bar\beta$ etc. au lieu de ω, α, β, etc. De la forme (16) de l'élément linéaire projectif il résulte que je dois écrire

$$\Omega_1 = c\,\omega_1,\ \Omega_2 = c\,\omega_2.\ (c \neq 1, -1, 0)$$

De (17) on déduit maintenant que

$$\alpha - c\,\alpha, \qquad \beta - c\,\beta.$$

On aura donc

(18) $$\begin{cases} \Omega_3 = o,\ \Omega_1 = c\,\omega_1,\ \Omega_2 = c\,\omega_2, \\ \Omega_{13} = c\,\omega_{13},\ \Omega_{23} = c\,\omega_{23},\ \Omega_{12} = c\,\omega_{12},\ \Omega_{21} = c\,\omega_{21}, \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00},\ \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00},\ \Omega_{33} - \Omega_{00} = \omega_{33} - \omega_{00}, \\ \Omega_{32} = \Omega_{10},\ \Omega_{31} = \Omega_{20}. \end{cases}$$

Les équations (15) et (18) contiennent toutes les conditions du problème.

Par différentiation extérieure, on déduit de (18)

$$[\omega_1, c\,\Omega_{10} - \omega_{10} - \frac{c^2-1}{2}\,\omega_2] = 0,$$
$$[\omega_2, c\,\Omega_{20} - \omega_{20} - \frac{c^2-1}{2}\,\omega_1] = 0,$$
$$[\omega_1,\ c\,\Omega_{10} - \omega_{10}] + [\omega_2,\ c\,\Omega_{20} - \omega_{20}] = 0,$$
$$[\omega_1\,\Omega_{20}] + [\omega_2\,\Omega_{30}] = 0,\ [\omega_1\,\Omega_{30}] + [\omega_2\,\Omega_{10}] = 0.$$

On peut donc poser en introduisant deux quantités auxiliaires u, v.[2])

$$c\,\Omega_{10} - \omega_{10} = \frac{c^2-1}{2}\,(u\,\omega_1 + \omega_2),$$
$$c\,\Omega_{20} - \omega_{20} = \frac{c^2-1}{2}\,(\omega_1 + v\,\omega_2),$$
$$c\,\Omega_{30} - \omega_{30} = \frac{c^2-1}{2}\,(v\,\omega_1 + u\,\omega_2).$$

D'ici on déduit par différentiation extérieure

$$[\omega_1,\ du + (3\,\alpha \quad 2\,\beta\,u)\,\omega_2] = 0,$$
$$[\omega_2,\ dv + (3\,\beta - 2\,\alpha\,v)\,\omega_1] = 0,$$
$$[du \quad 4\,\alpha\,u\,\omega_1,\ \omega_2] + [dv - 4\,\beta\,v\,\omega_2,\ \omega_1] = 0.$$

[1]) l. c. (26).

[2]) Les lettres u, v ne signifient donc plus des coordonnés curvilignes.

On peut donc poser, en introduisant une nouvelle inconnue auxiliaire w

$$du + 2u(\omega_{00} - \omega_{11}) + 3\alpha\,\omega_2 = w\,\omega_1,$$
$$dv + 2v(\omega_{00} - \omega_{22}) + 3\beta\,\omega_1 = w\,\omega_2:$$

En différentiant extérieurement ces équations, on trouve

$$dw + (\omega_{00} - \omega_{33})\,w + 2(2\nu - 1)\,v\,\omega_1 + 2(2\mu - 1)\,u\,\omega_2 =$$
$$= 3(5\beta^2 - \beta_2)\,\omega_1 + 3(5\alpha^2 - \alpha_1)\,\omega_2,$$

les quantités α_1, β_2 étant définies par[1])

$$(19)\quad \begin{aligned} d\alpha &- \alpha_1\omega_1 + (\alpha\beta + \frac{4}{3}\mu \quad \frac{2}{3}\nu \quad 1)\,\omega_2, \\ d\beta &= (\alpha\beta \quad \frac{2}{3}\mu + \frac{4}{3}\nu - 1)\,\omega_1 \quad \beta_2\,\omega_2. \end{aligned}$$

En définitive, il s'agit de discuter le système de Pfaff

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} &\omega_3 = 0,\ \omega_{13} = \omega_2,\ \omega_{23} = \omega_1,\ \omega_{12} = \omega_1,\ \omega_{21} = \omega_2,\ \omega_{31} = \omega_{20},\ \omega_{32} = \omega_{10}, \\ &\omega_{11} - \omega_{00} = 2\alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_2,\quad \omega_{22} - \omega_{00} = \alpha\,\omega_1 + 2\beta\,\omega_2,\quad \omega_{33} - \omega_{00} = \\ &\qquad = 3\alpha\,\omega_1 + 3\beta\,\omega_2, \\ &\omega_{10} = \lambda\,\omega_1 + \mu\,\omega_2,\ \omega_{20} = \nu\,\omega_1 + \varrho\,\omega_2,\ \omega_{30} = \varrho\,\omega_1 + \lambda\,\omega_2, \\ &d\alpha = \alpha_1\,\omega_1 + (\alpha\beta + \frac{4}{3}\mu + \frac{2}{3}\nu - 1)\,\omega_2, \\ &d\beta = (\alpha\beta + \frac{2}{3}\mu + \frac{4}{3}\nu - 1)\,\omega_1 + \beta_2\,\omega_2, \\ &du + 2u(\omega_{00} - \omega_{11}) + 3\alpha\,\omega_2 = w\,\omega_1, \\ &dv + 2v(\omega_{00} - \omega_{22}) + 3\beta\,\omega_1 = w\,\omega_2, \\ &dw + (\omega_{00} - \omega_{33})\,w + 2(2\nu - 1)\,v\,\omega_1 + 2(2\mu - 1)\,u\,\omega_2 = \\ &= 3(5\beta^2 - \beta_2)\,\omega_1 + 3(5\alpha^2 - \alpha_1)\,\omega_2. \end{aligned} \right.$$

En différentiant extérieurement toutes les équations du système (20), on obtient

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} &[d\lambda\,\omega_1] + [d\mu\,\omega_2] + (2\beta\lambda - 3\alpha\mu)\,[\omega_1\,\omega_2] = 0, \\ &[d\nu\,\omega_1] + [d\varrho\,\omega_2] + (3\beta\nu - 2\alpha\varrho)\,[\omega_1\,\bar\omega_2] = 0, \\ &[d\varrho\,\omega_1] + [d\lambda\,\omega_2] + 4(\beta\varrho - \alpha\lambda)\,[\omega_1\,\omega_2] = 0, \\ &3[d\alpha_1\,\omega_1] + 4[d\mu\,\omega_2] + 2[d\nu\,\omega_2] + 2(3\alpha_1\beta - \alpha\mu + \alpha\nu)\,[\omega_1\,\omega_2) = 0, \\ &3[d\beta_2\,\omega_2] + 2[d\mu\,\omega_1] + 4[d\nu\,\omega_1] - 2(3\alpha\beta_2 + \beta\mu - \beta\nu)\,[\omega_1\,\omega_2] - 0, \\ &[d\beta_2\,\omega_1] + [d\alpha_1\,\omega_2] + \frac{4}{3}v\,[d\nu\,\omega_1] + \frac{4}{3}u\,[d\mu\,\omega_2] + \\ &+ \{2(\mu - \nu)\,w + 20\alpha^3 - 20\beta^3 - 14\alpha\alpha_1 + 14\beta\beta_2\}\,[\omega_1\,\omega_2] = 0. \end{aligned} \right.$$

Les équations (21), en nombre de six, contiennent, outre ω_1 et ω_2, six autres formes de Pfaff

$$d\lambda,\ d\mu,\ d\nu,\ d\varrho,\ d\alpha_1,\ d\beta_2.$$

---

[1]) Déf., p. 286, (25).

Le déterminant des coefficients de ces formes étant

$$-6\,\omega_1^6 + 12\,u\,\omega_1^4\,\omega_2^2 - 12\,v\,\omega_1^2\,\omega_2^4 + 6\,\omega_2^6$$

on voit que le système (20) est en involution et que la solution dépend de six fonctions arbitraires d'un argument. Les caractéristiques sont données par

$$\omega_1^6 - 2\,u\,\omega_1^4\,\omega_2^2 + 2\,v\,\omega_1^2\,\omega_2^4 - \omega_2^6 = 0.$$

Remarquons encore que les correspondances ici étudiées ont été déjà *mentionnées* par M. Bompiani dans le Mémoire[1]) Rappresentazione geodetico-proiettiva fra due superficie (Annali di Mat. ,s. 4. t. 1, 1923—24).

§ 6. *Correspondances asymptotiques de troisième espèce; cas* $r \neq s$.

Passons au cas $r = c_1$, $s = c_2$, où c_1, c_2 sont deux constantes *différentes* ($c_1 c_2 \neq 0$). Je vais démontrer que *ces correspondances dépendent de huit fonctions arbitraires d'un argument.*

Je suivrai la même marche comme dans le cas $r = s$. Maintenant, on a évidemment

$$\Omega_1 = a_1\,\omega_1, \quad \Omega_2 = a_2\,\omega_2$$

avec.

$$c_1 = a_1^2\,a_2^{-1}, \quad c_2 = a_1^{-1}\,a_2^2$$

ainsi que a_1, a_2 sont des constantes telles que $a_1\,a_2 \neq 0$, $a_1^3 \neq a_2^3$. De (17) on déduit dans le cas actuel

$$\alpha = a_1\,\alpha, \quad \beta = a_2\,\beta$$

ainsi que

$$(22)\left\{\begin{array}{l} \Omega_3 = 0, \ \Omega_1 = a_1\,\omega_1, \ \Omega_2 = a_2\,\omega_2, \\ \Omega_{13} = a_2\,\omega_{13}, \ \Omega_{23} = a_1\,\omega_{23}, \ \Omega_{12} = a_1\,\omega_{12}, \ \Omega_{21} = a_2\,\omega_{21}, \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00}, \ \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}, \ \Omega_{33} - \Omega_{00} = \omega_{33} - \omega_{00}, \\ \Omega_{32} = \Omega_{10}, \ \Omega_{31} = \Omega_{20}. \end{array}\right.$$

Les équations (17) et (22) contienent toutes les conditions du problème.

