Eduard Čech

Projektivní geometrie přímkových ploch v prostorech o jakémkoli počtu dimenzí. I

Rozpravy Československé Akad. Věd - Řada Mat. Přírod. Věd (13) 33 (1924), 9 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500888

ROZPRAVY II. TŘÍDY ČESKÉ AKADEMIE.
ROČNÍK XXXIII. ČÍSLO 13.

Projektivní geometrie přímkových ploch v prostorech o jakémkoli počtu dimensí. I.

Napsal
Eduard Čech.

Věnováno za přijetí do Akademie.

Předloženo dne 20. června 1924.

§ 1. Bompianiovy kvasiasymptotické křivky.

V pojednání „*Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi*"[1]) prof. Bompiani zavedl projektivní klasifikaci přímkových ploch ve vyšších prostorech a definoval na těchto plochách jisté křivky, jež nazývá kvasiasymptotické. Vyložím nejprve tolik z cit. pojednání, kolik je pro porozumění dalšímu nezbytně třeba

Přímkovou plochu R náležející prostoru S_r o r dimensích mužeme definovati dvěma „řídicími" křivkami C_y a C_z, jichž body y a z, resp. jejich homogenní souřadnice y_i a z_i $(i = 0, 1, 2 \dots r)$ jsou dány jako funkce[2]) jednoho parametru v: obecná tvořící přímka plochy R spojuje body y a z patřící téže hodnotě parametru v; bod x

$$x = t_1 y + t_2 z,^{3)} \tag{1}$$

opíše tedy plochu R, měníme-li v a $t_1 : t_2$.

Nejmenší číslo celé kladné ν, pro něž matice[4])

$$(y\, z\, y'\, z' \dots y^{(\nu)}\, z^{(\nu)}),$$

kde čárky značí derivace dle v, jest hodnosti *nižší* než $2\nu + 2$, jmenujeme s Bompianim *index rozvinutelnosti* (indice di sviluppabilità) plochy R.

[1]) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 37, 1° sem., 1913.
[2]) Mající spojité derivace těch řádů, o nichž bude řeč.
[3]) Tato rovnice zastupuje ovšem $r + 1$ rovnici $x_i = t_1 y_i + t_2 z_i$ $(i = 0, 1 \dots r)$.
[4]) i řádek této matice jest $y_i\, z_i\, y_i'\, z_i' \dots y_i^{(\nu)}\, z_i^{(\nu)}$ $(i = 0, 1, 2 \dots r)$.

Plochu R jest považovati zřejmě za tím obecnější, čím větší jest ν. Tak je-li $r = 2n + 1$ *liché*, bude obecně determinant

$$(y\, z\, y'\, z' \ldots y^{(n)}\, z^{(n)}) \tag{2}$$

ruzný od nuly a plocha bude pak míti index rozvinutelnosti $\nu = n + 1$. Vymizí-li však determinant (2), jest $\nu < n$.

V případě $r = 2n + 1$, $\nu = n + 1$, kdy tedy r je liché a determinant (2) $\neq 0$[5]), existuje na R pozoruhodný systém křivek, jenž pro $r = 3$, $n = 1$ přejde v systém obyčejných asymptotických křivek a jako tento, určí se integrací diferenciální rovnice Riccatiova tvaru. Dospějeme k němu (Bompiani l. c.) touto úvahou: Na R veďme jakoukoli křivku C_x, t. j. považujme v (1) t_1 a t_2 za dané funkce v. Oskulační S_n této křivky v bodě x_{v_0} příslušném hodnotě v_0 parametru v jest určen bodem (1) a body

$$\frac{d^i}{d v^i}(t_1 y + t_2 z), \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

kde po derivování jest ovšem dosaditi $v = v_0$. Odtud vidíme, že tento oskulační S_n leží v prostoru určeném body

$$y, z, y', z', \ldots y^{(n-1)}, z^{(n-1)}, t_1 y^{(n)} + t_2 z^{(n)} \; (v = v_0). \tag{3}$$

