Eduard Čech

Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces

Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6) 8_2 (1928), 484-486, 552-554

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500903

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.
Estratto dal vol. VIII, serie 6ª, 2º sem., fasc. 10. — Roma, novembre 1928.

Geometria. — *Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces.* Nota [1] di E. ČECH, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

1. Soit A un point commun à deux courbes C et Γ qui ont en A la même tangente et le même plan osculateur. Soient c, γ les courbures de C et Γ au point A. Alors le rapport $\gamma : c$ est un invariant projectif [2] que j'indiquerai, pour abréger, par

$$J(C, \Gamma; A).$$

2. Soient maintenant S_1, S_2 deux surfaces non réglées en correspondance asymptotique. Choisissons arbitrairement un point A de la surface S_1. On peut (d'une infinité de manières) remplacer S_2 par une surface homographique S'_2 telle que les surfaces S_1 et S'_2 aient un *contact analytique du premier ordre* [3] au point A. Soient maintenant C_1, C_2 les deux asymptotiques de S_1 passant par A, et soient Γ_1, Γ_2 les asymptotiques correspondantes de S'_2. Bien que la surface S'_2 ne soit pas entièrement déterminée, les deux invariants

$$r = J(C_1, \Gamma_1; A),$$
$$s = J(C_2, \Gamma_2; A)$$

ont des valeurs bien déterminées.

3. Soient (u, v) des paramètres asymptotiques des surfaces S_1, S_2. Soient

$$\frac{\beta_1 du^3 + \gamma_1 dv^3}{2\,du\,dv}\,, \qquad \frac{\beta_2 du^3 + \gamma_2 dv^3}{2\,du\,dv}$$

les éléments linéaires projectifs [4] de S_1 et S_2.

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1928.

(2) Ce théorème a été énoncé par R. MEHMKE en 1891 avec plusieurs théorèmes semblables (« Zeitschrift f. Math. u. Phys. », t. 36). Il est cependant implicitement contenu dans une proposition donnée en 1880 par L. GEISENHEIMER (même Journal, t. 25). V. aussi C. SEGRE, ces « Rendiconti », 1897. M. Bompiani a proposé d'appeler J (C, Γ; A) l'invariant de Segre. Je proposerais de l'appeler l'invariant de Geisenheimer-Mehmke.

(3) Pour la notion (due à M. Fubini) du contact analytique, v. FUBINI-ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, § 3.

(4) Op. cit., § 12.

Supposons, pour fixer la notation, que l'invariant r se rapporte aux asymptotiques $v=$ const. Alors

$$r = r(u, v) = \frac{\beta_2}{\beta_1} \quad , \quad s = s(u, v) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} .$$

On en voit en particulier que les invariants r, s changent de signe si l'on remplace une des deux surfaces par sa surface corrélative.

4. Nous pouvons maintenant *partager les correspondances asymptotiques entre deux surfaces non réglées en trois espèces*: 1° pour la première espèce (c'est le cas général) r et s sont deux fonctions indépendantes de u et v; 2° pour la seconde espèce, r et s sont dépendantes, mais une au moins n'est pas constante; 3° pour la troisième espèce, r et s sont des constantes.

Parmi les correspondances de troisième espèce ce trouve le cas remarquable de $r = s = 1$; c'est le cas de la *déformation projective* de M. Fubini [1] dont on a ainsi une définition géometrique nouvelle. Parmi les correspondances de seconde espèce, trois cas sont remarquables: 1° $r = s$, correspondances qui conservent les lignes de Darboux; 2° $rs = 1$, correspondances qui conservent la forme normale $\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, dv$ de M. Fubini; 3° $r = 1$ (ou $s = 1$); ce cas est caractérisé par la circonstance que, à chaque point A de S_1, les asymptotiques $v =$ const. de S_1 et de S'_2 ont un contact du second ordre.

5. Choisissons une relation arbitraire $f(r, s) = 0$ entre r et s. La surface S_1 étant donnée arbitrairement, les correspondances de seconde espèce appartenant à la relation $f(r, s) = 0$ existent toujours et dépendent de *cinq fonctions arbitraires* d'un argument [2].