Par différentiation extérieure, on déduit de (22)

$$[\omega_1, a_1\,\Omega_{10} - \omega_{10} - \frac{a_1\,a_2 - 1}{2}\,\omega_2] = 0,$$

$$[\omega_2, a_2\,\Omega_{20} - \omega_{20} - \frac{a_1\,a_2 - 1}{2}\,\omega_1] = 0,$$

$$[a_1\,\Omega_{10} - \omega_{10}, \omega_1] + [a_2\,\Omega_{20} - \omega_{20}, \omega_2] = 0,$$

$$a_1\,[\omega_1\,\Omega_{20}] + a_2\,[\omega_2\,\Omega_{30}] = 0,$$

$$a_1\,[\omega_1\,\Omega_{30}] + a_2\,[\omega_2\,\Omega_{10}] = 0.$$

On peut donc poser, en introduisant deux quantités auxiliaires u, v

---

[1]) V. aussi G. P. D, Appendice II (écrit de M. Bompiani), p. 723-5.

$$
(23)\qquad \begin{cases}
a_1\, \Omega_{10} \quad \omega_{10} - u\,\omega_1 + \dfrac{a_1\, a_2 \quad 1}{2}\, \omega_2, \\[2ex]
a_2\, \Omega_{20} - \omega_{20} = \dfrac{a_1\, a_2 - 1}{2}\, \omega_1 + v\, \omega_2, \\[2ex]
\Omega_{30} - \dfrac{a_1}{a_2^2}\,(v + \varrho)\,\omega_1 + \dfrac{a_2}{a_1^2}\,(u + \lambda)\,\omega_2.
\end{cases}
$$

Rappelons les relations[1])

$$
(24)\qquad \begin{array}{l}
[\omega_1\, d\, v] + \ \omega_2\, d\, \varrho] + (2\, \varrho\, \alpha - 3\, v\, \beta) \ \ \omega_1\, \omega_2] = 0, \\
[\omega_1\, d\, \varrho] + [\omega_2\, d\, \lambda] + 4\, (\lambda\, \alpha \quad \varrho\, \beta)\, [\omega_1\, \omega_2] \quad 0, \\
\omega_1\, d\, \lambda] + [\omega_2\, d\, \mu] + (3\, \mu\, \alpha \quad 2\, \lambda\, \beta) \ \ \omega_1\, \omega_2] \quad 0.
\end{array}
$$

Par différentiation extérieure, on obtient de (23)

$$
(25)\qquad \begin{array}{l}
[\omega_1, du + (\quad 2\, \beta\, u \quad \dfrac{3}{2} \cdot a_1\, a_2 \quad 1 \,.\, \alpha)\, \omega_2] \quad 0, \\[2ex]
\omega_2, dv + (\quad 2\, \alpha\, v \ | \ \dfrac{3}{2} \cdot a_1\, a_2 \quad 1 \,.\, \beta)\, \omega_1] - 0,
\end{array}
$$

$$
(26)\qquad \begin{array}{l}
a_1^3 \ \ \omega_1, dv + d\, \varrho \quad 4\, \beta\, (v \quad \varrho)\, \omega_2 \ + \\
+ a_2^3 \ \ \omega_2^3, du \quad d\, \lambda \quad 4\, \alpha\, (u \quad \lambda)\, \omega_1 \quad 0.
\end{array}
$$

D'après (24_2) je peux poser

$$
(27)\qquad \begin{array}{l}
d\, \varrho - 4\, \varrho\, \beta\, \omega_2 \quad \varrho_1\, \omega_1 + \sigma\, \omega_2, \\
d\, \lambda \quad 4\, \lambda\, \alpha\, \omega_1 \quad \sigma\, \omega_1 + \lambda\, \omega_2.
\end{array}
$$

Les équations (25) conduisent à poser

$$
du = A\, \omega_1 + (2\, \beta\, u \quad \frac{3}{2} \cdot a_1\, a_2 \quad 1 \,.\, \alpha)\, \omega_2,
$$

$$
dv = (2\, \alpha\, v - \frac{3}{2} \cdot a_1\, a_2 - 1 \,.\, \beta)\, \omega_1 + B\, \omega_2.
$$

En substituant ces valeurs de du, dv dans l'équation (26) on obtient, ayant égard à (27),

$$
a_1^3\, (B + \sigma \quad 4\, \beta\, v) = a_2^3\, (A + \sigma - 4\, \alpha\, u).
$$

Je peux donc poser

$$
\begin{array}{l}
A = a_1^3\, w - \sigma + 4\, \alpha\, u, \\
B = a_2^3\, w - \sigma + 4\, \beta\, v,
\end{array}
$$

ainsi que

$$
du = (a_1^3\, w \quad \sigma + 4\, \alpha\, u)\, \omega_1 + (2\, \beta\, u - \frac{3}{2} \cdot a_1\, a_2 - 1\, \alpha)\, \omega_2,
$$

$$
dv - (2\, \alpha v - \frac{3}{2} \cdot a_1\, a_2 - 1 \,.\, \beta)\, \omega_1 + (a_2^3\, w \quad \sigma + 4\, \beta\, v)\, \omega_2.
$$

[1]) Déf., p. 291, (36).

En définitive, il s'agit de discuter le système de Pfaff

$$
(28)\left\{
\begin{array}{l}
\omega_3 = 0,\ \omega_{13} - \omega_2,\ \omega_{23} = \omega_1,\ \omega_{12} \quad \omega_1,\ \omega_{21} = \omega_2,\ \omega_{31} - \omega_{20},\ \omega_{32} \quad \omega_{10}, \\
\omega_{11} - \omega_{00} - 2\,\alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_2,\ \omega_{22} \quad \omega_{00} \quad \alpha\,\omega_1 + 2\,\beta\,\omega_2,\ \omega_{33} \quad \omega_{00} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 3\,\alpha\,\omega_1 + 3\,\beta\,\omega_2, \\
\omega_{10} \quad \lambda\,\omega_1 + \mu\,\omega_2,\ \omega_{20} = \nu\,\omega_1 + \varrho\,\bar{\omega}_2,\ \omega_{30} - \varrho\,\omega_1 + \lambda\,\omega_2, \\
d\,\varrho = \varrho_1\,\omega_1 + (\sigma \quad 4\,\varrho\,\beta)\,\omega_2,\ d\,\lambda \quad (\sigma + 4\,\lambda\,\alpha)\,\omega_1 + \lambda_2\,\omega_2, \\
du = (a_1^3\,w - \sigma + 4\,\alpha\,u)\,\omega_1 + (2\,\beta\,u \quad \frac{3}{2}\,.\,a_1\,a_2 - 1\,.\,\alpha)\,\omega_2, \\
dv = (2\,\alpha\,v \quad \frac{3}{2}\,.\,\overline{a_1\,a_2 \quad 1}\,.\,\beta)\,\omega_1 + (a_2^3\,w \quad \sigma + 4\,\beta\,v)\,\omega_2.
\end{array}
\right.
$$

En différentiant extérieurement toutes les équations du systéme (28), on obtient

$$
(29)\left\{
\begin{array}{l}
[\omega_1,\ d\,\alpha + (1 \quad \alpha\,\beta - \frac{4}{3}\,\mu - \frac{2}{3}\,\nu)\,\omega_2] - 0, \\
[\omega_2,\ d\,\beta + (1 - \alpha\,\beta - \frac{2}{3}\,\mu - \frac{4}{3}\,\nu)\,\omega_1] \quad 0, \\
[\omega_1,\ d\,\nu \quad (2\,\varrho\,\alpha \quad 3\,\nu\,\beta \quad \varrho_1)\,\omega_2] \quad 0, \\
[\omega_2,\ d\,\mu + (2\,\lambda\,\beta \quad 3\,\mu\,\alpha \quad \lambda_2)\,\omega_1] \quad 0, \\
[\omega_1\,d\,\varrho_1] + \ \omega_2\,d\,\sigma] + \{4\,\varrho\,(1 \quad \frac{2}{3}\,\mu \quad \frac{4}{3}\,\nu) + \alpha\,\sigma \quad 5\beta\,\varrho_1\}\ \omega_1\,\omega_2] \quad 0, \\
[\omega_1\,d\,\sigma] + [\omega_2\,d\,\lambda_2] + \{-4\,\lambda\,(1 - \frac{4}{3}\,\mu \quad \frac{2}{3}\,\nu) \quad \beta\,\sigma + 5\,\alpha\,\lambda_2\}\ \omega_1\,\omega_2] = 0, \\
[a_1^3\,d\,w \quad d\,\sigma + 4\,u\,d\,\alpha,\ \omega_1] + [2\,u\,d\,\beta \quad \frac{3}{2}\,.\,a_1\,a_2 \quad 1\,.\,d\alpha,\ \omega_2] + \\
+ \{3\,a_1^3\,\beta\,w \quad 3\,\beta\,\sigma + 2\,\alpha\,\beta\,u + \frac{15}{2}\,.\,a_1\,a_2 - 1\ \alpha^2\}\,[\omega_1\,\omega_2 \quad 0, \\
[2\,v\,d\,\alpha - \frac{3}{2}\,.\,a_1\,a_2 - 1\,.\,d\,\beta,\ \omega_1] + [\,a_2^3\,dw \quad d\,\sigma + 4\,v\,d\,\beta,\ \omega_2] + \\
+ \{\quad 3\,a_2^3\,\alpha\,w + 3\,\alpha\,\sigma - 2\,\alpha\,\beta\,u - \frac{15}{2}\,.\,a_1\,a_2 - 1\ \beta^2\}\,[\,\omega_1\,\omega_2] \quad 0,
\end{array}
\right.
$$

Les équations (29), en nombre de huit, contiennent, outre ω_1 et ω_2, huit autres formes de Pfaff

$$d\,\alpha,\ d\,\beta,\ d\,\nu,\ d\,\mu,\ d\,\varrho_1,\ d\,\varrho_2,\ d\,\sigma,\ d\,w$$

et le déterminant des coefficients de ces formes est $(a_1^3 - a_2^3)\,\omega_1^4\,\omega_2^4 = 0$. Or $a^3_1 \mp a_2^3$, ainsi que nous voyons que le systéme (28) est en involution et que sa solution dépend de huit fonctions arbitraires d'un argument.

§ 7. *Correspondances asymptotiques de seconde espèce.*

Soient $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ deux formes de Pfaff indépendantes en deuxvariables; les covariants bilinéaires de ces formes soient

$$(30) \qquad \bar{\omega}_1' - b\ \ \bar{\omega}_1\bar{\omega}_2],\ \bar{\omega}_2' - - a\,[\bar{\omega}_1\,\bar{\omega}_2].$$

Soit t une autre variable et soient $f(t)$, $g(t)$ deux fonctions de t. Cherchons *toutes les surfaces S_1 dont l'élément linéaire projectif ait la forme*

$$\frac{\omega_1^3 + \omega_2^3}{2\,\omega_1\,\omega_2}$$

avec

$$\omega_1 = f(t)\,.\,\bar{\omega}_1, \quad \omega_2 = g(t)\,.\,\bar{\omega}_2,$$

t étant une fonction quelconque de u et v. Je vais démontrer que *les surfaces S_1 dépendent de cinq fonctions arbitraires d'un argument.*

Dans deux cas particuliers, à savoir: 1° $f(t) = g(t)$; 2° $f(t)\,g\,.\,(t) = 1$, le calcul à été déjà fait par M. Cartan[1]). Le calcul est presque le même dans le cas général. Le problème conduit au système de Pfaff

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l} \omega_3 = 0,\ \omega_{13} = \omega_2,\ \omega_{23} - \omega_1, \\ \omega_{12} = \omega_1,\ \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33} = 0,\ \omega_{21} = \omega_2, \\ \omega_1 = f(t)\,.\,\bar{\omega}_1,\ \omega_2 - g(t)\,.\,\bar{\omega}_2. \end{array}\right.$$

On en déduit par différentiation extérieure

$$\begin{array}{l} [\omega_1, \omega_{00} + \omega_{22} \quad 2\,\omega_{11}] + [\omega_2, \omega_{32} - \omega_{10}] - 0, \\ [\omega_1, \omega_{32} - \omega_{10}] + [\omega_2, \omega_{31} - \omega_{20}] = 0, \\ [\omega_1, \omega_{31} - \omega_{20}] + [\omega_2, \omega_{00} + \omega_{11} - 2\,\omega_{22}] = 0, \\ [\omega_1, \dfrac{f'}{f}\,dt - \dfrac{b}{g}\,\omega_2 + \omega_{11} - \omega_{00}] = 0, \\ [\omega_2, \dfrac{g'}{g}\,dt - \dfrac{a}{f}\,\omega_1 + \omega_{22} - \omega_{00}] = 0. \end{array}$$

Il se présente ici, outre ω_1, ω_2, les cinq formes de Pfaff indépendantes

$$\omega_{00} - \omega_{11},\ \omega_{00} - \omega_{22},\ \omega_{32} - \omega_{10},\ \omega_{31} - \omega_{20},\ d\,t.$$

En annulant le déterminant des coefficients de ces formes on obtient

$$(32)\qquad \omega_1\,\omega_2 \left(\frac{d \log \dfrac{f^2}{g}}{dt}\,\omega_1^3 + \frac{d \log \dfrac{g^2}{f}}{dt}\,\omega_2^3 \right) - 0.$$

Le système (31) est donc en involution et sa solution dépend de cinq fonctions arbitraires d'un argument. Les caractéristiques sont données par l'équation (32).