Poloha tohoto prostoru ξ_{v_0} závisí zřejmě pouze na poloze bodu x_{v_0} a snadno se vidí, že ξ_{v_0} jest *lineární prostor nejmenší dimense obsahující oskulační S_n všech křivek na R jdoucích bodem x_{v_0}*. Z tohoto důvodu nazývá se ξ_{v_0} často *n-tečný prostor plochy R v bodě x_{v_0}*. Dimense ξ_{v_0} jest ostatně $r - 1 = 2n$ a ne nižší, ježto jinak by patrně determinant (2) proti předpokladu pro $v = v_0$ vymizel.[6])

Nazveme nyní (stále za předpokladu $r = 2n + 1$, $\nu = n + 1$) *kvasiasymptotickou* každou křivku C_x na R mající tuto vlastnost: *V každém bodě x křivky n-tečný prostor ξ plochy R obsahuje netoliko oskulační S_n, nýbrž dokonce oskulační S_{n+1} křivky C_x.*[7]) Podmínka nutná a postačující pro kvasiasymptotickou křivku jest patrně, aby pro každé v byl na bodech (3) lineárně závislým bod

$$\frac{d^{n+1}}{d v^{n+1}}(t_1 y + t_2 z),$$

čili, což je zřejmě ekvivalentní, bod

$$t_1 y^{(n+1)} + t_2 z^{(n+1)} + (n + 1)\,(t_1' y^{(n)} + t_2' z^{(n)}).$$

Jinak řečeno, determinant souřadnic bodů (3) a bodu právě napsaného má býti roven nule. To dává ihned rovnici tvaru

$$t_1 t_2' - t_2 t_1' + h_1 t_1^2 + h_2 t_1 t_2 + h_3 t_2^2 = 0, \tag{4}$$

[5]) Jestliže pro partikulární hodnoty parametru v determinant (2) vymizí, *vyloučíme* tyto hodnoty jako *singulární*.

[6]) Viz poznámku [5]).

[7]) Pro $n = 1$ tato definice dává zřejmě obyčejné asymptotické křivky plochy R.

kde h_1, h_2, h_3 jsou jisté funkce v.[8]) Rovnice (4) jest differenciální rovnice Riccatiova tvaru pro $t_1 : t_2$, jak již výše jsem uvedl. Vycházeje z tohoto výsledku Bompianiova, ukáži v příštím odstavci, že lze snadno takřka bez počtu udati úplný systém projektivních diferenciálních invariantu plochy R.[9])

Buď nyní $r = 2n$ *sudé*. Matice

$$(y\, z\, y'\, z' \dots y^{(n-1)}\, z^{(n-1)}) \tag{5}$$

bude obecně hodnosti $2n$ a ne nižší a plocha R bude míti index rozvinutelnosti $v = n$. Je-li hodnost matice (5) nižší, jest $v < n$. Omezme se však na případ $v = n$.[10]) Ježto pak body vyskytující se v (5) jsou lineárně nezávislé, a v S_r neexistuje více než $r + 1 = 2n + 1$ lineárně nezávislých bodů, lze určiti $t_1 : t_2$ jako funkci v tak, aby pro každé v bod $t_1 y^{(n)} + t_2 z^{(n)}$ byl lineárně závislý na oněch $2n$ bodech. Podmínka pro $t_1 : t_2$ jest patrně

$$(y\, z\, y'\, z' \dots y^{(n-1)}\, z^{(n-1)},\ t_1 y^{(n)} + t_2 z^{(n)}) = 0. \tag{6}$$

Tato podmínka určuje ostatně jednoznačně poměr $t_1 : t_2$; neboť jinak by jak $y^{(n)}$ tak i $z^{(n)}$ byly lineárně závislé na bodech v (5) a tedy by souřadnice y_i a z_i splňovaly diferenciální rovnice tvaru

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} + b_i z^{(i)}, \quad z^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i y^{(i)} + d_i z^{(i)}. \tag{7}$$

Avšak diferenciální systém (7) má patrně pouze $2n$ lineárně nezávislých řešení; platily by tedy pro každé v rovnice tvaru

$$\sum_{i=0}^{2n} k_i y_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{2n} k_i z_i = 0,$$

kde k_i by byly konstanty, z nichž aspoň jedna ruzná od nuly, t. j. plocha R náležela by prostoru o méně než $2n$ dimensích.

