Eduard Čech
Sur les géodesiques projectives

Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5) 33_1 (1924), 15-16

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500882

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Estratto dal vol. XXXIII, serie 5ª, 1º sem., fasc. 1º. — Seduta del 13 gennaio 1924.

Geometria. — *Sur les géodesiques projectives.* Nota di EDUARD ČECH, presentata dal Corrispondente GUIDO FUBINI [1].

1. Une surface S non développable étant donnée, M. Fubini a montré [2] qu'on peut former une forme différentielle fractionnaire

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{\sum_1^2 a_{ikl}\, du_i\, du_k\, du_l}{\sum_1^2 a_{ik}\, du_i\, du_k}$$

qu'on appelle *l'élement linéaire projectif* de S, puisque son rôle dans la géométrie projective est analogue à celui de l'élement linéaire ordinaire dans la géométrie métrique. J'ai donné [3] une interprétation géométrique simple de l'intégrale $\int \frac{F_3}{F_2}$ étendue à une courbe quelconque de S. M. Fubini a récemment étudié les extrémales de cette intégrale, dans ces Rendiconti; pour abréger, je les appelerai les *géodésiques projectives* de S [4]. Il a trouvé que, x étant un point arbitraire de S, les plans osculateurs aux géodésiques projectives qui y passent enveloppent un cône Γ de la sixième classe en général, dont la position est en connexion étroite avec celle de la *normale projective* et de la *directrice* et de toutes les droites canoniques.

Ayant pris connaissance de cette recherche, je me suis proposé de construire le cône Γ moyennant la méthode dont je me suis servi dans le Mémoire *L'intorno d'un punto d'una superficie* ecc. [5]. Or la construction que j'ai trouvé est parfaitement identique à celle que j'ai exposé dans le n.º 10 du Mémoire cité pour le *cône de Segre* [6]. Je suis arrivé ainsi à la proposition que *le cône Γ de M. Fubini est identique au cône de M. Segre.*

(1) Pres. nella seduta del 16 dicembre 1923.

(2) *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale*, Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. 43, 1919, § 1.

(3) *Sur la géométrie d'une surface* etc., ces Rendiconti, t. 31, 1922.

(4) Remarquons que ces courbes sont diverses de celles que M. Fubini étudie dans la Note *Fondamenti di geometria* ecc., Atti Torino, t. 53, 1918, § 2.

(5) Annali di Matem., t. 31, 1922.

(6) Segre, *Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie*, ces Rendiconti, t. 17, 1908.

J'ai communiqué ce théorème à M. Fubini, mais, dans le même temps, lui aussi avait trouvé par un autre procédé l'identité des deux cônes.

Si l'on emploie les notations de ma Note citée sous (¹), l'équation différentielle des géodésiques projectives de S peut se mettre sous la forme simple (²)

$$(x\, dx\, d^2x\, d^3x) = (\xi\, d\xi\, d^2\xi\, d^3\xi)\,.$$

On en voit tout de suite la proposition énoncée plus haut, en se rappelant la définition géométrique donné par M. Segre dans la Note citée sous (³).

2. Une conséquence immédiate de ce résultat est qu'une *géodésique projective est plane alors et alors seulement qu'elle est aussi la courbe de contact de* S *à un cône.* Ceci m'a conduit à demander s'il existe des surfaces, dont toutes les géodésiques projectives sont planes. On trouve facilement que telles surfaces n'existent pas (abstraction faite des quadriques, sur lesquelles *chaque* courbe peut se considérer comme une géodésique projective).

3. J'ai trouvé aussi toutes *les surfaces* S *qui possèdent une famille* ∞^1 *de géodésiques projectives planes.* On peut donner arbitrairement la développable $\varDelta$ dont les plans tangents contiennent les géodésiques de la famille. On trace quatre courbes arbitraires C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sur $\varDelta$; soit π_0 un plan tangent *fixe* de $\varDelta$, t_i^0 la tangente a C_i située dans le plan π_0. Soit K_0 une courbe arbitraire du plan π_0. Soit t_i la tangente à C_i située dans le plan tangent π *arbitraire* de $\varDelta$. Il existe une homographie bien determinée entre les plans π_0 et π, dans laquelle aux t_i^0 correspondent les t_i. Soit K la courbe de π correspondant a K_0 dans cette homographie. La courbe K engendre une surface du type cherché, parce qu'on voit tout de suite que c'est une géodésique projective plane.

4. Il serait très intéressant de trouver *toutes les surfaces qui possèdent plusieurs familles* ∞^1 *de géodésiques projectives planes.* La surface cubique

$$x\,y\,z = 1$$

en possède six:

$$x = \text{const.}, \quad y = \text{const.}, \quad z = \text{const.}, \quad \frac{x}{y} = \text{const.}, \quad \frac{x}{z} = \text{const.}, \quad \frac{y}{z} = \text{const.}$$

(¹) *Sur la géométrie d'une surface* etc., ces Rendiconti, t. 31, 1922.

(²) Les différentielles troisièmes n'y entrent qu'en apparence.

(³) Segre, *Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie*, ces Rendiconti, t. 17, 1908.