Par ce qui précède, nous avons démontré le théorème suivant: *Soient donnée une surface S non réglée et posons*

$$(32)\qquad r = \varphi(t), \quad s = \varphi(t),$$

φ et ψ *étant deux fonctions arbitrairement choisies* ($\varphi\psi \neq 0$). *Il existe des correspondances asymptotiques de seconde espèce appartenant aux relations* (33) *entre la surface donné S et une surface S_1, et ces correspondances dépendent de cinq fonctions arbitraires d'un argument* (ainsi que la surface S_1 ne

---

[1]) Déf., § 31 et 33.

peut plus être choisie arbitrairement), Il suffit, pour le voir, de choisir $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$ de manière que l'élément linéaire projectif de S soit

$$\frac{\bar{\omega}_1^3 + \bar{\omega}_2^3}{2\,\bar{\omega}_1\,\bar{\omega}_2}$$

et de poser

$$f(t) = \sqrt[3]{\varphi^2\,\psi}\,,\quad g(t) = \sqrt[3]{\varphi\,\psi^2}.$$

L'équation (32) acquiert la forme

$$\omega_1\,\omega_2\left(\frac{d\log\varphi}{dt}\,\omega_1^3 + \frac{d\log\psi}{d\,t}\,\omega_2^3\right) = 0.$$

On voit que deux familles de caractéristiques se réduisent aux asymptotiques, les trois autres familles étant *apolaires* aux asymptotiques Dans le cas particuliers des demidéformations asymptotiques relatives p. ex. aux asymptotiques $\omega_2 = 0$ ($r = 1$; plus généralement dans le cas $r =$ const.) les asymptotiques $\omega_2 = 0$ forment une famille quadruple de caractéristiques, les autres asymptotiques $\omega_1 = 0$ étant des caractéristiques simples.

§ 8. *Un cas particulier de correspondance de première espèce.*

Cherchons les surfaces S_1 dont l' élément linéaire projectif ait la forme

$$\frac{\omega_1^3 + \omega_2^3}{2\,\omega_1\,\omega_2} \tag{34}$$

avec

$$\omega_1 = f\,.\,\bar{\omega}_1,\ \omega_2 = g\,.\,\bar{\omega}_2.$$

où $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ sont deux formes de Pfaff données et les quantités f, g doivent satisfaire à la condition que la différentielle $d\,\Phi$ d'une fonction donnée Φ de f et g soit proportionnelle à une combinaison linéaire donnée des formes $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$.

Pour que l'élément linéaire projectif de S_1 ait la forme (34), il faut et il suffit[1]) que le systéme de référence mobile attaché à S soit particularisé de manière à vérifier les relations

$$\omega_3 = 0,\ \omega_{13} = \omega_2,\ \omega_{23} = \omega_1,$$
$$\omega_{12} = \omega_1,\ \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33} = 0,\ \omega_{21} = \omega_2.$$

Nous sommes donc conduits à étudier le système de Pfaff

$$\begin{aligned} &\omega_3 = 0,\ \omega_{13} = \omega_2,\ \omega_{23} = \omega_1, \\ &\omega_{12} = \omega_1,\ \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33} = 0,\ \omega_{21} = \omega_2, \\ &\omega_1 = f\,\bar{\omega}_1,\ \omega_2 = g\,\bar{\omega}_2, \\ &d\,\Phi = h\,\bar{\omega}, \end{aligned} \tag{35}$$

[1]) Déf. § 14 et 28.

ϖ étant une combinaison linéaire donnée de $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$. On en tire par différentiation extérieure

$$
\begin{aligned}
&[\omega_1, \omega_{00} + \omega_{22} - 2\,\omega_{11}] + [\omega_2, \omega_{32} - \omega_{10}] = 0,\\
&[\omega_1, \omega_{32} - \omega_{10}] + [\omega_2, \omega_{31} - \omega_{20}] = 0,\\
&[\omega_1, \omega_{31} - \omega_{20}] + [\omega_2, \omega_{00} + \omega_{11} - 2\,\omega_{22}] = 0,\\
(36)\qquad &\left[\omega_1, \omega_{11} - \omega_{00} + \frac{d\,f}{f} - \frac{b}{g}\,\omega_2\right] = 0,\\
&\left[\omega_2, \omega_{22} - \omega_{00} + \frac{d\,g}{g} - \frac{a}{f}\,\omega_1\right] = 0,\\
&[d\,h\,\bar{\omega}] + h\,\bar{\omega}' = 0,
\end{aligned}
$$

où les quantités a, b, sont définies par (30). Il entre dans les équations (36), outre ω_1, ω_2, sept autres formes de Pfaff, à savoir

$$(37)\qquad \omega_{00} - \omega_{11},\ \omega_{00} - \omega_{22},\ \omega_{32} - \omega_{10},\ \omega_{31} - \omega_{20},\ d\,f,\ d\,g,\ d\,h\,;$$

mais on a entre ces neuf formes de Pfaff la relation identique

$$(38)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial f}\,d\,f + \frac{\partial \Phi}{\partial g}\,d\,g = h\,\varpi.$$

En annulant le déterminant des coeficients des formes (37) dans les premiers membres des équations (36) et (38) on obtient

$$(39)\qquad \omega_1\,\omega_2\,\bar{\omega}\left\{\left(f\,\frac{\partial \Phi}{\partial f} + 2\,g\,\frac{\partial \Phi}{\partial g}\right)\omega_1^3 - \left(2\,f\,\frac{\partial \Phi}{\partial f} + g\,\frac{\partial \Phi}{\partial g}\right)\omega_2^3\right\} = 0.$$

Si l'on exclut le cas banal $\Phi =$ const. l'équation (39) n'est pas une identité. Le systéme (35) est donc en involution et sa solution dépend de six fonctions arbitraires d'un argument; l'équation (39) en donne les caractéristiques.

Si l'on choisit $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ de manière que

$$\frac{\bar{\omega}_1^3 + \bar{\omega}_2^3}{2\,\bar{\omega}_1\,\bar{\omega}_2}$$

soit l'élément linéaire projectif d'une surface donnée S, on a une correspondance asymptotique entre S et S_1, dont les invariants r, s sont données par

$$r = \frac{f^2}{g}, \quad s = \frac{g^2}{f}.$$

Je pose alors $\Phi\,(f, g) = \varphi\,(r, s)$, ainsi que l'équation (39) s'écrit

$$(40)\qquad \omega_1\,\omega_2\,\bar{\omega}\left(s\,\frac{\partial \varphi}{\partial s}\,\omega_1^3 - r\,\frac{\partial \varphi}{\partial r}\,\omega_2^3\right) = 0.$$

L'équation $\bar{\omega} = 0$ définit un systéme $\{C\}$ de courbes tracées sur S. Nous avons donc démontré le théorème suivant: *Soit donnée une surface S non réglée et un système simplement infini $\{C\}$ de courbes tracées sur S. Encore, soit donnée une fonction* (non constante) *de deux variables $\varphi\,(r, s)$. Il existent* *des correspondances de première espèce*[1]) *entre S et S_1 telles que, r et s étant nos invariants, la fonction φ (r, s) reste constante le long de chaque courbe du système* {*C*}. *Ces correspondances dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument.* Ces correspondances sont données par les solutions du systéme de Pfaff (35). La distribution des caractéristiques est évidente de (40).

Chapitre II.

Groupes continus de transformations de seconde ou de troisième espèce.

§ 1. *Une recherche auxiliaire.*

Soit

$$\Phi = f\,(u,.v)\; d\,u^{\lambda}\; d\,v^{\mu},$$

λ et μ étant des constantes différentes de 0. Nous allons recherchet tous les cas où il existe un groupe continu G de transformations reproduisant Φ à un facteur constant près. J'indiquerai par $U, U_1, U_2 \ldots (V, V_1, V_2 \ldots)$ des fonctions de la variable u (v) seule. Les équations $d\,u = 0, d\,v = 0$ étant évidemment invariantes pour le groupe G, chaque transformation infinitésimale de G a la forme $U \frac{\partial}{\partial u} + V \frac{\partial}{\partial v}$.

On peut simplifier le problème moyennant une substitution de la forme

$$u_1 = \varphi\,(u),\; v_1 = \psi\,(v) \tag{1}$$

ou bien

$$u_1 = v, \quad v_1 = u. \tag{2}$$

Les transformations finies de G ont toutes la forme (1).

Commençons par le cas où G contient une transformation infinitésimale de la forme $U \frac{\partial}{\partial u}$.

En changeant la variable u, on peut donner à cette transformation infinitésimale la forme simple $\frac{\partial}{\partial u}$. Alors on doit avoir, pour chaque valeur de a,

$$f\,(u + a, v) \qquad \varphi\,(a)\,.\,f\,(u, v). \tag{3}$$

On en conclut que $\log f = au + V$, a étant une constante.

En changeant convenablement les variables u, v, on arrive au cas

$$\Phi = d\,u^{\lambda}\; d\,v^{\mu}.$$

---

[1]) Parmi les solutions de (35) il se trouve aussi les correspondances de seconde espèce appartenant aux relations $\varphi\,(r, s) =$ const. Mais nous savons du § précédent que ces correspodances se dépendent que de cinq fonctions arbitraires d'un argument.

Le groupe G à évidemment quatre paramètres et contient les transformations

$$u_1 = a_1 u + b_1, \; v_1 = a_2 u + b_2.$$

Le cas où G contient une transformation infinitésimale de la forme $V \frac{\partial}{\partial v}$ se réduit au précédent moyennant la substitution (2). Nous devons donc supposer que $U V \neq 0$ pour chaque transformation infinitésimale $U \frac{\partial}{\partial u} + V \frac{\partial}{\partial v}$ de G. Moyennant une substitution (1), on donne la forme $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$ à une transformation infinitésimale de G. On doit alors avoir, pour chaque valeur de a,

(4) $$f(u + a, v + a) = \varphi(a) \, . \, f(u, v),$$

ainsi que

$$\log f = \alpha u + \log \varphi (u - v),$$

α étant une constante. Donc

$$\Phi = e^{\alpha u} \varphi (u - v) \, . \, d u^{\lambda} \, d v^{\mu}.$$

Quelle que soit la fonction φ, la transformation infinitésimale $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$ fait partie de G. Supposons que le groupe G ait plus d'un paramètre, ainsi que nous avons une autre transformation infinitésimale $U \frac{\partial}{\partial u} + V \frac{\partial}{\partial v}$ indépendante de $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$. Le groupe G doit alors contenir aussi la parenthèse

$$\left(U \frac{\partial}{\partial u} + V \frac{\partial}{\partial v}, \; \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) - U' \frac{\partial}{\partial u} + V' \frac{\partial}{\partial v} \, .$$

Pour rechercher l'effet de $U \frac{\partial}{\partial u} + V \frac{\partial}{\partial v}$ sur le forme Φ, posons $\delta u = U$, $\delta v = V$, ainsi que $\delta d u = U' d u$, $\delta d v = V' d v$, et par suite

$$\delta \Phi = \left[\alpha U + \frac{\varphi'}{\varphi} (U - V) + \lambda U' + \mu V'\right] . \, \Phi.$$

Pour que $U \frac{\partial}{\partial u} + V \frac{\partial}{\partial v}$ appartienne à G, on doit donc avoir

(5) $$\alpha U + \frac{\varphi'}{\varphi} (U - V) + \lambda U' + \mu V' + \beta = 0,$$

β étant une constante. La transformation infinitésimale $U \frac{\partial}{\partial u} + V \frac{\partial}{\partial v}$ étant indépendante de $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$, on a $U - V \neq 0$, et de (5) on déduit

$$(6) \qquad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\alpha U + \lambda U' + \mu V' + \beta}{U - V} .$$

En appliquant à (6) l'opération $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$, on obtient

$$(7) \ (\alpha U' + \lambda U'' + \mu V'')(U - V) - (\alpha U + \lambda U' + \mu V' + \beta)(U' - V') = 0.$$

En substituant dans l'équation (7) deux valeurs convenables de u, on obtient par soustraction

$$(8) \qquad h_0 V'' + h_1 V' + h_2 V + h_3 = 0,$$

où les h sont des constantes *non toutes nulles* car la constante h_0 peut toujours être supposée diverse de zéro, si l'on n'a pas $U = c =$ const.; or l'hypothèse $U = c$ n'est pas admissible, parce que la transformation infinitésimale $U \frac{\partial}{\partial u} + V \frac{\partial}{\partial u} - c\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)$ ne contiendrait plus v.