Křivka opsaná bodem (1), kde $t_1 : t_2$ se určí z rovnice (6), jmenuje se *kvasiasymptotická* křivka plochy R. Čtenář snadno shledá, že n-tečný prostor plochy R v bodě (1) jest celý S_r, není-li bod (1) na kvasiasymptotické křivce; naproti tomu v každém bodě kvasiasymptotické křivky n-tečný prostor plochy R má $r - 1$ dimensí.

Mužeme zvoliti kvasiasymptotickou křivku za řídicí křivku C_y; z rovnice (6) vidíme, že pak souřadnice bodu y a z splňují diferenciální rovnici tvaru

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} + b_i z^{(i)}, \tag{8}$$

[8]) Na př. $h_1 = \frac{1}{n+1} (y\, z\, y'\, z' \dots y^{(n-1)}\, z^{(n-1)}\, y^{(n)}\, y^{(n+1)}) : (y\, z\, y'\, z' \dots y^{(n)}\, z^{(n)})$.

[9]) Ve článku „Nová metoda projektivní geometrie zborcených ploch" (Časopis pro pěst. mat. a fys., roč. LIII, str. 31) studoval jsem případ $n = 1$.

[10]) Speciální hodnoty v, pro něž se hodnost matice (5) sníží, vylučujeme jako singulární.

kde a_i a b_i jsou jisté funkce parametru v. Obecně bude $b_{n-1} \neq 0$; je-li $b_{n-1} = 0$, rovnice (8) ukazuje, že bod $y^{(n)}$ jest lineárně závislý na bodech

$$y, z, y', z' \ldots y^{(n-2)}, z^{(n-1)}, y^{(n-1)},$$

t. j., že $(n-1)$-tečný prostor plochy R v kterémkoli bodě kvasiasymptotické křivky obsahuje oskulační S_n této křivky. Vyloučíme-li tento zvláštní případ, můžeme docíliti toho, že

$$a_{n-1} = 0, \; b_{n-1} = 1, \; b_{n-2} = 0.$$

To dokážeme v odstavci třetím, kde uvidíme, že odtud lze snadno určiti úplný systém projektivních diferenciálních invariantů plochy R.

§ 2. Přímkové plochy v prostorech o lichém počtu dimensí.

V tomto odstavci budeme blíže studovati případ $r = 2n + 1$, $v = n + 1$. Obecné řešení rovnice (4) § 1 jest, jak známo, tvaru

$$t_1 : t_2 = (\lambda c_1 + \nu c_2) : (\mu c_1 + \varrho c_2),$$

kde λ, μ, ν, ϱ jsou funkce v, jichž determinant $\lambda \varrho - \mu \nu$ jest ruzný od nuly, a c_1, c_2 jsou libovolné konstanty. Při pevných c_1, c_2 opisuje tedy bod

$$c_1 (\lambda y + \mu z) + c_2 (\nu y + \varrho z)$$

kvasiasymptotickou křivku. Z toho se snadno odvodí, že volíme-li vhodně řídicí křivky C_y a C_z a faktory homogenních souřadnic jejich bodů, bude bod

$$x = t_1 y + t_2 z \tag{1}$$

opisovati kvasiasymptotickou křivku tehdy a jen tehdy, když $t_1 : t_2$ jest konstantní. V dalším budeme stále předpokládati, že y a z jsou takto voleny.

Ježto determinant (2) § 1 jest od nuly různý, a ježto v R existuje právě $2n + 2$ lineárně nezávislých bodů, splňují souřadnice y_i a z_i rovnice tvaru

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} + b_i z^{(i)}, \quad z^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} c_i y^{(i)} + d_i z^{(i)}, \tag{2}$$

kde a_i, b_i, c_i, d_i jsou jisté funkce v. Odtud při konstantních t_1, t_2

$$\frac{d^{n+1}}{d v^{n+1}} (t_1 y + t_2 z) = (a_n t_1 + c_n t_2) y^{(n)} + (b_n t_1 + d_n t_2) z^{(n)} +$$
$$+ \text{lin. kombinace } y, z, y', z' \ldots y^{(n-1)}, z^{(n-1)}.$$

Tento bod však má býti za našich předpokladu lineární kombinací bodů (3); odtud plyne

$$a_n = d_n, \; b_n = c_n = 0; \tag{3}$$

a obráceně podmínky (3) stačí, aby bod (1) opisoval kvasiasymptotickou křivku, kdykoli $t_1 : t_2$ jest konstantní.