6. Passons aux correspondances de troisième espèce. Quatre cas sont à distinguer: 1° $r = s = 1$. Ce cas est possible de deux manières distintes: ou la correspondance se réduit à une homographie (ce cas dépend évidemment d'une fonction arbitraire de deux arguments) ou bien la correspondance est une déformation projective proprement dite (ce cas dépend [3] de six fonctions arbitraires d'un argument). 2° $r = s = -1$. Ce cas se réduit au précédent d'après la remarque faite à la fin de § 3. 3° $r = s = c$, où la constante c est différente de $0, 1 - 1$. Ces correspondances dépendent de *six fonctions arbitraires* d'un argument. La surface S_1 étant donnée, la correspondance existe alors et alors seulement si l'on a, en choisissant convenablement les paramètres u, v,

$$\frac{\partial^3 \beta_1}{\partial v^3} = \frac{\partial^3 \gamma_1}{\partial u^3} ;$$

(1) Op. cit., § 20 et Chap. VII, VIII.

(2) Ce résultat est connue dans deux cas particuliers: 1° $r = s$; 2° $rs = 1$. V. E. Cartan, *Sur la déformation projective des surfaces* (« Ann. de l'Ec. Norm. », 37 (3), 1920), § 31 et 33.

(3) E. Cartan, loc. cit., § 11 et 18.

s'il en est ainsi, la correspondance existe pour *chaque* valeur de c. 4° $r = c_1$, $s = c_2$, où $c_1 \neq c_2$. Ces correspondances dépendent de *huit fonctions arbitraires* d'un argument.

7. Dans ce qui précède, j'ai considéré une correspondance entre deux *surfaces*. On peut étudier analoguement une correspondance entre deux *congruences de droites*; au lieu des asymptotiques, on a alors à considérer les arêtes de rebroussement des développables de la congruence.

Roma, 1928. — Dott. G. Bardi, Tip. della R. Accad. dei Lincei.

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.
Estratto dal vol. VIII, serie 6ª, 2º sem., fasc. 11 — Roma, dicembre 1928.

Geometria. — *Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces.* Nota [1] di E. ČECH, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

7. Considérons une congruence W dont les deux nappes focales soient des surfaces non réglées. La congruence W réalisant une correspondance asymptotique entre les deux nappes focales, on peut appliquer les résultats précédents et partager les congruences W en trois espèces moyennant les invariants r, s. Commençons par une congruence appartenant à un complexe linéaire; dans ce cas, les deux nappes focales sont corrélatives, ainsi que $r = s = -1$ et la congruence est de troisième espèce. Ce cas dépend évidemment d'une fonction arbitraire de deux arguments. On peut choisir S_1 arbitrairement et on a alors ∞^5 congruences de cette sorte.

8. Réciproquement, si une congruence W satisfait à une des deux relations $r = -1$, $s = -1$, elle satisfait aussi à l'autre et la congruence appartient à un complexe linéaire.

9. Choisissons maintenant une relation $f(r, s) = 0$ entre les invariants r et s, cette relation étant distincte de $r = -1$ et de $s = -1$, mais d'ailleurs arbitraire. Alors les congruences W de seconde espèce appartenant à la relation donnée existent toujours et dépendent de *cinq fonctions arbitraires* d'un argument. Les nappes focales S_1, S_2 ne peuvent donc être choisies arbitrairement.

10. Considérons en particulier le cas $r = s$. C'est le cas des congruences de M. Fubini sur les nappes focales desquelles les lignes de Darboux se correspondent [2]. Les surfaces focales sont les surfaces *isothermoasimptotiques*.

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1928.
(2) FUBINI-ČECH, op. cit., § 51.

Une surface focale S_1 de cette catégorie étant donnée, il existe ∞^6 congruences du type considéré.

11. Considérons encore le cas $r = 1$ (le cas $s = 1$ n'en diffère que par la notation). Ici encore, on arrive à des résultats connus. Les nappes focales S_1 et S_2 sont alors des surfaces R_0. Or ces surfaces sont un cas limite des surfaces R de MM. Demoulin et Tritzéica. M. Jonas a montré (1) que, une surface R étant donnée, il existe ∞^5 congruences W à nappes focales R, dont la première coïncide avec la surface donnée. Or j'ai déjà remarqué (2) que le résultat de M. Jonas reste valable aussi pour les surfaces R_0. On arrive ainsi précisément aux congruences W avec $r = 1$.

12. Il serait important de déterminer tous les cas où une surface S_1 peut être une nappe focale de *plusieurs* congruences W appartenant à une relation donnée $f(r, s) = 0$. Tout ce que j'en sais, c'est que, en dehors des cas déjà mentionnés, telles congruences W ne peuvent dépendre que de *quatre* constantes arbitraires au plus.