De l'équation (8) il résulte que V a une des formes suivantes

$$h e^{av} + k e^{bv} + l, \ (h + k v) e^{av} + l,$$
$$h e^{av} + l, \ a v^2 + b v + c, \ a v + b.$$

Or nous avons vu que le groupe G contient aussi la transformation infinitésimale $U' \frac{\partial}{\partial u} + V' \frac{\partial}{\partial v}$; nous pouvons donc conclure que G contient une transformation infinitésimale de la forme[1]) $U \frac{\partial}{\partial u} + V \frac{\partial}{\partial v}$ avec $V = e^v$ ou $V = v$.

Commençons par le cas $V = v$. L'équation (7) devient

$$(9) \qquad (\alpha U' + \lambda U'')(U - v) - (\alpha U + \lambda U' + \mu + \beta)(U' - 1) = 0.$$

Il en résulte que

$$(\alpha U + \lambda U' + \mu + \beta) . (U' - 1) = 0.$$

Mais l'hypothèse

$$\alpha U + \lambda U' + \mu + \beta = 0$$

est à rejeter, car l'équation (6) donnerait $\varphi' = 0$, ainsi que le groupe G contiendrait $\frac{\partial}{\partial u}$. On a donc $U' = 1$; en remplaçant u par $u + c$, on a $U = u$, $V = v$. L'équation (9) donne encore $\alpha = 0$, ainsi que (6) devient

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{c}{u - v} ,$$

où $c = -(\lambda + \mu + \beta)$ est une constante. Donc

$$\Phi = a\,(u - v)^c\, du^\lambda\, dv^\mu ,$$

a, c étant des constantes différentes de zéro.

1) Nous avons fait usage de ce qu'on peut encore remplacer v par cv.

Désignons par $U \frac{\partial}{\partial u} + V \frac{\partial}{\partial v}$ une transformation infinitésimale arbitraire de G; l'équation (5) s'écrit maintenant

$$(10) \qquad c\,(U - V) + (\lambda\, U' + \mu\, V' + \beta)\,(u - v) - 0.$$

On en déduit par l'opération $\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}$

$$\lambda\, U'' - \mu\, V'' = 0,$$

ainsi que

$$U = a\,\mu\, u^2 + b_1\, u + c_1\,; \; V - a\,\lambda\, v^2 + b_2\, v + c_2,$$

où a, b_1, c_1, b_2, c_2, sont des constantes. En substituant les valeurs trouvées pour U, V dans l'équation (10), on obtient

$$(11) \qquad \begin{aligned} &a\,\mu\,(c + 2\,\lambda)\, u^2 + (c\, b_1 + \lambda\, b_1 + \mu\, b_2 + \beta)\, u + cc_1 = \\ &= a\,\lambda\,(c + 2\,\mu)\, v^2 + (cb_2 + \lambda\, b_1 + \mu\, b_2 + \beta)\, v + cc_2. \end{aligned}$$

En général, l'équation (11) exige $a = 0$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, ainsi que le groupe G est engendré par les transformations infinitésimales $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$, $u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}$ et les équations finies de G sont

$$u_1 = \alpha\, u + \beta, \quad v_1 = \alpha\, v + \beta\,.$$

Il n'y a exception que dans le cas $\lambda = \mu = -\frac{c}{2}$; alors l'équation (11) donne seulement $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, ainsi que le groupe G est engendré par $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$, $u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}$, $u^2 \frac{\partial}{\partial u} + v^2 \frac{\partial}{\partial v}$ et les équations finies de G sont

$$u_1 = \frac{\alpha\, u + \beta}{\gamma\, u + \delta}, \quad v_1 = \frac{\alpha\, v + \beta}{\gamma\, v + \delta}\,.$$

Nous avons vu plus haut que, dans le cas où le groupe G a deux paramètres au moins, et ne contient aucune transformation infinitésimale de la forme $U \frac{\partial}{\partial u}$ ou $V \frac{\partial}{\partial v}$, on peut supposer que G contient, outre $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$, une transformation infinitésimale de la forme $U \frac{\partial}{\partial u} + V \frac{\partial}{\partial v}$ avec $V = v$ ou $V = e^v$. Nous avons traité complètement le cas $V = v$. Nous allons montrer que l'hypothèse $V = e^v$ ne donne rien de nouveau. En effet, dans ce cas le groupe G contient les deux transformations infinitésimales

$$X = -\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}, \quad Y = \quad U \frac{\partial}{\partial u} - e^{v} \frac{\partial}{\partial v}\,;$$

or moyennant une substitution de la forme

$$u_1 = \varphi(u), \quad v_1 = e^{-v}$$

ces transformations infinitésimales prennent la forme

$$X = U_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + v_1 \frac{\partial}{\partial v_1}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial v_1}$$

ainsi qu'on obtient le cas déjà traité.

En définitive, nous avons vu que, *dans le cas où le groupe G existe, on peut ramener Φ à une des formes canoniques suivantes*:

I. $$\Phi = c\, d\, u^\lambda\, d\, v^\mu\,;$$

le groupe G a quatre paramètres et ses équations finies sont

$$u_1 = \alpha u + \beta, \; v_1 = \gamma v + \delta.$$

II. $$\Phi = c. \left[\frac{d\,u\,d\,v}{(u - v)^2} \right]^\lambda;$$

le groupe G a trois paramètres et ses équations finies sont

$$u_1 = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}, \quad v_1 = \frac{\alpha v + \beta}{\gamma v + \delta}.$$

III. $$\Phi = c\,.\,(u - v)^k\, d\,u^\lambda\, d\,v^\mu\,;$$

le groupe G a deux paramètres et ses équations finies sont

$$u_1 = \alpha u + \beta, \quad v_1 = \alpha v + \beta.$$

IV. $$\Phi = e^{cu}\,.\,\varphi(u - v)\,.\,d\,u^\lambda\, d\,v^\mu\,;$$

le groupe G a un paramètre et ses équations finies sont

$$u_1 = u + \alpha, \quad v_1 = v + \alpha$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer:
1° dans le cas I, $c = 1$; 2° dans le cas III, si $\lambda + \mu + k \neq 0$, $c = 1$; 3° dans le cas *IV*, $c = 1$ ou $c = 0$. Au contraire, la constante c est essentielle dans le cas II et, si $\lambda + \mu + k = 0$, aussi dans le cas *III*.

Soit maintenant

$$\Phi = f(u, v)\, du$$

et cherchons les cas où il existe un groupe continu G de transformations reproduisant Φ à un facteur costant près et *conservant l'équation* $dv = 0$. Ici encore chaque transformation infinitésimale de G a la forme $U \frac{\partial}{\partial u} + V \frac{\partial}{\partial v}$, et on peut simplifier le problème moyennant une substitution de la forme (1).

Dans le cas où G contient une transformation infinitésimale de la forme $U \frac{\partial}{\partial u}$, on peut supposer que cette transformation soit $\frac{\partial}{\partial u}$. On doit alors avoir

$$f(u+a,v)=\varphi(a).f(u,v).$$

d'où

$$f(u,v)=V.e^{\alpha u}$$

et on voit qu'on peut réduire Φ à une des deux formes canoniques suivantes:

$$\Phi = du,\quad \Phi = v\,du.$$

Dans le premier cas, le groupe G est infini et contient les transformations

$$u_1 - \alpha u + \beta,\ v_1 - \varphi(v),$$

φ étant une fonction arbitraire. Dans le second cas, le groupe G a trois paramètres et ses transformations sont

$$u_1 = \alpha u + \beta, \qquad v_1 = \gamma v.$$

Dans le cas où G contient une transformation infinitésimale $V\dfrac{\partial}{\partial v}$, on peut supposer que ce soit la transformation $\dfrac{\partial}{\partial v}$, ainsi que

$$f(u,v+a)=\varphi(a).f(u,v),$$
$$f(u,v)=U.e^{av}$$

ce qui peut se réduire aux deux formes canoniques déjà traitées.

Enfin soit $UV \neq 0$ pour chaque transformation infinitésimale de G. On peut alors supposer que $\dfrac{\partial}{\partial u}+\dfrac{\partial}{\partial v}$ soit une transformation infinitésimale de G, ainsi que

$$\Phi = e^{au}.\varphi(u-v)\,du.$$

On peut chercher les cas où le groupe G a plus d'un paramètre. A ce but, ou n'a qu'à substituer $\lambda = 1$, $\mu = 0$ dans le calcul fait plus haut et on arrive, ici encore, au résultat qu'on peut supposer que le groupe G contient une transformation infinitésimale de la forme $U\dfrac{\partial}{\partial u}+V\dfrac{\partial}{\partial v}$ avec $V=v$. En substituant $\lambda = 1$. $\mu = 0$ dans les calculs précedents, on voit que

$$\Phi = a.(u-v)^c\,du. \qquad (c \neq 0)$$

Soit $U\dfrac{\partial}{\partial u}+V\dfrac{\partial}{\partial v}$ une transformation intinitésimale de G, ce qui est exprimé par l'équation (10) avec $\lambda = 1$, $\mu = 0$, c'est-à-dire par

(12) $$c(U-V)+(U'+\beta)(u \quad v)=0.$$

En y opérant par $\dfrac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}$, on obtient $U''=0$, ainsi que

$$U = au + b.$$

En remplaçant U par cette valeur, on tire de (12) $V = av + b$. Le groupe G est donc engendré par $\dfrac{\partial}{\partial u}+\dfrac{\partial}{\partial v}$, $u\dfrac{\partial}{\partial u} \quad v\dfrac{\partial}{\partial v}$. En définitive, dans le cas où le groupe G existe, *on peut réduire Φ à une des formes canoniques suivantes*:

I.
$$\Phi = du;$$
le groupe G est infini et ses transformations finies sont
$$u_1 = \alpha u + \beta, \quad v_1 = \varphi(v).$$
II.
$$\Phi = v\, d u;$$
le groupe G a trois paramètres et ses transformations finies sont
$$u_1 = \alpha u + \beta, \quad v_1 = \gamma v.$$
III.
$$\Phi = c\,.\,(u - v)^k\, d u$$
le groupe G a deux paramètres et ses transformationz finies sont
$$u_1 = \alpha u + \beta, \quad v_1 = \alpha v + \beta;$$
la constante c peut être supposée égale à 1 si $k \neq -1$.

IV.
$$\Phi = e^{cu}\, \varphi\,(u-v)\, du;$$
le groupe G a un paramètre et ses transformations finies sont
$$u_1 = u + \alpha, \quad v_1 = v + \alpha;$$
on peut supposer $c = 1$ on $c = 0$.