Zvolme nyní parametr v tak, aby bylo identicky

$$(y\, z\, y'\, z' \ldots y^{(n)}\, z^{(n)}) = \omega = \pm 1. \tag{4}$$

Toho je patrně možno vždy docíliti kvadraturou; ovšem parametr v není tím úplně určen, nýbrž[11]) jen až na libovolnou additivní konstantu, která ovšem nemá vlivu na koefficienty systému (2), a až na znamení. Znamení $d\,v$ lze ostatně dáti geometrický význam, *orientujeme-li* plochu R jako místo přímek.

Ze (4) plyne derivováním dle (2)

$$a_n + d_n = 0,$$

a tedy dle (3)

$$a_n = d_n = 0.$$

Rovnice (2) jsou tedy za učiněných předpokladů tvaru

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, y^{(i)} + b_i\, z^{(i)}, \quad z^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\, y^{(i)} + d_i\, z^{(i)}. \tag{5}$$

Rovnicemi (5), jichž koefficienty jsou libovolné (spojité) funkce v, a počáteční podmínkou (4) jsou souřadnice y a z určeny až na unimodulární substituce o numerických koefficientech, tedy plocha R jest určena až na kollineace o positivním determinantu.[12])

Nejsou však naopak koefficienty rovnic (5) již určeny plochou R; vskutku naše předpoklady zůstanou splněny, když buď

1_0 místo y a z zavedeno η a ζ substitucí tvaru

$$\begin{aligned} \eta &= \lambda\, y + \mu\, z, \\ \zeta &= \nu\, y + \varrho\, z, \end{aligned} \qquad \lambda\,\varrho - \mu\,\nu = \pm 1, \tag{6}$$

kde λ, μ, ν, ϱ jsou *konstanty*;

2_0 když místo y a z zavedeme Y a Z kladouce

$$Y = \varrho\, y,\; Z = \varrho\, z \tag{7}$$

a *současně* místo v zavedeme nový parametr

$$V = \int \varrho^{\left|\frac{2}{n}\right.} d\,v. \tag{7$_{\text{bis}}$}$$

Uvažujme nejprve ty substituce tvaru (6), pro něž

$$\lambda\,\varrho - \mu\,\nu = +1,\text{[13])}$$

a sdružme se substitucí (6) kontragredientní substituci

$$\begin{aligned} t_1 &= \lambda\,\tau_1 + \nu\,\tau_2, \\ t_2 &= \mu\,\tau_1 + \varrho\,\tau_2, \end{aligned} \qquad \lambda\,\varrho - \mu\,\nu = 1, \tag{8}$$

[11]) V reálním oboru. Znamení ω mění se kolineacemi o negativním determinantu.

[12]) Neznáme-li znamení ω, tedy až na kollineace.

[13]) Orientujeme-li každou tvořící přímku plochy R definujíce, že bod (1) opisuje tuto přímku v positivním smyslu, když $t_1 : t_2$ stoupá, uvažujeme tedy ty substituce (6), jež nemění orientaci tvořících přímek plochy R.

takže jest identicky ve v

$$t_1 y + t_2 z = \tau_1 \eta + \tau_2 \zeta. \tag{9}$$

Vedle rovnic (5) budou platiti rovnice tvaru

$$\eta^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \eta^{(i)} + \beta_i \zeta^{(i)}, \quad \zeta^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \eta^{(i)} + \delta_i \zeta^{(i)}. \tag{10}$$