13. Passons au congruences W de troisième espèce. J'ai déjà traité le cas $r = s = -1$. Passons au cas $r = s = 1$, c'est-à-dire aux *congruences qui réalisent une déformation projective entre les nappes focales.* Il existe ∞^4 congruences de cette sorte. L'élément linéaire projectif des nappes focales a la forme

$$\sqrt{\frac{av^2 + 2b_2 v + c_2}{au^2 + 2b_1 u + c_2}}\frac{du^2}{dv} + \sqrt{\frac{au^2 + 2b_1 u + c_1}{av^2 + 2b_2 v + c_2}}\frac{dv^2}{du}.$$

Il y a un cas particulier remarquable où la déformation projective se réduit à une homographie; ces congruences ont été déjà déterminées par M. Fubini (3).

Ensuite, considérons le cas $r = s = c$, avec $c \neq 0, 1, -1$. Ici encore, on a (pour chaque valeur de c) ∞^4 congruences, l'élément linéaire projectif des surfaces focales ayant la forme

$$\frac{1}{2(c-1)}\frac{1}{u-v}\left[-\sqrt{\frac{f_2}{f_1}}\frac{du^2}{dv} + \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}\frac{dv^2}{du}\right],$$

où

$$f_1 = a_0 u^4 + a_1 u^3 + a_2 u^2 + a_3 u + a_4,$$
$$f_2 = a_0 v^4 + a_1 v^3 + a_2 v^2 + a_3 v + a_4.$$

Toutes les congruences considérées dans ce paragraphe sont des congruences R et les nappes focales sont projectivement déformables en ∞^3 manières.

(1) « Jahresbericht d. deutschen Math. Ver. », t. 29, 1920.
(2) Fubini–Čech, op. cit., § 52.
(3) Fubini–Čech, op. cit., § 27.

Le cas $r \neq s$, $rs \neq 0$ n'est pas possible pour une congruence W de troisième espèce.

14. Considérons encore les congruences W à une nappe (et une seule) réglée [1]. Pour fixer les idées, supposons que les lignes $v =$ const. de S_2 soient des droites. Alors on a $r = 0$, $s \neq 0$. J'ai déterminé tous les cas où s se réduit à une *constante*. Trois cas seulement sont possibles:

$$1^\circ \quad s = 1 \quad , \quad 2^\circ \quad s = 2 \quad , \quad 3^\circ \quad s = 3 .$$

L'élément linéaire projectif de la nappe non réglée S_1 a la forme:

$$1^\circ \qquad \frac{\psi}{\sqrt{au^2 + bu + c}} (u - v)^{-2} \frac{du^2}{dv} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{au^2 + bu + c}}{\psi} \frac{dv^2}{du} ;$$

$$2^\circ \qquad \frac{\psi}{2\sqrt{u}} (u - v)^{-3} \frac{du^2}{dv} - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{u}}{\psi} (u - v) \frac{dv^2}{du} ;$$

$$3^\circ \qquad \frac{\psi}{(u - v)^4} \frac{du^2}{dv} - \frac{(u - v)^2}{\psi} \frac{dv^2}{du} .$$

ψ désigne ici une fonction arbitraire de v. Dans le premier cas, les surfaces S_1 sont caractérisées comme *les surfaces* R_0 *ayant un système d'asymptotiques toutes contenus dans des complexes linéaires.*

15. Considérons enfin une congruence W telle que les asymptotiques $v =$ const. soient des droites sur S_1 et sur S_2, les asymptotiques $u =$ const. n'étant pas réctilignes ni sur S_1 ni sur S_2. L'invariant r est alors privé de sens, et il ne reste que l'invariant s. Maintenant, s peut avoir une valeur constante quelconque, les congruences W respectives dépendant toujours d'*une fonction arbitraire* d'un argument [2]. Le cas le plus remarquable est $s = 1$, où la congruence réalise une déformation projective entre les deux nappes réglées. Ces nappes appartiennent chacune à une congruence linéaire. Il se peut que la déformation projective se réduit à une homographie. Les nappes focales admettent alors un groupe continu à deux paramètres d'homographies.

(1) Pour ces congruences, v. FUBINI-ČECH, op. cit., § 49.

(2) Il y a exception si $s = -1$; c'est le cas d'une congruence à nappes focales réglées appartenant à un complexe linéaire.

Roma, 1928 — Dott. G. Bardi, tip. della R. Accad. dei Lincei.