§ 2. *Groupes continus de transformations asymptotiques de troisième espèce d'une surface en elle même.*

Soit
$$\frac{\beta\, d u^3 + \gamma\, d v^3}{2\, d u\, d v}$$
l'élément linéaire projectif d'une surface non réglée S. Nous allons chercher les cas où il existe un groupe continu g de transformations asymptotiques de troisième espèce de la surface S en elle même. Les transformations de g ont la propriété caractéristique de reproduire les formes différentielles

$$\beta\,\frac{du^2}{dv}\,,\ \gamma\,\frac{dv^2}{du} \tag{13}$$

à des facteurs constants près. Il résulte du § 1 que le groupe g à quatre paramètres au plus. *Je me borne à trouver les cas où le groupe g à deux paramètres au moins.*

Commençons par le cas où il est possible de réduire les expressions (13) à la forme
$$\frac{du_1^2}{dv_1}\,,\ \frac{du_2^2}{dv_2}\,.$$

On peut alors[1]) choisir les cordonnées asymptotiques u, v de manière à avoir

[1]) G P D, § 69 B, C.

$$\beta = \sqrt{\frac{V}{U}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{U}{V}},$$

où

$$U = a u^3 + b_1 u_2^2 + c_1 u + d_1,$$
$$V = a v^3 + b_2 v^2 + c_2 v + d_2.$$

En posant

$$\delta u = U_0, \ \delta v = V_0$$

U_0 (V_0) étant une fonction de la variable u (v) seule, on obtient

$$\delta\left(\beta \frac{du^2}{dv}\right) = \left(-\frac{1}{2}\frac{U' U_0}{U} + \frac{1}{2}\frac{V' V_0}{V} + 2\,U_0' - V_0'\right)\beta \frac{du^2}{dv},$$

$$\delta\left(\gamma \frac{dv^2}{du}\right) = \left(\frac{1}{2}\frac{U' U_0}{U} - \frac{1}{2}\frac{V' V_0}{V} - U_0' + 2\,V_0'\right)\gamma \frac{dv^2}{du}.$$

Le transformation infinitésimale $U_0 \frac{\partial}{\partial u} + V_0 \frac{\partial}{\partial v}$ fait donc partie du groupe g alors et alors seulement si les deux parenthèses à droite sont des constantes; or ces parenthèses sont des sommes d'une fonction de u et d'une fonction de v; donc les expressions

$$U_0', V_0', \frac{U_0 U'}{U}, \frac{V_0 V'}{V}$$

doivent être des constantes. On peut donc poser

$$U_0 = h_1 u + k_1, \quad V_0 - h_2 v + k_2.$$

Cherchons les conditions pour que l'expression $\frac{U_0 U'}{U}$ soit constante. Ceci arrive certainement si $U_0 = 0$. Soit donc $U_0 \neq 0$. Alors le polynome U doit être divisible par U'; donc U doit être une puissance d'un polynome linéaire: $U = (\alpha u + \lambda)^i$ avec $i = 0, 1\ 2, 3$; $\alpha \neq 0$. Si $i = 0$, les constantes h_1, k_1 sont arbitraires; pour $i > 0$, au contraire, on doit avoir $h_1 : k_1 = \alpha : \lambda$. Une considération analogue s'applique à l'expression $\frac{V_0 V'}{U}$. En simplifiant moyennant une substitution de la forme $u_1 = \alpha_1 u + \alpha_2, v_1 = \alpha_3 u + \alpha_4$ ou bien $u_1 = v, v_1 = u$, on voit qu'on a six cas essentiellement distinctes: 1° Chacun des polynomes U, V a au moins deux racines distinctes; alors le groupe g n'existe pas. 2° Le polynome U à au moins deux racines distinctes; $V = v^i$ ($i = 1, 2, 3$); le groupe g est engendré par $v \frac{\partial}{\partial v}$. 3° Le polynome U à au moins deux racines distinctes, $V = 1$; le groupe g est engendré par $\frac{\partial}{\partial v}, v \frac{\partial}{\partial v}$. 4° $U = u^i$, $V = v^j$ ($i, j = 1, 2, 3$); le groupe g est engendré par $u \frac{\partial}{\partial u}, v \frac{\partial}{\partial v}$. 5° $U = u^i$

$(i = 1, 2, 3)$, $V = 1$; le groupe g est engendré par $u \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, v \frac{\partial}{\partial v}$. 6°
$U = V = 1$. Le groupe g est engendré par $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$, $u \frac{\partial}{\partial u}$, $v \frac{\partial}{\partial v}$.
Les coefficients des équations fondamentales de toutes ces surfaces sont connus[1]).

Nous allons maintenant examiner le cas où l'on peut arriver à $\gamma = 1$ moyennant un choix convenable des cordonnées asymptotiques, mais non à $\beta = 1$. D'après les résultats du § 1, on peut[2]) choisir les coordonnées u et v de manière à avoir

$$\beta = A\,(u - v)^k\,; \qquad (A\,k \neq 0).$$

le groupe g a deux paramètres et il est donné par

$$u_1 = \alpha u + \alpha_1, \qquad v_1 = \alpha\, v + \alpha_1. \tag{13}$$

γ a la forme

$$\gamma \quad U\,V$$

où les U, V sont assujettis à la condition que $\gamma \frac{d\,v^2}{d\,u}$ doit se multiplier par un facteur constant en effectuant une transformation (13), ce qui donne $\gamma =$ const. Donc, sans restreindre la généralité,

$$\beta = A\,(u - v)^k\,;\; \gamma = 1. \tag{14}$$

Pour discuter l'existence de ces surfaces nous faisons usage des conditions d'intégrabilité sous la forme déjà employée[3]). En y substituant les valeurs (14) on obtient

$$\frac{\partial L}{\partial v} = -A\,k\,(u - v)^{k\ 1}; \quad \frac{\partial M}{\partial u} = 2\,A\,k\,(u - v)^{k\ 1}; \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &A\,(u - v)^k \frac{\partial M}{\partial v} - 2\,A k\,(u \quad v)^{k-1} M - \\ &\qquad - A\,k\,(k - 1)\,(k - 2)\,(u - v)^{k-3} = \frac{\partial L}{\partial u}. \end{aligned} \tag{16}$$

De (15) on obtient

$$L - A\,(u \quad v)^k + U,\; M = 2\,A\,(u - v)^k + V, \tag{17}$$

ainsi que l'équation (16) prend la forme

[1]) V. G P D. § 69 C, où on trouve l'expression de $\tau_1\,du + \tau_2\,dv = -\frac{M}{\gamma}\,du - - \frac{L}{\beta}\,dv$.

[2]) Car nous supposons que le groupe g a deux paramètres au moins.

[3]) Chap. I, § 5, (10).

$$(18)\quad \begin{aligned} 6A^2k(u-v)^{2k-1} + Ak(k-1)(k-2)(u-v)^{k-3} + Ak(u-v)^{k-1} + \\ + U' - A(u-v)^k V' + 2Ak(u-v)^{k-1} V = 0. \end{aligned}$$

En y opérant par $\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v}$, on obtient

$$(19)\quad U'' - A(u-v)^k V'' + 2Ak(u-v)^{k-1} V' = 0.$$

L'opération $\dfrac{\partial}{\partial v}$ donne ensuite

$$(20)\quad (u-v)^2 V''' - 3k(u-v)V'' + 2k(k-1)V' = 0,$$

d'où, en y opérant par $\dfrac{\partial}{\partial u}$

$$2(u-v)V''' - 3kV''.$$

On en conclut que $V'' = 0$, ainsi que (20) donne

$$(21)\quad (k-1)V' - 0;\ V'' = 0.$$

Supposons d'abord que $k \neq 1$; alors (21) donne $V' = 0$, ainsi que $U'' = 0$ d'après (19). Donc $U' = a$, $V = b$ et l'équation (18) donne

$$(22)\quad \begin{aligned} 6A^2k(u-v)^{2k-1} + Ak(k-1)(k-2)(u-v)^{k-3} + \\ + (2b+1)Ak(u-v)^{k-1} + a = 0. \end{aligned}$$

Le nombre $2k-1$ doit donc être égal à un des nombres $k-3$, $k-1, 0$, ce qui donne $k = -2$ ou $k = \dfrac{1}{2}$. Si $k = -2$, l'équation (22) s'écrit

$$-12A(A+2)(u-v)^{-5} - 2A(2b+1)(u-v)^{-3} + a = 0,$$

ce qui donne

$$A = -2\quad b = \frac{1}{2},\quad a = 0.$$

Nous arrivons donc, d'après (14) et (17), à la solution

$$\beta = -\frac{2}{(u-v)^2},\ \gamma = 1,\ L = -\frac{2}{(u-v)^2} + c,\ M = -\frac{4}{(u-v)^2} - \frac{1}{2}.$$

Si $k = \dfrac{1}{2}$, l'équation (22) est évidemment impossible. Il reste à étudier le cas $k = 1$. Les équations (21) donnent $V = av + b$. L'équation (19) donne ensuite $U'' + 2Aa = 0$, d'où

$$U = -Aau^2 + cu + d,$$

ainsi que l'équation (18) donne

$$6A^2(u-v) + A - 2Aau + c - Aa(u-v) + 2A(av+b) = 0$$

d' où

$$a = 2A,\ c = -A(2b+1),$$

III.

les constantes A, b, d restant arbitraires. Nous arrivons donc, d'après (14) et (17) à la solution

$$\beta = A\,(u-v),\ \gamma = 1,\ L = -2\,A^2u^2 - 2\,A\,b\,u - A\,v + d,\ M = 2\,A\,u + b;$$

on peut y poser $b = 0$ sans restreindre la généralité.

Il reste à considérer le cas où l'on n'arrive ni à $\beta = 1$ ni à $\gamma = 1$ par un choix des coordonnées asymptotiques. Le groupe g devant avoir au moins deux paramètres les résultats du § 1 montrent qu'on peut choisir u et v de manière que le groupe g soit donné par (13). On en déduit sans difficulté que

$$\beta = A\,(u-v)^h,\ \gamma = B\,(u-v)^k, \tag{23}$$

A, B, h, k étant des constantes différentes de zéro. Les conditions d'intégrabilité sont alors

$$\frac{\partial L}{\partial v} = -A\,B\,(h+2\,k)\,(u-v)^{h+k-1}\ ;\quad \frac{\partial M}{\partial u} = -A\,B\,(2h+k)(u-v)^{h+k-1}; \tag{24}$$

$$\begin{aligned} A\,(u-v)^h\,\frac{\partial M}{\partial v} - 2\,Ah\,(u-v)^{h-1}\,M - Ah\,(h-1)\,(h-2)\,(u-v)^{h-3} &= \\ = B\,(u-v)^k\,\frac{\partial L}{\partial u} + 2\,Bk\,(u-v)^{k-1}\,L + B\,k\,(k-1)\,(k-2)\,(u-v)^{k-3}&. \end{aligned} \tag{25}$$

Soit d'abord $h + k \neq 0$. Les équations (24) donnent

$$\begin{aligned} L &= A\,B\,.\,\frac{h+2\,k}{h+k}\,(u-v)^{h+k} + U, \\ M &= AB\,.\,\frac{2\,h+k}{h+k}\,(u-v)^{h+k} + V. \end{aligned} \tag{26}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (25) on obtient

$$\begin{aligned} &A^2\,B\,\frac{(2\,h+k)\,(3\,h+k)}{h+k}\,(u-v)^{2h+k-1} + \\ &+ A\,B^2\,\frac{(h+2\,k)\,(h+3\,k)}{h+k}\,(u-v)^{h+2k-1} + \\ &+ A\,h\,(h-1)\,(h-2)\,(u-v)^{h-3} + B\,k\,(k-1)\,(k-2)\,(u-v)^{k-3} + \\ &+ B\,(u-v)^k\,U' - A\,(u-v)^h\,V' + 2\,Bk\,(u-v)^{k-1}\,U \\ &+ 2\,Ak\,(u-v)^{h-1}\,V = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

En y opérant par $\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v}$ on obtient

$$\begin{aligned} B\,(u-v)^k\,U'' - A\,(u-v)^h\,V'' + 2\,Bk\,(u-v)^{k-1}\,U' \\ + 2\,Ah\,(u-v)^{h-1}\,V' = 0, \end{aligned} \tag{28}$$

ce qui peut s'écrire

$$B\,(u-v)\,U'' + 2\,B\,k\,U' - A\,(u-v)^{h-k+1}\,V'' + 2\,Ah\,(u-v)^{h-k}\,V' = 0.$$

Opérons-y par $\dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$ et réprimons le facteur $-A\,(u-v)^{h-k-2}$; il vient ainsi

$$(u-v)^3 V'''' - 2\,(2h-k+1)\,(u-v)^2 V''' +$$
$$+ (h-k)\,(5h-k+1)\,(u-v)\,V'' - 2h\,(h-k)\,(h-k-1)\,V' = 0,$$

d'où on conclut que

$$(29)\quad \begin{aligned} &V'''' = 0,\ (2h-k+1)\,V''' = 0,\ (h-k)\,(5h-k+1)\,V'' = 0,\\ &(h-k)\,(h-k-1)\,V' = 0. \end{aligned}$$