Je velmi lehké, počítati $\alpha_i \ldots \delta_i$ z $a_i \ldots d_i$. Vskutku, je takřka samozřejmé, že následkem (6) a $(6)_{\text{bis}}$ jest pro $i = 0, 1 \ldots n-1$

$$t_1 (a_i y^{(i)} + b_i z^{(i)}) + t_2 (c_i y^{(i)} + d_i z^{(i)}) = \tau_1 (\alpha_i \eta^{(i)} + \beta_i \zeta^{(i)}) + \tau_2 (\gamma_i \eta^{(i)} + \delta_i \zeta^{(i)}),$$

t. j., že výrazy

$$a_i t_1 + c_i t_2, \quad b_i t_1 + d_i t_2$$

jsou kontragredientní s $y^{(i)}$ a $z^{(i)}$ a tedy, ježto $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ jsou konstanty, jsou také kogredientní s t_1, t_2. Jsou-li tedy též t_1^*, t_2^* kogredientní s t_1, t_2, t. j. když

$$\begin{aligned} t_1^* &= \lambda \tau_1^* + \nu \tau_2^*, \\ t_2^* &= \mu \tau_1^* + \varrho \tau_2^*, \end{aligned} \tag{8$_{\text{bis}}$}$$

budou *bilineární formy* $(i = 0, 1 \ldots n-1)$

$$\left.\begin{aligned} f_i \begin{pmatrix} t_1; & t_1^* \\ t_2; & t_2^* \end{pmatrix} &= f_i (t, t^*) = \begin{vmatrix} a_i t_1 + c_i t_2, & b_i t_1 + d_i t_2 \\ t_1^*, & t_2^* \end{vmatrix} = \\ &= - b_i t_1 t_1^* + a_i t_1 t_2^* - d_i t_2 t_1^* + c_i t_2 t_2^* \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

invariantní při substitucích (8), $(8)_{\text{bis}}$, pro něž $\lambda \varrho - \mu \nu = 1$. Odtud snadno se počítají $\alpha_i \ldots \delta_i$ pomocí $a_i \ldots d_i$.

Vidí se okamžitě, že *invariantní jsou též kvadratické formy* $(i = 0, 1 \ldots n-1)$

$$f_i \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = f_i (t) = - b_i t_1^2 + (a_i - d_i) t_1 t_2 + c_i t_2^2 \tag{12}$$

a výrazy[14])

$$j_i = a_i + d_i. \tag{13}$$

Abychom seznali efekt substitucí tvaru (6) pro $\lambda \varrho - \mu \nu = -1$, stačí uvažovati jedinou takovou substituci, na př. $\eta = y$, $\zeta = -z$, k čemuž patří $t_1 = \tau_1$, $t_2 = -\tau_2$, načež patrně v (10) bude

$$\alpha_i = a_i, \quad \beta_i = -b_i, \quad \gamma_i = -c_i, \quad \delta_i = d_i,$$

[14]) Invariance výrazů j_i plyne, jak známo, odtud, že, je-li

$$P_{t^*} f_i (t) \quad - b_i t_1 t_1^* + \frac{1}{2} (a_i - d_i) (t_1 t_2^* + t_2 t_1^*) + c_i t_2 t_2^*$$

polára kvadratické formy $f_i (t)$, jest identicky

$$f_i (t, t^*) \quad P_{t^*} f_i (t) + \frac{1}{2} j_i (t_1 t_2^* - t_2 t_1^*).$$

a tedy, značí-li φ_i a ι_i to, co odpovídá f_i a j_i, přejdeme-li od y, z k η, ζ

$$\varphi_i(\tau, \tau^*) = -f_i(t, t^*), \varphi_i(\tau) = -f_i(t), \iota_i = j_i. \qquad (14)$$

Zbývá nám vyšetřovati efekt substituce (7) a $(7)_{\text{bis}}$. Obecně stačí zjistiti, jak se transformuje kvadratická forma $f_{n-2}(t)$ a to lze provésti téměř bez počtu. Víme, že platí rovnice tvaru

$$\frac{d^{n+1} Y}{d V^{n+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{d^i Y}{d V^i} + B_i \frac{d^i Z}{d V^i}, \quad \frac{d^{n+1} Z}{d V^{n+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \frac{d^i Y}{d V^i} + D_i \frac{d^i Z}{d V^i}. \qquad (15)$$

Ze $(7)_{\text{bis}}$ však plyne, značíme-li stále čárkami derivace dle v,

$$\frac{d^{n+1} Y}{d V^{n+1}} = |\varrho|^{-\frac{2(n+1)}{n}} Y^{(n+1)} + \text{lin. kom. } Y, Y' \ldots Y^{(n)},$$

$$\frac{d^{n+1} Z}{d V^{n+1}} = |\varrho|^{-\frac{2(n+1)}{n}} Z^{(n)} + \textit{táž} \text{ lin. kom. } Z, Z' \ldots Z^{(n)},$$

$$\frac{d^{n-1} Y}{d V^{n-1}} = |\varrho|^{-\frac{2(n-1)}{n}} Y^{(n-1)} + \ldots, \quad \frac{d^{n-1} Z}{d V^{n-1}} = |\varrho|^{-\frac{2(n-1)}{n}} Z^{(n-1)} + \ldots,$$

a tedy dle (7), klademe-li $\eta = \frac{\varrho}{|\varrho|} = sgn\, \varrho = \pm 1$,[15])

$$\frac{d^{n+1} Y}{d V^{n+1}} = \eta\, |\varrho|^{-\frac{n+2}{n}} y^{(n+1)} + \text{lin. kom. } y, y' \ldots y^{(n-1)},$$

$$\frac{d^{n+1} Z}{d V^{n+1}} = \eta\, |\varrho|^{-\frac{n+2}{n}} z^{(n+1)} + \textit{táž} \text{ lin. komb. } z, z' \ldots z^{(n-1)},$$

$$\frac{d^{n-1} Y}{d V^{n-1}} = \eta\, |\varrho|^{-\frac{n-2}{n}} y^{(n-1)} + \ldots, \quad \frac{d^{n-1} Z}{d V^{n-1}} = \eta\, |\varrho|^{-\frac{n-2}{n}} z^{(n-2)} + \ldots$$

Dosadíme-li tyto výrazy do (15) a porovnáme-li s (5)[16]), dostáváme, že

$$A_{n-1} - D_{n-1} = |\varrho|^{-\frac{4}{n}} (a_{n-1} - d_{n-1}),$$

$$B_{n-1} = |\varrho|^{-\frac{4}{n}} b_{n-1}, \; C_{n-1} = |\varrho|^{-\frac{4}{n}} c_{n-1},$$

a tedy identicky v t_1, t_2

$$- B_{n-1} t_1^2 + (A_{n-1} - D_{n-1}) t_1 t_2 +$$

$$+ C_{n-1} t_2^2 = |\varrho|^{-\frac{4}{n}} [- b_{n-1} t_1^2 + (a_{n-1} - d_{n-1}) t_1 t_2 + c_{n-1} t_2^2].$$

Kvadratická forma $f_{n-1}(t)$ násobí se tedy při substitucích (7), $(7)_{\text{bis}}$ pouze faktorem $|\varrho|^{-\frac{4}{n}}$ a její diskriminant faktorem $|\varrho|^{-\frac{8}{n}}$, t. j.

$$(A_{n-1} - D_{n-1})^2 + 4 B_{n-1} C_{n-1} = |\varrho|^{-\frac{8}{n}} [(a_{n-1} - d_{n-1})^2 + 4 b_{n-1} c_{n-1}]. \qquad (16)$$

Víme ovšem, že tento diskriminant nemění se substitucemi (6). *Omezme se na případ obecný, kdy napsaný diskriminant jest různý od nuly* a vylučme

[15]) Víme o priori, že v prvých dvou násl. rovnicích nutně vypadne $y^{(n)}$, resp. $z^{(n)}$.

[16]) Mužeme porovnávati koefficienty, ježto body y, z, y', $z' \ldots y^{(n)}$ $z^{(n)}$ jsou lineárně nezávislé.

jako singulární ty eventuelní partikulární hodnoty v, pro něž by vymizel. Pak můžeme dle (16) předpokládati, že

$$(a_{n-1} - d_{n-1})^2 + 4\, b_{n-1}\, c_{n-1} = 4\, \varepsilon,\ \varepsilon = \pm 1. \tag{17}$$

Tímto předpokladem až na znamení a additivní konstantu určený parametr v nazýváme *projektivní oblouk* plochy R; příslušné hodnoty y_i a z_i nejsou ovšem úplně určeny, za to jsou (až na unimodulární substituce) určeny determinanty matice $(y\, z)$, jež nazýváme *normální souřadnice tvořící přímky* plochy R. Invarianty plochy R jsou našemu předpokladu příslušné hodnoty j_i a differenciální invarianty kvadratických forem f_i $(i = 0, 1 \ldots n-1)$ při substitucích tvaru (8).