Pareillement on déduit de (28) que

$$(30)\quad \begin{aligned} &U'''' = 0,\ (2k \quad h+1)\,U''' = 0,\ (h-k)\,(5k-h+1)\,U'' - 0,\\ &(h \quad k)\,(h \quad k+1)\,U' - 0. \end{aligned}$$

Supposons d'abord que $h-k \neq 0$. Alors $U' = V' = 0$. Cela est évident de (29) et (30) si $h-k \neq +1$. Or si l'on a p. ex. $h-k=1$, l'équation (30) donne encore $U' = 0$, ainsi que (28) devient

$$A\,(u-v)^h V'' - 2\,Ah\,(u \quad v)^{h-1} V' = 0$$

ou

$$(u-v)\,V'' - 2h\,V' = 0,$$

ainsi que aussi $V' = 0$. Je peux donc poser $U = a,\ V \quad b,\ a,\ b$ étant des constantes. *L*'équation (27) s'écrit alors

$$(31)\quad \begin{aligned} &A^2 B\,\frac{(2h+k)\,(3h+k)}{h+k}\,(u \quad v)^{2h+k \quad 1} +\\ &+ A\,B^2\,\frac{(h+2k)\,(h+3k)}{h+k}\,(u-v)^{h+2k \quad 1} +\\ &+ A\,h\,(h-1)\,(h-2)\,(u-v)^{h \quad 3} + B\,k\,(k \quad 1)\,(k-2)\,(u \quad v)^{k \quad 3} +\\ &+ 2\,B\,a\,k\,(u-v)^{k \quad 1} + 2\,A\,b\,h\,(u-v)^{h \quad 1} \quad 0. \end{aligned}$$

Dans chaque terme, ou bien le coefficient est égal à zéro ou bien l'exposant de $u-v$ est égal à l'exposant dans un autre terme.

En tenant compte de ce que les nombres

$$h,\ k,\ h+k,\ h-k$$

sont différents de zéro, on arrive ainsi à la conclusion qu' une équation au moins dans chaque ligne du tableau

$$(32)\quad \begin{aligned} &2h+k=0,\ 3h+k=0,\ h+k+2-0,\ h \quad -1,\\ &h+2k-0,\ h+3k=0,\ k= \quad 1,\ h+k+2=0,\\ &h=1,\ h-2,\ h+k+2=0,\ k--1,\ h \quad k \quad 2=0,\\ &k \quad 1,\ k-2,\ h- \quad 1,\ h+k+2-0,\ h \quad k+2-0,\\ &a-0 \quad h \quad k-2=0,\\ &b=0,\ h-k+2=0 \end{aligned}$$

est vérifiée. On en déduit sans difficulté que $h+k+2-0$. En effet, on ne peut pas avoir

$$(2h+k)\,(3h+k)-0,\ (h+2k)\,(h+3k)=0,$$

parce que $hk \neq 0$. Donc, si l'on avait $h+k+2 \neq 0$, les deux premières lignes du tableau (32) exigeraient $h=-1$ ou bien $k=-1$. Soit, pour fixer les idées, $h \quad k - 1$. Parceque $h - k \neq 0$, $h + k + 2 \neq 0$, la deuxième ligne du tableau (32) exigerait $k = \frac{1}{2}$ ou bien $k - \frac{1}{3}$, tandis que la troisième ligne exigerait $k = -3$. Donc $h + k + 2 = 0$, et le tableau (32) donne encore $a - b = 0$, c'est-à-dire $U = V = 0$.

L'équation (31) devient

$$A\, h\, (h - 1)\, (h - 2)\, (h - A\,B)\, (u - v)^{h-3} +$$
$$B\, k\, (k - 1)\, (k - 2)\, (k - A\,B) (u - v)^{k-3} = 0.$$

En tenant compte de ce qu'on peut échanger u avec v on n'obtient que deux solutions essentiellement distinctes, soit

$$h = -3,\ k = 1,\ AB = -3;$$
$$h = -4,\ k = 2,\ AB = -4.$$

Nous sommes donc arrivés aux deux solutions (v. (23) et (26))

$$\beta - \frac{A}{(u - v)^3},\quad \gamma = -\frac{3}{A}(u - v),$$
$$L \quad \frac{3}{2}\,\frac{1}{(u - v)^2},\quad M = -\frac{15}{2}\,\frac{1}{(u - v)^2};$$
$$\beta = \frac{A}{(u - v)^4},\quad \gamma = -\frac{4}{A}(u - v)^2,$$
$$L = 0, M = -12 \cdot \frac{1}{(u - v)^2}.$$

La constante A n'est d'ailleurs pas essentielle, comme on voit en multipliant u et v par le même facteur constant; on peut donc supposer $A = 1$.

Or nous avons supposé que $h - k \neq 0$. Soit maintenant $h - k = 0$, $h = k$. Soit d'abord $h = k \neq -1$. Les équations (29) et (30) donnent $U''' = V''' = 0$.

L'équation (28) donne

$$(u - v)\,(B\,U'' - A\,V'') + 2\,h\,(B\,U' + A\,V') - 0. \tag{33}$$

En y opérant par $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$, et en tenant compte de ce que

$$U''' = V''' = 0, \text{ on obtient } B\,U'' + A\,V'' = 0,$$
$$\textit{d'où}\ U = \alpha\,A\,u^2 + \lambda\,u + b, V = -\alpha\,B\,v^2 + \mu\,v + c\,.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (33) et en se rappelant que $h \pm -1$, on obtient $\alpha - 0, \mu\,A + \lambda\,B = 0$. Donc

$$U - A\,a\,u + b,\ V \qquad B\,a\,v + c,$$

a, b, c étant des constantes. En substituant ces valeurs dans l'équation (27), on obtient

$$\begin{aligned}&6\,A\,B\,(A + B)\,(u \quad v)^{3h \quad 1} + 2\,a\,A\,B\,(h + 1)\,(u - v)^h +\\ &+ 2(c\,A + bB)\,h\,(u - v)^{h-1} +\\ &+ h\,(h - 1)\,(h \quad 2)\,(A + B)\,(u \quad v)^{h \quad 3} \quad 0.\end{aligned} \tag{33}$$

Supposont d'abord que $A + B \neq 0$. Le premier terme de (33) est différent de zéro, ainsi que le nombre $3h - 1$ est égale à un des nombres h, $h - 1$, $h - 3$, ainsi que $h = \frac{1}{2}$, car nous avons supposé que $h \neq -1$: Or l'hypothése $h = \frac{1}{2}$ est impossible, parce que le dernier terme de (33) ne peut pas se détruire. On a donc nécessairement $A + B = 0$, et l'équation (33) prend la forme

$$- 2 a A^2 (h + 1) (u - v) + 2 h A (c - b) - 0,$$

d'où $a = 0$, $c = b$, car $h + 1 \neq 0$. Nous obtenous ainsi la solution suivante

$$\beta = A (u - v)^h, \ \gamma - \quad A (u \quad v)^h,$$
$$L = - \frac{3}{2} A^2 (u \quad v)^{2h} + b, \ M \quad \frac{3}{2} A^2 (u \quad v)^{2h} + b.$$

En multipliant u et v par le même facteur constant on voit que la constante A n'est pas essentielle (car $h + 1 \neq 0$); on peut donc supposer que $A - 1$.

Il reste à étudier le cas où $h = k = -1$. Les équations (29) et (30) donnent $U'''' = V'''' = 0$. L'équation (28) donne

$$(u - v) (B U'' - A V'') - 2 (B U' + A V') = 0. \tag{34}$$

En y opérant par $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}$, on obtient

$$B U''' + A V''' = 0.$$

d'où

$$U = A (\lambda u^3 + t_1 u^2 + t_2 u + t_3),$$
$$V = - B (\lambda v^3 + \tau_1 v^2 + \tau_2 v + \tau_3).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (34), on obtient

$$(t_1 - \tau_1) (u + v) + t_2 - \tau_2 = 0.$$

Donc $t_1 = \tau_1$, $t_2 = \tau_2$, ou bien, en changeant la notation

$$U = A (\lambda u^3 + a u^2 + b u + c),$$
$$V = - B (\lambda v^3 + a v^2 + b v + d).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (27) et en tenant compte des équations $h = k = - 1$, on obtient après une facile réduction

$$6 (A + B) (A B - 1) - 2 A B (c - d) (u - v)^2 + \lambda A B (u - v)^5 = 0,$$

d' où

$$(A + B) (A B \quad 1) = 0, \ c = d, \ \lambda = 0.$$

Nous sommes donc arrivés aux deux solutions

$$\beta \quad \frac{A}{u \quad v}, \ \gamma - \quad \frac{A}{u \quad v},$$

$$L - \quad \frac{3}{2} A^2 \frac{1}{(u - v)^2} + A (a u^2 + b u + c),$$

$$M = \frac{3}{2} A^2 \frac{1}{(u - v)^2} + A\,(a\,v^2 + b\,v + c)\,;$$

$$\beta = \frac{A}{u - v}\,,\quad \gamma = -\frac{1}{A}\,\frac{1}{u - v}\,,$$

$$L = \frac{3}{2}\,\frac{1}{(u - v)^2} + A\,\;(a\,u^2 + b\,u + c),$$

$$M = \frac{3}{2}\,\frac{1}{(u - v)^2} - \frac{1}{A}\,(a\,v^2 + b\,v + c).$$

Dans ce qui précède, nous avons supposé que $h + k \neq 0$. Nous allons voir que l'hypothèse $h + k = 0$ ne donne aucune solution. Dans ce cas, les équations (24) donnent

$$L = -\,A\,B\,h \log(u - v) + U,$$
$$M = A\,B\,h \log(u - v) + V.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (25), on obtient

$$\begin{aligned}(35)\quad & 2\,A\,B\,h^2 \log(u - v)\,[A\,(u - v)^{k-1} + B\,(u - v)^{-k-1}] + A^2 B\,h\,(u - v)^{k-1} - \\ & - A\,B^2\,h\,(u - v)^{-k-1} + A\,h\,(h - 1)\,(h - 2)\,(u - v)^{k-3} - \\ & - B\,h\,(h + 1)\,(h + 2)\,(u - v)^{-k-3} - A\,(u - v)^k\,V' + B\,(u - v)^{-k}\,U' + \\ & + 2\,A\,h\,(u - v)^{k-1}\,V - 2\,B\,h\,(u - v)^{-k-1}\,U = 0.\end{aligned}$$

En y opérant par $\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v}$, on obtient

$$(36)\quad B\,(u - v)^{-k}\,U'' - 2\,B\,h\,(u - v)^{-k-1}\,U' = A\,(u - v)^k\,V'' - 2\,A\,h\,(u - v)^{k-1}\,V',$$

ce qui peut s'écrire

$$B\,(u - v)\,U'' - 2\,B\,h\,U' = A\,(u - v)^{2k+1}\,V'' - 2\,A\,h\,(u - v)^{2k}\,V'.$$

En y opérant par $\dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$ et en divisant par $A\,(u - v)^{2k-2}$, on obtient

$$(37)\quad \begin{aligned}&(u - v)^3\,V'''' - 2\,(3\,h + 1)\,(u - v)^2\,V''' + 2\,h\,(6\,h + 1)\,(u - v)\,V'' - \\ &\qquad 4\,h^2\,(2\,h - 1)\,V' = 0.\end{aligned}$$

Pareillement, on déduit de (36) que

$$(38)\quad \begin{aligned}&(u - v)^3\,U'''' + 2\,(3\,h - 1)\,(u - v)^2\,U''' + 2\,h\,(6\,h - 1)\,(u - v)\,U'' - \\ &\qquad - 4h^2\,(2h + 1)\,U' = 0.\end{aligned}$$

Des équations (38) et (39) on voit que

$$(2\,h - 1)\,V' = (2\,h + 1)\,U' = 0.$$

Donc une au moins des équations $U' = 0$, $V' = 0$ est vérifiée ; mais alors l'équation (36) montre que l'autre équation est vérifiée de même. Donc U et V sont des constantes, et l'équation (35) ne contient que $u - v$. On en déduit aisément que le coeficient de log $(u - v)$ est égal à zéro, c'est-à-dire que

$$A\,(u-v)^{h-1} + B\,(u-v)^{-h\;1} = 0,$$

ce qui est impossible, car $A\,B\,h \neq 0$.

Je terminerai ce § par le tableau de *toutes les surfaces qui admettent un groupe continu à $p \geq 2$ paramètres de transformations asymptotiques de troisième espèce en elles mêmes.* Pour chaque type, j'écris, outre les coefficients β, γ de l'élément linéaire projectif, les valeurs des invariants r, s relatives à chaque transformation du groupe g.

I. Les équations de g sont

$$u_1 = a\,u + c,\quad v_1 = b\,v + d.$$

On a ici

$$\beta = 1,\ \gamma = 1;$$
$$r = a^2 : b,\ s = b^2 : a.$$

II. Les équations de g sont

$$u_1 = a\,u,\quad v_1 = b\,v + c.$$

Trois cas sont à distinguer:

1° $\beta = u^{-\frac{3}{2}}$, $\gamma = u^{\frac{3}{2}}$;
$r = a^{\frac{1}{2}} : b$, $s = a^{\frac{1}{2}} : b^2$.

2° $\beta = u^{-1}$, $\gamma = u$;
$r = a : b$, $s = b^2$.

3° $\beta = u^{-\frac{1}{2}}$, $\gamma = u^{\frac{1}{2}}$;
$r = a^{\frac{3}{2}} : b$, $s = b^2 : a^{\frac{1}{2}}$.

III. Les équations de g sont

$$u_1 = a\,u,\quad v_1 = b\,v.$$

Six cas sont a distinguer:

1° $\beta = u^{-\frac{1}{2}}\,v^{\frac{1}{2}}$, $\gamma = u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}}$;
$r = a^{\frac{3}{2}} : b^{\frac{1}{2}}$, $s = b^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{1}{2}}$.

2° $\beta = u^{-1}\,v^{\frac{1}{2}}$, $\gamma = u\,v^{-\frac{1}{2}}$;
$r = a : b^{\frac{1}{2}}$, $s - b^{\frac{3}{2}}$.

3° $\beta = u^{-\frac{3}{2}}\,v^{\frac{1}{2}}$, $\gamma = u^{\frac{3}{2}}\,v^{-\frac{1}{2}}$;
$r = a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}}$, $s = b^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{1}{2}}$.

$$4^0 \quad \beta = u^{-1} v, \quad \gamma = u v^{-1} ;$$
$$r = a, \qquad s = b.$$

$$5^0 \quad \beta = u^{-\frac{3}{2}} v, \quad \gamma = u^{\frac{3}{2}} v^{-1} ;$$
$$r = a^{\frac{1}{2}}, \qquad s = b : a^{\frac{1}{2}}.$$

$$6^0 \quad \beta = A u^{-\frac{3}{2}} v^{\frac{3}{2}}, \quad \gamma = \frac{1}{A} u^{\frac{3}{2}} v^{-\frac{3}{2}};$$
$$r = s = (a b)^{\frac{1}{2}}.$$

IV. Les équations de g sont

$$u_1 = u, \; v_1 = av + b.$$

Deux cas sont à distinguer:

$$1^0 \quad \beta = (u^3 + A u + B)^{-\frac{1}{2}}, \quad \gamma = (u^3 + A u + B)^{\frac{1}{2}};$$
$$r = a^{-1}, \quad s = a^2;$$

$$2^0 \quad \beta = (u^2 + A)^{-\frac{1}{2}}, \quad \gamma = (u^2 + A)^{\frac{1}{2}};$$
$$r = a^{-1}, \quad s = a^2.$$

Dans les cas jusqu'ici envisagés, on calcule les quantités L, M, qui contiennent encore dans chaque cas trois constantes arbitraires, d'après G P D, § 69 C (7) moyennant les équations $L = -\beta \tau_2$, $M = -\gamma \tau_1$.

V. *Les équations de g sont*

$$u_1 = a u + b, \; v_1 = a v + b.$$

Sept cas sont à distinguer:

$$1^0 \quad \beta = -\frac{2}{(u-v)^2}, \gamma = 1, L = -\frac{2}{(u-v)^2} + c, M = -\frac{4}{(u-v)^2} - \frac{1}{2};$$
$$r = a^{-1}) \quad s = a.$$

$$2^0 \quad \beta = A\,(u-v), \; \gamma = 1, \; L = -2 A^2 u^2 - A v + c, M = 2 A u;$$
$$r = a^2, \quad s = a.$$

$$3^0 \quad \beta = \frac{1}{(u-v)^3}, \gamma - -3\,(u-v), L = -\frac{3}{2}\frac{1}{(u-v)^2}, M = -\frac{15}{2}\frac{1}{(u-v)^2};$$
$$r = a^{-2}, \quad s = a^2.$$

$$4^0 \quad \beta = \frac{1}{(u-v)^4}, \; \gamma = -4\,(u-v)^2, \; L = 0, \; M = -\frac{12}{(u-v)^2};$$
$$r = a^{-3}, \quad s = a^3.$$

$$5^0 \quad \beta = (u-v)^\lambda, \gamma = -(u-v)^\lambda, L = M = -\frac{3}{2}(u-v)^{2\lambda} + c, \lambda \mp 1;$$
$$r = s = a^{\lambda+1}.$$

6° $\beta = \dfrac{A}{u-v}, \quad \gamma = -\dfrac{A}{u-v},$

$$L = -\frac{3}{2} A^2 \frac{1}{(u-v)^2} + A\,(c u^2 + c_1 u + c_2),$$

$$M = -\frac{3}{2} A^2 \frac{1}{(u-v)^2} + A\,(c v^2 + c_1 v + c_2);$$

$r = s = 1.$

7° $\beta = \dfrac{A}{u-v}, \quad \gamma = \dfrac{1}{A}\,\dfrac{1}{u-v},$

$$L = \frac{3}{2}\,\frac{1}{(u-v)^2} + A\,(c u^2 + c_1 u + c_2);$$

$$M = \frac{3}{2}\,\frac{1}{(u-v)^2} - \frac{1}{A}\,(c v^2 + c_1 v + c_2);$$

$r = s = 1.$

Parmi ces surfaces, an doit naturellement trouver toutes cellesqui admettent un groupe continu à deux paramètres de déformations projectives en elles mêmes; ce sont les surfaces des types I et V 6°, 7°.

§ 3. *Groupes de transformations asymptotiques de seconde espèce d'une surface en elle même.*

Soit

$$\frac{\beta\, d u^3 + \gamma\, d v^3}{2\, d u\, d v}$$

l'élément linéaire projectif d'une surface non réglée S. Soient

$$u_1 = \varphi_1(u), \quad v_1 = \psi_1(v) \tag{35}$$

les équations d'une transformation asymptotique T_1 de seconde espèce de S en elle même. On a alors

$$\begin{aligned} \beta(u_1, v_1)\,\frac{d u_1^2}{d v_1} &= r_1(t_1)\,.\,\beta(u,v)\,\frac{d u^2}{d v}, \\ \gamma(u_1, v_1)\,\frac{d v_1^2}{d u_1} &= s_1(t_1)\,.\,\gamma(u,v)\,\frac{d v^2}{d u}, \end{aligned} \tag{36}$$

r_1 et s_1 étant des fonctions de $t_1 = t_1(u, v)$. Donnons le nom de *caractéristiques* de la transformation T_1 aux courbes $t_1 =$ const. de la surface S.

Cela étant, soit G un groupe[1]) de transformations asymptotiques de la surface S en elle même, chaque transformation de G étant de seconde ou de troisième espèce. Disons que le groupe G est de première *catégorie* s'il contient deux transformations de seconde espèce à caractéristiques différentes; dans le cas contraire, le groupe G sera dit de *seconde catégorie.*

---

[1]) continu ou non.

Si le groupe G est de première catégorie, il existe des constantes λ, μ, dont l'une au moins est différente de zéro, telles que chaque transformation de G conserve la forme

$$\beta^{\lambda}\,\gamma^{\mu}\,d\,u^{2\lambda\quad\mu}\,d\,v^{2\mu\quad\lambda}$$

à un facteur constant près.

Le groupe G étant supposé de première catégorie, il contient deux transformations T_1, T_2 à caractéristiques différentes. Soit T_0 une transformation de seconde espèce contenue dans G. Gardons la notation (35) et (36) pour T_1 et introduisons une notation analogue pour T_2 et pour T_0. D'après la supposition faite sur T_1 et T_2, les fonctions

(37) $$t_1\,(u, v)\,;\quad t_2\,(u, v)$$

sont indépendantes. Soit $i = 1$ ou bien $i = 2$.

Le produit $T_0 T_1$ transforme le point (u, v) en (u, v), où

$$u = \varphi_i\,[\varphi_0\,(u)],\qquad v \quad\ \psi_i\ \ \psi_0\,(v)].$$

Des équations (36) on calcule

$$\beta\,(u\,, v)\,\frac{d\,u^2}{d\,v} = r_i\,(\tau_i)\,.\,r_0\,(t_0)\,\beta\,(u, v)\,.\,\frac{d\,u^2}{d\,v}\,;$$

$$\gamma\,(u, v)\,\frac{d\,v^2}{d\,u} = s_i\,(\tau_i)\ .\ s_0\,(t_0)\,\gamma\,(u, v)\,\frac{d\,v^2}{d\,u}\,.$$

où j'ai posé

$$\tau_i = \tau_i\,(u, v) = t_i\,(u_0, v_0) = t_i\,[\varphi_0\,(u), \psi_0\,(u)].$$

Or la transformation $T_0\,T_i$ appartenant au groupe G ne peut être de première espèce, ainsi que les deux fonctions de u, v

(38) $$r_i\,(\tau_i)\,.\,r_0\,(t_0)\,;\ s_i\,(\tau_i)\,.\,s_0\,(t_0)$$

sont dépendantes. Mais les fonctions (37) sont indépendantes; on en voit, d'après la définition même de τ_i, qu'on peut choisir la valeur (1 ou 2) de l'indice i de manière que les fonctions $\tau_i\,(u, v)$ et $t_0\,(u, v)$ sont indépendantes. Alors les quantités (38) sont dépendantes, si l'on les considère comme fonctions de t_0 et τ_i, ainsi que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d \log r_i\,(\tau_i)}{d\,\tau_i}\,, & \dfrac{d \log r_0\,(t_0)}{d\,t_0} \\[2ex] \dfrac{d \log s_i\,(\tau_i)}{d\,\tau_i}\,, & \dfrac{d \log s_0\,(t_0)}{d\,t_0} \end{vmatrix} = 0.$$

Or la transformation T_i étant de seconde (non de troisième) espèce, la première colonne de ce déterminant est différente de 0, 0. Il existent donc des quantités λ_i, μ_i, (dont l'une au moins différente de zéro) telles que

3*

$$(39)\qquad \begin{aligned} \lambda_i \frac{d \log r_i(\tau_i)}{d\tau_i} + \mu_i \frac{d \log s_i(\tau_i)}{d\tau_i} &= 0, \\ \lambda_i \frac{d \log r_0(t_0)}{d t_0} + \mu_i \frac{d \log s_0(t_0)}{d t_0} &= 0. \end{aligned}$$

D'après (39_1), le rapport $\lambda_i : \mu_i$ ne dépend que de τ_i; d'après (39_2), ce rapport ne dépend que de t_0. Ce rapport est donc constant, et je peux supposer que λ_i, μ_i soient des constantes. De (39) il vient maintenant par intégration

$$(40)\qquad \begin{aligned} r_i^{\lambda_i} \,.\, s_i^{\mu_i} &= \text{const.}, \\ r_0^{\lambda_i} \,.\, s_0^{\mu_i} &= \text{const.} \end{aligned}$$