Tyto poslední dají se snadno stanoviti. Změňme poněkud označení, kladouce

$$- b_{n-1} = a,\ a_{n-1} - d_{n-1} = 2\, b,\ c_{n-1} = c,$$

tedy

$$f_{n-1}(t) = a\, t_1^2 + 2\, b\, t_1\, t_2 + c\, t_2^2,$$

takže jest

$$b^2 - a\, c = \varepsilon = \pm 1. \tag{17$_{\text{bis}}$}$$

Stejně s $f_{n-1}(t)$ transformují se substitucemi (8) při $\lambda\, \varrho - \mu\, \nu = 1$ formy $\left(a' = \dfrac{d\, a}{d\, v} \text{ atd.}\right)$

$$f'_{n-1}(t) = a'\, t_1^2 + 2\, b'\, t_1\, t_2 + c'\, t_2^2,$$
$$f''_{n-1}(t) = a''\, t_1^2 + 2\, b''\, t_1\, t_2 + c''\, t_2^2,$$
$$g(t) = \begin{vmatrix} a\, t_1 + b\, t_2, & b\, t_1 + c\, t_2 \\ a'\, t_1 + b'\, t_2, & b'\, t_1 + c'\, t_2 \end{vmatrix}.$$

Jsou tedy (za předpokladu $(17)_{\text{bis}}$ výrazy

$$h = b'^2 - a'\, c',\ k = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \tag{18}$$

invarianty plochy R. Je-li $\varepsilon = -1$, jest $h \geqq 0$. Jinak je možno h a k libovolně voliti a jest jimi, je-li $h \neq 0$, forma $f_{n-1}(t)$ jednoznačně určena až na 1⁰ substituce tvaru (8) o numerických λ, μ, ν, ϱ splňujících rovnici $\lambda\, \varrho - \mu\, \nu = 1$, a 2⁰ substituce tvaru (8) o numerických λ, μ, ν, ϱ splňujících rovnici $\lambda\, \varrho - \mu\, \nu = -1$, spojené se změnou znamení a, b, c. Důkaz tohoto tvrzení pominu.

Je-li $h \neq 0$, jsou formy $f_{n-1}(t)$, $f'_{n-1}(t)$, $g(t)$ lineárně nezávislé[17])

[17]) Jest $\begin{vmatrix} a & a' & a\, b' - b\, a' \\ 2\, b & 2\, b' & a\, c' - c\, a' \\ c & c' & b\, c' - c\, b' \end{vmatrix} = 4\, (a\, b' - b\, a')\, (b\, c' - c\, b') - (a\, c' - c\, a')^2 =$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -2\, b & a \\ c' & -2\, b' & a' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2\, (a\, c - b^2) & a\, c' + a'\, c - 2\, b\, b' \\ a\, c' + a'\, c - 2\, b\, b' & 2\, (a'\, c' - b'^2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2\, \varepsilon & 0 \\ 0 & -2\, h \end{vmatrix} = 4\, \varepsilon\, h.$$

a lze tedy každou kvadratickou formu v t_1, t_2 jimi lineárně vyjádřiti. Platí tedy rovnice tvaru

$$f_i(t) = L_i f_{n-1}(t) + M_i f'_{n-1}(t) + N_i g(t), \quad (i = 0, 1, \ldots n-2). \tag{18}$$

Výrazy L_i, M_i, N_i jsou další invarianty plochy f.

Snadno se nahlédne, že (v případě $h \neq 0$), jsou-li dány invarianty

$$\varepsilon = \pm 1,\ h\ (h > 0, \text{ když } \varepsilon = -1),\ k,\ j_{n-1},$$
$$L_0, L_1 \ldots L_{n-2}, M_0, M_1 \ldots M_{n-}, N_0, N_1 \ldots N_{n-2},$$
$$j_0, j_1 \ldots j_{n-2}$$

jako funkce projektivního oblouku v, plocha R jest určena až na kolineace.

Také by nebylo nesnadné, udati modifikace, jichž je třeba ve případech $h = 0$ nebo $\varepsilon = 0$, které jsme vyloučili.