On donc, quelle que soient la transformation T_0 de G[1]), ou

$$(41)\qquad r_0^{\lambda_1} \,.\, s_0^{\mu_1} = \text{const.}$$

ou bien

$$(42)\qquad r_0^{\lambda_2} \,.\, s_0^{\mu_2} = \text{const.}$$

Cependant, il est aisé de voir que *une* des relations (41) et (42) est vérifiée pour *chaque* transformation de G. Cela est évident si $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 0$. Soit donc $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 \neq 0$. Nous avons vu qu'on peut choisir i de manière que l'équation (40) soit vérifiée. Pour fixer les idées, soit $i = 1$, donc

$$(43)\qquad r_1^{\lambda_1} s_1^{\mu_1} = \text{const.}$$

Il suffit d'arriver à la contradition en supposant qu'on puisse choisir T_0 de manière qu'on ait

$$(44)\qquad r_0^{\lambda_1} s_0^{\mu_1} \neq \text{const.}\,; \quad r_0^{\lambda_2} s_0^{\mu_2} = \text{const.}$$

Considérons les quantités (38) ($i=1$) appartenant à la transformation $T_1 T_0$. D'après (43) ef (44_1), ou ne peut pas avoir

$$[r_1(\tau_1) \,.\, r_0(t_0)]^{\lambda_i} \,.\, [s_1(\tau_1) \,.\, s_0(t_0)]^{\mu_i} = \text{const.}$$

pour $i = 1$; donc cette équation est vérifiée pour $i = 2$; il s'ensuit, d'après (44_2), que

$$r_1^{\lambda_2} s_1^{\mu_2} = \text{const.}$$

De cette équation et de (43) on déduit, en remarquant que $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 \neq 0$ que $r_1 = \text{const.}$, $s_1 = \text{const.}$ Or ceci est une contradition, car T_1 n'est pas de troisième espèce.

En résumé, nous avons vu qu'on peut déterminér λ_1, μ_1 (avec $\lambda_1 \neq 0$ ou $\mu_1 \neq 0$) de manière que on'ait (41) pour chaque transformation T^0 de G^0. Or cela dit précisément que chaque transformation T_0 conserve

$$\beta^{\lambda_1} \gamma^{\mu_1} \, d\, u^{2\lambda_1 - \mu_1} \,.\, d\, v^{2\mu_1 - \lambda_1}$$

à un facteur constant près. Le théorème est donc démontré.

[1]) Nous avons admis que T_0 soit de seconde espèce; mais pour une transformation de troisième espèce l'énonce est évident.

Inversement, si l'on choisit les constantes λ et μ d'une manière quelconque (pourvu que $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$), les transformations asymptotiques qui conservent la forme

$$\beta^\lambda \gamma^\mu \, d\, u^{2\lambda-\mu} \, . \, d\, v^{2\mu-\lambda}$$

à un facteur numérique près forment évidemment un groupe et sont toutes de seconde ou de troisième espèce.

Nous pouvons donc, grâce aux résultats du § 1, indiquer *les éléments linéaires projectifs de chaque surface admettant un groupe continu G de première catégorie.*

Chaque cas est caractérisé par une relation entre β et γ.

I. *Les équations de G sont:*

$$u_1 = a u + b, \; v_1 = \varphi(v).$$

Ce cas est caractérisé par la relation[1]

$$\beta^2 \gamma = 1;$$

les invariants r, s d'une transformation de G sont liés par

$$r^2 s = a.$$

II. *Les équations de G sont*

$$u_1 = a u + c, \quad v_1 = b v + d.$$

Ce cas est caractérisé par

$$\beta^\lambda \gamma^\mu = 1$$

avec $(2\lambda - \mu)(2\mu - \lambda) \neq 0$; *entre r, s, on a la relation*

$$r^\lambda s^\mu = a^{2\lambda-\mu} b^{2\mu-\lambda}.$$

III. *Les équations de G sont*

$$u_1 = a v + c, \; v_1 = b v.$$

Ce cas est caractérisé par

$$\beta^2 \gamma = v^3; \; r^2 s = a^3.$$

IV. *Les équations de G sont*

$$u_1 = \frac{a u + b}{c u + d}, \quad v_1 = \frac{a v + b}{c v + d}.$$

Ce cas est caractérisé par

$$\beta \gamma = \frac{c}{(u - v)^2}; \; r = 1.$$

V. *Les équations de G sont*

$$u_1 = a u + b, \quad v_1 = a v + b.$$

Ce cas est caractérisé par[2])

[1]) On suppose naturellement, dans tous les cas, un choix convenable de paramètres asymptotiques u, v.

[2]) Si $\lambda + \mu + k \neq 0$, on peut supposer $c = 1$.

$$\beta^\lambda \gamma^\mu = c\,.\,(u - v)^k$$

avec $\lambda + \mu \neq 2$ ou bien $\lambda + \mu = 2$, $k \neq 2$; on a ici $r^\lambda s^\mu = a^{k+\lambda+\mu}$.

VI. *Les équations de G sont*

$$u_1 = u + a, \quad v_1 = v + a.$$

Ce cas est caractérisé par

$$\beta^\lambda \gamma^\mu = e^{c\,\mu}\,\varphi\,(u \quad v)$$

avec $c = 1$ *ou* $c = 0$; *on a ici* $r^\lambda s^\mu = e^{ac}$.

Quant à l'existence et la généralité des surfaces correspondantes, nous savons du Chap. I § 7, *que, une relation quelconque entre* β *et* γ *étant donnée, les surfaces correspondantes existent toujours et dépendent de cinq fonctions arbitraires d'un argument.* En effet, en mettant la relation donnée sons la forme paramétrique

$$\beta - \frac{[f\,(t)]^2}{g\,(t)}, \quad \gamma \quad \frac{g\,(t)]^2}{f\,(t)},$$

il suffit de poser l. c. $\omega_1 = d\,u$, $\omega_2 = d\,v$.

Quant aux *groupes G de seconde catégorie*, je me contente ici de quelques remarques préliminaires. On peut supposer que G contient des transformations de seconde espèce; or G étant de seconde catégorie, toutes ces transformations ont les mêmes caractéristiques $t\,(u, v) = $ const. Il est évident que chaque transformation de G conserve ces caractéristiques. Deux cas sont à distinguer: 1° Les caractéristiques sont des asymptotiques, soit $u = $ const. Les transformations de G multiplient les formes

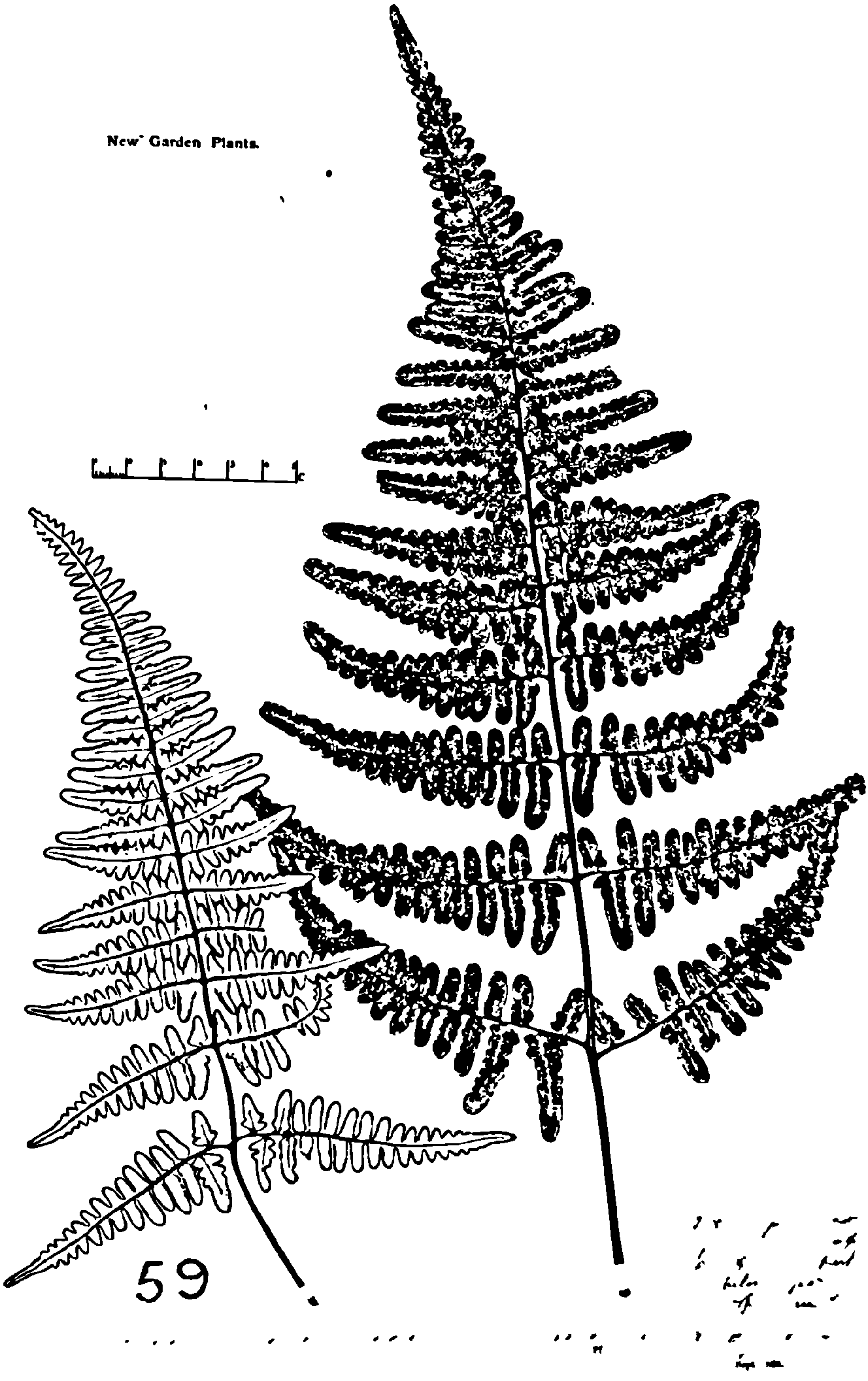
$$\beta\,\frac{d\,u^2}{d\,v}, \quad \gamma\,\frac{d\,v^2}{d\,u}$$

par des fonctions de la variable u seule. 2° Les caractéristiques ne sont pas des asymptotiques. Dans ce cas, si le groupe G est continu et a plus d'un paramètre, on peut supposer que l'équation des caractéristiques soit $u - v = $ const. En effet, le groupe G doit conserver l'équation $d\,u\,.\,d\,v\,.\,d\,t = 0$. En introduisant des nouvelles variables u_0, v_0 on amène cette équation à la forme $d\,v_0^3 - f\,(u_0, v_0)\,d\,u_0^3 = 0$. Donc la forme $f\,(u_0, v_0)\,\dfrac{d\,u_0^3}{d\,v_0^3}$ doit être invariante pour le groupe G. Des résultats du § 1 on déduit aisément qu'on peut supposer $f\,(u_0, v_0) = 1$, ainsi que dans les variables u_0, v_0, le groupe G est engendré par $\dfrac{\partial}{\partial\,u_0}$, $\dfrac{\partial}{\partial\,v_0}$, $u_0\,\dfrac{\partial}{\partial\,u_0} + v_0\,\dfrac{\partial}{\partial\,v_0}$ et l'équation invariante est $d\,v_0^3 - d\,u_0^3 = 0$[1]) En retournant aux variables asymptotiques u, v (convenablement choisies), on voit que l'équation des caractéristiques est $u - v = $ const. et que le groupe G est ou le groupe

$$u_1 = au + b, \; v_1 = av + c$$

ou un sousgroupe de ce groupe.

[1]) Ce résultat est essentiellement contenu (avec une démonstration différente) dans Déf. § 32.



PITYROGRAMMA PRESLIANA Dom. var AURATA Dom. (*Gymnogramme tartarea aurata* Moore) from Peru, Pearce n 218. Type specimen!